C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 485-488, 1999
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Une relation d'incertitude pour les transformées en ondelettes continues

Patrick FLANDRIN

Laboratoire de physique, UMR 5672 CNRS, École normale supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France
Courriel : flandrin@physique.ens-lyon.fr

(Reçu le 17 mars 1999, accepté le 23 juillet 1999)

Résumé. On définit une mesure d'encombrement conjoint de la transformée en ondelettes continue d'un signal analytique et on montre que les signaux minimisant cette mesure sont des « ondelettes d'Altes », c'est-à-dire des versions anamorphosées (par transformation logarithmique) de Gaussiennes. © 1999 Académie des Sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

An uncertainty relation for continuous wavelet transforms

Abstract. *We introduce a joint spread measure for the continuous wavelet transform of an analytic signal and we show that this measure is lower bounded. For a given wavelet, minimizers are given by "Altes wavelets", i.e., logarithmically warped versions of Gaussians.* © 1999 Académie des Sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On connaît les relations d'incertitude qui lient le temps et la fréquence [9], ainsi que diverses façons de les exprimer de manière conjointe au moyen de représentations définies dans le plan temps-fréquence (*voir*, par exemple, [5], [7], [8]). Dans les cas temps-échelle ou échelle-fréquence, l'impossibilité d'une localisation parfaite en un point du plan est aussi un fait bien connu mais, à de rares exceptions près (*voir*, par exemple, [3], [4], [11]), la notion d'incertitude mise en jeu a essentiellement été abordée sous l'angle de la localisation des *objets analysants* (typiquement, les ondelettes) plutôt que de celle des *transformées* qui en découlent. On se propose de donner ici un résultat complémentaire à ce point de vue, établi de façon explicitement conjointe dans le plan des transformées. (On se reportera à [8] pour la démonstration complète des résultats présentés, ainsi que pour un certain nombre d'extensions et d'interprétations qui peuvent en être données.)

Le cadre de travail considéré est celui des signaux analytiques $X(f) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{d}f)$, pour lesquels on considérera les transformées en ondelettes continues données sous la forme temps-fréquence :

$$T_X(t, f) := \sqrt{\frac{f_0}{f}} \int_0^{+\infty} X(\xi)\, \overline{\Psi\left(\frac{f_0}{f}\,\xi\right)}\, \mathrm{e}^{i2\pi\xi t}\, \mathrm{d}\xi, \tag{1}$$

Note présentée par Yves MEYER.

expression dans laquelle f_0 sert de fréquence de référence à une ondelette (supposée admissible) de spectre $\Psi(f)$. Une reparamétrisation utile de cette quantité consiste à écrire $T_X(t,f) := \check{T}_X(tf,f)$, de façon à pouvoir faire usage de la variable a-dimensionnée $s = tf$, interprétable comme une *échelle* au sens de la transformée de Mellin [2] :

$$\underline{X}(s) := \int_0^{+\infty} X(f)\, f^{i2\pi s - \frac{1}{2}}\, \mathrm{d}f. \tag{2}$$

Les relations d'incertitude entre les représentations temporelle, fréquentielle et d'échelle se traduisent alors par l'existence de bornes inférieures lorsque l'on s'intéresse au produit de deux « mesures d'encombrement » relatives aux densités $|x(t)|^2$, $|X(f)|^2$ et $|\underline{X}(s)|^2$. On adoptera pour définir de telles mesures les définitions suivantes :

DÉFINITION 1. – Soit $\rho(v) \geq 0$ une densité sur $\mathbb{R}$, d'*intégrale* $E(\rho)$. Sa *moyenne arithmétique* $\mathrm{m_a}(\rho)$ et sa *variance arithmétique* $\mathrm{V_a}(\rho)$ sont définies respectivement par :

$$\mathrm{m_a}(\rho) := \frac{1}{E(\rho)} \int_{-\infty}^{+\infty} v\, \rho(v)\, \mathrm{d}v, \tag{3}$$

$$\mathrm{V_a}(\rho) := \frac{1}{E(\rho)} \int_{-\infty}^{+\infty} \big(v - \mathrm{m_a}(\rho)\big)^2 \rho(v)\, \mathrm{d}v. \tag{4}$$

