

# Fréquence, fréquences. . .

## *Fourier, “entre l'éternel et l'éphémère”*

Patrick Flandrin

CNRS & École Normale Supérieure de Lyon, France

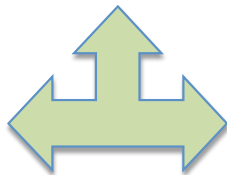


*Institut Fourier, 19 mai 2011*

# un “système à 3 corps”

« **physique** »

(lois de la Nature)



« **mathématiques** »

(modèles, preuves)

« **informatique** »

(algorithmes)

# l'exemple de Fourier

« **physique** »

(équation de la chaleur)



« **mathématiques** »

(analyse harmonique)

« **informatique** »

(Transformée de Fourier Rapide)

## analyse/synthèse

Décomposition de Fourier basée sur  $e_f(t) := \exp\{i2\pi ft\}$

$$x(t) \rightarrow X(f) = \langle x, e_f \rangle, \text{ t.q. } x(t) = \int \langle x, e_f \rangle e_f(t) df$$

- mathématiques : “toutes” les formes d’ondes sont faites de la superposition (éventuellement infinie) de **modes éternels, non amortis et à fréquence fixe**
- physique : rôle central du concept de **fréquence** lié à celui de vibrations
- informatique : irruption récente (FFT = 1965) qui en a banalisé l’**usage pratique**

# cycles

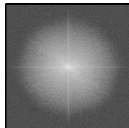
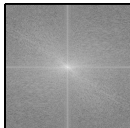
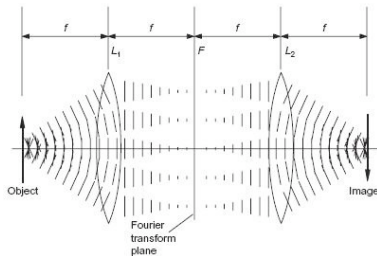
- physique “**de la nature**”, du macro (mécanique céleste, marées, . . . ) au micro (mécanique quantique)
- physique “**industrielle**” (machines tournantes, analyse modale, surveillance de structures, . . . )

W. Thomson (Lord Kelvin), 1876-1878



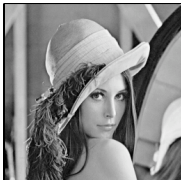
# illuminations

- champ diffracté
- image de Fourier dans le plan focal
- filtrage spatial

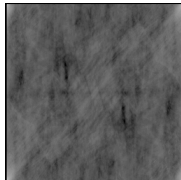


# module et phase

module + phase



module seul

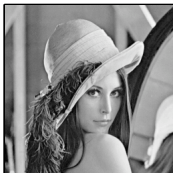


phase seule



## module et phase

phase(girl) + mod(girl)



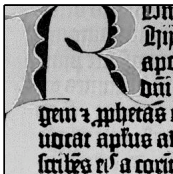
phase(girl) + mod(book)



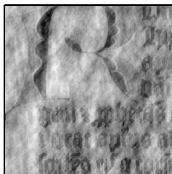
phase(girl) + mod(wGn)



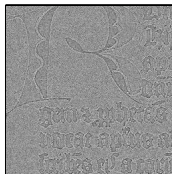
phase(book) + mod(book)



phase(book) + mod(girl)



phase(book) + mod(wGn)





# timbres

- modes propres de cavités
- résonateurs de Helmholtz
- oreille interne (cochlée)

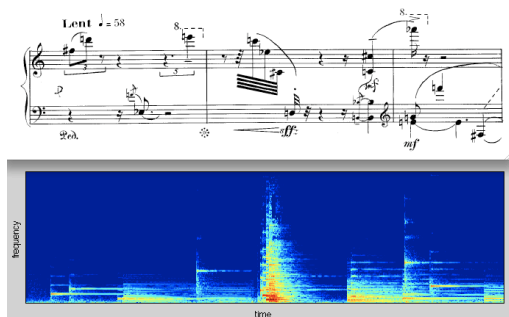


Appareil de Koenig pour l'analyse du timbre des sons. Document  
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, Marseille.

