

Des “chirps” partout

Patrick Flandrin*

CNRS — École Normale Supérieure de Lyon

*avec la collaboration de

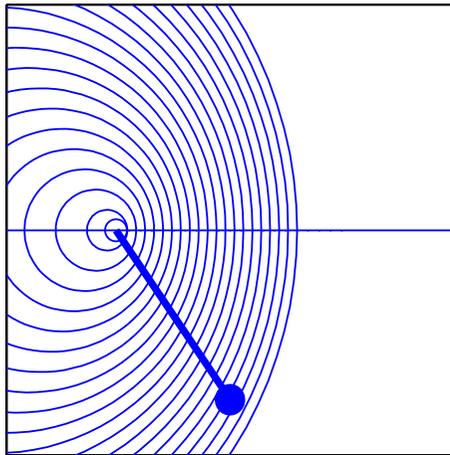
Pierre-Olivier Amblard (LIS Grenoble), François Auger (Univ. Nantes),
Pierre Borgnat (ENS Lyon), Eric Chassande-Mottin (Obs. Nice),
Franz Hlawatsch (TU Wien), Paulo Gonçalves (INRIAAlpes),
Olivier Michel (Univ. Nice) et Jeffrey C. O’Neill (iConverse)

observer

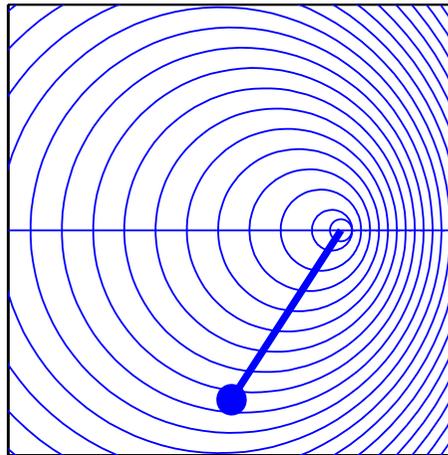
L'effet Doppler

Source monochromatique en mouvement \Rightarrow perception *différentielle* de la fréquence émise.

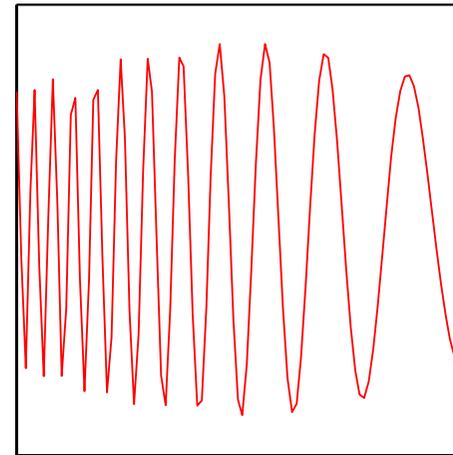
$f + \Delta f$



$f - \Delta f$



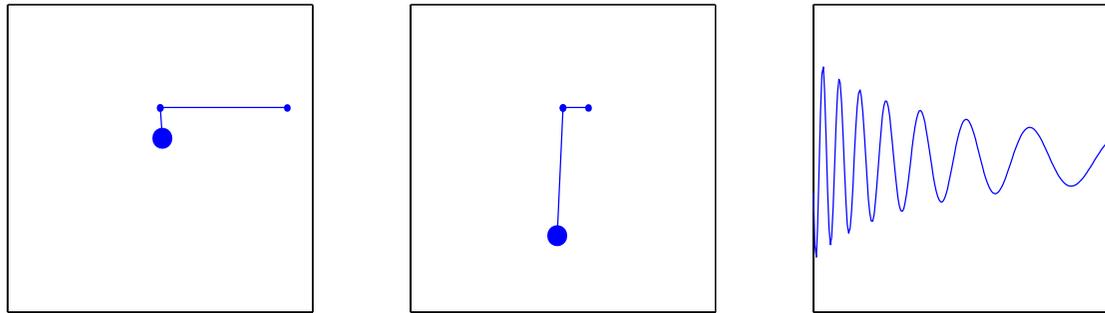
"chirp"





Le pendule simple

$$\ddot{\theta}(t) + (g/L) \theta(t) = 0$$



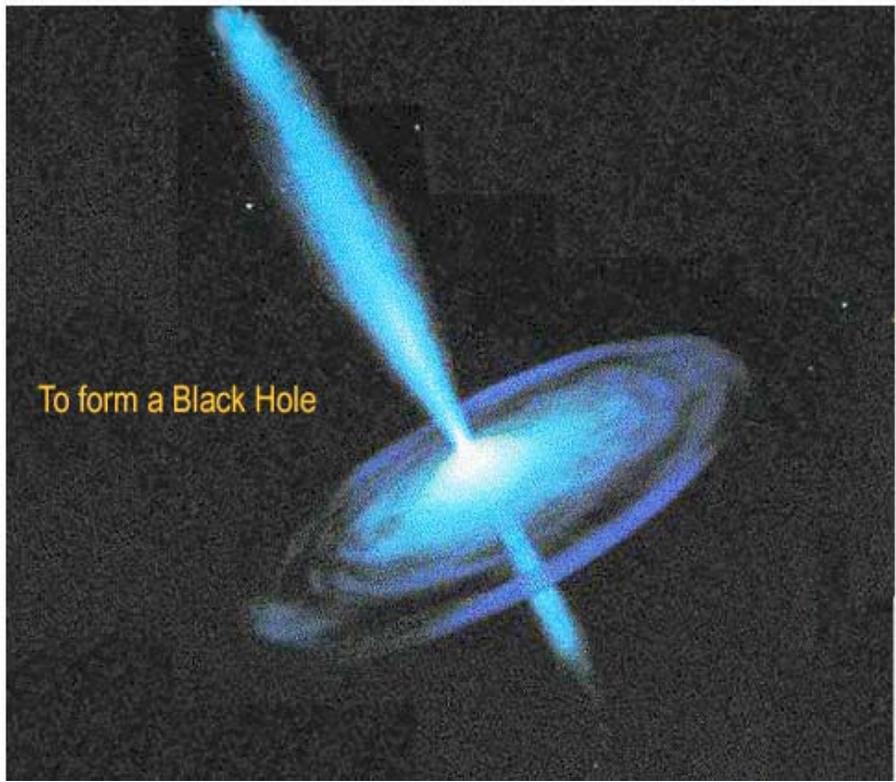
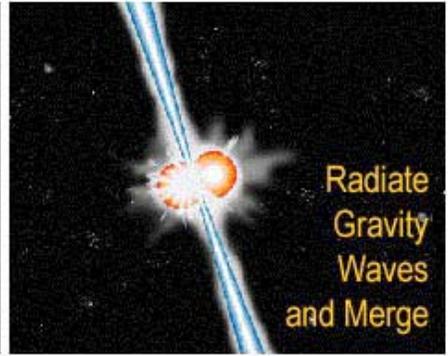
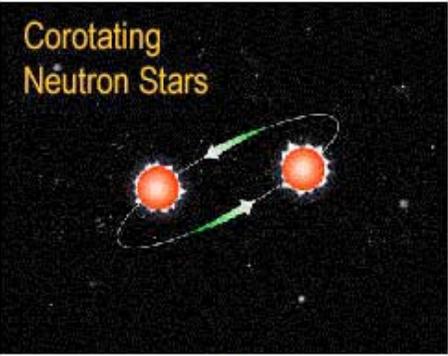
Longueur fixe $L = L_0$ — Petites oscillations sinusoidales, de période fixe $T_0 = 2\pi\sqrt{L_0/g}$.