DÉFINITION 2. – Soit $\rho(v) \geq 0$ une densité sur $\mathbb{R}_+$, d'intégrale $E_+(\rho)$. Sa *moyenne géométrique* $\mathrm{m_g}(\rho)$ et sa *variance géometrique* $\mathrm{V_g}(\rho)$ sont définies respectivement par :

$$\mathrm{m_g}(\rho) := \exp\left(\frac{1}{E_+(\rho)} \int_0^{+\infty} \log v\, \rho(v)\, \mathrm{d}v,\right) \tag{5}$$

$$\mathrm{V_g}(\rho) := \frac{1}{E_+(\rho)} \int_0^{+\infty} \log^2\left(\frac{v}{\mathrm{m_g}(\rho)}\right) \rho(v)\, \mathrm{d}v. \tag{6}$$

Ceci étant posé, il est aisé d'établir [8] le résultat suivant, qui n'est en fait qu'une version anamorphosée de l'inégalité classique d'Heisenberg–Gabor :

LEMME 1. – *Un signal analytique $X(f)$ et sa transformée de Mellin $\underline{X}(s)$ ont des variances, respectivement géométrique et arithmétique, telles que*

$$\mathrm{V_g}\big(|X|^2\big)\, \mathrm{V_a}\big(|\underline{X}|^2\big) \geq \frac{1}{16\pi^2}, \tag{7}$$

l'égalité étant atteinte si et seulement si $X(f)$ est une « ondelette d'Altes » de la forme

$$X(f) = K \exp\left(-\frac{1}{2}\log f - a \log^2(f/b) + i(c \log f + d)\right) \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(f), \tag{8}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $c, d, K \in \mathbb{R}$.

Dans le cadre des densités définies sur $\mathbb{R}_+$, les moyennes arithmétique (3) et géométrique (5) ne sont en fait que deux cas particuliers de la classe plus générale définie par :

DÉFINITION 3. – Soit $\rho(v) \geq 0$ une densité sur $\mathbb{R}_+$, d'intégrale $E_+(\rho)$. Sa *moyenne d'ordre* k, notée $\mathrm{m}_k(\rho)$, est définie par :

$$\mathrm{m}_k(\rho) := \left(\frac{1}{E_+(\rho)} \int_0^{+\infty} v^k \, \rho(v) \, \mathrm{d}v \right)^{\frac{1}{k}}. \tag{9}$$

(On vérifie en effet que $\mathrm{m}_\mathrm{a} = \mathrm{m}_1$ et (par continuité) $\mathrm{m}_\mathrm{g} = \mathrm{m}_0$.) Munis de cette généralisation, on peut alors montrer [8] que :

LEMME 2. – *Un signal analytique $X(f)$ et sa transformée de Fourier $x(t)$ ont des variances, respectivement géométrique et arithmétique, telles que*

$$\mathrm{V_g}\big(|X|^2\big)\mathrm{V_a}\big(|x|^2\big) \geq \frac{1}{16\pi^2 \mathrm{m}_{-1}^2\big(|X|^2\big)}, \tag{10}$$

sous l'hypothèse que $\mathrm{m_a}\big(|x|^2\big) = 0$, et que $|X(f)|^2$ et $|X(f)|^2 \log f$ tendent toutes deux vers zéro lorsque f tend vers zéro et l'infini.

