Fourier + 200

Patrick Flandrin

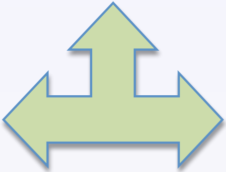
CNRS & École Normale Supérieure de Lyon, France

Journée Inria - Académie des sciences, Rennes, 8 décembre 2011

un cadre général

« physique »

(lois de la Nature)



« mathématiques »

(modèles, preuves)

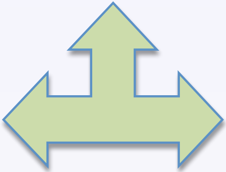
« informatique »

(algorithmes)

l'exemple de Fourier

« physique »

(équation de la chaleur)



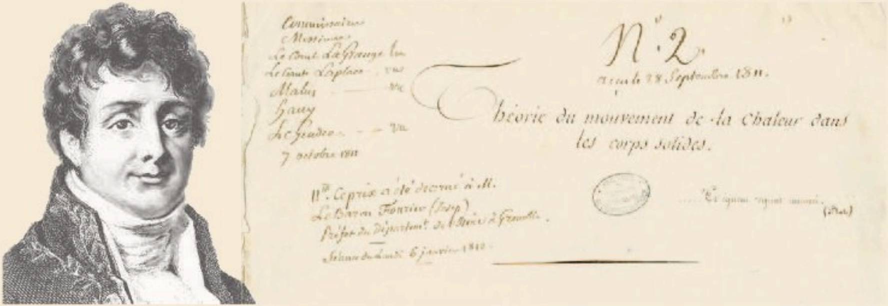
« mathématiques »

(analyse harmonique)

« informatique »

(Transformée de Fourier Rapide)

Fourier (1811)



2 citations et 2 références

- 2 **citations** de Fourier
  - "*L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.*"
  - "*La méthode [proposée] ne laisse rien de vague et d'indéterminé dans les solutions ; elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles.*"
- 2 **références** sur Fourier
  - Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert, *Fourier, créateur de la physique mathématique*, Belin 1999.
  - Jean-Pierre Kahane, "Fourier, un mathématicien inspiré par la physique", *Images des Mathématiques*, CNRS 2009.

analyse/synthèse

Décomposition de Fourier basée sur $e_f(t) := \exp\{i2\pi ft\}$

$$x(t) \rightarrow X(f) = \langle x, e_f \rangle, \; t.q. \; x(t) = \int \langle x, e_f \rangle \, e_f(t) \, df$$

- **physique** : rôle central du concept de *fréquence* lié à celui de vibrations
- **mathématiques** : "toutes" les formes d'ondes sont faites de la superposition (éventuellement infinie) de *modes éternels, non amortis et à fréquence fixe*
- **informatique** : banalisation de l'*usage pratique* par l'introduction d'algorithmes rapides (FFT = 1965)

3 caractéristiques

Fourier

1. spectre sans dépendance temporelle
2. localisation sur des fréquences fixes
3. modes harmoniques

3 extensions

Fourier “+”

1. spectre **avec** dépendance temporelle
2. localisation sur des fréquences **variables**
3. modes **non-harmoniques**

3 exemples

1. spectre avec dépendance temporelle
   → **test de stationnarité**
2. localisation sur des fréquences variables
   → **parcimonie**
3. modes non-harmoniques
   → **décomposition modale empirique**

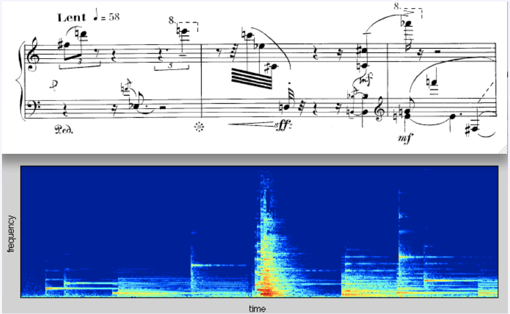
de la théorie. . .

- hypothèse
  - pré-requis
- absolu
  - invariance pour tous temps
- stochastique
  - lois d'ensemble

. . . à la pratique

- hypothèse et **test**
  - pré-requis → **validité ?**
- absolu et **relatif**
  - invariance pour tous temps → **propriété “locale” ?**
- stochastique et **déterministe**
  - lois d’ensemble → **périodicités ?**

un cadre naturel



des ondes aux ondelettes

Principe

“modes localisés” $\Rightarrow$ *passer à un groupe de transformations à 2 paramètres incluant le temps*

$$x(t) \to T(t,\lambda) = \langle x, h_{t,\lambda} \rangle, \ t.q.\ x(t) = \iint \langle x, h_{s,\lambda} \rangle \, h_{s,\lambda}(t) \, d\mu(s,\lambda)$$

1. temps-fréquence: $\lambda = f$ et $h_{s,f}(t) = h(t-s)\, e_f(t)$

   $\rightarrow$ **transformée de Fourier à court terme**

2. temps-échelle: $\lambda = a$ et $h_{s,a}(t) = |a|^{-1/2}\, h((s-t)/a)$

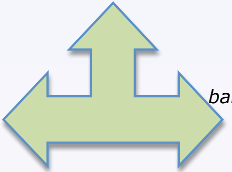
   $\rightarrow$ **transformée en ondelettes**

la “wavelet connection” ($\sim$ 1980-90)

« physique »

vibrosismique pour l’exploration pétrolière

(Morlet)



« mathématiques »

TOC, AMR, bases, etc.

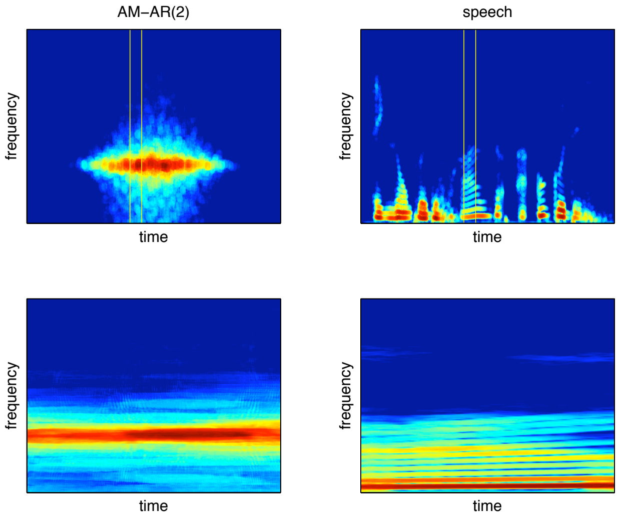
(Grossmann, Meyer, Daubechies)

informatique»

bancs de filtres, algorithmes rapides

(Mallat, Cohen, Vetterli)

stationnarité relative



local vs. global

Principe

*Pour un horizon d'observation donné, et pour une interprétation indifféremment stochastique ou déterministe, la stationnarité est caractérisée dans le plan temps-fréquence par l'**identité des distributions spectrales locales et globale** (obtenue par marginalisation)*

En pratique :

- la comparaison "local vs. global" ne conduit jamais à une "différence" identiquement nulle
- quelle référence pour l'hypothèse nulle de stationnarité ?

référence stationnarisée

Observation

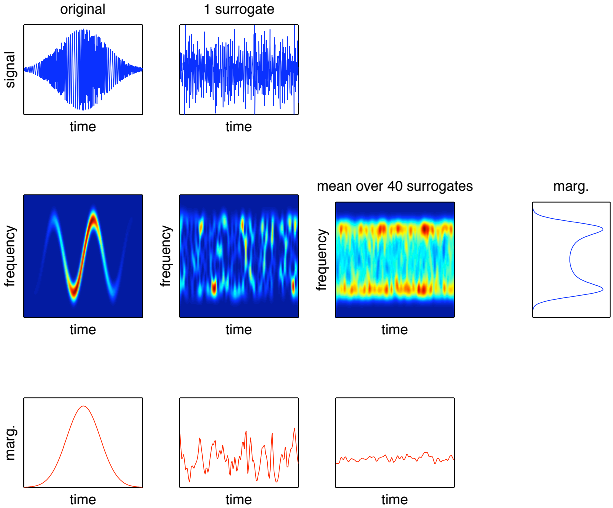
Toute non-stationnarité, vue comme ***organisation temporelle structurée*** *du contenu spectral, est codée dans le* ***phase*** *du spectre*

Idée

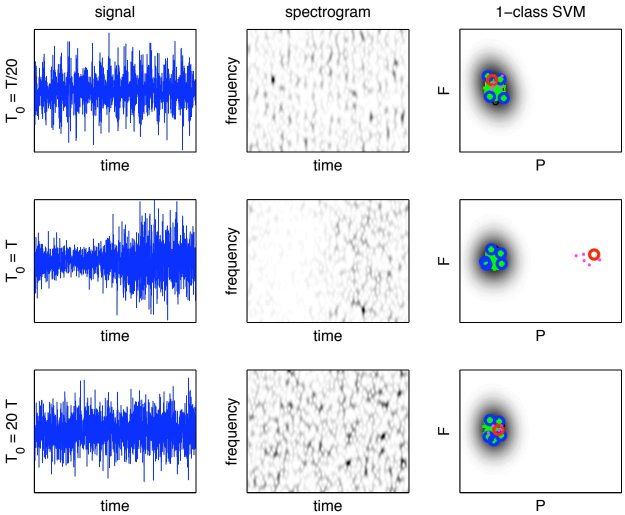
*Stationnarisation par "****brassage aléatoire****" de la phase du spectre de l'observation*

- technique des données "substituts" ou *surrogate data analysis* (Theiler *et al.*, '92)
- stationnarisation effective (Richard *et al.*, '10)

stationnarisation par substituts



substituts et apprentissage

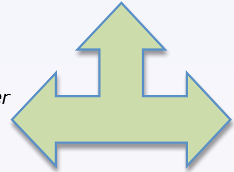


exclusion

« physique »

mesure simultanée de la position et de l'impulsion

(Heisenberg, 1925)



« mathématiques »

tout couple de variables de Fourier

(Weyl, 1927)

« informatique »

temps et fréquence

(Gabor, 1946 + ...)

formulation classique

Compromis de localisation

basé sur une mesure de second ordre (de type variance) :
$\Delta t_x = (\int t^2\,|x(t)|^2\,dt)^{1/2}$ *et* $\Delta f_x = (\int f^2\,|X(f)|^2\,df)^{1/2} \Rightarrow$

$$\Delta t_x\,\Delta f_x \geq \frac{\|x\|}{4\pi}\ (> 0)$$

- pas de localisation ponctuelle parfaite
- variations : même limitation avec d'autres mesures d'étalement, e.g., entropie (Hirschman, 1957)
- dénominateur commun : minimum atteint par les **gaussiennes**

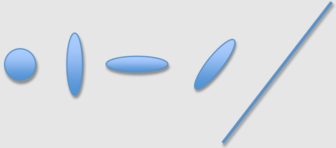
extension

pas de localisation ponctuelle ne veut pas dire pas de localisation

Relation d'incertitude plus forte (Schrödinger, 1935)

$$\Delta t_x \, \Delta f_x \geq \frac{\|x\|}{4\pi} \sqrt{1 + 16\pi^2 \left(\int t \, (\partial_t \arg x(t)) \, |x(t)|^2 \, dt \right)^2}$$

*borne atteinte pour les **"états comprimés"** de la forme* $\{\exp(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)\}$, *avec les **"chirps" linéaires** comme forme limite lorsque* $\mathrm{Re}\{\beta\} = 0$ *et* $\mathrm{Re}\{\alpha\} \to 0_-$



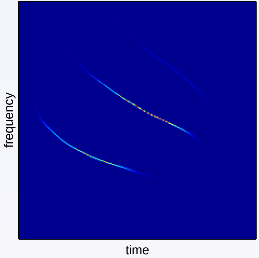
trajectoires temps-fréquence et parcimonie

Temps discret

signal de dimension N $\Rightarrow$ distribution temps-fréquence de dimension $\approx N^2$

Peu de composantes

$K \ll N \Rightarrow$ au plus $KN \ll N^2$ valeurs non nulles dans le plan



Parcimonie

remplacer la minimisation de la quasi-norme ℓ_0 par celle de la norme ℓ_1

une solution parcimonieuse

Idée (F. & Borgnat, '08-10)