Fourier et . . .  
modes et notes  
sifflements et localisation  
fréquence et oscillation

portée  
"ondelettes"  
incertitude

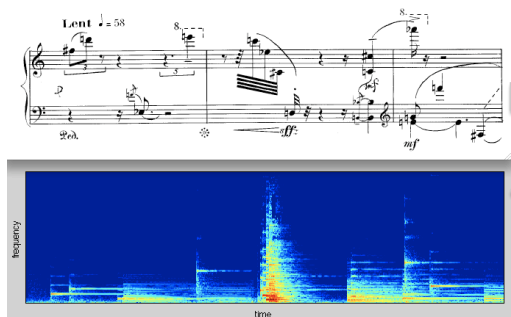
# l'écriture musicale



Fourier et . .  
modes et notes  
sifflements et localisation  
fréquence et oscillation

portée  
"ondelettes"  
incertitude

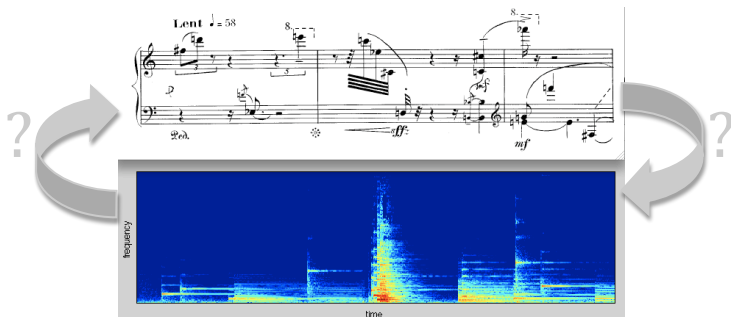
# l'écriture musicale



Fourier et . . .  
modes et notes  
sifflements et localisation  
fréquence et oscillation

portée  
"ondelettes"  
incertitude

# l'écriture musicale



# des ondes aux ondelettes

## Issue

**"modes localisés"**  $\Rightarrow$  passer à un groupe de transformations à 2 paramètres incluant le temps

$$x(t) \rightarrow T(t, \lambda) = \langle x, h_{t,\lambda} \rangle, \text{ t.q. } x(t) = \iint \langle x, h_{s,\lambda} \rangle h_{s,\lambda}(t) d\mu(s, \lambda)$$

① temps-fréquence:  $\lambda = f$  et  $h_{s,f}(t) = h(t - s) e_f(t)$

$\rightarrow$  **transformée de Fourier à court terme**

② temps-échelle:  $\lambda = a$  et  $h_{s,a}(t) = |a|^{-1/2} h((s - t)/a)$

$\rightarrow$  **transformée en ondelettes**

# exclusion

## « physique »

*mesure simultanée de la position et de l'impulsion*

(Heisenberg, 1925)

## « mathématiques »

*tout couple de variables de Fourier*

(Weyl, 1927)



## « informatique »

*temps et fréquence*

(Gabor, 1946 + ...)

## formulation classique

### Compromis de localisation

*basé sur une mesure de second ordre (de type variance) :*

$$\Delta t_x = \left( \int t^2 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \text{ et } \Delta f_x = \left( \int f^2 |X(f)|^2 df \right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Delta t_x \Delta f_x \geq \frac{\|x\|}{4\pi} (> 0)$$

- pas de localisation ponctuelle parfaite
- variations : même limitation avec d'autres mesures d'étalement, e.g., entropie (Hirschman, 1957)
- dénominateur commun : minimum atteint par les **gaussiennes**

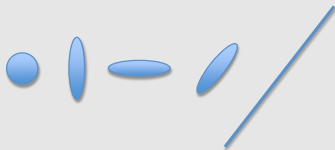
## extension

**pas de localisation ponctuelle ne veut pas dire pas de localisation**

Relation d'incertitude plus forte (Schrödinger, 1935)

$$\Delta t_x \Delta f_x \geq \frac{\|x\|}{4\pi} \sqrt{1 + 16\pi^2 \left( \int t (\partial_t \arg x(t)) |x(t)|^2 dt \right)^2}$$

borne atteinte pour les "**états comprimés**" de la forme  $\{\exp(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)\}$ , avec les "**chirps**" **linéaires** comme forme limite lorsque  $\text{Re}\{\beta\} = 0$  et  $\text{Re}\{\alpha\} \rightarrow 0_-$





## alternatives temps-fréquence

De la stationnarité . . .