Longueur "lentement" variable $L = L(t)$ — Petites oscillations quasi-sinusoidales, de pseudo-période variable $T(t) \sim 2\pi\sqrt{L(t)/g}$.

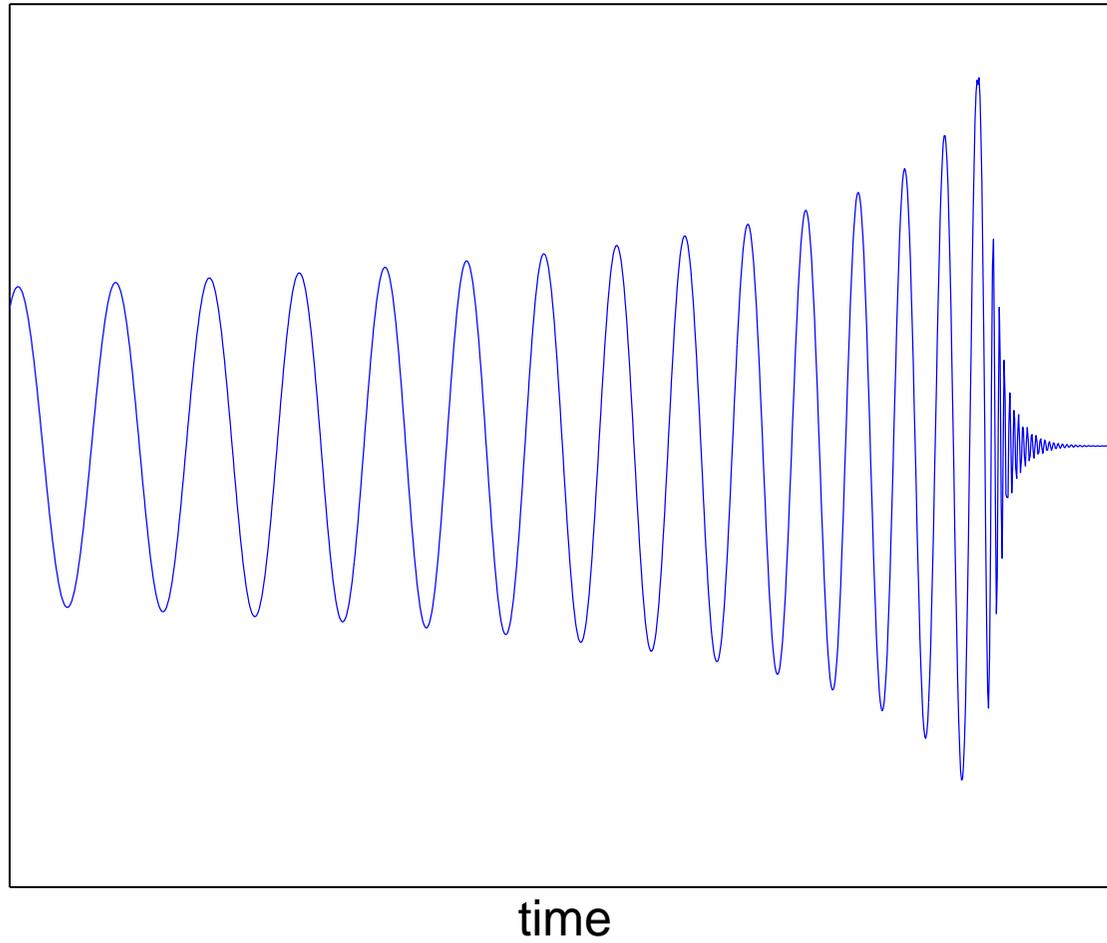
Les ondes gravitationnelles

Théorie — Prévues par la relativité générale, les *ondes gravitationnelles* n'ont encore jamais été observées directement. Ce sont des “vibrations de l'espace-temps,” dues à l'accélération de masses en mouvement \Rightarrow les sources les plus prometteuses sont d'origine *astrophysique* (exemple des binaires d'étoiles à neutrons en coalescence).

Expériences — Plusieurs grands instruments (projets VIRGO pour la France et l'Italie, LIGO pour les USA) sont actuellement en construction pour une mise en évidence *terrestre* par *interférométrie laser*.



gravitational wave



VIRGO



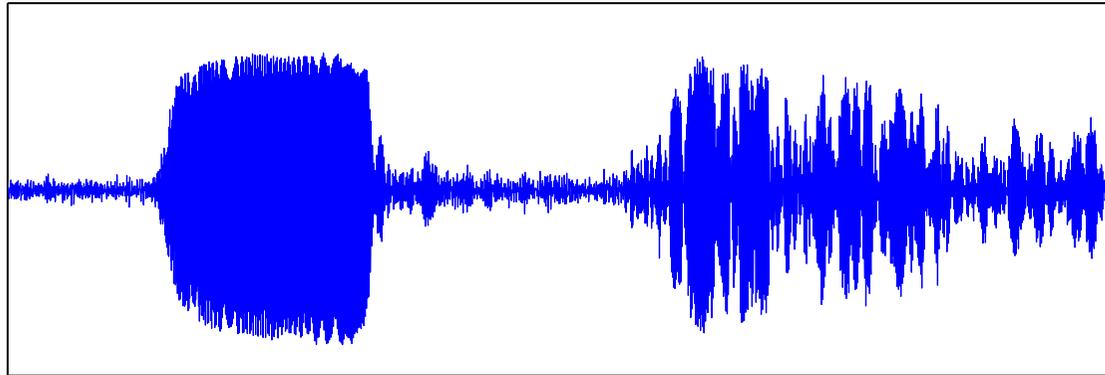
L'écholocation de la chauve-souris

Systeme — Système (*actif*) de navigation, sonar naturel.

Signaux — Ondes acoustiques ultrasonores, brèves (quelques ms) et “large bande” (quelques dizaines de kHz entre 40 et 100kHz).