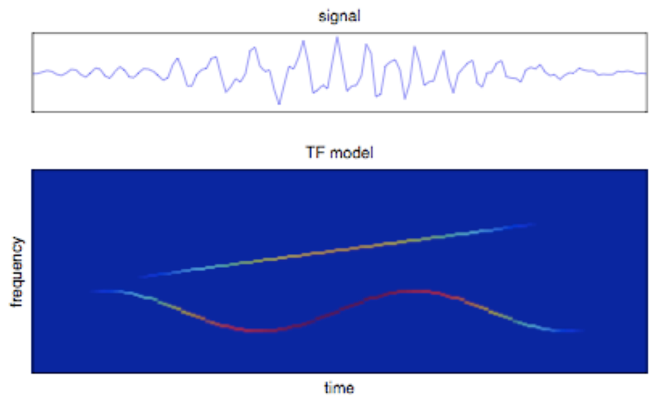
1. *choisir un domaine Ω au voisinage de l'origine du plan des corrélations temps-fréquence*
2. *résoudre le programme*

$$\min_{\rho} \|\rho\|_1 \, ; \, \mathcal{F}\{\rho\} - A_x = 0|_{(\xi,\tau)\in\Omega}$$

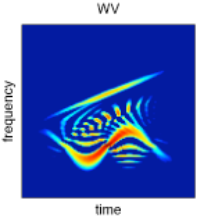
3. *l'égalité exacte sur Ω peut être adoucie selon*

$$\min_{\rho} \|\rho\|_1 \, ; \, \|\mathcal{F}\{\rho\} - A_x\|_2 \leq \epsilon|_{(\xi,\tau)\in\Omega}$$

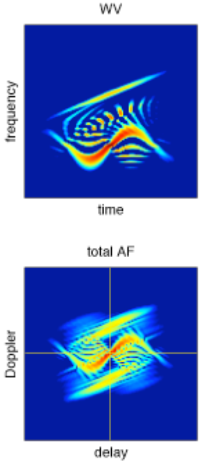
un exemple



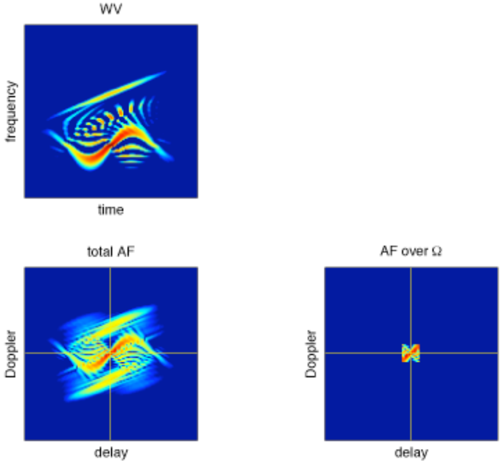
temps-fréquence (Wigner)



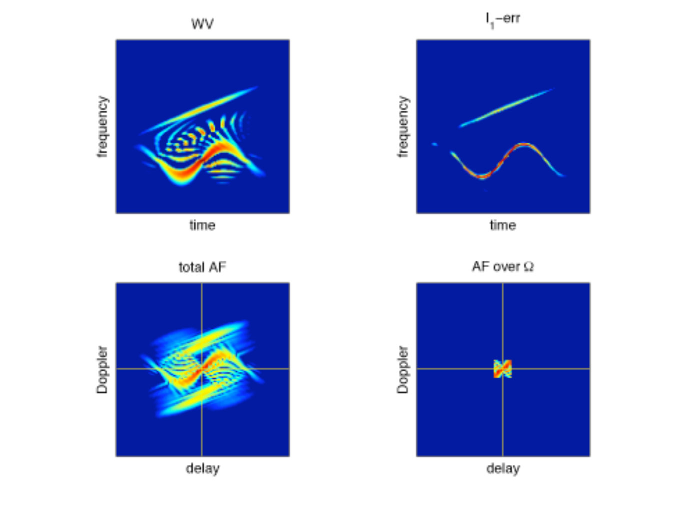
corrélation temps-fréquence (ambiguïté)



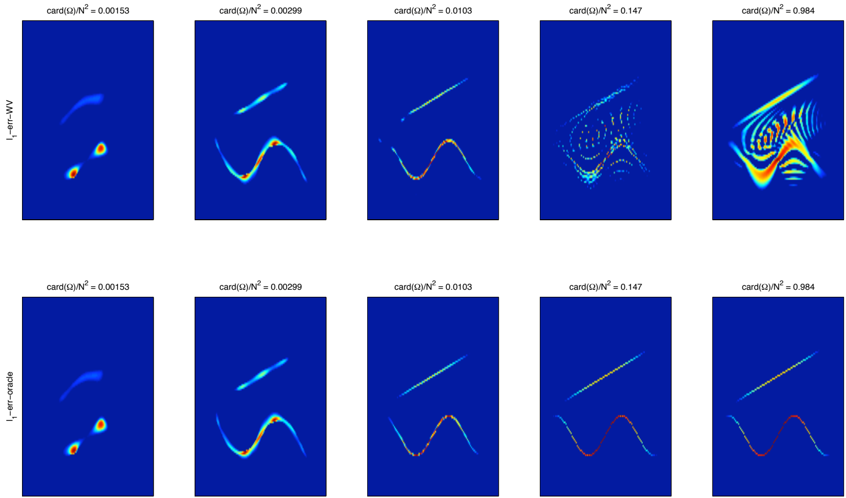
sélection


WV
frequency
time
total AF
Doppler
delay
AF over Ω
Doppler
delay

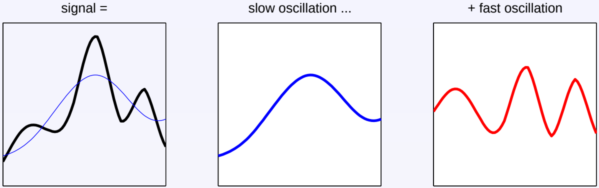
solution parcimonieuse



sélection optimale ?



approche “non harmonique” (Huang *et al.*, 1998)



Idée de la Décomposition Modale Empirique (EMD)

signal = oscillation rapide + oscillation lente & itération

- séparation “rapide vs. lent” **pilotée par les données**
- analyse **“locale"** basée sur extrema voisins
- **oscillation** plutôt que fréquence

algorithme

1. identifier les maxima et minima locaux
2. en déduire des enveloppes supérieures et inférieures par interpolation (splines cubiques)
   1. soustraire l'enveloppe moyenne du signal
   2. itérer jusqu'à ce que "enveloppe moyenne = 0" (*tamisage*)
3. soustraire le mode ainsi obtenu du signal
4. itérer sur le résidu

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1(t) + r_1(t) \\ &= c_1(t) + c_2(t) + r_2(t) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \quad \sum_{k=1}^{K} c_k(t) + r_K(t), \end{aligned}$$

1 ou 2 composantes ?

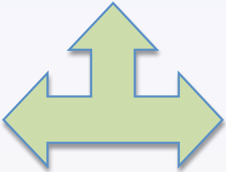
$$\text{« } \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \text{ »}$$

« physique »

(production, perception)

« mathématiques »

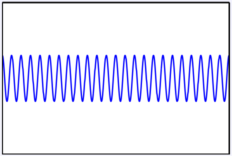
(descriptions équivalentes)



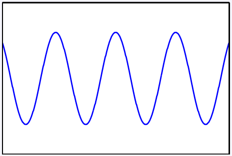
« informatique»

(modèle ? données ?)

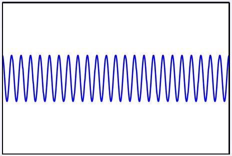
1 ou 2 composantes ?



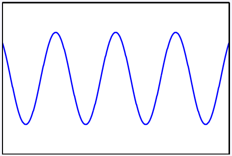
+



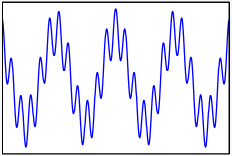
1 ou 2 composantes ?



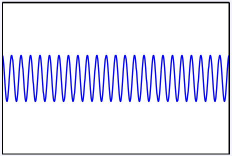
+



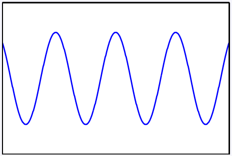
=



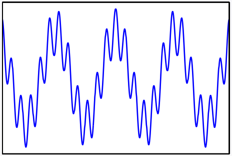
1 ou 2 composantes ?

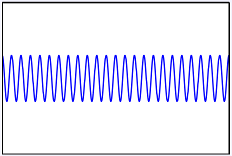


+

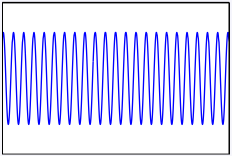


=

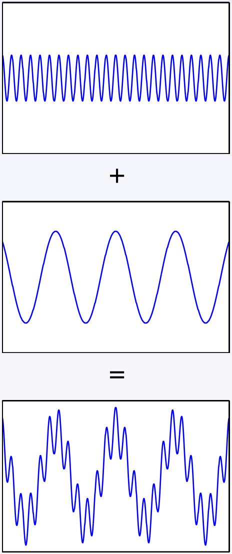


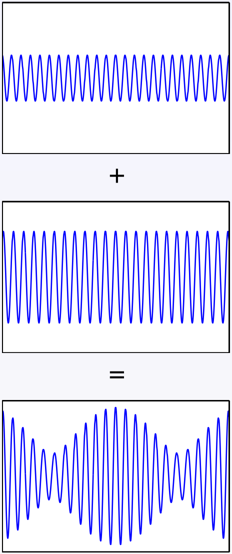


+

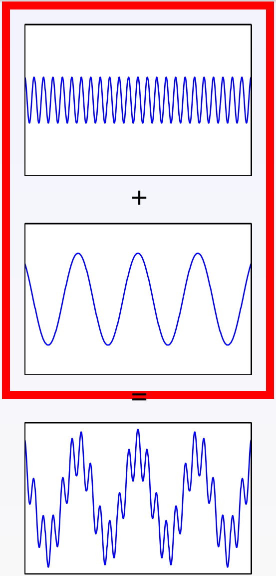


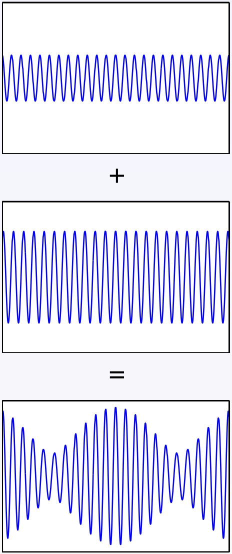
1 ou 2 composantes ?



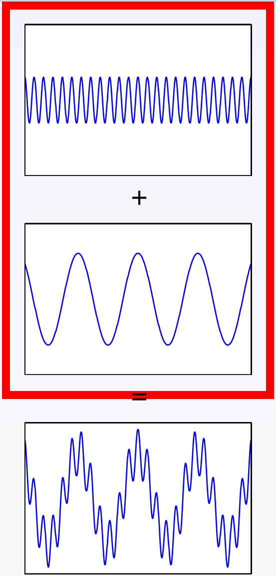


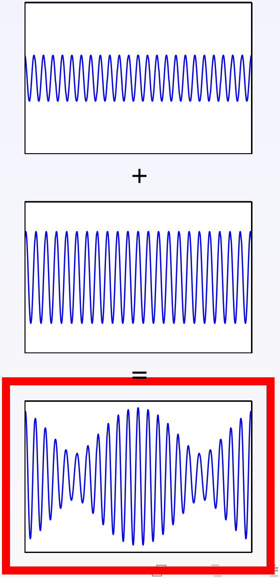
1 ou 2 composantes ?



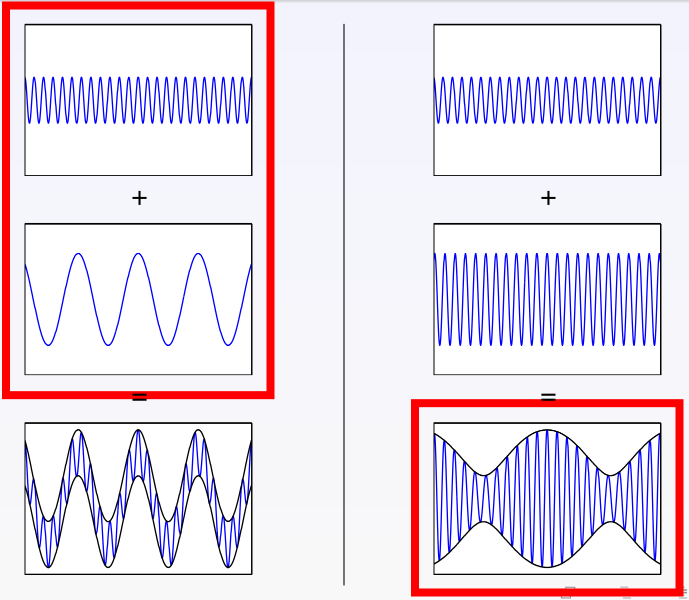


1 ou 2 composantes ?