*analyse spectrale à la "Wiener-Khintchine-Bochner" :*

$\Gamma_x(f) = \mathcal{F}\{\gamma_x\}(f)$ , avec  $\gamma_x(\tau) := \langle x, \mathbf{T}_\tau x \rangle$  fonction de corrélation **indépendante du temps**

. . . aux non-stationnarités

$\gamma_x \rightarrow$  corrélation **temps-fréquence**  $\langle x, \mathbf{T}_{\tau,\xi} x \rangle$  + transformation de Fourier 2D  $\Rightarrow$  **transformées de type Wigner**

- *définitions intrinsèques : pas de dépendance par rapport à un instrument de mesure (fenêtre, ondelette)*
- *localisation parfaite sur les chirps linéaires (extensions possibles à des cas non linéaires)*

## dualité "distribution/corrélation"

### Définition

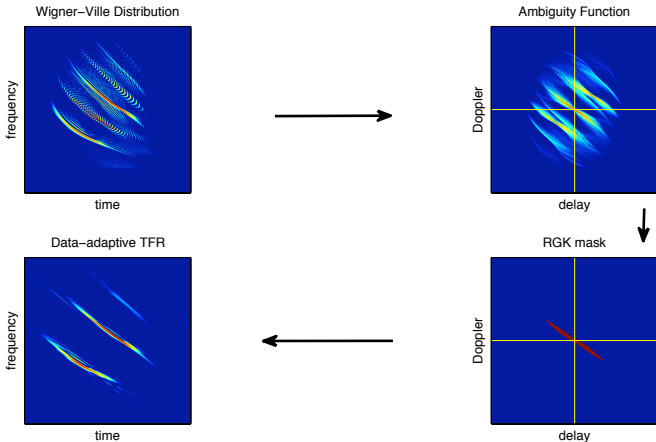
par définition,  $W_x(t, f) \xrightarrow{TF-2D} \mathcal{F}\{W_x\}(\xi, \tau) := A_x(\xi, \tau)$ : **fonction d'ambiguïté (AF)**

### Interprétation

l'opérateur de décalage  $TF(\mathbf{T}_{\xi, \tau} x)(t) := x(t - \tau) e^{-i2\pi\xi(t - \tau/2)}$   
est tel que  $A_x(\xi, \tau) = \langle x, \mathbf{T}_{\xi, \tau} x \rangle \Rightarrow \mathbf{AF} = \mathbf{corrélation TF}$ , avec

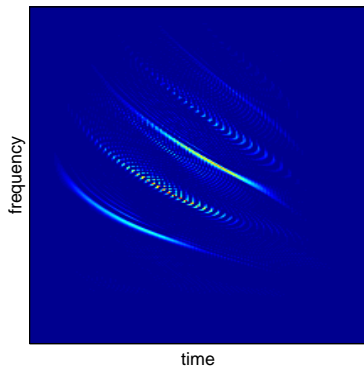
- des "termes propres" au voisinage de l'origine du plan
- des "termes croisés" à une distance de l'origine égale à la séparation TF entre les composantes