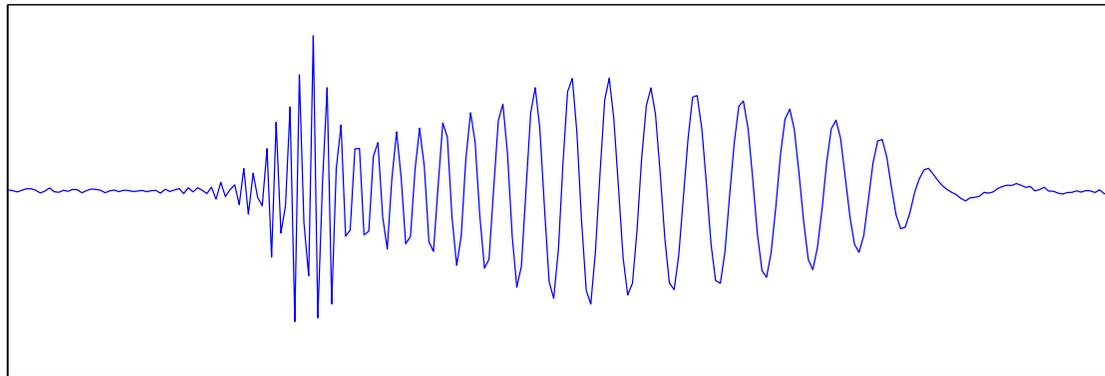
Performances — Proches de l'optimalité, avec *adaptation* des formes d'ondes à des tâches multiples (détection, estimation, reconnaissance, réjection d'interférences, ...).

bat echolocation call + echo



time

bat echolocation call (heterodyned)



time

D'autres exemples

Ondes et vibrations — Chants d'oiseaux, musique (“glissando”), parole, “sifflements atmosphériques”, vagues déferlantes, impulsions large-bande se propageant dans un milieu dispersif, diapason (corde, tuyau) de longueur variant dans le temps, vibro-sismique, radar, sonar large-bande, . . .

Biologie et médecine — EEG (crise d'épilepsie), EMG utérin (contractions), . . .

Désordre et phénomènes critiques — Structures cohérentes en turbulence, accumulation de précurseurs de tremblements de terre, “bulles spéculatives” précédant un crash financier, . . .

Fonctions mathématiques — Riemann, Weierstrass, . . .

décrire

Chirps

Définition — On appellera “chirp” tout signal complexe de la forme $x(t) = a(t) \exp\{i\varphi(t)\}$, où $a(t) \geq 0$ est une amplitude passe-bas dont l'évolution est lente par rapport aux oscillations de la phase $\varphi(t)$.

Évolution lente ? — Les conditions heuristiques habituelles supposent que :

1. $|\dot{a}(t)/a(t)| \ll |\dot{\varphi}(t)|$: l'amplitude est *quasi-constante* à l'échelle d'une pseudo-période $T(t) = 2\pi/|\dot{\varphi}(t)|$.
2. $|\ddot{\varphi}(t)|/|\dot{\varphi}^2(t)| \ll 1$: la pseudo-période $T(t)$ est elle-même *lente-ment variable* d'oscillation à oscillation.

Le spectre d'un chirp

Phase stationnaire — Dans le cas où la dérivée $\dot{\varphi}(t)$ est une fonction monotone, on peut approcher le spectre

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{i(\varphi(t) - 2\pi ft)} dt$$

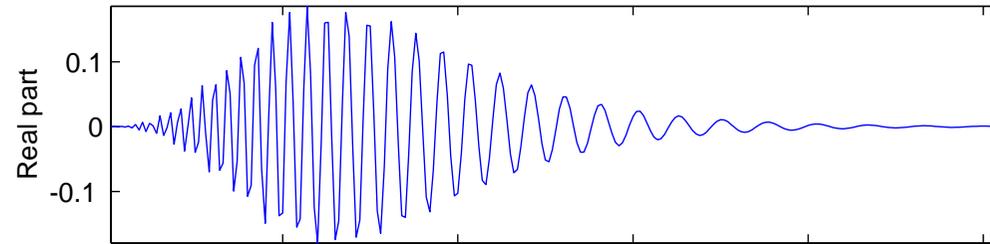
d'un chirp par son *approximation de phase stationnaire* $\tilde{X}(f)$.
On a en particulier

$$|\tilde{X}(f)|^2 \propto \frac{a^2(t_s)}{|\ddot{\varphi}(t_s)|},$$

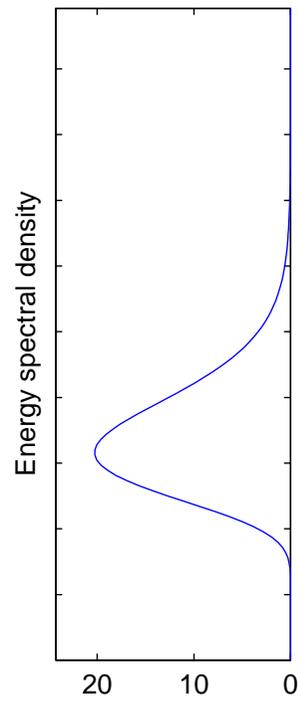
avec t_s tel que $\dot{\varphi}(t_s) = 2\pi f$.

Interprétation — La courbe de “fréquence instantanée” $\dot{\varphi}(t)$ met en correspondance bijective un temps et une fréquence. Le spectre s'en déduit en pondérant les *fréquences visitées* par les *durées de résidence*.

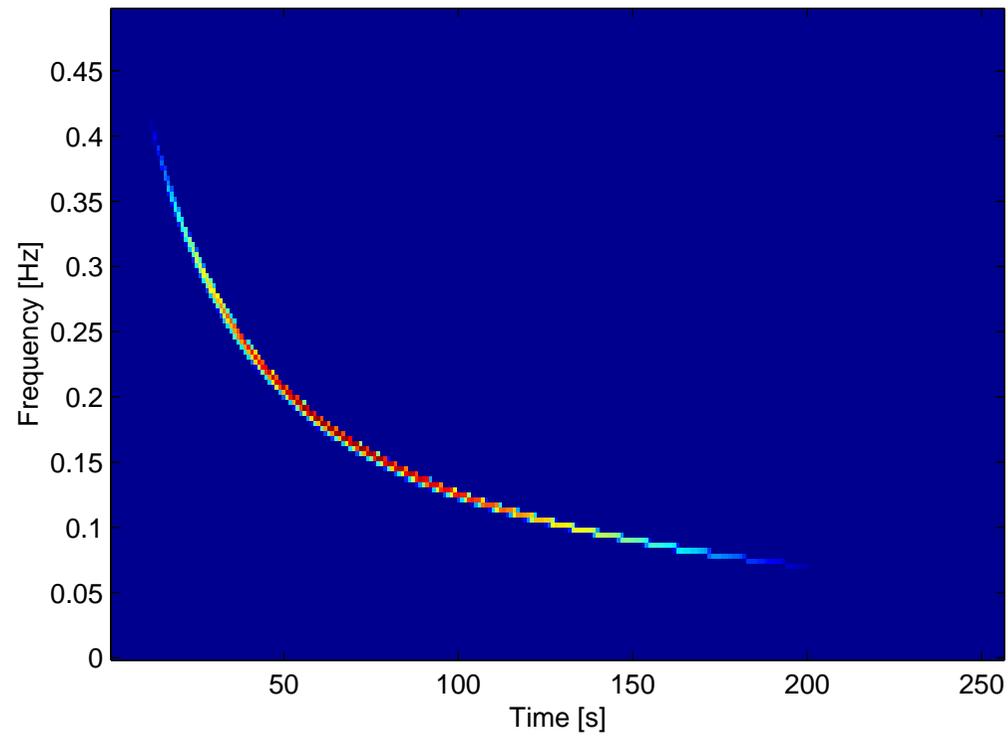
Signal in time



Linear scale



RSP, Lh=15, Nf=128, log. scale, Threshold=0.05%



représenter

Temps-fréquence



Idée — Donner un sens mathématique à la notation musicale

Objectif — Écrire la “partition” d’un signal

Contrainte — Obtenir une représentation *localisée* dans le cas d’un chirp :