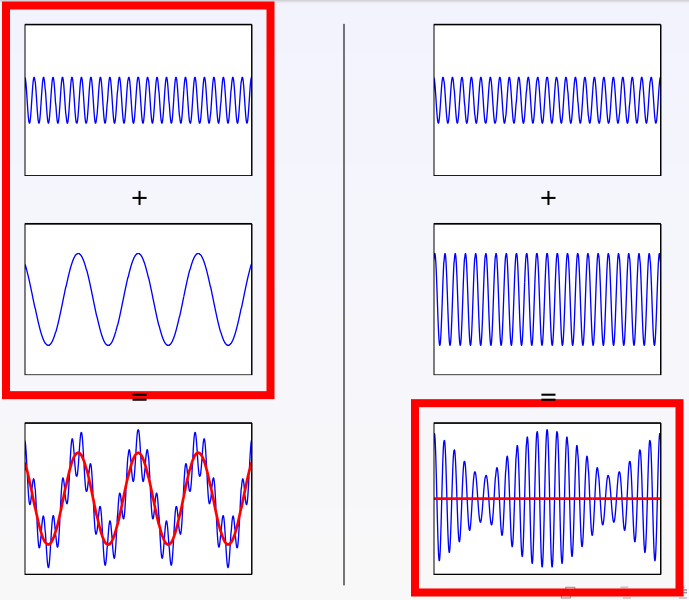




1 ou 2 composantes ?



1 ou 2 composantes ?



théorie et simulations (Rilling & F., '08)

Signal

$$x(t) = \underbrace{a_1 \cos(2\pi f_1 t)}_{x_1(t)} + \underbrace{a_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi)}_{x_2(t)}, \quad f_1 > f_2$$

Analyse de l'EMD

- seul le **1er mode** est calculé : en cas de séparation, il devrait être égal à la composante HF $x_1(t)$
- **critère** ($= 0$ si séparation) :

$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

- les effets d'échantillonnage sont **négligés** : $f_1, f_2 \ll f_s$, avec f_s la fréquence d'échantillonnage

théorie et simulations (Rilling & F., '08)

Signal

$$x(t) = \underbrace{a_1 \cos(2\pi f_1 t)}_{x_1(t)} + \underbrace{a_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi)}_{x_2(t)}, \quad f_1 > f_2$$

Analyse de l'EMD

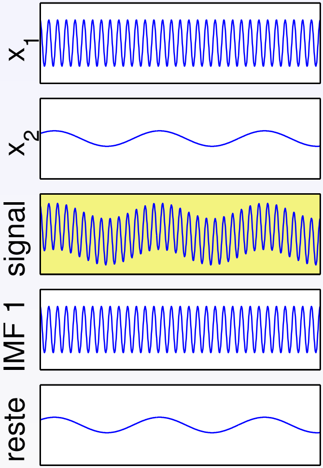
- seul le **1er mode** est calculé : en cas de séparation, il devrait être égal à la composante HF $x_1(t)$
- **critère** ($= 0$ si séparation) :

$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

- les effets d'échantillonnage sont **négligés** : $f_1, f_2 \ll f_s$, avec f_s la fréquence d'échantillonnage

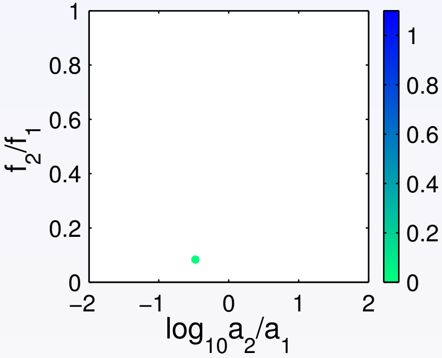
somme de 2 fréquences pures

f_2/f_1 = 0.08, a_2/a_1 = 0.33

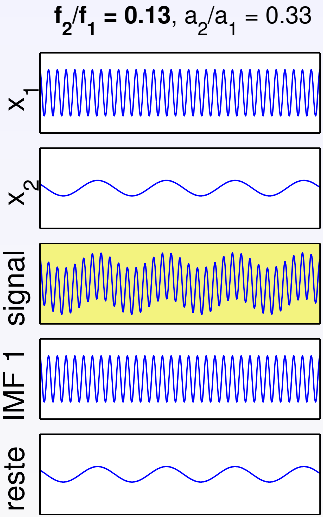


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

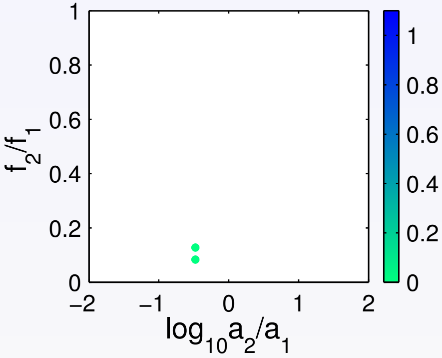


somme de 2 fréquences pures

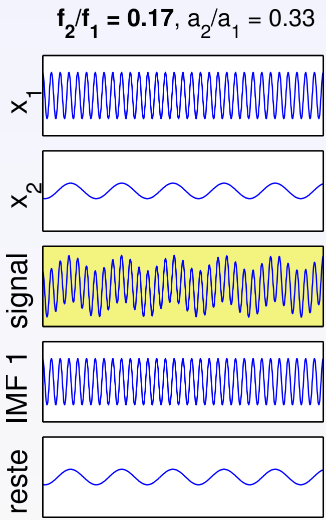


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

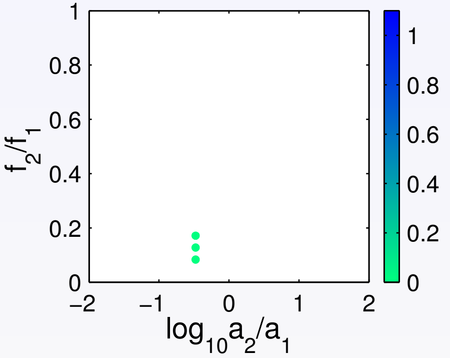


somme de 2 fréquences pures

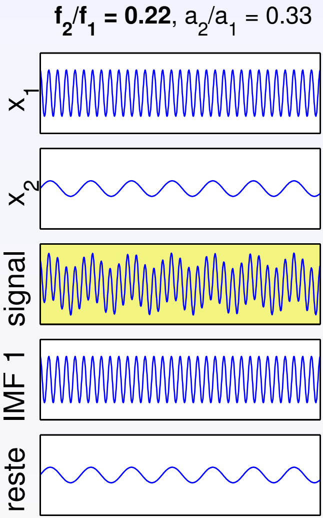


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

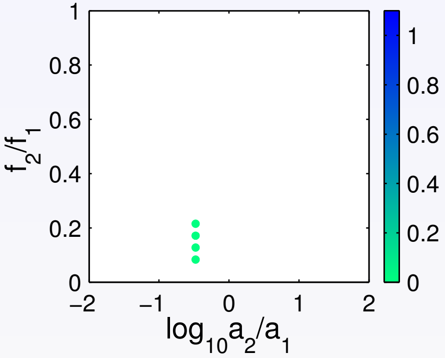


somme de 2 fréquences pures

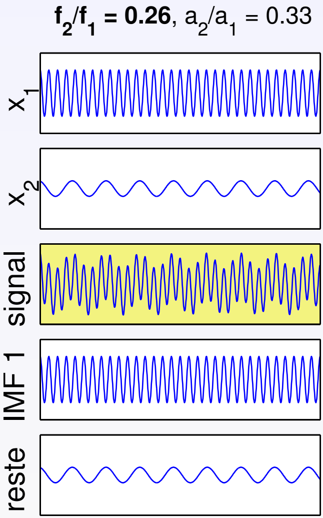


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

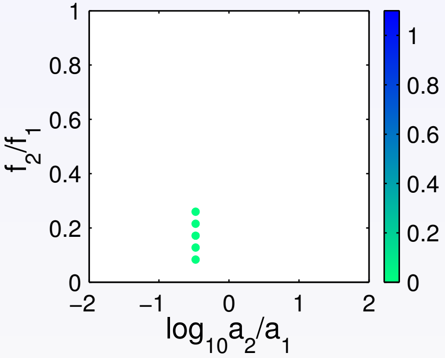


somme de 2 fréquences pures

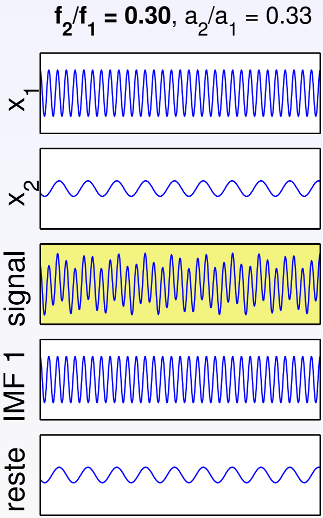


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

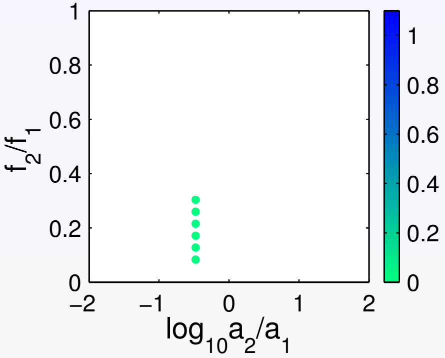


somme de 2 fréquences pures

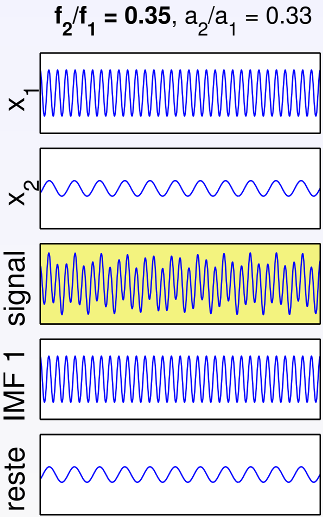


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

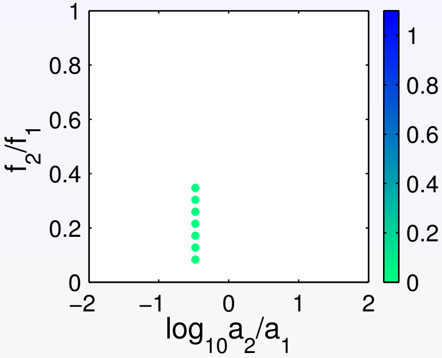


somme de 2 fréquences pures

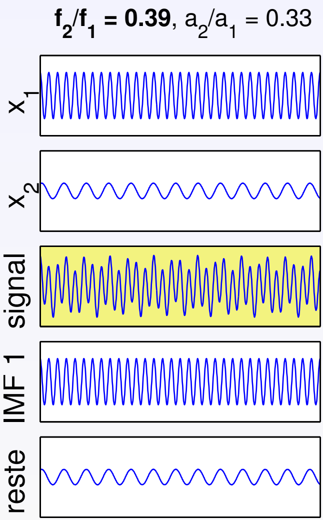


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

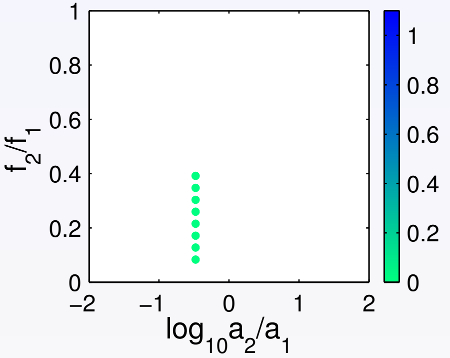


somme de 2 fréquences pures

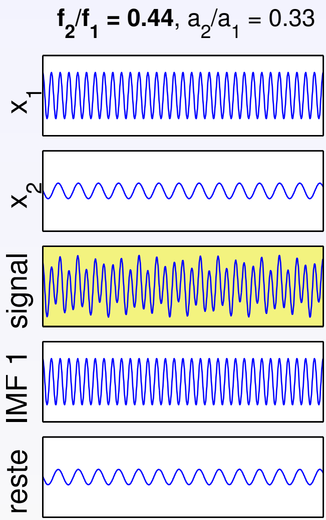


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

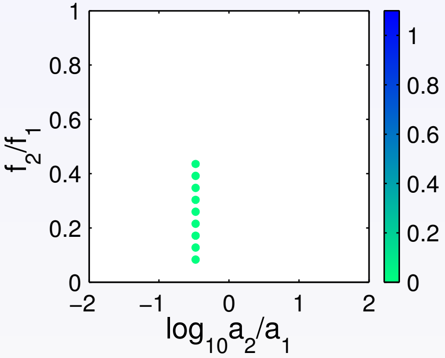


somme de 2 fréquences pures

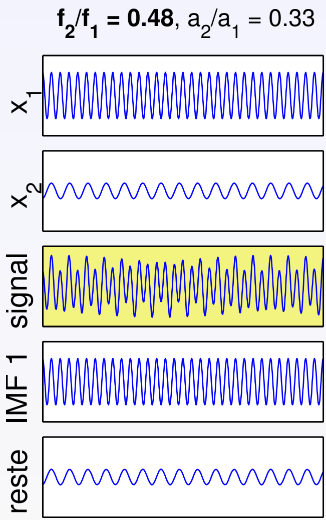


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\| IMF_1(t) - x_1(t) \|_{\ell_2}}{\| x_2(t) \|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