# l'autre compromis et ses solutions "classiques"

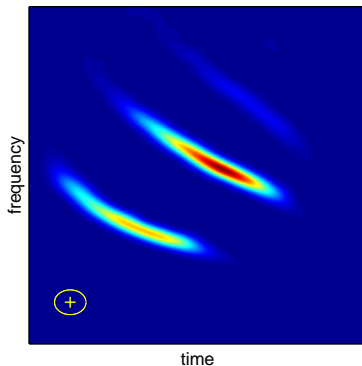


# spectrogramme = Wigner lissée

Wigner-Ville

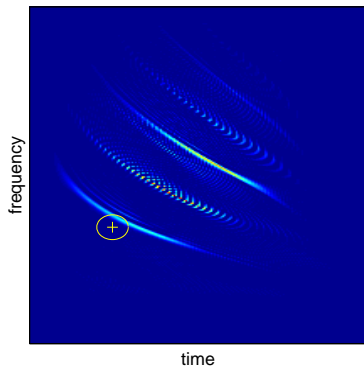


spectrogram

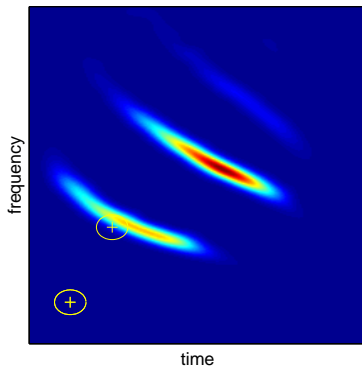


# étalement des termes propres

Wigner-Ville

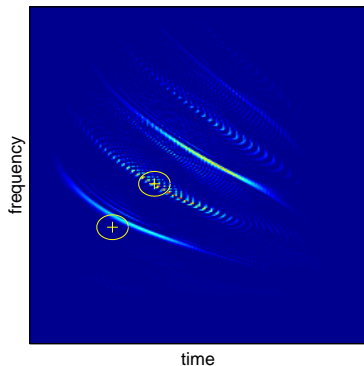


spectrogram

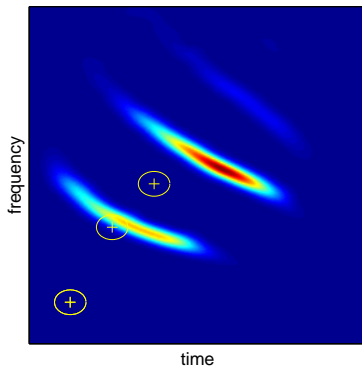


# suppression des termes croisés

Wigner-Ville

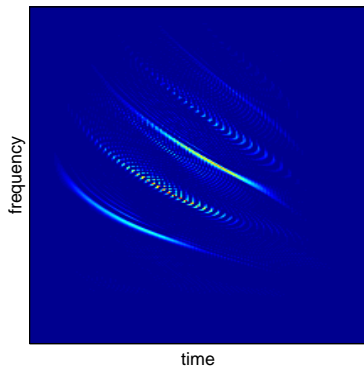


spectrogram

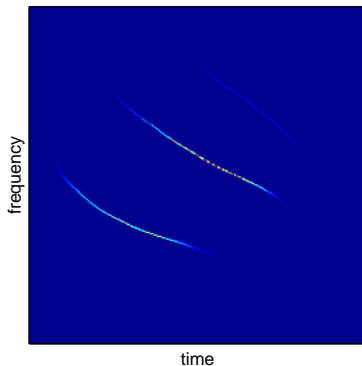


# réallocation (Kodera *et al.*, 1976, Auger & F., 1995)

Wigner-Ville



reassigned spectrogram



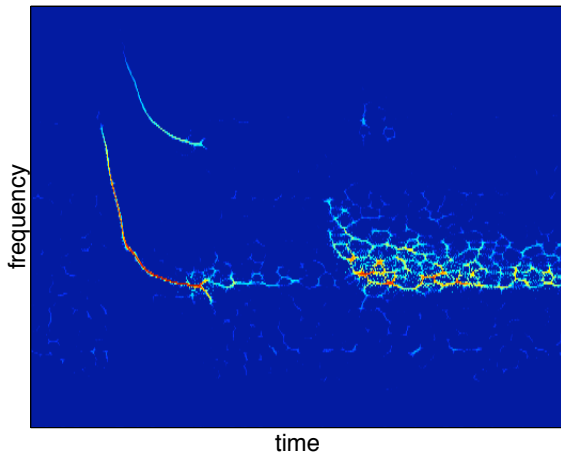
# écholocation

chauve-souris



"sonar animal"