$$\rho(t, f) \sim a^2(t) \delta(f - \dot{\varphi}(t)/2\pi).$$

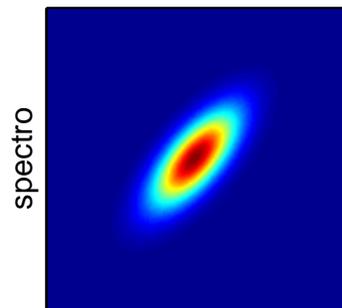
Méthodes locales et localisation

L'exemple de la TF à court-terme — On définit la quantité locale

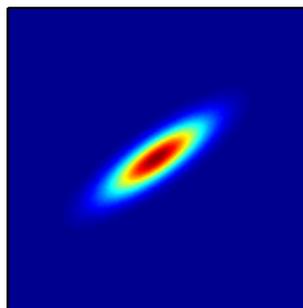
$$F_x^{(h)}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \overline{h(s-t)} e^{-i2\pi f s} ds.$$

Mesure — La représentation résulte d'une interaction entre le signal et un *appareil de mesure* (la fenêtre $h(t)$).

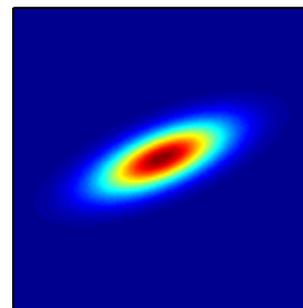
Adaptation — Adaptation aux *impulsions* si $h(t) \rightarrow \delta(t)$ et aux *raies spectrales* si $h(t) \rightarrow 1 \Rightarrow$ adapter l'analyse à des *chirps* quelconques suggère que $h(t)$ dépende (localement) du signal.



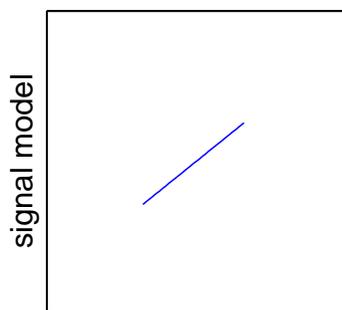
window = 21



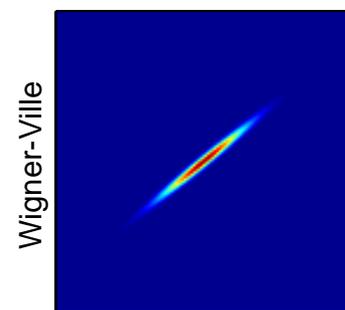
63



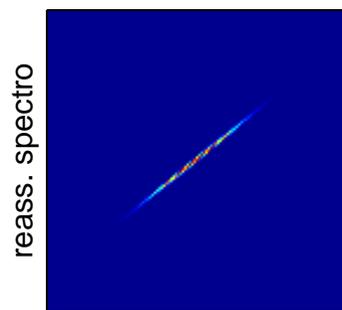
127 points



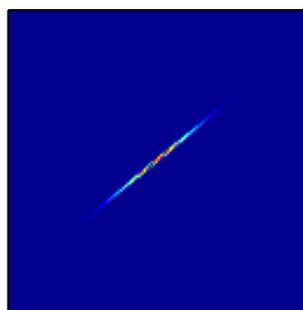
128 points



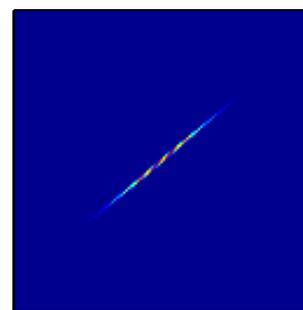
Wigner-Ville



window = 21



63



127 points

Auto-adaptation des méthodes locales

Filtrage adapté — Si l'on prend pour fenêtre $h(t)$ le signal retourné dans le temps $x_-(t) := x(-t)$, on obtient directement que $F_x^{(x_-)}(t, f) = W_x(t/2, f/2)/2$, où

$$W_x(t, f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) \overline{x(t - \tau/2)} e^{-i2\pi f\tau} d\tau,$$

est la *Distribution de Wigner-Ville* (Wigner, '32; Ville, '48).

Chirps linéaires — La DWV se localise *parfaitement* sur les droites du plan:

$$x(t) = \exp\{i2\pi(f_0 t + \alpha t^2/2)\} \Rightarrow W_x(t, f) = \delta(f - (f_0 + \alpha t)).$$

Remarque — La localisation par auto-adaptation conduit à une transformation *quadratique* (distribution d'énergie).

Au-delà des chirps linéaires

Approche globale — Le principe d'auto-adaptation par *compensation de phase* peut être étendu à des chirps *non linéaires* (Bertrand & Bertrand, '84 ; Gonçalves et F., '94).

Limitations — Spécificité des modèles et complexité calculatoire.

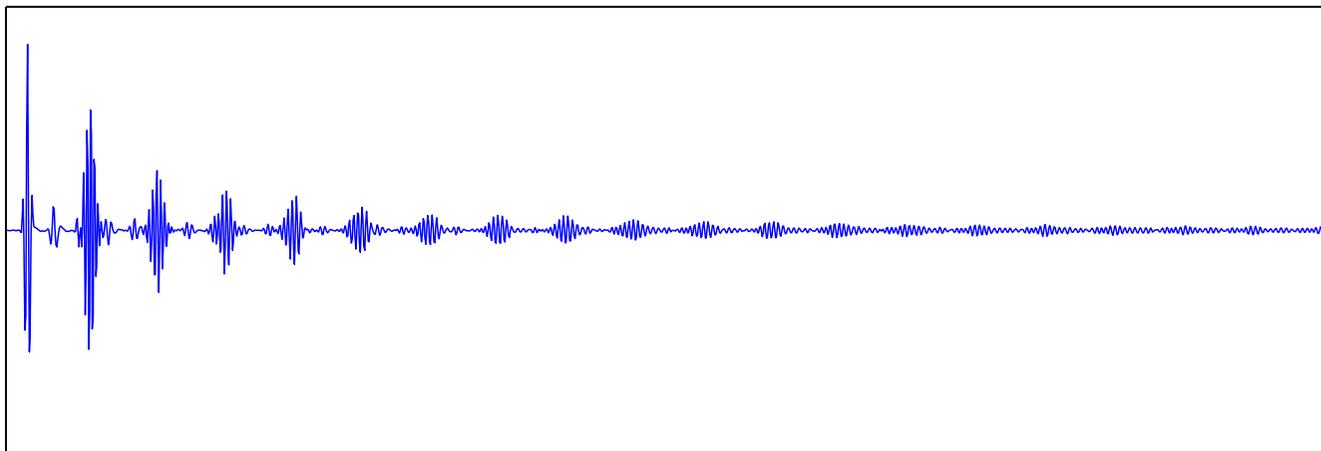
Approche locale — Spectrogramme/scalogramme = DWV *lissées* ⇒ distributions localisées par *réallocation* vers les centres de gravité *locaux* (Kodera et al., '76 ; Auger & F., '94).

