

UNE APPROCHE STOCHASTIQUE DE L'INVARIANCE D'ÉCHELLE DISCRÈTE

Pierre BORGAT¹, Patrick FLANDRIN¹, Pierre-Olivier AMBLARD²

¹Laboratoire de Physique (UMR CNRS 5672), École Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07, France

² Laboratoire des Images et des Signaux (LIS-UMR CNRS 5083)
ENSIEG-BP 46 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France
pborgnat@ens-lyon.fr, flandrin@ens-lyon.fr, Bidou.Amblard@lis.inpg.fr

Résumé – Nous étudions les processus à invariance d'échelle discrète (“discrete scale invariance” – DSI), propriété qui suppose une invariance par les dilatations d'un rapport d'échelle privilégié seulement. Nous montrons comment la transformée de Lamperti permet d'étudier des processus avec cette propriété, en particulier en les reliant à la cyclostationnarité. En plus de donner quelques propriétés générales de la DSI, on s'attache à la synthèse de séquences aléatoires à DSI. Enfin le problème d'analyse est étudié d'abord à l'aide de la transformée de Lamperti inverse couplée à des méthodes cyclostationnaires, ensuite dans un formalisme de Mellin explicite.

Abstract – We define and study stochastic discrete scale invariance (DSI), a property which requires invariance by dilation for certain preferred scaling factors only. We prove that the Lamperti transformation, known to map self-similar processes to stationary processes, is an important tool to study these processes and gives a more general connection: in particular between DSI and cyclostationarity. Some general properties of DSI processes are given. Examples of random sequences with DSI are then constructed and illustrated. We address finally the problem of analysis of DSI processes, first using the inverse Lamperti transformation to analyse DSI processes by means of cyclostationary methods. Second we propose to re-write these tools directly in a Mellin formalism.

1 L'invariance d'échelle discrète

Un cadre d'interprétation riche est fondé sur l'idée d'invariance d'échelle, qui consiste à supposer qu'un phénomène étudié reste identique à lui-même quand on le soumet à une dilatation, après une éventuelle renormalisation de l'amplitude. L'invariance d'échelle a été mise à profit dans des situations aussi variées que la turbulence, l'analyse du trafic dans des réseaux, l'étude de textures ou de reliefs géographiques, les phénomènes critiques et bien d'autres [2]. Cette notion, aussi appelée auto-similarité, se définit précisément pour une fonction $X(t)$ comme l'égalité, pour tout facteur de dilatation $k \in \mathbb{R}$, et à chaque instant t :

$$X(kt) = k^H X(t).$$

H , exposant d'auto-similarité, décrit le changement d'amplitude nécessaire. H -ss sera l'abréviation utilisée pour cette propriété.

La propriété est naturellement étendue, au-delà d'un contexte déterministe, aux processus stochastiques en imposant que l'égalité précédente représente l'égalité de toutes les distributions de probabilité de dimension finie du processus [1]. Nous noterons dans la suite $\stackrel{d}{=}$ une telle égalité probabiliste.

L'invariance supposée pour n'importe quel facteur d'échelle k est cependant une affirmation forte qui peut être trop stricte. Le seul exemple de l'ensemble de Cantor triadique qui n'est réellement invariant que pour des dilata-

tions d'un facteur 3^{-n} où n est un entier, suggère d'affaiblir parfois la proposition. Différents travaux [2] ont ainsi introduit des versions affaiblies de l'invariance d'échelle, par exemple en ne supposant celle-ci que sur un intervalle borné. Une autre variation, à l'image de l'ensemble de Cantor, nous occupe plus particulièrement : l'invariance d'échelle discrète (en abrégé DSI pour *discrete scale invariance*) qui propose qu'une fonction soit invariante par dilatation pour certains rapports d'échelle privilégiés uniquement.

Sornette *et al.* [3, 4] ont montré, par des arguments théoriques généraux et dans certaines situations précises, la pertinence de cette propriété. Leur étude a porté sur diverses situations physiques (fracture, tremblements de terre, agrégats limités par diffusion, phénomènes critiques) en supposant la propriété d'invariance d'échelle discrète pour des fonctions déterministes. La signature intrinsèque de la DSI est la présence de lois de puissance avec un exposant complexe, ce qui entraîne des oscillations log-périodiques d'une observable (périodicité en fonction de $\ln t$). En plus de proposer des arguments pour l'existence de DSI dans ces systèmes [4], ils ont mis à profit ces oscillations pour chercher la trace expérimentale de la DSI en utilisant des méthodes classiques d'analyse (régression ou périodogramme de Lomb).