bat echolocation call + echo





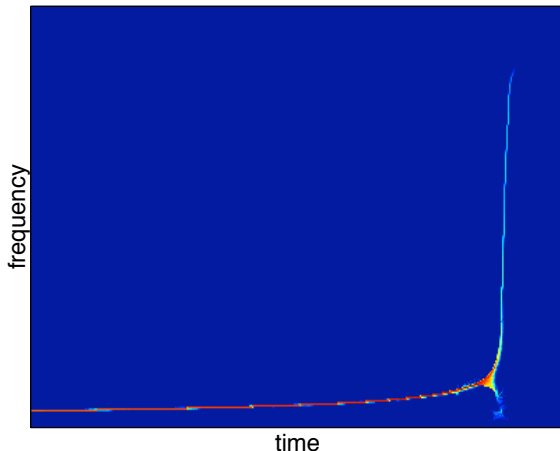
# ondes gravitationnelles

VIRGO



"coalescence de binaires"

gravitational wave



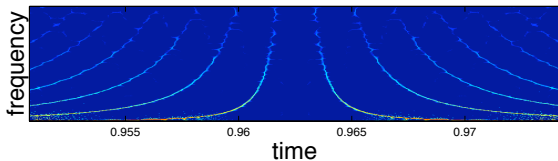
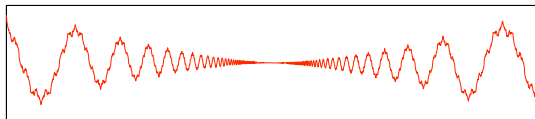
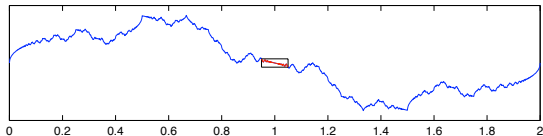
# fonction de Riemann

B. Riemann



$$\sigma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin \pi n^2 t$$

## Riemann function



## une approche "compressed sensing"

Temps discret

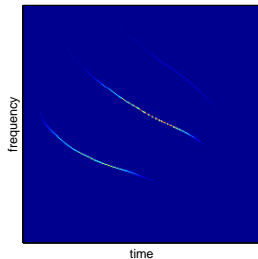
*signal de dimension  $N \Rightarrow$  distribution  
TF de dimension  $\approx N^2$*

Peu de composantes

*$K \ll N \Rightarrow$  au plus  $KN \ll N^2$  valeurs  
non nulles dans le plan TF*

Parcimonie

*minimiser la "norme"  $\ell_0$  infaisable, mais solution presque  
optimale en minimisant la norme  $\ell_1$*



## une approche "compressed sensing"

Idée (F. & Borgnat, 2008-2010)

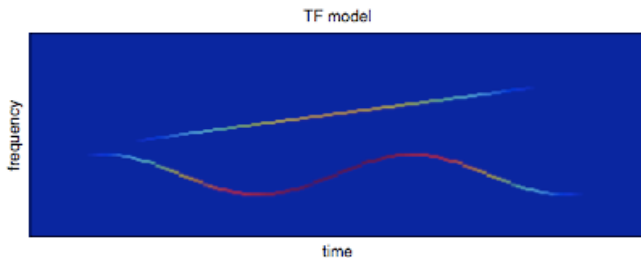
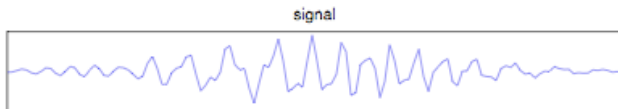
- 1 *choisir un domaine  $\Omega$  au voisinage de l'origine du plan AF*
- 2 *résoudre le programme*

$$\min_{\rho} \|\rho\|_1 ; \mathcal{F}\{\rho\} - \mathbf{A}_x = \mathbf{0} |_{(\xi, \tau) \in \Omega}$$