Procédant par extension, il devient naturel – dès lors que l'on considère des distributions échelle-fréquence conjointes en lieu et place des densités individuelles sur chacune des variables – de recourir à la mesure d'encombrement conjointe définie selon :

DÉFINITION 4. – Soit $R(s, f) \geq 0$ une distribution échelle-fréquence sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, d'intégrale $E(R)$ relativement à la mesure $\mathrm{d}s \, \mathrm{d}f/f$. Sa *variance arithmétique-géométrique* $V_{\mathrm{ag}}(R)$ est définie par :

$$V_{\mathrm{ag}}(R) := \frac{1}{E(R)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[\left(s - \mathrm{m_a}\big(R^{(s)}\big)\right)^2 + \log^2\left(\frac{f}{\mathrm{m_g}\big(R^{(f)}\big)}\right)\right] R(s, f) \, \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{d}f}{f}, \tag{11}$$

avec

$$R^{(s)}(s) := \int_0^{+\infty} R(s, f) \, \frac{\mathrm{d}f}{f} \quad \text{et} \quad R^{(f)}(f) := \frac{1}{f} \int_{-\infty}^{+\infty} R(s, f) \, \mathrm{d}s.$$

Sur la base de cette définition, il est alors possible d'énoncer le résultat principal suivant :

THÉORÈME. – *Soit $X(f)$ un signal analytique de retard de groupe nul, et tel que $f\,|X(f)|^2$ tende vers zéro lorsque f tend vers zéro et l'infini. Soit $\Psi(f)$ une ondelette de fréquence de référence $f_0 := \mathrm{m_g}\big(|\Psi_0|^2\big)$, avec $\Psi_0(f) := f^{-1/2}\Psi(f)$. Sous l'hypothèse que $\Psi(f) \in \mathrm{L}^2\big(\mathbb{R}_+, f^{-(n+1)} \, \mathrm{d}f\big)$ pour $n = 0$, 1 et 2, la transformée en ondelettes correspondante $\check{T}_X(s, f)$ est telle que*

$$V_{\mathrm{ag}}\big(|\check{T}_X|^2\big) \geq \frac{D(\Psi)}{2\pi}, \tag{12}$$

avec

$$D(\Psi) := \mathrm{m_g}\big(|\Psi_0|^2\big) \left(\frac{1}{\mathrm{m}_{-2}\big(|\Psi_0|^2\big)} + \frac{1}{\mathrm{m}_{-1}\big(|\Psi_0|^2\big)} \right) \geq 2. \tag{13}$$

Pour une ondelette fixée, l'égalité est de plus atteinte dans (12) *pour les ondelettes d'Altes de la forme* (8), *avec $c = 0$.*

Principe de la démonstration. – On décompose la variance conjointe (11) en ses deux termes. Utilisant l'hypothèse d'extinction asymptotique de $f\,|X(f)|^2$ en zéro et l'infini, on obtient dans un premier temps que

$$V_{\mathrm{ag}}\big(|\check{T}_X|^2\big) = \frac{1}{E\big(|\check{T}_X|^2\big)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^2 \, f^2 \, |T_X(t, f)|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}f + \mathrm{V_g}\big(|X|^2\big) + \mathrm{V_g}\big(|\Psi_0|^2\big). \tag{14}$$

L'évaluation de l'intégrale est facilitée si l'on considère le scalogramme $|T_X(t,f)|^2$ comme une régularisée affine de la distribution unitaire de Bertrand [1]. Utilisant les propriétés de cette dernière et la notation $\Psi_0(f) := f^{-1/2}\Psi(f)$, on obtient après quelques calculs que

$$V_{\mathrm{ag}}\big(|\check{T}_X|^2\big) = \frac{f_0^2}{m_{-2}^2\big(|\Psi_0|^2\big)}\,\mathrm{V_a}\big(|\underline{X}|^2\big) + \mathrm{V_g}\big(|X|^2\big) + f_0^2\,\mathrm{V_a}\big(|\psi_0|^2\big) + \mathrm{V_g}\big(|\Psi_0|^2\big), \tag{15}$$