Nous proposons d'élargir le champ de recherche en regardant l'invariance d'échelle discrète pour les processus stochastiques. La définition en est donnée ici.

Un processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ est à invariance d'échelle discrète d'exposant d'auto-similitude H et de rapport d'échelle fixé λ si :

$$X(\lambda t) \stackrel{d}{=} \lambda^H X(t), t \in \mathbb{R}^+. \quad (1)$$

Nous noterons (H, λ) -DSI cette propriété. L'égalité est l'égalité pour les probabilités que nous avons mentionnée. Dans la suite nous explorerons un cadre plus restreint en ne regardant que les propriétés au second ordre des processus. Tant la DSI que la stationnarité ou toute propriété sera ainsi entendue pour les fonctions de probabilité d'ordre 2. Les mêmes résultats peuvent être écrits sans grand changement si les propriétés sont pour les lois strictement.

2 DSI et cyclostationnarité

2.1 Transformation de Lamperti

Une approche riche de l'invariance a été proposée par J. Lamperti [5] qui a introduit une transformation inversible mettant en regard les processus auto-similaires, que l'on note $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ et les processus stationnaires, notés $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$. Nous l'appellerons transformation de Lamperti \mathcal{L} et elle se définit ainsi :

$$X(t) = (\mathcal{L}Y)(t) \hat{=} t^H Y(\ln t), t \in \mathbb{R}^+; \quad (2)$$

$$Y(t) = (\mathcal{L}^{-1}X)(t) \hat{=} e^{-Ht} X(e^t), t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Le théorème montré par Lamperti [5] dit alors qu'un processus $Y(t)$ est stationnaire si et seulement si sa transformée de Lamperti $X = \mathcal{L}Y$ est auto-similaire. L'argument central est que la transformation d'un processus translaté en temps est en fait la dilatation du processus image. Ainsi \mathcal{L} permet de relier l'opérateur de translation et l'opérateur de dilatation et, par conséquent, les propriétés construites sur ces opérations (stationnarité et invariance d'échelle). Soit $(\mathcal{D}_\lambda^H X)(t) \hat{=} \lambda^{-H} X(\lambda t)$ l'opération de dilatation et $(\mathcal{S}_\tau Y)(t) \hat{=} Y(t + \tau)$ celle de translation, alors on a :

$$(\mathcal{L}^{-1} \mathcal{D}_\lambda^H \mathcal{L} Y)(t) \stackrel{d}{=} (\mathcal{S}_{\ln \lambda} Y)(t). \quad (4)$$

Cette correspondance permet alors de connecter des propriétés définies à partir de \mathcal{D} et \mathcal{S} entre elles plus largement que dans le théorème donné. En relâchant partiellement l'hypothèse stricte de stationnarité, on obtient par \mathcal{L} des processus présentant une invariance d'échelle affaiblie. Cette idée est plus développée dans [6] et nous regarderons ici uniquement la DSI. Une propriété utile donne la fonction de corrélation après transformation :

$$\mathbb{E}\{X(t)X(s)\} \hat{=} R_X(t, s) = (st)^H R_Y(\ln t, \ln s). \quad (5)$$

Notons brièvement que plusieurs résultats ont été obtenus récemment à l'aide de \mathcal{L} pour des processus strictement auto-similaires. Yazici et Kashyap [7] ont donné un modèle général de signaux de ce type. Nuzman et Poor [8] ont obtenus des résultats importants sur la prédiction, le filtrage et l'interpolation d'un mouvement Brownien fractionnaire tandis que Vidács et Virtamo [9] se sont posés la question de l'estimation de son paramètre H . Enfin Burnecki et collaborateurs [10] ont abordé le cas des processus

H -ss et α -stables. Tous ces travaux ont eu recours de façon essentielle à la transformée de Lamperti pour transformer la question posée en un problème équivalent pour un processus stationnaire. Nous proposons de montrer que l'on peut aussi envisager d'utiliser des méthodes non stationnaires afin d'étudier une propriété comme la DSI.