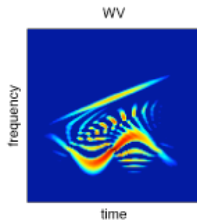
- 3 *l'égalité exacte sur  $\Omega$  peut être relâchée selon*

$$\min_{\rho} \|\rho\|_1 ; \|\mathcal{F}\{\rho\} - \mathbf{A}_x\|_2 \leq \epsilon |_{(\xi, \tau) \in \Omega}$$

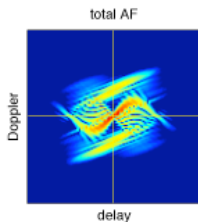
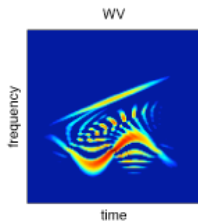
## un exemple



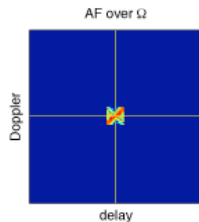
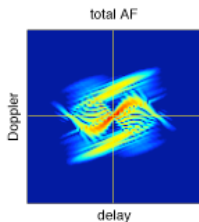
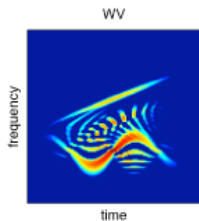
# Wigner



# ambiguïté

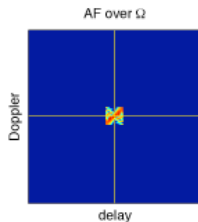
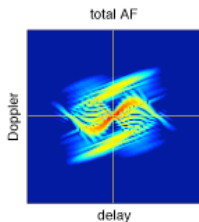
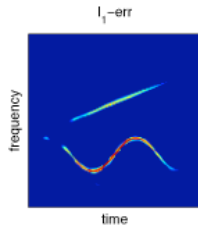
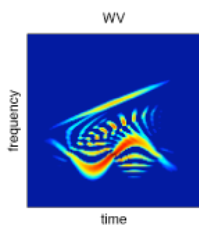


# sélection

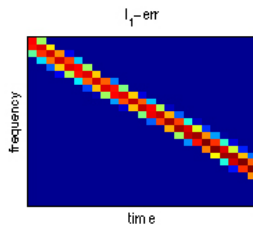
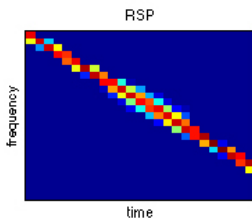
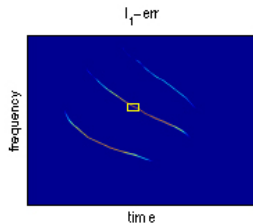
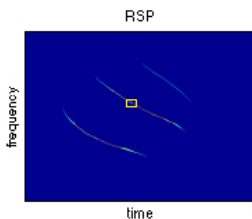




# solution parcimonieuse



# comparaison parcimonie vs. réallocation



# fréquence instantanée

## Objectif

*écrire un signal  $x(t) \in \mathbb{R}$  sous la forme  $a_x(t) \cos 2\pi \int^t f_x(s) ds$*

- à  $t$  fixé, “1 équation et 2 inconnues”  $\Rightarrow$  pas de représentation unique
- multiplicité de solutions sous contraintes
  - globales
  - locales
  - non harmoniques

## approche “globale” (Gabor, 1946 ; Ville, 1948)

①  $e_f(t) = \cos 2\pi ft + i \mathcal{H}\{\cos 2\pi ft\}$ , avec  $\mathcal{H}$  Hilbert

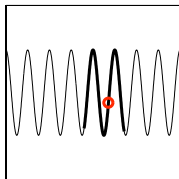
onde monochromatique = **cercle** dans le plan complexe,  
parcouru à vitesse constante

②  $x(t) \rightarrow z_x(t) = x(t) + i \mathcal{H}\{x(t)\}$  (signal analytique)

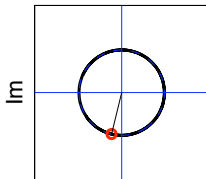
signal modulé “AM-FM” : cercle  $\rightarrow$  **courbe “quelconque”**  
entourant l’origine du plan complexe, parcourue à vitesse  
variable

