Traitement du Signal

Épreuve 2009

Durée : 2 heures

—Les notes de cours sont autorisées —

!!! Chaque exercice doit être rédigée sur une copie séparée !!!

Partie I

Exercice I-1 : *Modulation d'amplitude*

Soit $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_1 = 100\text{Hz}$ et $f_1 = 150\text{Hz}$.

1) Quelle est la transformée de Fourier de $x(t)$? On notera cette TF $X(f)$.

2) On module en amplitude un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 1000\text{Hz}$ par $x(t)$: $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$. Que vaut la TF de $y(t)$? Donner la définition et tracer les spectres de puissance de $x(t)$ et $y(t)$.

3) On veut échantillonner ce signal. Quelle fréquence d'échantillonnage f_e minimum doit-on utiliser pour éviter le phénomène de repliement spectral? Quelle est alors la TF de ce signal échantillonné? Tracer le spectre.

4) Pour le calcul de la FFT on utilise une fréquence d'échantillonnage de 5000Hz. Quel est le nombre minimum N d'échantillons faut-il prendre pour séparer les fréquences f_1 et f_2?

5) On démodule $y(t)$ en le multipliant par la porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$. Quel est le spectre du signal résultant $z(t)$? On filtre le signal $z(t)$ par un filtre passe-bas. Quelle doit être la fréquence de coupure de ce filtre pour récupérer le spectre du signal modulant $x(t)$?

Exercice I-2 : *Estimation spectrale*

On se propose de comparer deux méthodes d'estimation de spectre de puissance. On considère un signal aléatoire stationnaire et ergodique $x(t)$.

1) Dans un premier temps on estime le spectre de ce signal en prenant le carré de la transformée de Fourier du signal pondéré par une fenêtre $g(t)$: $\tilde{S}_x^1(f) = |TF\{x(t)g(t)\}|^2$. Calculer ce spectre en fonction de la TF de $x(t)$. On note $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = A$. Quelle valeur de A faut-il prendre pour que $g(t)$ ne modifie pas la puissance du signal ?

2) Dans un deuxième temps on veut estimer le spectre en utilisant la fonction de corrélation $R_{xx}(\tau) = \mathbb{E}\{x(t+\tau)x(t)\}$. Quelle relation doit on utiliser pour cela? Comme il est difficile d'estimer cette fonction de corrélation pour des valeurs de τ allant de $-\infty$ à $+\infty$, on calcule en fait la TF de $R_{xx}(\tau)g(\tau)$. Calculer ce spectre en fonction de la TF de $x(t)$.

3) Calculer le biais de ces deux estimateurs.

Partie II

Exercice II-1 : *Tests de* χ^2

Soit un ensemble de mesures expérimentales $y = [0.75, 0.46, 0.94, 1.33, 1.47, 2.42]$, réalisées aux points (déterministes) $x = [0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25]$, d'incertitudes (écart-type) toutes égales, $\sigma_y = 0.4$. On suposera que les y sont des variables aléatoires normales et indépendantes.

On s'intéresse à deux modèles :

M1 : $y = a + bx$.

M2 : $y = c + dx^2$.

1) Calculez les estimateurs des moindres carrés pour a et b ? Que valent ces estimateurs par maximum de vraisemblance ? Calculez $\hat{a}$ et $\hat{b}$ pour les données de l'énoncé.

2) Calculez les estimateurs des moindres carrés pour c et d ? Calculez $\hat{c}$ et $\hat{d}$ pour les données de l'énoncé.

3) Réaliser, à l'échelle, un graphique représentant les mesures et leurs incertitudes, ainsi que les modèles 1 et 2 estimés.

4) Quel est le meilleur modèle ? (Utiliser le test de χ^2 pour justifier vos réponses, une table de χ^2 est jointe en annexe, cf. table 2).

5) Un deuxième expérimentateur a réalisé les mêmes mesures mais estime leur incertitude à $\sigma_y = 0.8$. Que deviennent les estimées $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ et $\hat{d}$ (répondre brièvement mais de façon précise et justifiée) ? Quelles conclusions sont données par les tests de modèles ?

Exercice II-2 : *Etude d'histogramme*

Un binôme d'étudiants de L3 vient de réaliser une série de mesure $\{X_i, i = 1, \ldots, n\}$, dont ils sont très contents. Leur étude théorique du dispositif expérimental (dont ils sont également très contents) prévoit une loi de probabilité pour X de type: $p_X(x) \sim |x|^{-\alpha}$. De manière équivalente, la distribution cumulative $P[X \leq x] \sim |x|^{-(\alpha-1)}$. L'objectif est alors d'estimer le paramètre α. Cependant à ce point, leurs analyses du problème divergent.
Le premier étudiant, $E1$, réalise un histogramme des observations en comptant le nombres d'observations n_k qui tombent dans les intervalles régulièrement espacés: $m_X + (k-1)k\Delta \leq X < m_X + k\Delta$, pour $k = 1, \ldots, K$, où m_X correspond à $m_X = \min(\{X_i, i = 1, \ldots, n\})$, et K le nombre d'intervalles, choisi tel que $\Delta \ll \text{median}X$. Il trace ensuite le diagramme $\log_{10} n_k$ vs. $\log_{10}(k\Delta)$ et propose d'estimer α en mesurant la pente de ce diagramme log-log, représenté sur la figure 1, (diagramme du haut).
Le second étudiant, $E2$, choisit lui de faire un histogramme avec des intervalles espacés logarithmiquement. Il compte donc le nombre n_k d'observations dans les intervalles: $m_X + 10^{(k-1)\Delta} \leq X < m_X + 10^{k\Delta}$, pour $k = 1, \ldots, K$. Il trace ensuite le diagramme $\log_{10} n_k$ vs. $\log_{10}(10^{k\Delta})$ et propose d'estimer α en mesurant la pente de ce diagramme log-log, représenté sur la figure 1, (diagramme du bas).