2.2 DSI : image de la cyclostationnarité

Rappelons qu'un processus est cyclostationnaire [11] ou périodiquement corrélé [12, 13] si sa fonction de corrélation est périodique en temps. Soit T la période, le processus vérifie à tous les instants t et s :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Y(t+T) &= \mathbb{E} Y(t), \\ \mathbb{E}\{Y(t+T)Y(s+T)\} &= \mathbb{E}\{Y(t)Y(s)\}, \end{aligned} \quad (6)$$

Une décomposition en série de Fourier est alors possible et donne :

$$R_Y(t, t + \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\tau) e^{i2\pi n t/T}. \quad (7)$$

Le résultat, sur lequel la suite s'appuie, est une extension du théorème de Lamperti qui se base sur les définitions données pour la DSI et la cyclostationnarité, ainsi que la propriété (4).

Un processus est cyclostationnaire de période T si et seulement si sa transformée de Lamperti de paramètre H , $\{X(t) = t^H Y(\ln t), t \in \mathbb{R}^+\}$, est (H, e^T) -DSI.

La correspondance (5), permet de donner la forme générale de la fonction de corrélation d'un processus à DSI. Elle s'exprime naturellement sur une base de fonctions de Mellin.

$$R_X(t, kt) = k^H t^{2H} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(k) t^{i2\pi n / \ln \lambda}. \quad (8)$$

Les fonctions de Mellin $t^{H+i2\pi n / \ln \lambda}$ sont centrales à l'étude de la DSI. Elles sont elles-mêmes à invariance d'échelle discrète déterministe au sens de Sornette, et sont invariante à une phase près par dilatation comme le sont les fonctions de Fourier. Elles sont d'ailleurs images par \mathcal{L} de la base de Fourier. De plus leur structure de base et la possibilité de calculer une transformation associée [14] rend leur emploi possible.

3 Générer des processus à DSI

Appliquant \mathcal{L} à un modèle ARMA(p, q) on obtient un système H -ss à temps continu [7] qui est une généralisation du modèle d'Euler-Cauchy (EC). Il est attaqué par un bruit Gaussien $\eta(t)$ de corrélation $\mathbb{E}\{\eta(t)\eta(s)\} = t\sigma^2\delta(t-s)$. Le processus résultant $X(t)$ vérifie :

$$\sum_{n=0}^p b_n t^n \frac{d^n}{dt^n} X(t) = \sum_{m=0}^q d_m t^{m+H} \frac{d^m}{dt^m} \eta(t). \quad (9)$$

À l'image de la construction de modèles ARMA cyclostationnaires [15], on a un modèle à DSI en prenant dans EC des coefficients a_m et b_n variant dans le temps de façon

log-périodique. Nous ne détaillerons pas plus les modèles à DSI ainsi obtenus.

La synthèse de séquences numériques peut s'envisager en adaptant des modèles à temps discret qui sont analogues à EC (donc H -ss d'une certaine manière) en introduisant la log-périodicité. Une première possibilité est d'intégrer directement EC entre deux instants et de discrétiser ainsi le système. Pour le premier ordre ($p=1$) le calcul proposé dans [16] conduit au modèle non stationnaire $X_k = a[k]X_{k-1} + e_k$, où e_k est un bruit Gaussien blanc tel que $\mathbb{E}e_k^2 \propto k^{2H-1}$ aux longs temps $k \gg 1$. La généralisation à un ordre p quelconque donne une structure de la forme :

$$\begin{aligned} (1-B)^n X_k + a_1 k^{-1} (1-B)^{n-1} X_{k-1} \\ = k^{-2} \text{AR}(n-1) X_{k-1} + e_k + \mathcal{O}(k^{-3}) \end{aligned} \quad (10)$$

où B est l'opérateur de décalage d'un échantillon en temps, et AR signifie un modèle auto-régressif (dont les coefficients peuvent être calculés explicitement en fonction des b_n).