manipuler

Chirps et dispersion

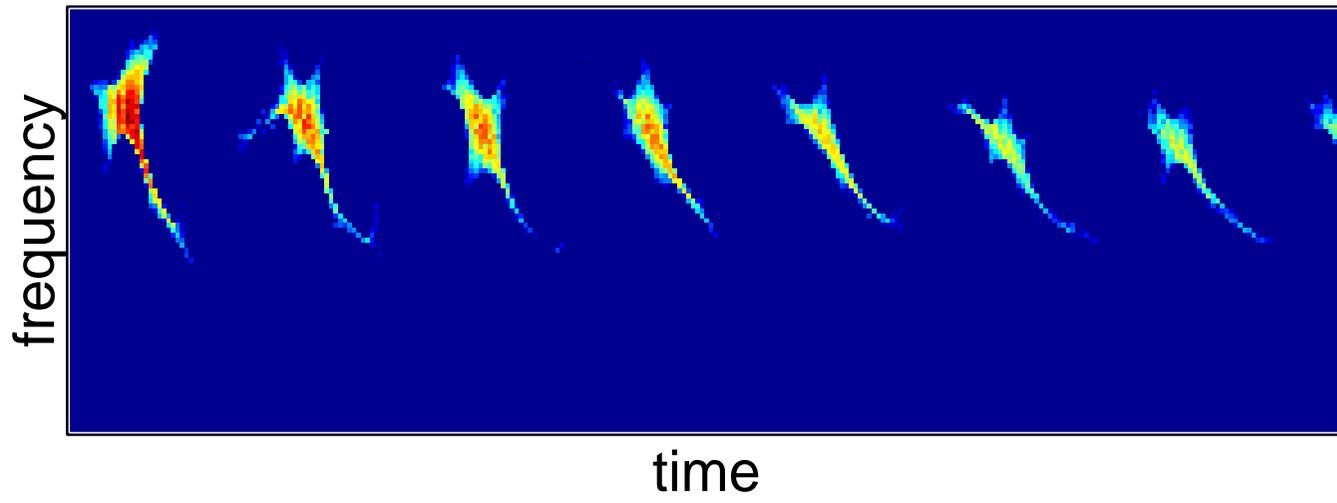
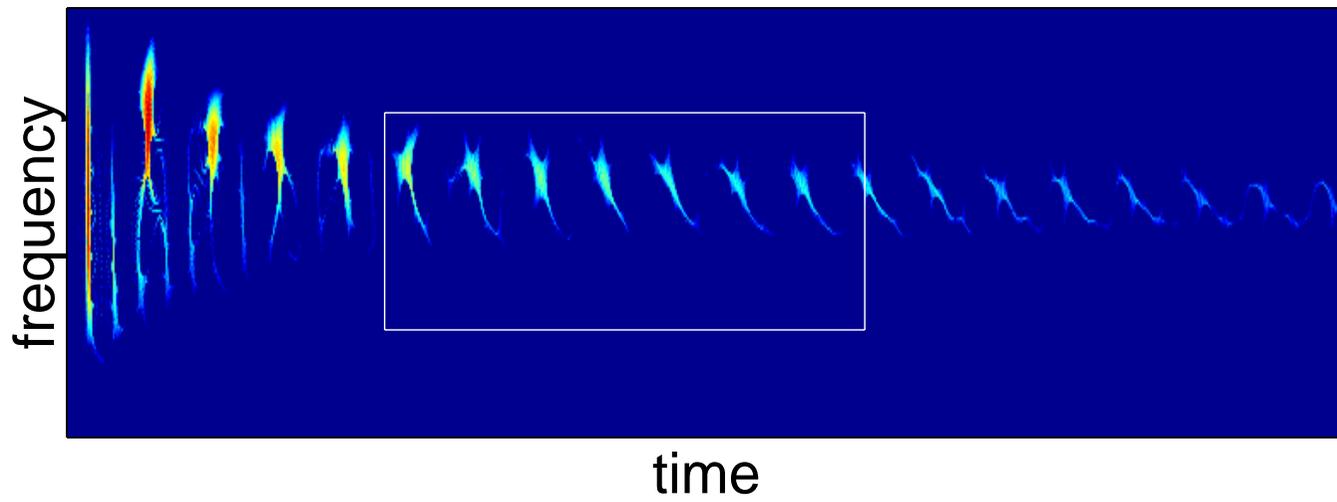
Exemple — Rétrodiffusion acoustique d'une onde ultrasonore sur une coque sphérique mince \Rightarrow dispersion fréquentielle des ondes de surface élastiques.

acoustic backscattering

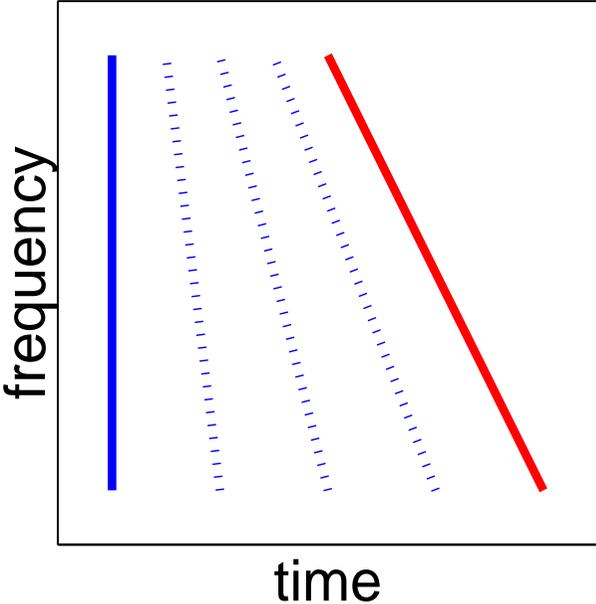


time

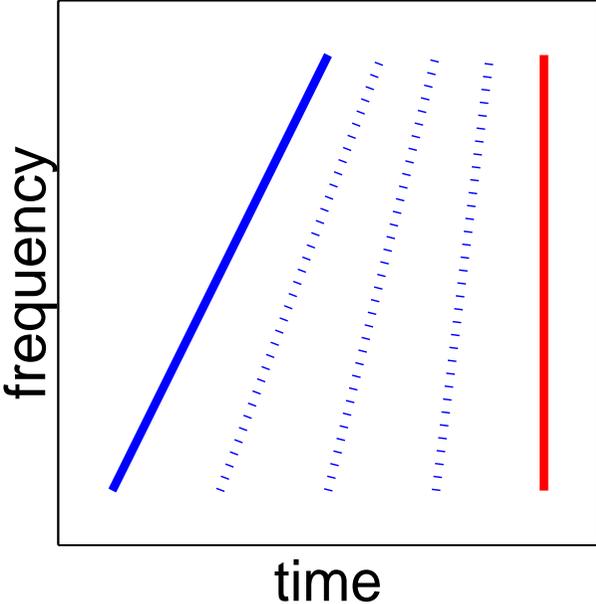
acoustic backscattering



dispersion



compression



Compression d'impulsion

Limite — Rayon de corrélation $\sim 1/\text{bande spectrale}$, \forall la durée du signal.