d'où l'on déduit – sachant que $f_0 := \mathrm{m_g}\big(|\Psi_0|^2\big)$ – que

$$V_{\mathrm{ag}}\big(|\check{T}_X|^2\big) \geq 2\left[\frac{\mathrm{m_g}\big(|\Psi_0|^2\big)}{\mathrm{m}_{-2}\big(|\Psi_0|^2\big)}\sqrt{\mathrm{V_a}\big(|\underline{X}|^2\big)\,\mathrm{V_g}\big(|X|^2\big)} + \frac{\mathrm{m_g}\big(|\Psi_0|^2\big)}{\mathrm{m}_{-1}\big(|\Psi_0|^2\big)}\sqrt{\mathrm{m}_{-1}^2\big(|\Psi_0|^2\big)\,\mathrm{V_a}\big(|\psi_0|^2\big)\,\mathrm{V_g}\big(|\Psi_0|^2\big)}\right].$$

Il suffit alors d'utiliser les résultats des lemmes 1 et 2 pour borner inférieurement par $1/4\pi$ chacune des racines carrées intervenant dans l'expression ci-dessus et arriver au résultat énoncé en (12). La borne inférieure donnée en (13) suit des inégalités classiques entre moyennes géométrique, harmonique et inverse quadratique [10]. Enfin, si l'on considère l'ondelette $\Psi(f)$ comme fixée a priori, on peut considérer l'inégalité ci-dessus comme une fonction affine (à poids positifs) de la mesure d'encombrement $\sqrt{\mathrm{V_a}\big(|\underline{X}|^2\big)\,\mathrm{V_g}\big(|X|^2\big)}$. On sait alors, d'après le lemme 1, que la borne inférieure de cette quantité est atteinte pour les signaux de la forme (8) (pour lesquels l'hypothèse de retard de groupe nul impose $c = 0$), ce qui s'applique de la même façon à la mesure conjointe $V_{\mathrm{ag}}\big(|\check{T}_X|^2\big)$ et achève la démonstration. $\square$

Références bibliographiques

[1] Bertrand J., Bertrand P., A class of affine Wigner functions with extended covariance properties, J. Math. Phys. 33 (7) (1992) 2515–2527.

[2] Bertrand J., Bertrand P., Ovarlez J.P., The Mellin transform, in: The Transforms and Applications Handbook, A.D. Poularikas (Ed.), CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, pp. 829–885.

[3] Dahlke, S., Maass, P,. The affine uncertainty principle in one and and two dimensions, Comput. Math. Appl. 30 (3–6) (1995) 293–305.

[4] Daubechies I., Paul Th., Time-frequency localization operators: a geometric phase-space approach – II. The use of dilations, Inverse Problems 4 (1988) 661–680.

[5] de Bruijn N.G., Uncertainty principles in Fourier analysis, in: Inequalities, O. Shisha (Ed.), Academic Press, New York, NY, 1967, pp. 57–71.

[6] Flandrin P., Separability, positivity and minimum uncertainty in time-frequency energy distributions, J. Math. Phys. 39 (3) (1998) 4016–4040.

[7] Flandrin P., Time-Frequency/Time-Scale Analysis, Academic Press, San Diego, CA, 1998.

[8] Flandrin P., Inequalities in Mellin–Fourier signal analysis, Newton Institute Preprint NI98030-NSP, Cambridge, UK. Prétirage téléchargeable depuis le site
`http://www.newton.cam.ac.uk/preprints.html`.

[9] Folland G.B., Sitaram A., The uncertainty principle: a mathematical survey, J. Fourier Anal. Appl. 3 (3) (1997) 207–238.

[10] Hardy G., Littlewood J.E., Pólya G., Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[11] Wilczok E., New uncertainty principles for the continuous Gabor transform and the continuous wavelet transform, Prétirage téléchargeable depuis le site
`http://www-m6.mathematik.tu-muenchen.de/~elke/Papers/uncertain.ps`.