Ce même système, pris avec des coefficients dépendant du temps et périodiques en $\ln t$, est à DSI. De la même façon, si ce système est mis en cascade avec un filtre AR de coefficients log-périodiques, la même propriété est obtenue. Par exemple nous montrons en figure 1 une trace d'un processus construit par un EC d'ordre 2 à la suite d'un AR(1) log-périodique dont le coefficient est donné ci-dessous en (12).

Une autre classe de modèle est proposée à partir de l'opérateur de dérivée fractionnaire exprimé à temps discret. Elle conduit aussi à des comportements auto-similaires approchés (modèles de type FARIMA). Au lieu d'utiliser l'écriture classique par développement binomial, nous préférons construire sa discrétisation en suivant [17]. On définit un opérateur de dilatation à temps discret en utilisant une généralisation de la transformée bilinéaire qui permet de passer du monde des processus à temps continu (où la dilatation s'exprime sans peine) à celui des séquences à temps discrets. Le filtre $l_1[n]$ qui représente l'opérateur de différence fractionnaire s'écrit alors :

$$l_1[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(r+k) \Gamma(-r+n-k)}{\Gamma(k+1) \Gamma(n-k+1) \Gamma(r) \Gamma(-r)}. \quad (11)$$

En le faisant suivre par un AR non stationnaire log-périodique, de la DSI est obtenue. Nous nous limitons dans les exemples à un AR(1) qui a pour coefficient :

$$l_2 = \left(\rho + \beta_r \cos \frac{2\pi \ln t}{\ln \lambda} \right) e^{i2\pi f_0 (1 + \beta_f \cos(2\pi \frac{\ln t}{\ln \lambda}))}. \quad (12)$$

Nous prenons bien soin que le filtre reste stable à chaque instant. La figure 1 (à droite) montre un exemple de réalisation de ce processus, que nous analyserons dans la suite.

4 Analyse par « délampertisation »

Cette classe générale de processus (ou de séquences aléatoires pour le traitement numérique) non stationnaires, mais d'une structure spécifique, nécessite des outils généraux d'analyse propres. Pour la cas d'une séquence X_t

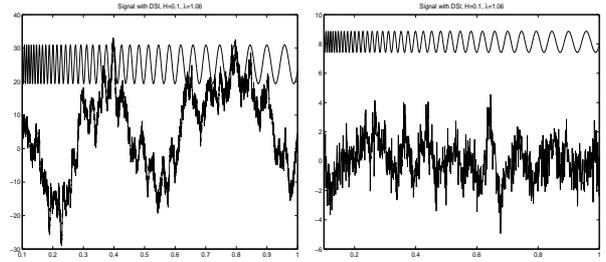


FIG. 1 – Des réalisations typiques de séquences à DSI. À gauche le modèle est un système d'Euler-Cauchy discrétisé d'ordre 2, suivi d'un AR(1) log-périodique. À côté, le processus est construit avec l'opérateur de différence fractionnaire (voir le texte). Les signaux comportent 5000 points, $H = 0.1$, $\lambda = 1.1$. On a représenté au-dessus les oscillations log-périodiques de l'AR. $f_0 = 1/8$, $\rho = 0.6$, $\beta_r = 0.25$ et $\beta_f = 0$.

suspectée de DSI, la voie la plus simple est d'appliquer \mathcal{L}^{-1} et d'analyser alors le processus obtenu qui est supposé cyclostationnaire.

De manière générale, les méthodes stationnaires classiques permettent de s'attaquer ainsi à de nombreux problèmes concernant l'auto-similarité par « délampertisation » du signal. Ce fut mis en œuvre dans [7, 8, 10]. Les méthodes qui traitent des situations non stationnaires correspondent elles à l'étude de signaux qui ne sont pas auto-similaires mais possèdent une sorte de non stationnarité en échelle, vis-à-vis de l'opération de dilatation.

Avant de montrer l'utilisation effective de méthodes cyclostationnaires pour la DSI, une question se pose : comment calculer à temps discret la transformation de Lamperti inverse? Il faut d'abord soit recourir à un échantillonnage géométrique, $t = q^n$ (ce qui est rarement le cas dans des données expérimentales), soit passer par une interpolation. Connaissant une séquence X_t échantillonnée usuellement, on connaît alors sa transformée inverse Y_t pour $t = \ln n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et il faut reconstruire celle-ci pour $t = m$, $m \in \mathbb{Z}$. Le premier graphe de la figure 2 montre un exemple de reconstruction de Y à partir du processus présenté à la gauche de la figure 1.