“Réception” — Post-traitement par *filtrage adapté* (radar, sonar, vibrosismique, contrôle non destructif).

“Émission” — Pré-traitement par *réseau dispersif* (production d'impulsions laser ultra-brèves).

Chirps et détection/estimation

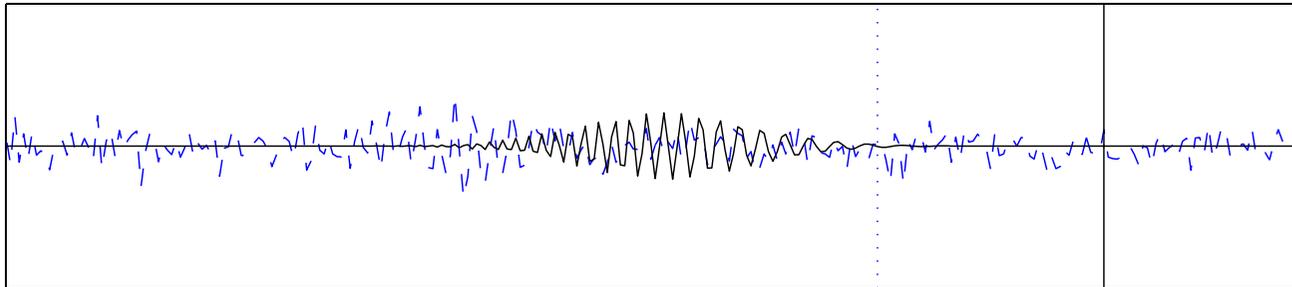
Optimalité — Filtrage adapté, maximum de vraisemblance, contraste, . . . : ingrédient de base = *corrélation* “signal reçu — copie du signal émis” .

Interprétation temps-fréquence — L'*unitarité* d'une distribution temps-fréquence $\rho_x(t, f)$ garantit l'équivalence :

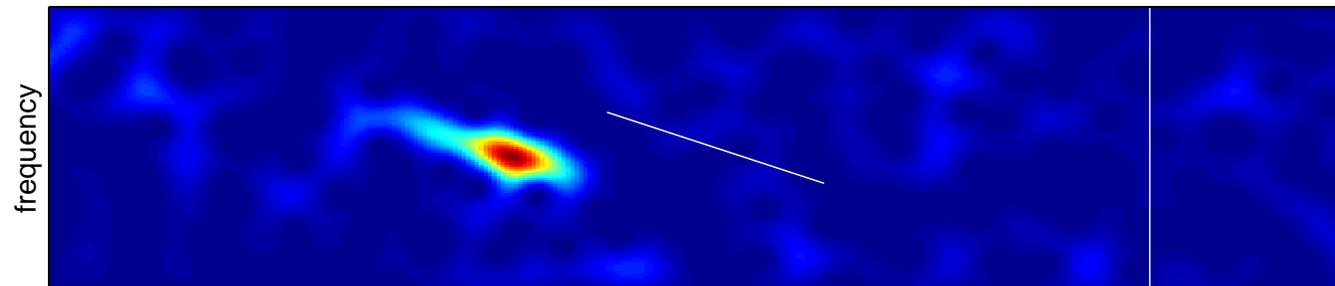
$$|\langle x, y \rangle|^2 = \langle \langle \rho_x, \rho_y \rangle \rangle.$$

Chirps — Unitarité + localisation \Rightarrow détection/estimation par *intégration de chemin* dans le plan.