③ **amplitude instantanée** :  $a_x(t) = |z_x(t)|$   
**fréquence instantanée** :  $f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \partial_t \arg z_x(t)$

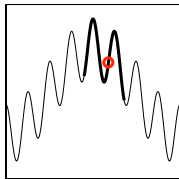
# variation (Equis, Jacquot & F., 2011)



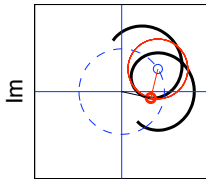
temps



Re



temps



Re

## approche “locale” (Teager, 1980 ; Kaiser, 1990)

①  $x(t) = a \cos 2\pi ft \Rightarrow \Psi(x) := (\partial_t x)^2 - x \cdot \partial_t^2 x = 4\pi^2 a^2 f^2$

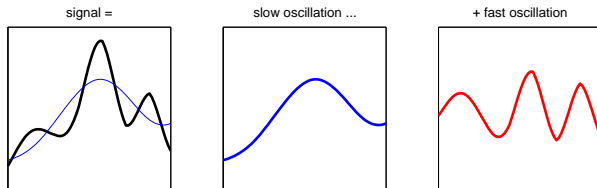
$\Psi(x)$  **opérateur d'énergie** prenant la forme

$E(x) = x^2[n] - x[n-1]x[n+1]$  en temps discret

② mêmes propriétés locales lorsque  $a \rightarrow a_x(t)$  et  $f \rightarrow f_x(t)$

③ **amplitude instantanée** :  $a_x(t) = \Psi(x) / \sqrt{\Psi(\partial_t x)}$   
**fréquence instantanée** :  $f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\Psi(\partial_t x) / \Psi(x)}$

## approche "non harmonique" (Huang *et al.*, 1998)



Idée de la Décomposition Modale Empirique (EMD)

*signal = oscillation rapide + oscillation lente & itération*

- séparation "rapide vs. lent" **pilotée par les données**
- analyse "**locale**" basée sur extrema voisins
- **oscillation** plutôt que fréquence

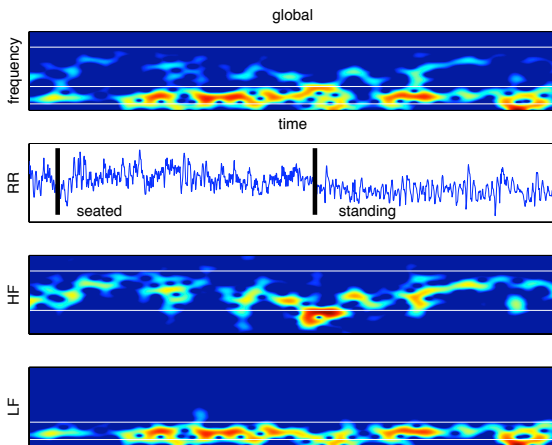
# algorithme

- ① identifier les maxima et minima locaux
- ② en déduire des enveloppes supérieures et inférieures par interpolation (splines cubiques)
  - ① soustraire l'enveloppe moyenne du signal
  - ② itérer jusqu'à ce que "enveloppe moyenne = 0" (*tamisage*)
- ③ soustraire le mode ainsi obtenu du signal
- ④ itérer sur le résidu

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1(t) + r_1(t) \\ &= c_1(t) + c_2(t) + r_2(t) \\ &= \dots\dots\dots = \sum_{k=1}^K c_k(t) + r_K(t),\end{aligned}$$



# variabilité cardiaque





## CHAPITRE XCIX

### Bartlebooth, 5

*Je cherche en même temps  
l'éternel et l'éphémère.*

**Le bureau de Bartlebooth est une pièce rectangulaire aux murs couverts d'étagères de bois sombre ; la plupart d'entre elles sont aujourd'hui vides, mais il reste encore 61 boîtes identiquement fermées avec des rubans gris cachetés à les trois derniers rayonnages du mur du côté de la porte donnant sur le grand bureau. Une photo est accrochée**