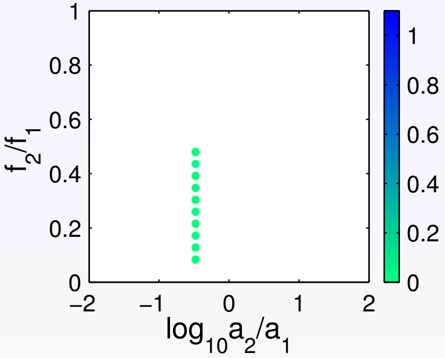


somme de 2 fréquences pures

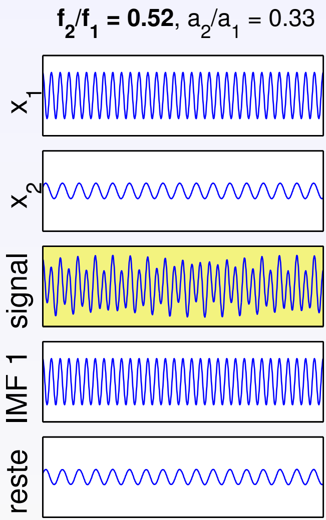


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

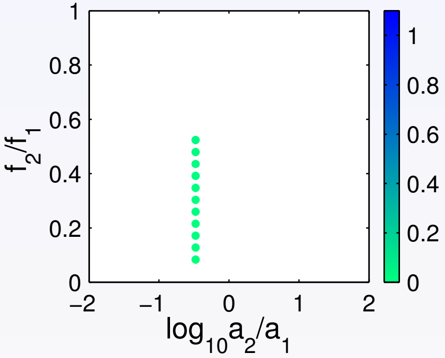


somme de 2 fréquences pures



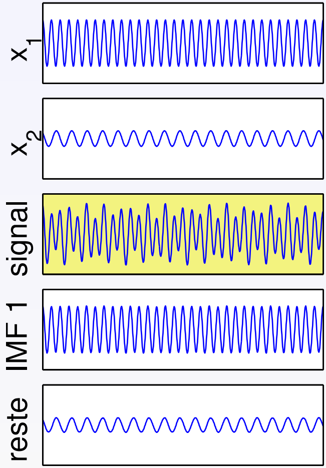
$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$