Ensuite H intervient explicitement dans \mathcal{L} alors qu'il est *a priori* inconnu. L'utiliser avant d'analyser le signal semble audacieux. En fait les outils cyclostationnaires utilisés ensuite se révèlent peu sensibles à l'effet d'amplitude de H et on peut utiliser un exposant factice $H = 0$ ou $H = 0.5$ en général pour calculer la transformée et la non stationnarité en amplitude n'affectera pas sensiblement l'analyse.

Un exemple d'analyse est proposé ici sur les modèles de synthèse de la partie précédente. La méthode d'estimation d'un périodogramme cyclique lissé proposée dans [18] a été testée sur les séquences à DSI. Sans entrer dans les détails, la méthode consiste d'abord à découper le signal en N segments de longueur L afin de pouvoir moyenner sur ceux-ci. Une fenêtre de pondération h permet de calculer un spectre filtré :

$$\tilde{Y}_T(n, f) = \sum_{l=-N/2}^{N/2} h(l) Y(n-l) e^{-i2\pi f(n-l)T_e} \quad (13)$$

Les composantes spectrales sont ensuite corrélées aux

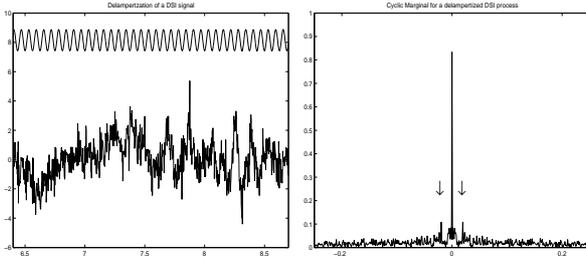


FIG. 2 – La séquence cyclostationnaire obtenue avec \mathcal{L}^{-1} à partir du signal tracé à droite de la figure 1 est représenté. À droite, la distribution marginale en fréquence cyclique montre un pic central (énergie totale du signal) et deux pics symétriques. Ceux-ci, pointés par des flèches, sont l'indication de la cyclostationnarité et sont situés aux fréquences $\pm 2\pi/\ln \lambda$.

fréquences $f - \nu_c/2$ et $f + \nu_c/2$ par un simple multiplieur suivi d'un filtre passe-bas g :

$$S_Y^{\nu_c}(v, f) = \sum_n \tilde{Y}_T(n, f - \frac{\nu_c}{2}) \tilde{Y}_T^*(n, f + \frac{\nu_c}{2}) g(v - n).$$

La quantité $S_Y^{\nu_c}(v, f)$ est une estimation du spectre de corrélation cyclique. Le spectre usuel est obtenu sur la diagonale principale en $\nu_c = 0$. Si le processus est cyclostationnaire, les diagonales en $\nu_c = \pm 1/T$ (et d'éventuelles harmoniques) ont une contribution en $\tilde{C}_n(f)$ tandis que le spectre est nul en dehors de la diagonale si le processus est stationnaire. On a représenté la distribution marginale en fréquence cyclique sur la figure 2. Celle-ci présente des pics fins en $1/T$ où $\lambda = e^T$, ce qui est une signature expérimentale de la DSI et permet une estimation de λ .

5 Vers des outils « à la Mellin »

Une deuxième voie d'approche du problème d'analyse est prometteuse. Il s'agit de réécrire les méthodes directement dans le formalisme de Mellin, sans rééchantillonnage géométrique. En quelque sorte on « lampertise » les outils alors qu'on a « délampertisé » les signaux jusqu'ici.

L'interpolation directe perd de l'information en ne permettant de reconstruire que peu de points à court temps (en fait les points à $m < 0$ ne sont pas accessibles) et ignorant beaucoup de détails aux temps longs (un point sur beaucoup seulement est effectivement utilisé). Pour conserver une fiabilité statistique des outils, il faut disposer au départ d'un grand nombre de points. Un avantage, remarqué dans [9, 10], est tout de même que le nombre plus faible dans X (et donc Y) après un rééchantillonnage géométrique aide à réduire le coût de calcul assez important des algorithmes non stationnaires employés.