Pour toutes les questions ci-dessous, des réponses très courtes et néanmoins très précises, sont attendues.

1) Lequel de ces deux étudiants a produit un diagramme à partir duquel la mesure d'une pente est la plus facile ? Quelle idée simple justifie la procédure proposée par E2 ?

2) A partir du graphique du haut de la figure 1, estimez la valeur de α obtenue par E1: $\hat{\alpha}_1$.

3) A partir du graphique du bas de la figure 1, estimez la valeur de α obtenue par E2: $\hat{\alpha}_2$.

4) Ces deux valeurs sont en désaccord. Effectuez une étude théorique simple et précise de chacune des deux procédures et indiquez comment les pentes mesurées dans chaque diagramme correspondent (ou non) à

α. Corrigez l'éventuelle erreur commise par l'un ou l'autre des deux étudiants.

5) Concluez sur l'intérêt de travailler en binôme. Plus précisément, expliquez comment, en combinant les points de vue des deux étudiants, on peut obtenir une bonne estimation de α.

6) Concluez sur l'intérêt d'avoir assiter au cours d'*introduction à l'analyse de données et au traitement du signal* (question hors barême).

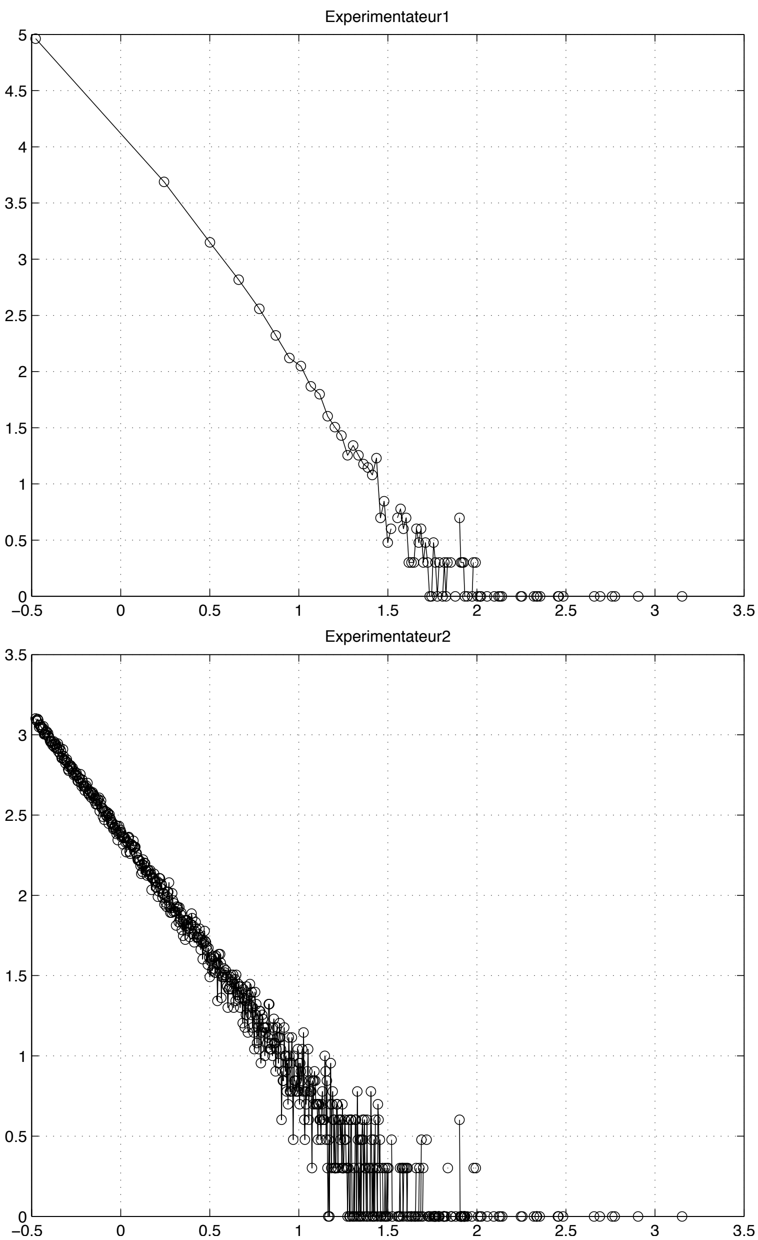

Figure 1: Histogrammes expérimentaux des étudiants $E1$ (haut) et $E2$ (bas).

Si C est une variable qui suit une loi du χ^2 ayant d degré de liberté alors

Pr(C≤M(d,y))=y

M	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0	0	0	0	0	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,01	0,02	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,21	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,61	2,675	4,351	6,626	9,236	11,07	12,833	15,086	16,75
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,69	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,18	2,733	3,49	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,09	21,955
9	1,735	2,088	2,7	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,94	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,92	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,34	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,3
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	9,299	12,34	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,66	5,629	6,571	7,79	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,037	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,39	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,26	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,41	34,17	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,24	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	17,24	21,337	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,26	10,196	11,689	13,091	14,848	18,137	22,337	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	19,037	23,337	28,241	33,196	36,415	39,364	42,98	45,559
25	10,52	11,524	13,12	14,611	16,473	19,939	24,337	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,16	12,198	13,844	15,379	17,292	20,843	25,336	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,29
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	21,749	26,336	31,528	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	22,657	27,336	32,62	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	23,567	28,336	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	24,478	29,336	34,8	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672

Figure 2: Table de χ^2.