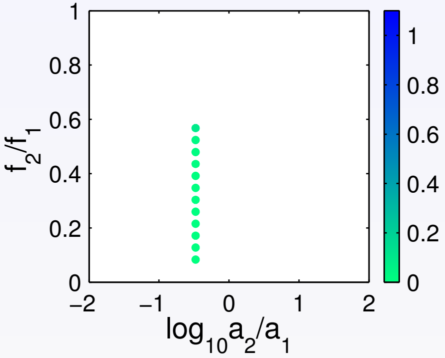
somme de 2 fréquences pures

f_2/f_1 **= 0.57**, $a_2/a_1 = 0.33$

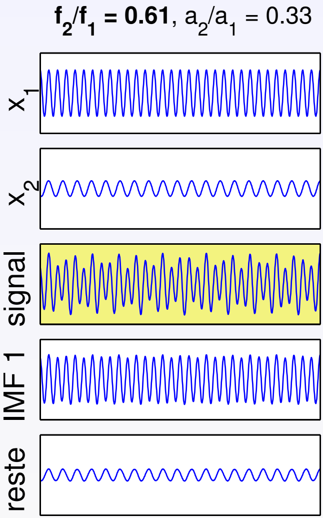


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

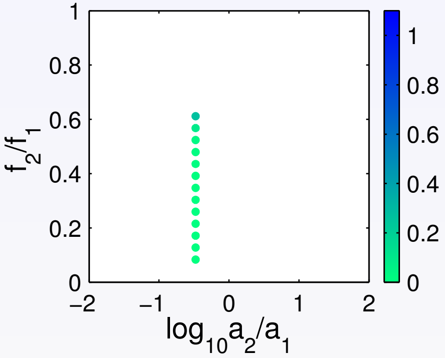


somme de 2 fréquences pures

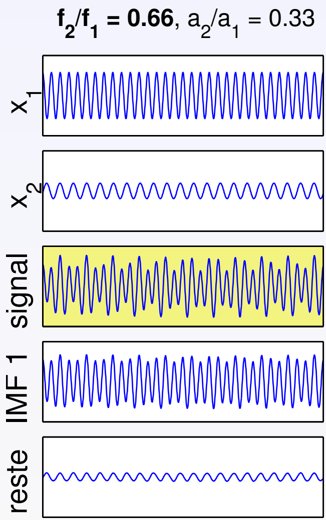


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

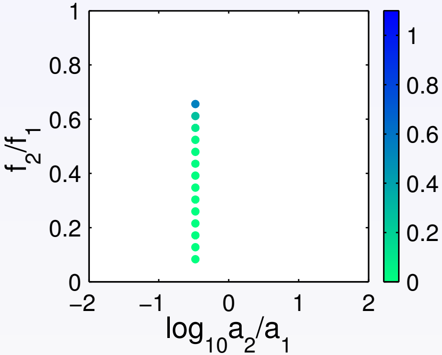


somme de 2 fréquences pures

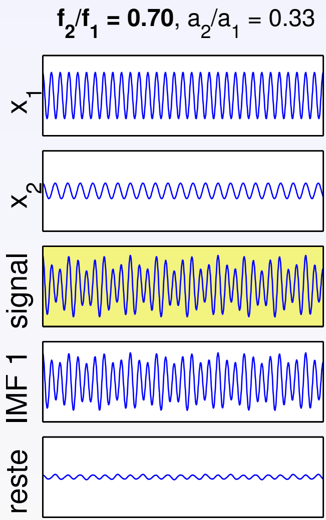


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

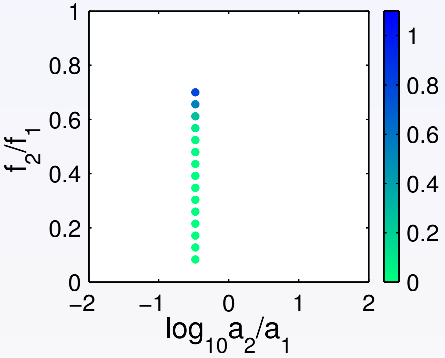


somme de 2 fréquences pures

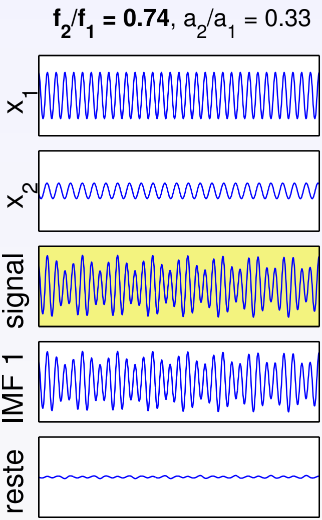


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

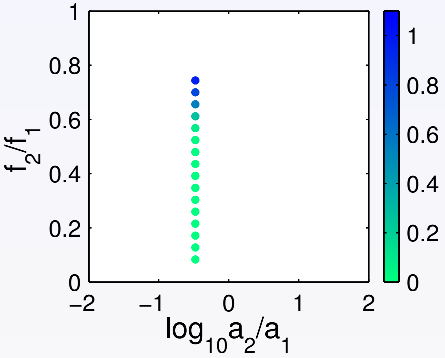


somme de 2 fréquences pures



$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

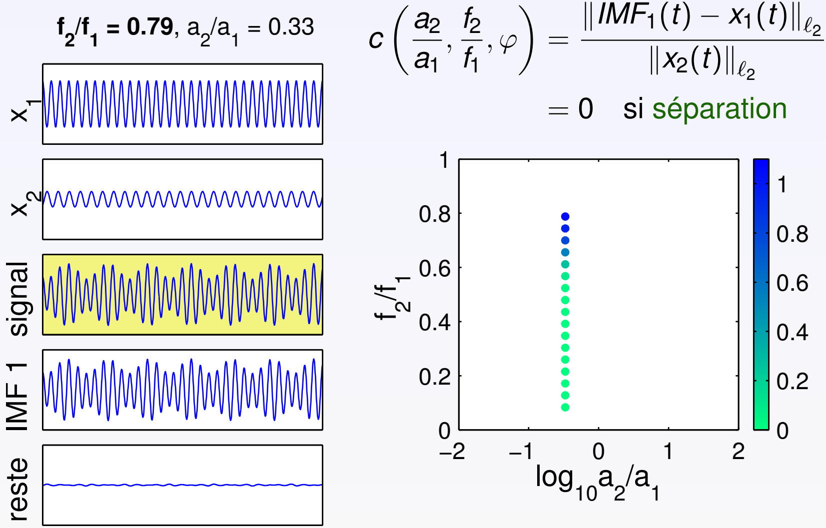
$$= 0 \quad \text{si séparation}$$



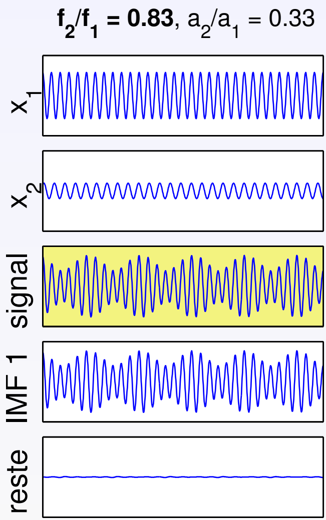
somme de 2 fréquences pures

$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

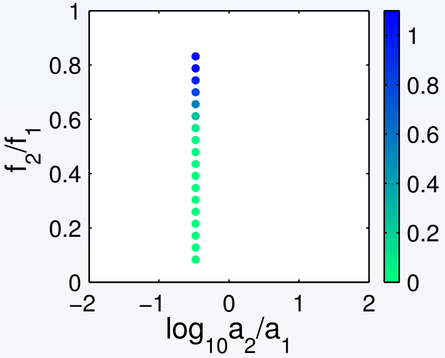


somme de 2 fréquences pures

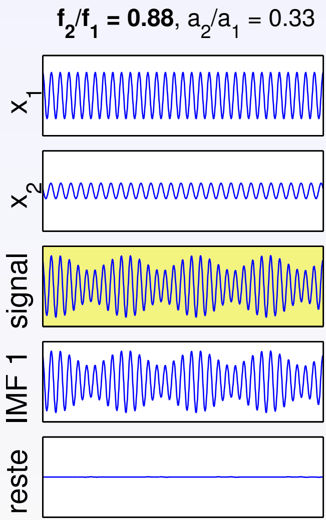


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

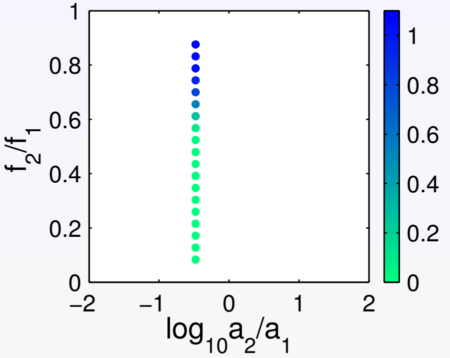


somme de 2 fréquences pures

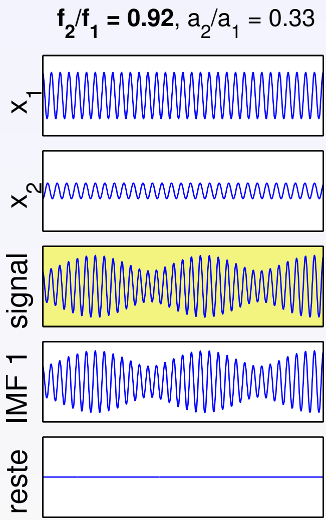


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

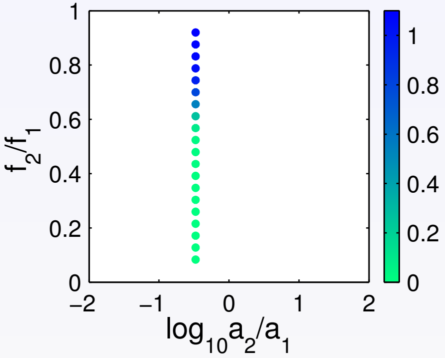


somme de 2 fréquences pures

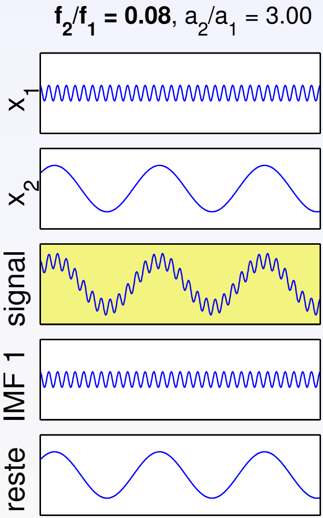


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

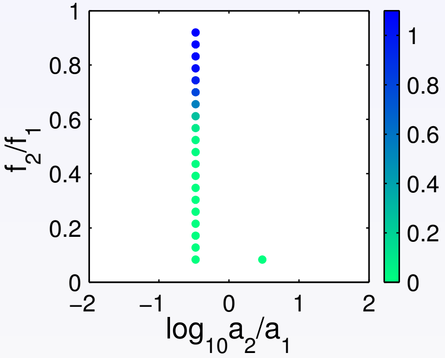


somme de 2 fréquences pures

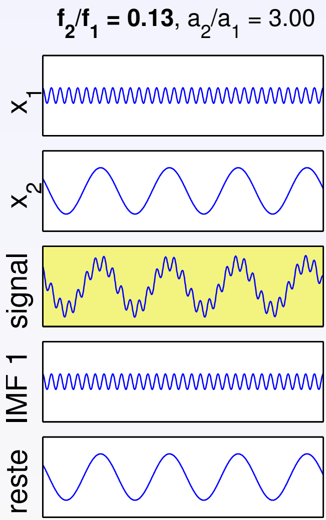


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

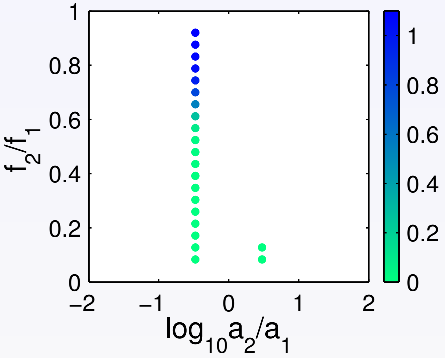


somme de 2 fréquences pures

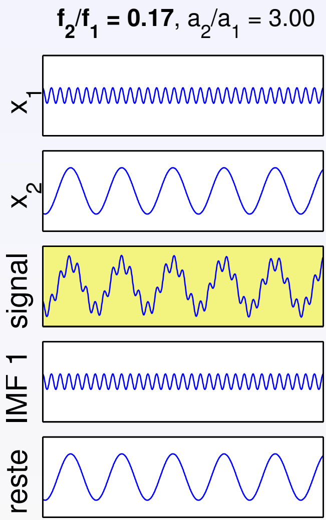


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\| IMF_1(t) - x_1(t) \|_{\ell_2}}{\| x_2(t) \|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

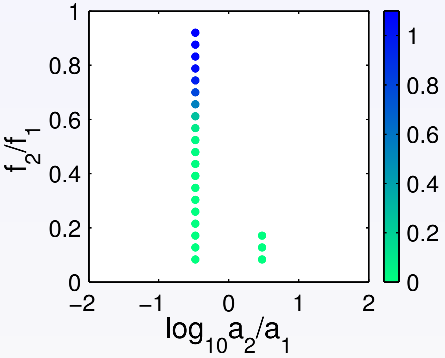


somme de 2 fréquences pures

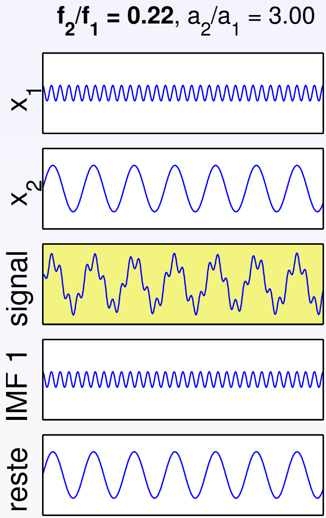


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\| IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