Quand on ne peut disposer d'un grand nombre de points, le rééchantillonnage entraîne une perte non négligeable d'information exploitée. Dans beaucoup de méthodes cyclostationnaires, il suffit de remplacer la transformée de Fourier par son équivalent transformé par \mathcal{L} , c'est-à-dire la transformée de Mellin. Des outils directement utilisables sur un processus à DSI peuvent alors être écrits. Pour des processus auto-similaires avec $H = 0$, des estimateurs construits ainsi furent donnés dans [19] et peuvent être adaptés pour tenir compte de H et de la DSI.

Références

- [1] G. Samorodnitsky and M. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman&Hall, 1994.
- [2] B. Dubrulle, F. Graner, and D. Sornette, *Scale Invariance and Beyond*, EDP Sciences - Springer, 1997.
- [3] D. Sornette, "Discrete scale invariance and complex dimensions," *Physics Reports*, vol. 297, pp. 239–270, 1998.
- [4] H. Saleur and D. Sornette, "Complex exponents and log-periodic corrections in frustrated systems," *J. Phys. I France*, vol. 6, pp. 327–355, Mar. 1996.
- [5] J. Lamperti, "Semi-stable stochastic processes," *J. Time Series Anal.*, vol. 9, no. 2, pp. 62–78, 1962.
- [6] P. Borgnat, P. Flandrin, and P.-O. Amblard, "Stochastic discrete scale invariance," subm. to *Signal Processing Lett.*, Apr. 2001.
- [7] B. Yazici and R. L. Kashyap, "A class of second-order stationary self-similar processes for $1/f$ phenomena," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 45, no. 2, pp. 396–410, 1997.
- [8] C. Nuzman and V. Poor, "Linear estimation of self-similar processes via Lamperti's transformation," *J. of Applied Probability*, vol. 37, no. 2, pp. 429–452, June 2000.
- [9] A. Vidács and J. Virtamo, "ML estimation of the parameters of fBm traffic with geometrical sampling," in *IFIP TC6, Int. Conf. on Broadband communications '99*. Nov. 1999, Hong-Kong.
- [10] K. Burnecki, M. Maejima, and A. Weron, "The Lamperti transformation for self-similar processes," *Yokohama Math. J.*, vol. 44, pp. 25–42, 1997.
- [11] W. Gardner and L. Franks, "Characterization of cyclostationary random signal processes," *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. IT-21, no. 1, pp. 4–14, Jan. 1975.
- [12] E. Gladyshev, "Periodically and almost periodically correlated random processes with continuous time parameter," *Theory Prob. and Appl.*, vol. 8, pp. 173–177, 1963.
- [13] H. Hurd, *An investigation of periodically correlated stochastic processes*, Ph.D. thesis, Duke Univ. dept. of Electrical Engineering, Nov. 1969.
- [14] J. Bertrand, P. Bertrand, and J.P. Ovarlez, "The Mellin transform," in *The Transforms and Applications Handbook*, A.D. Poularikas, Ed. CRC Press, 1996.
- [15] S. Lambert-Lacroix, "On periodic auro-regressive processes estimation," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 48, no. 6, pp. 1800–1803, 2000.
- [16] E. Noret and M. Guglielmi, "Modélisation et synthèse d'une classe de signaux auto-similaires et à mémoire longue," in *Proc. Conf. Delft (NL) : Fractals in Engineering*. 2000, pp. 301–315, INRIA.
- [17] W. Zhao and R. Rao, "On modeling self-similar random processes in discrete-time," in *Proc. IEEE Time-Frequency and Time-Scale*, Oct. 1998, pp. 333–336.
- [18] R. Roberts, W. Brown, and H. Loomis, "Computationally efficient algorithms for cyclic spectral analysis," *IEEE SP Magazine*, pp. 38–49, Apr. 1991.
- [19] H. L. Gray and N. F. Zhang, "On a class of nonstationary processes," *Journal of Time Series Analysis*, vol. 9, no. 2, pp. 133–154, 1988.