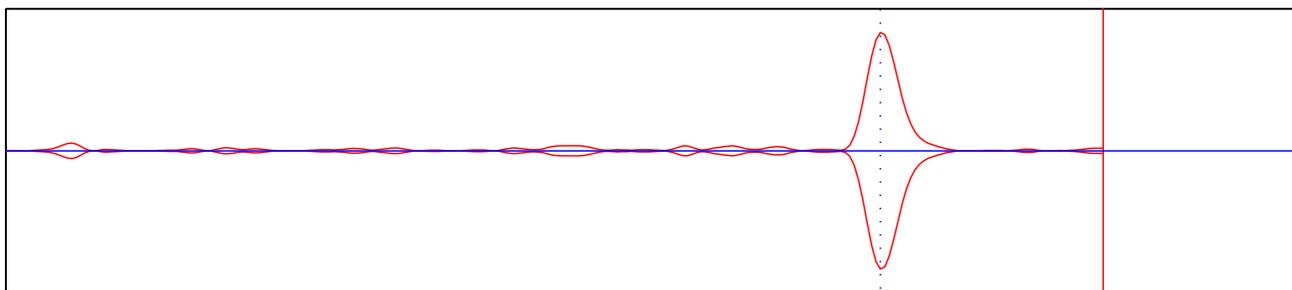
signal



Spectrogram



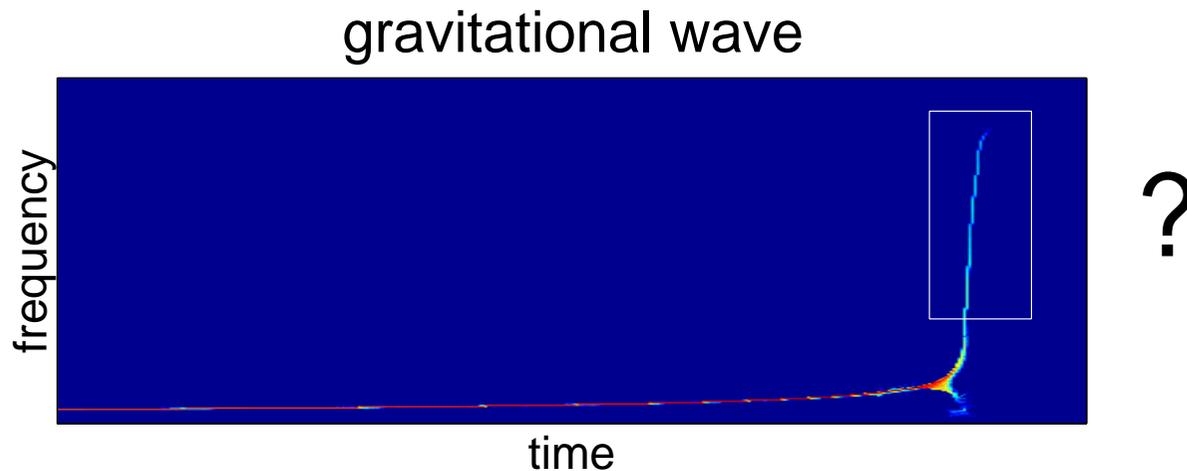
quadrature matched filter output



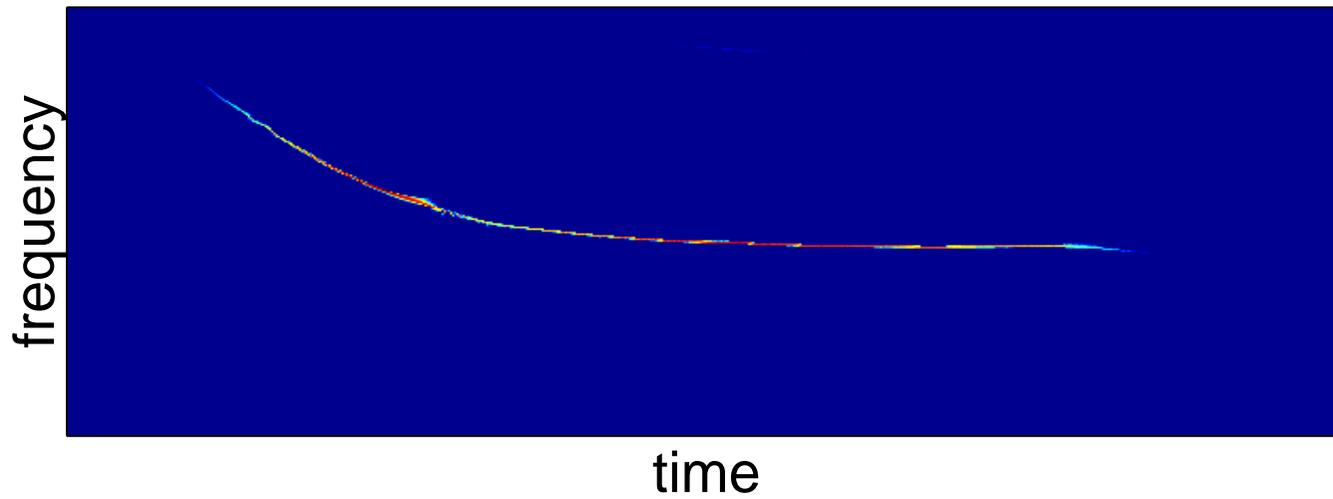
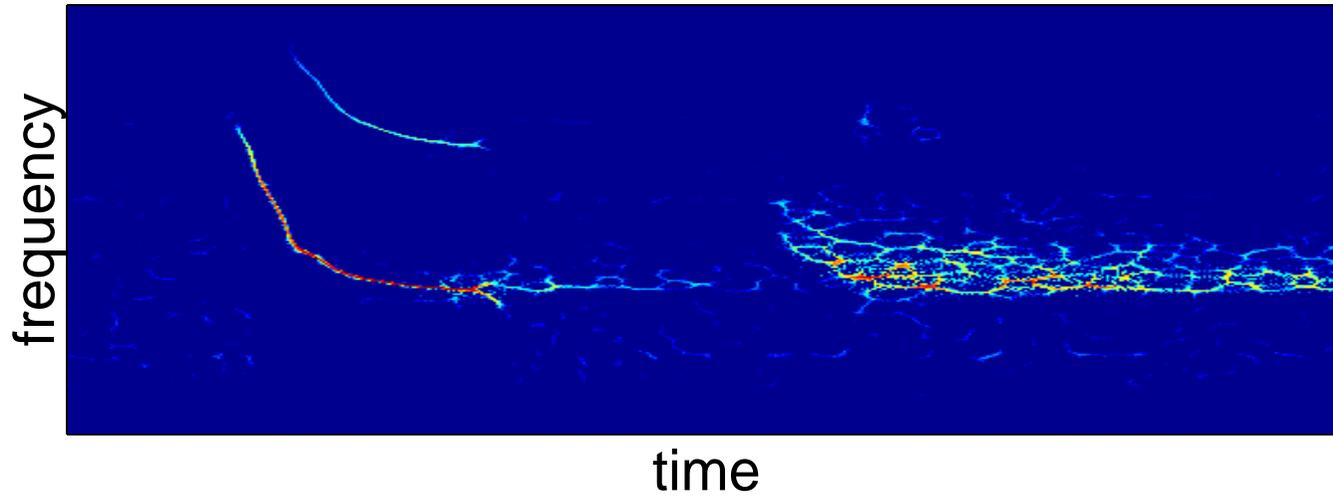
Détection temps-fréquence ?

Langage — Le point de vue temps-fréquence offre un *langage* naturel pour aborder des problèmes de détection/estimation *au-delà* des situations nominales.

Robustesse — Incorporation d'*incertitudes* sur le modèle d'un chirp en remplaçant la *courbe* d'intégration par un *domaine* (exemple des approximations post-newtonniennes dans le cas des ondes gravitationnelles).

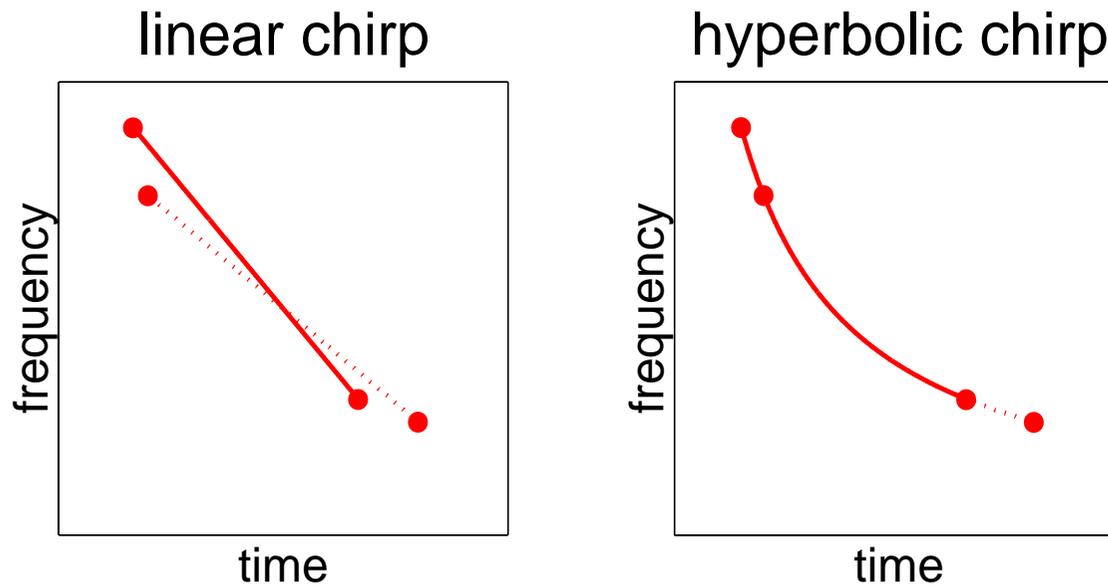


bat echolocation calls (+ echo)



Tolérance à l'effet Doppler

Conception de signal — Spécification de performances par interprétation *géométrique* de la structure temps-fréquence d'un chirp.



modéliser

Chirps et décompositions “atomiques”

Fourier — La transformée de Fourier (TF) usuelle peut s’écrire formellement comme $(\mathcal{F}x)(f) := \langle x, e_f \rangle$, avec $e_f(t) := \exp\{i2\pi ft\}$, de telle sorte que :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x, e_f \rangle e_f(t) df.$$

Extensions — Remplacer les exponentielles complexes par des chirps, considérés comme des versions *anamorphosées* d’ondes monochromatiques, ou par des “chirplets” (chirps de courte durée) \Rightarrow *TF (à court-terme, ou TO) modifiées.*

TF modifiées — Exemple

Transformée de Mellin — Une *Transformée de Mellin* (TM) d'un signal $x(t) \in L^2(\mathbb{R}^+, t^{-2\alpha+1} dt)$ peut se définir par la projection :

$$(\mathcal{M}x)(s) := \int_0^{+\infty} x(t) t^{-i2\pi s - \alpha} dt = \langle x, c \rangle.$$

- Analyse sur les chirps *hyperboliques* $c(t) := t^{-\alpha} \exp\{i2\pi s \log t\}$.
- $\dot{\varphi}_c(t)/2\pi = s/t \Rightarrow$, le paramètre de Mellin s peut s'interpréter comme un *taux de modulation hyperbolique*.
- La TM peut aussi se voir comme une TF *anamorphosée*, puisque $\tilde{x}(t) := e^{(1-\alpha)t} x(e^t) \Rightarrow (\mathcal{M}x)(s) = (\mathcal{F}\tilde{x})(s)$.