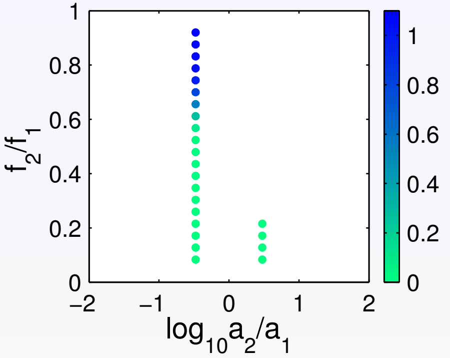


somme de 2 fréquences pures

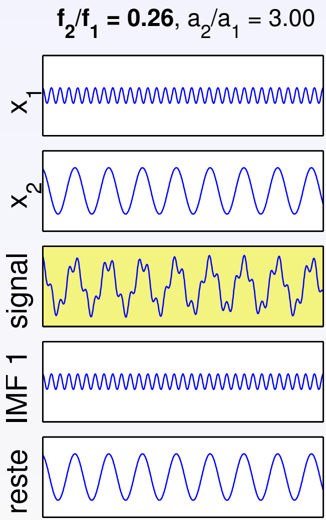


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

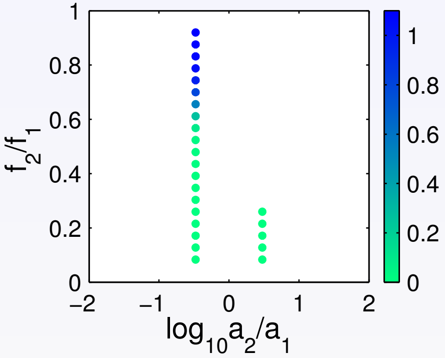


somme de 2 fréquences pures

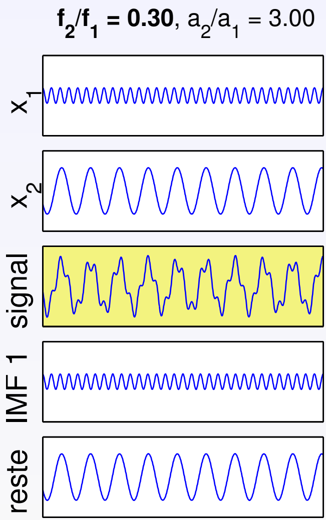


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

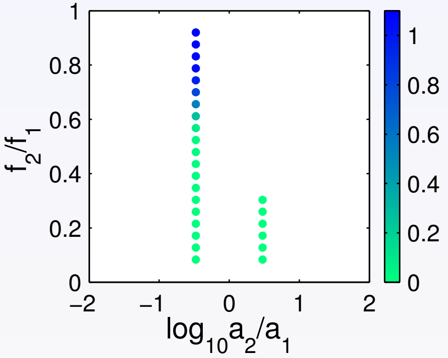


somme de 2 fréquences pures

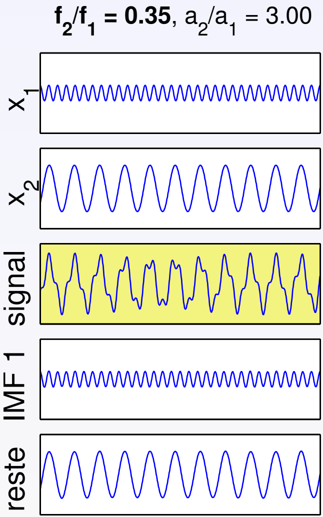


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

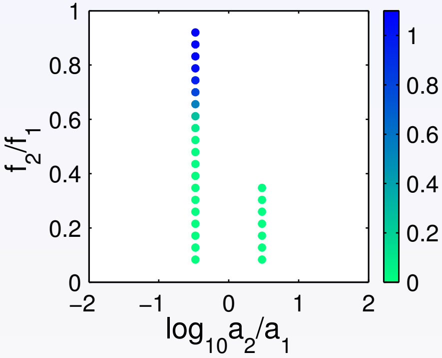


somme de 2 fréquences pures

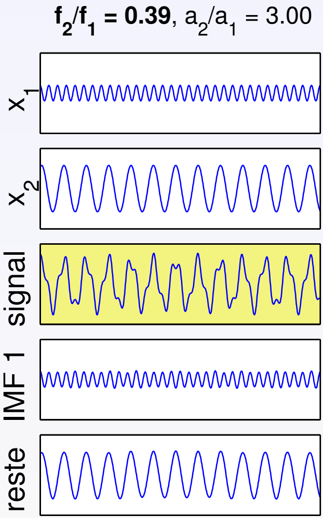


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

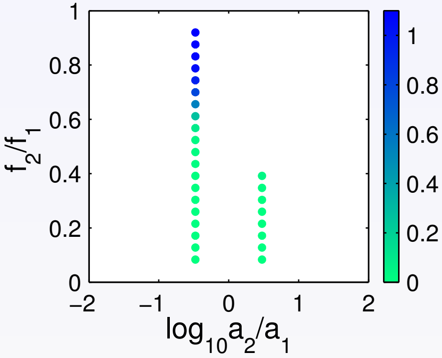


somme de 2 fréquences pures

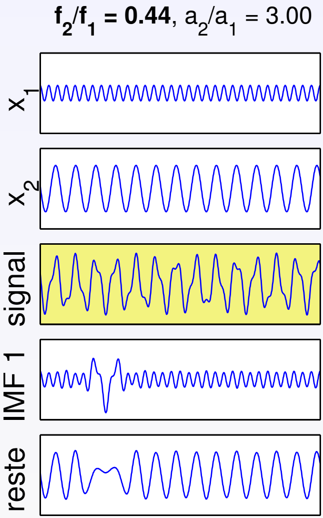


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

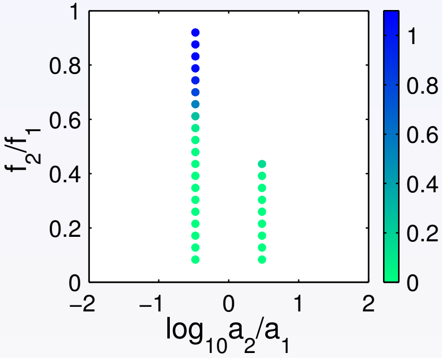


somme de 2 fréquences pures

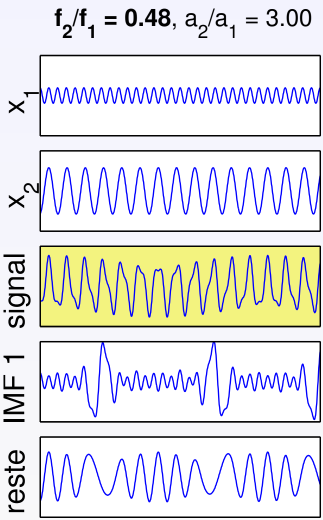


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

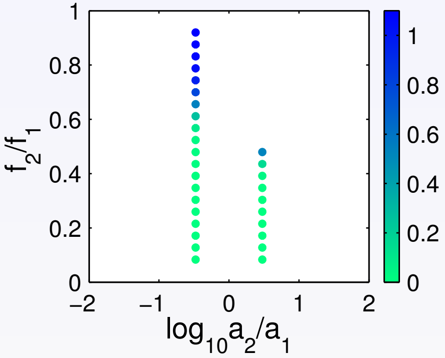


somme de 2 fréquences pures

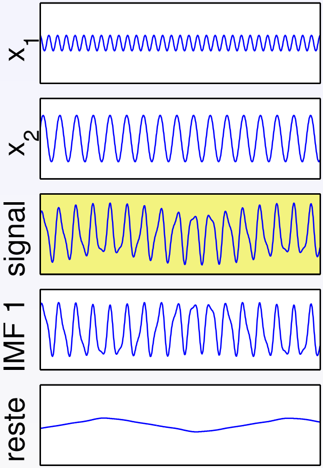


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

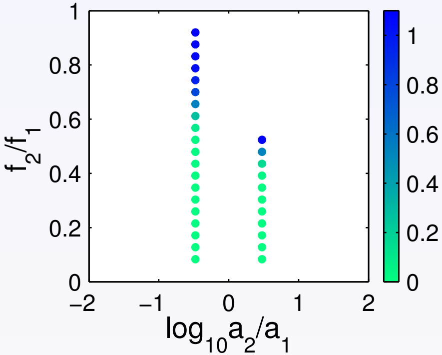


somme de 2 fréquences pures

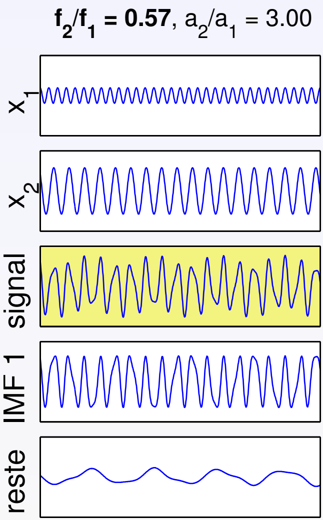


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

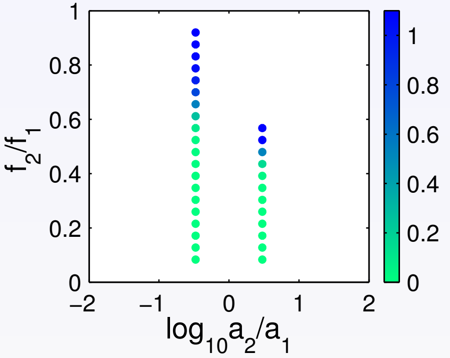


somme de 2 fréquences pures

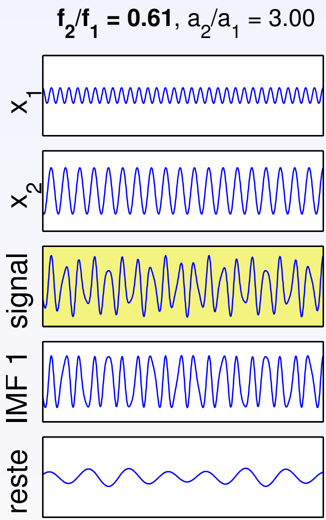


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

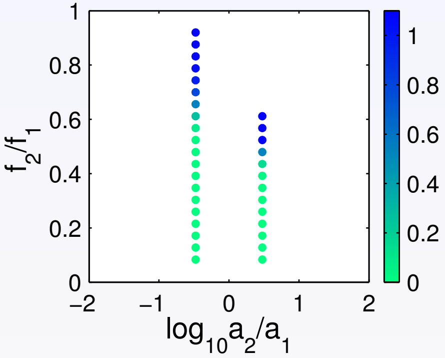


somme de 2 fréquences pures

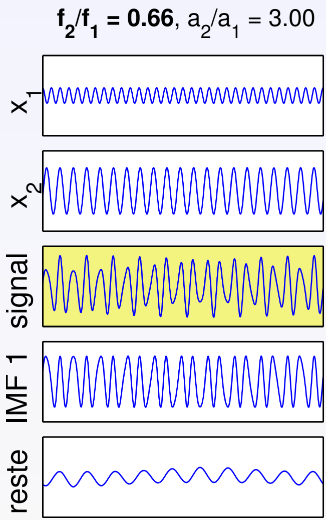


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

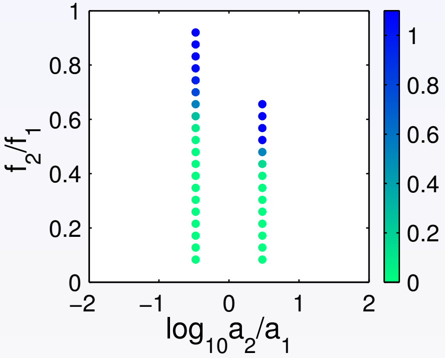


somme de 2 fréquences pures

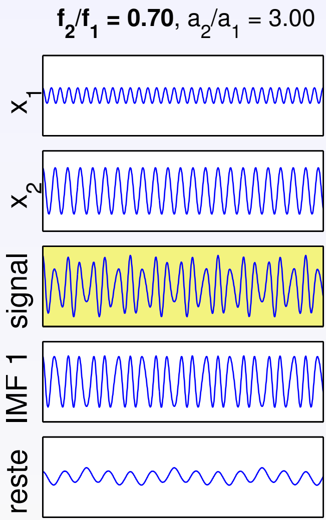


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

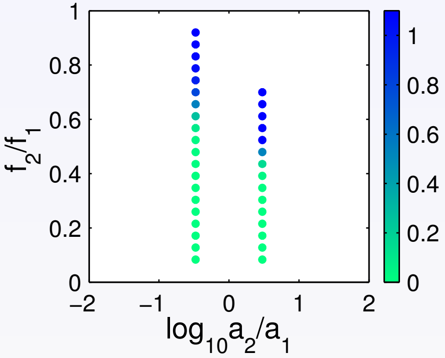


somme de 2 fréquences pures

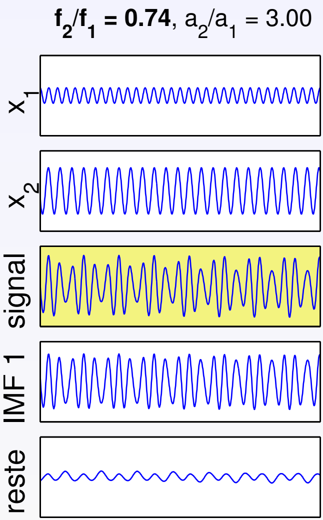


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

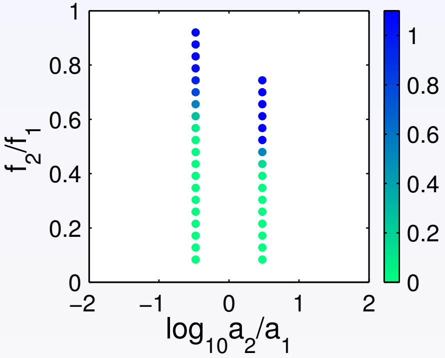


somme de 2 fréquences pures

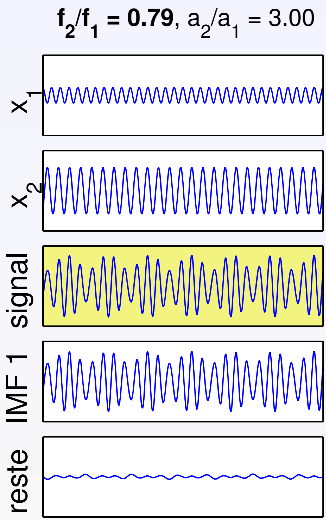


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

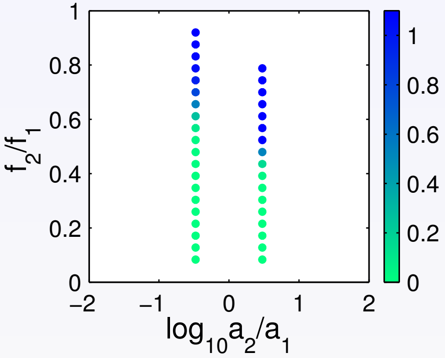


somme de 2 fréquences pures

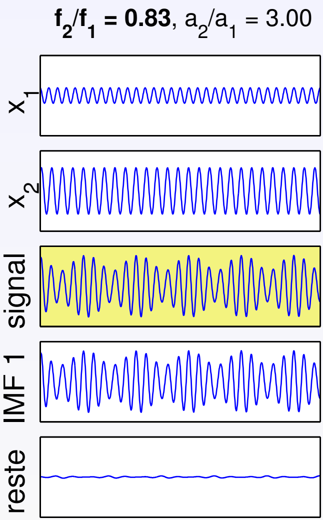


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

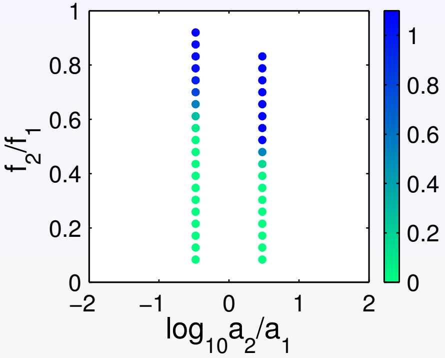


somme de 2 fréquences pures

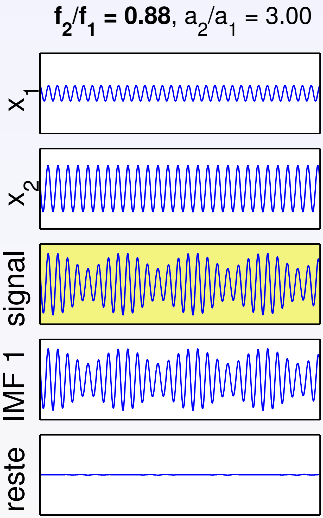


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

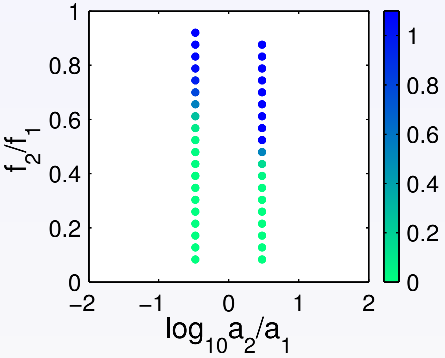


somme de 2 fréquences pures

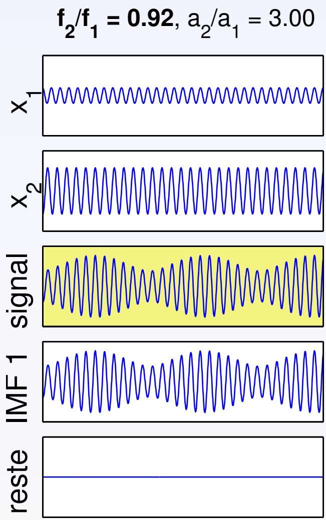


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

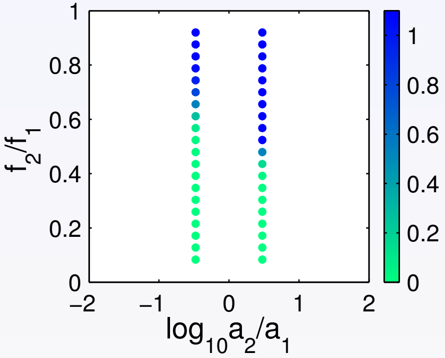


somme de 2 fréquences pures

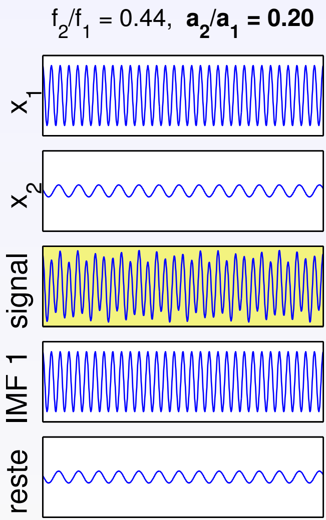


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

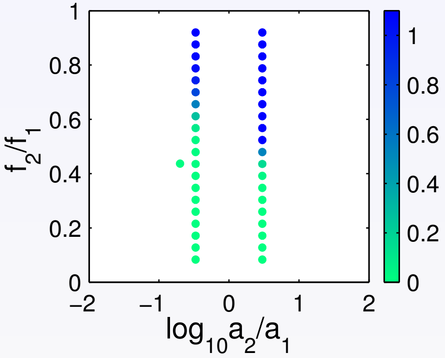


somme de 2 fréquences pures

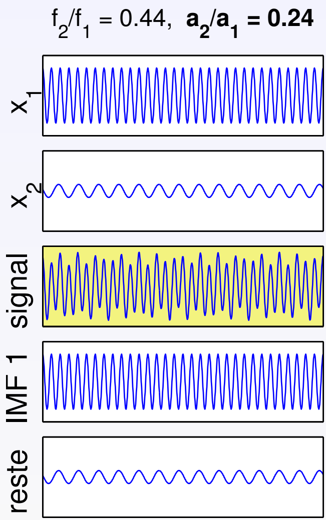


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

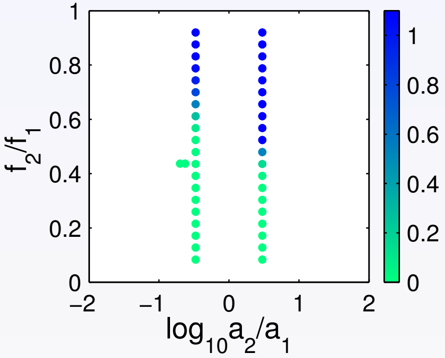


somme de 2 fréquences pures

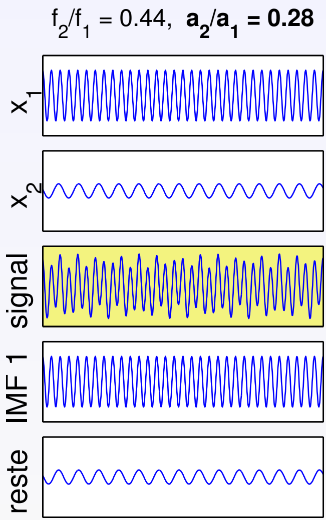


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

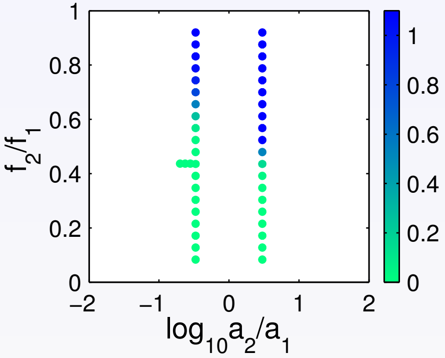


somme de 2 fréquences pures

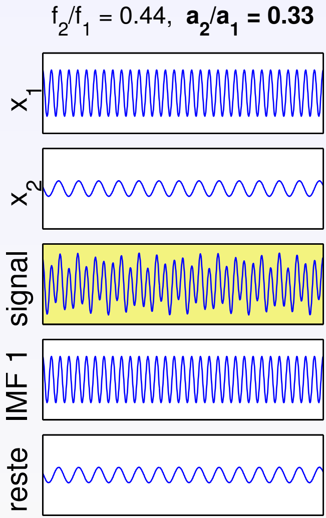


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

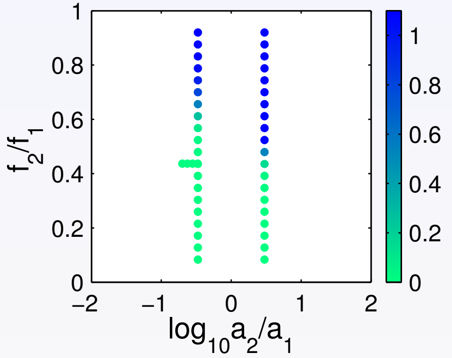


somme de 2 fréquences pures

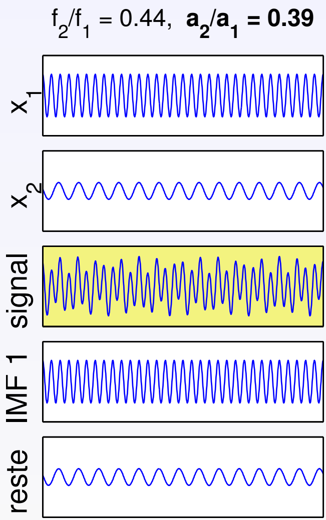


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

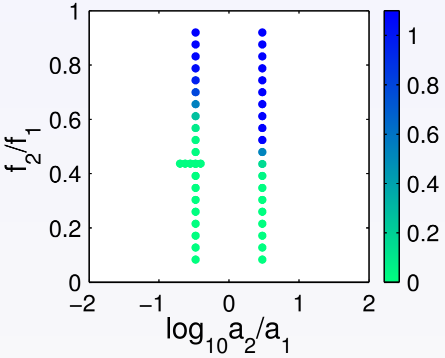


somme de 2 fréquences pures

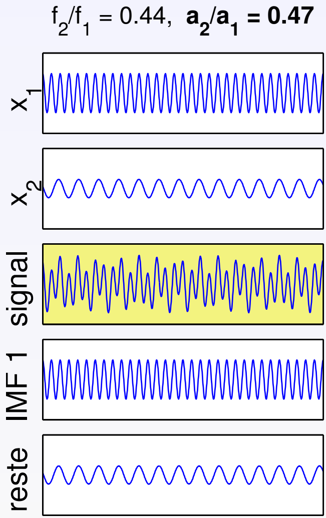


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

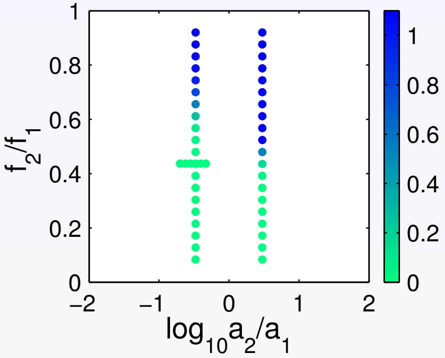


somme de 2 fréquences pures

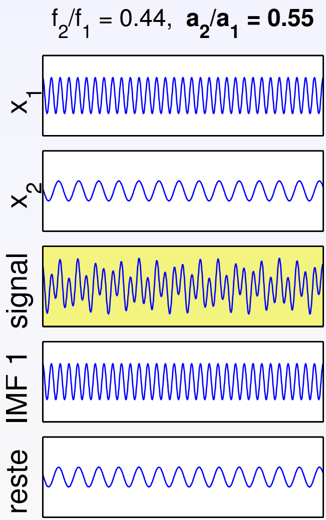


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

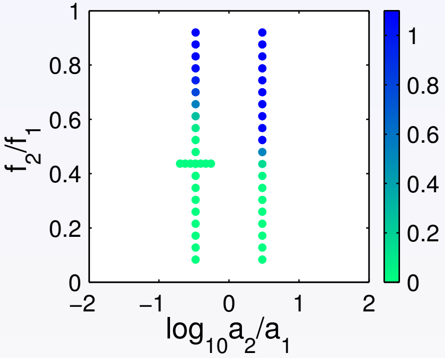


somme de 2 fréquences pures

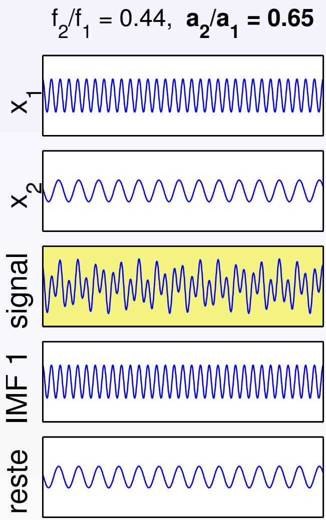


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

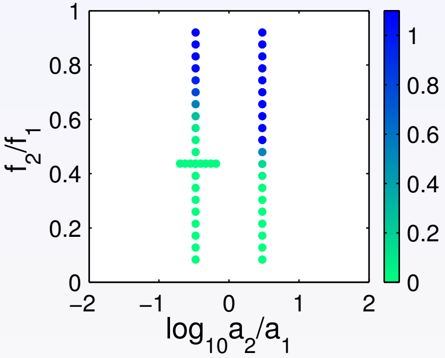


somme de 2 fréquences pures



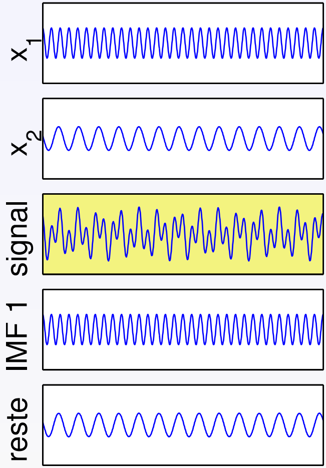
$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$



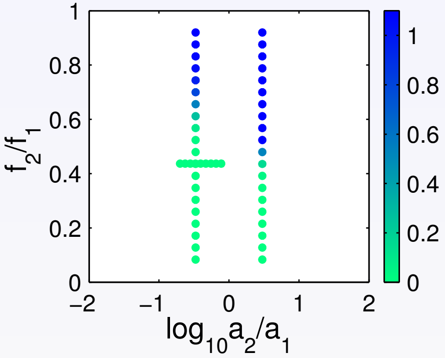
somme de 2 fréquences pures

$f_2/f_1 = 0.44$, $\mathbf{a_2/a_1 = 0.78}$

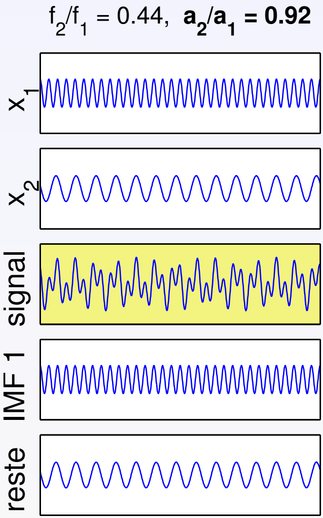


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

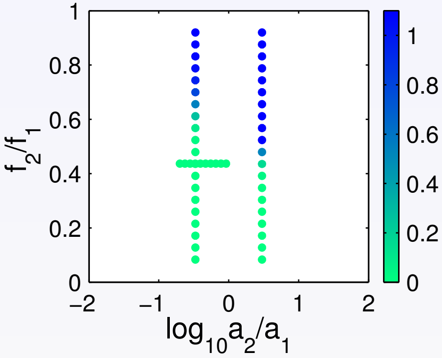


somme de 2 fréquences pures

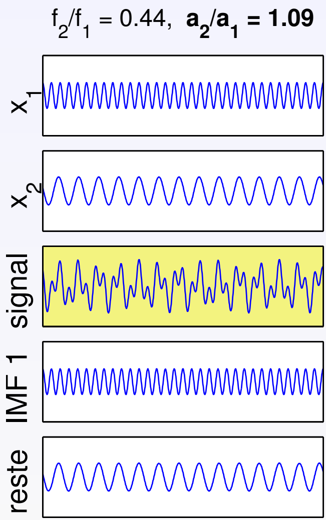


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

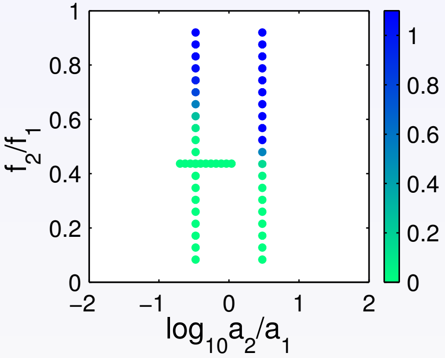


somme de 2 fréquences pures

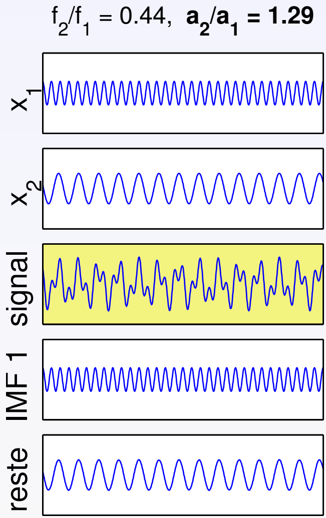


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

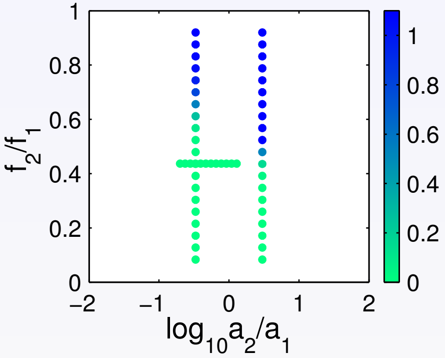


somme de 2 fréquences pures

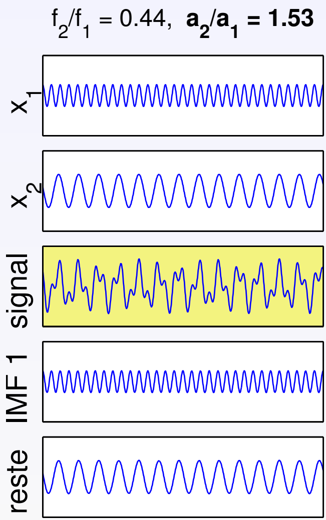


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

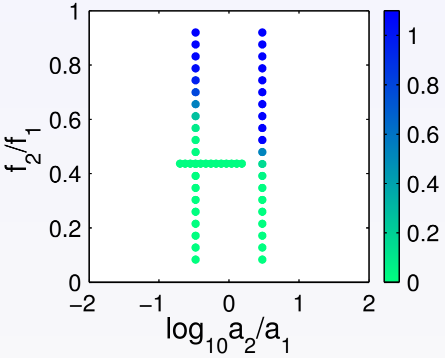


somme de 2 fréquences pures

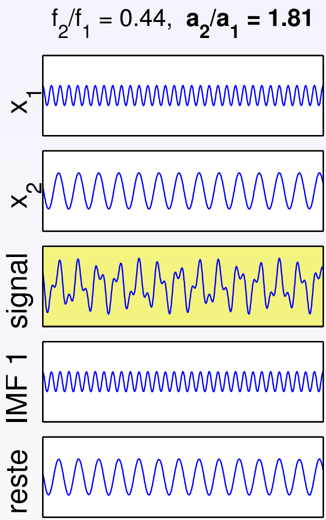


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

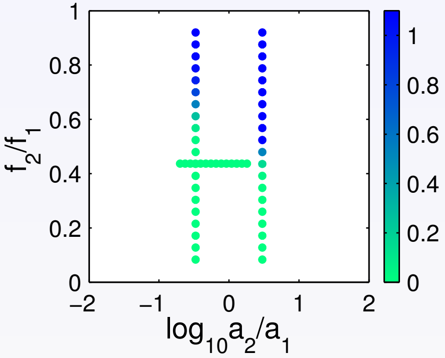


somme de 2 fréquences pures

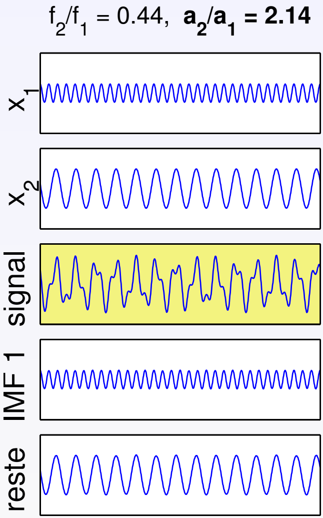


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si } \textit{séparation}$$

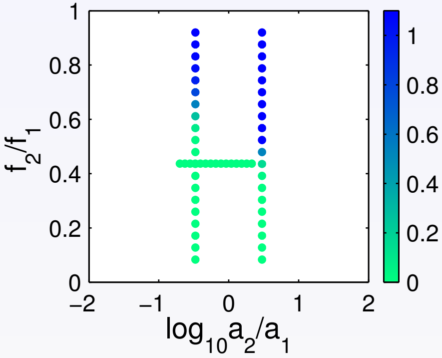


somme de 2 fréquences pures

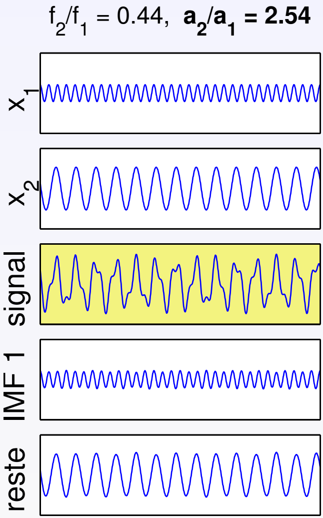


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

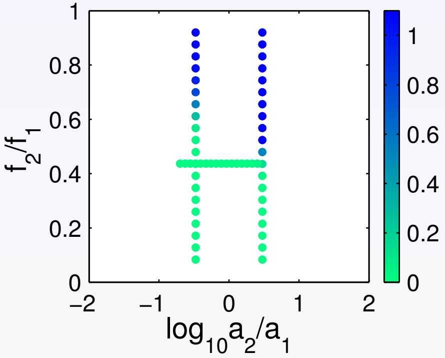


somme de 2 fréquences pures

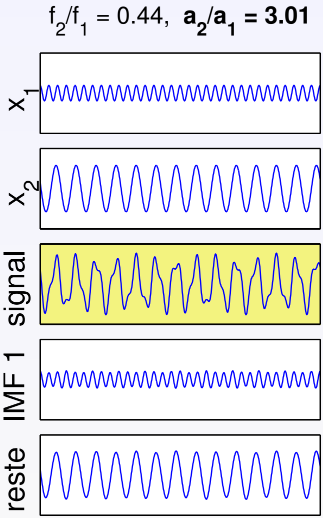


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

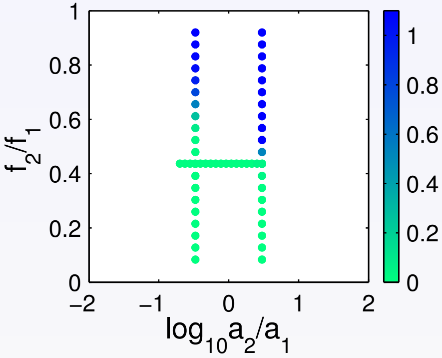


somme de 2 fréquences pures

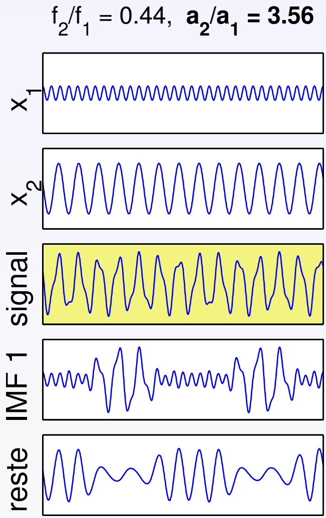


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

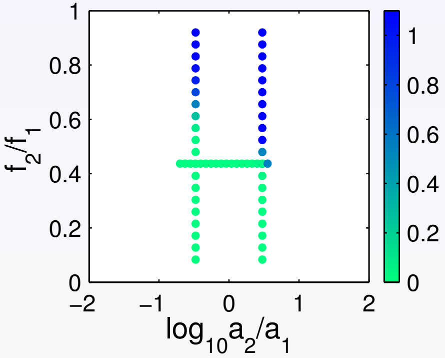


somme de 2 fréquences pures

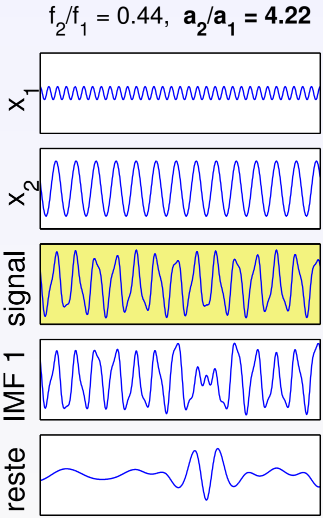


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

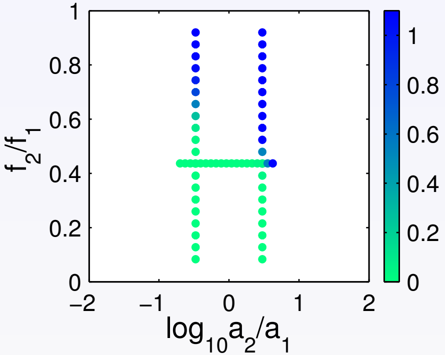


somme de 2 fréquences pures

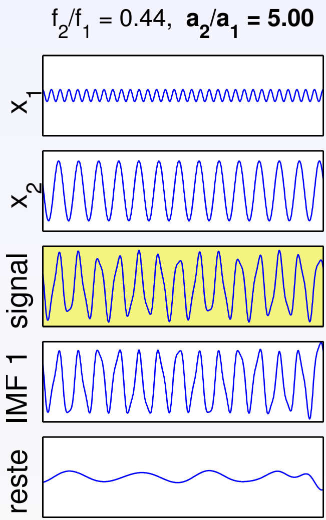


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

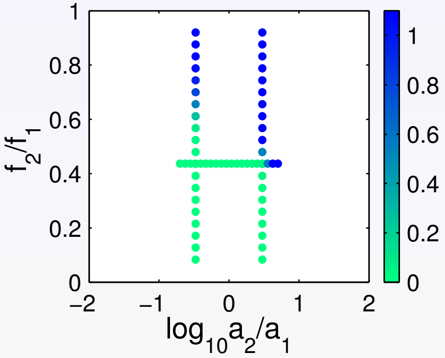


somme de 2 fréquences pures

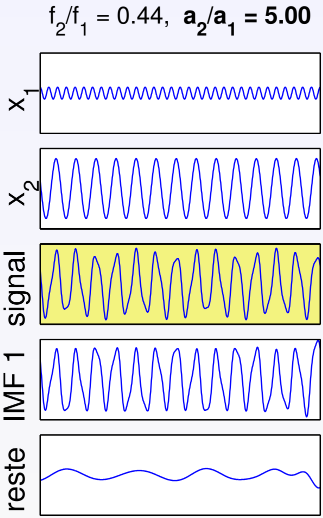


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

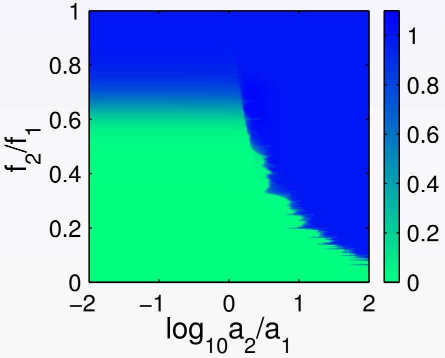


somme de 2 fréquences pures

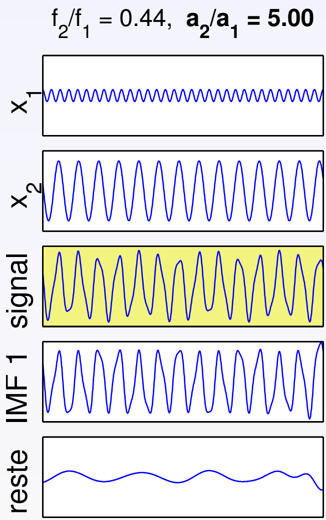


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation

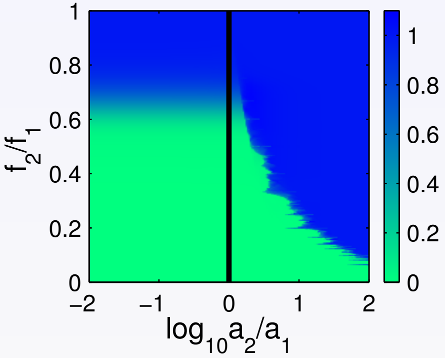


somme de 2 fréquences pures

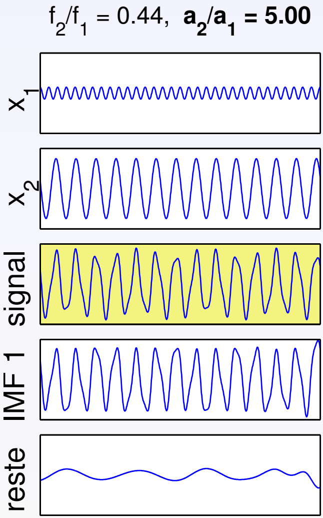


$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$$= 0 \quad \text{si séparation}$$

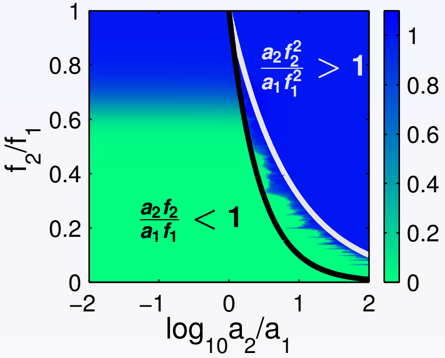


somme de 2 fréquences pures



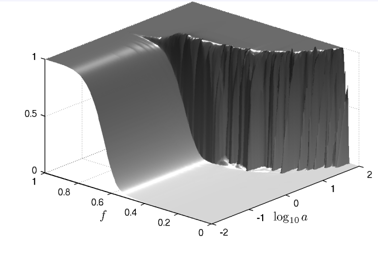
$$c\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{f_2}{f_1}, \varphi\right) = \frac{\|IMF_1(t) - x_1(t)\|_{\ell_2}}{\|x_2(t)\|_{\ell_2}}$$

$= 0$ si séparation



somme de 2 fréquences pures

- comportement **non linéaire** $\Rightarrow$ dissymmétrie de la séparation en fonction du rapport d'amplitude $a = a_2/a_1$, *via* le signe de $a - 1$:
  - $a < 1$ (HF dominante) : *variation douce* & et pas de a-dépendance
  - $a > 1$ (LF dominante) : *transition de phase abrupte* & forte a-dépendance

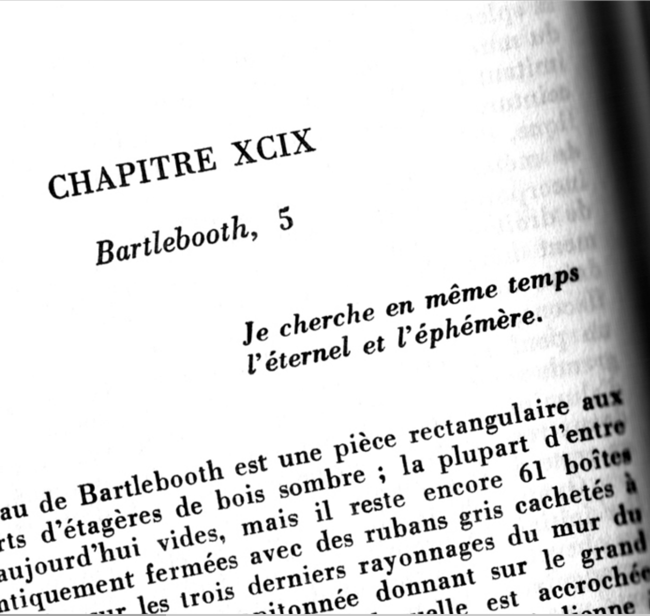


- Séparation **pilotée par les données** $\Rightarrow$ bon accord avec la perception d'un “effet de battement” $\Rightarrow$ connection avec l'audition ?

pour conclure

- Fourier : 200 ans et toujours là !
- les idées de base de ses décompositions restent centrales dans les approches et variations qui ont pu suivre (fréquences localisées et/ou évolutives, techniques non linéaires, etc.)
- les limitations associées aussi…

"Fourier, mode d'emploi"



CHAPITRE XCIX

Bartlebooth, 5

Je cherche en même temps l'éternel et l'éphémère.

Le bureau de Bartlebooth est une pièce rectangulaire aux murs couverts d'étagères de bois sombre ; la plupart d'entre elles sont aujourd'hui vides, mais il reste encore 61 boîtes identiquement fermées avec des rubans gris cachetés à ... les trois derniers rayonnages du mur du ... donnant sur le grand ... est accrochée