“Chirplets”

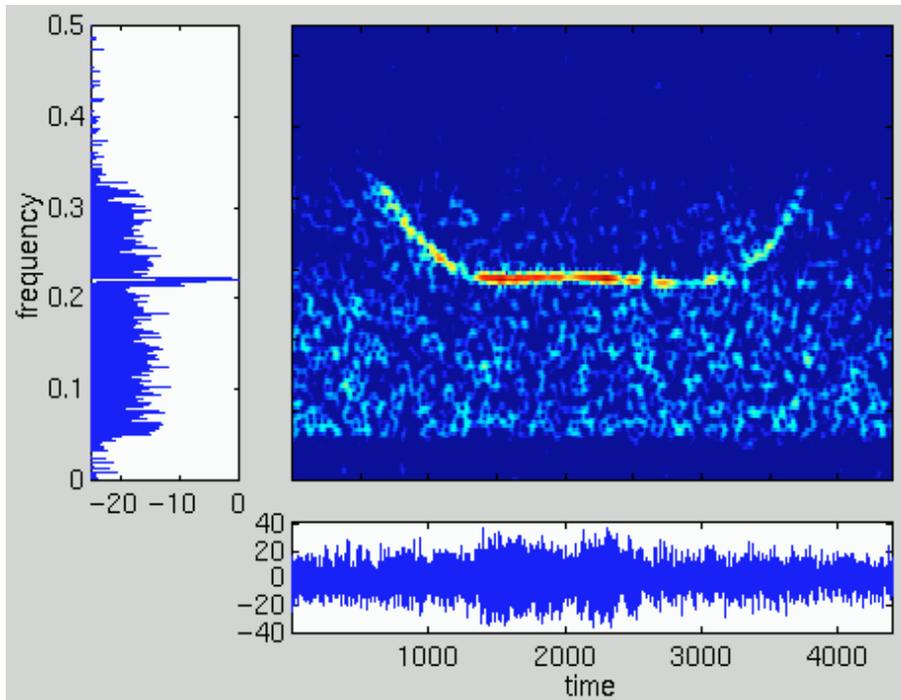
Des “gaborettes” et des “ondelettes” aux “chirplets” — Localisation + modulation conduisent à des représentations à 4 paramètres, par exemple de la forme $\langle x, x_{t,f,\alpha,\gamma} \rangle$ avec

$$x_{t,f,\alpha,\gamma}(s) \propto \exp\{-\pi(\gamma + i\alpha)(s - t)^2 + i2\pi f(s - t)\}.$$

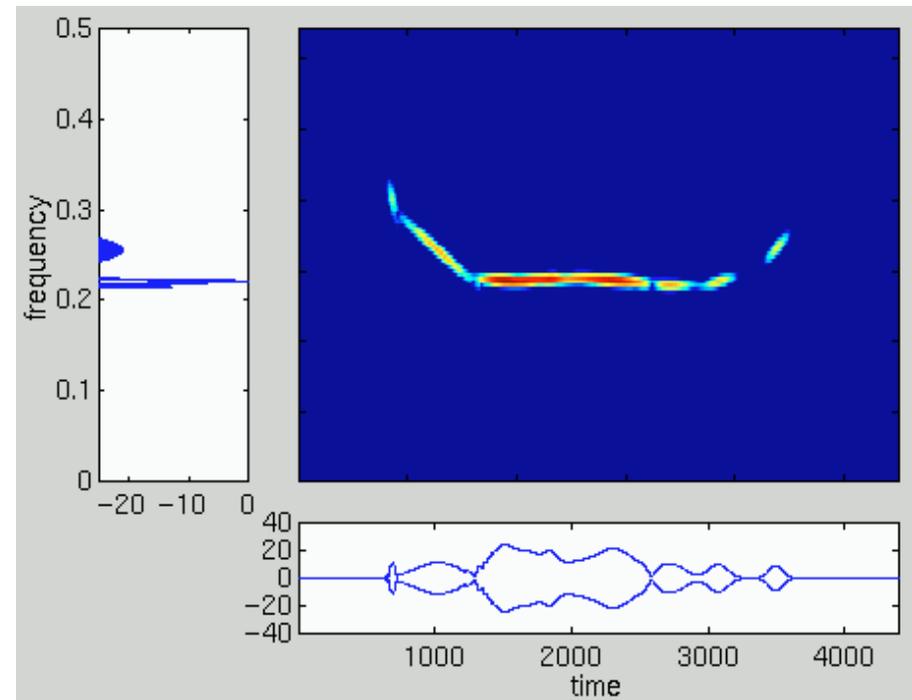
La décomposition vue comme un problème d'estimation — Les différentes chirplets constitutives d'un signal peuvent être *identifiées* séquentiellement par des techniques de type “matching (ou basis) pursuit” (Mallat & Zhang, '93; Chen & Donoho, '99; Bultan, '99; Gribonval, '99). Elles peuvent aussi être *estimées* au sens du maximum de vraisemblance (O'Neill & F., '98–'00).

Limitations de nature “paramétrique” — Compromis inévitable entre *richesse de dictionnaire* et *complexité algorithmique*.

Décomposition en “chirplets”



signal + bruit



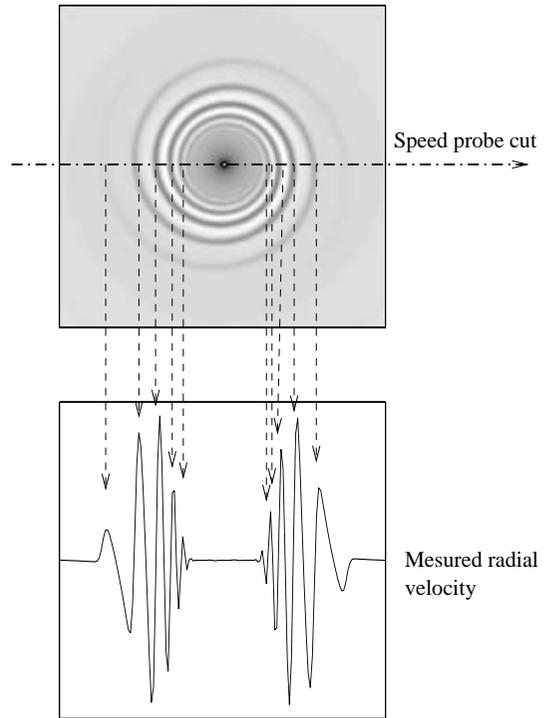
8 atomes

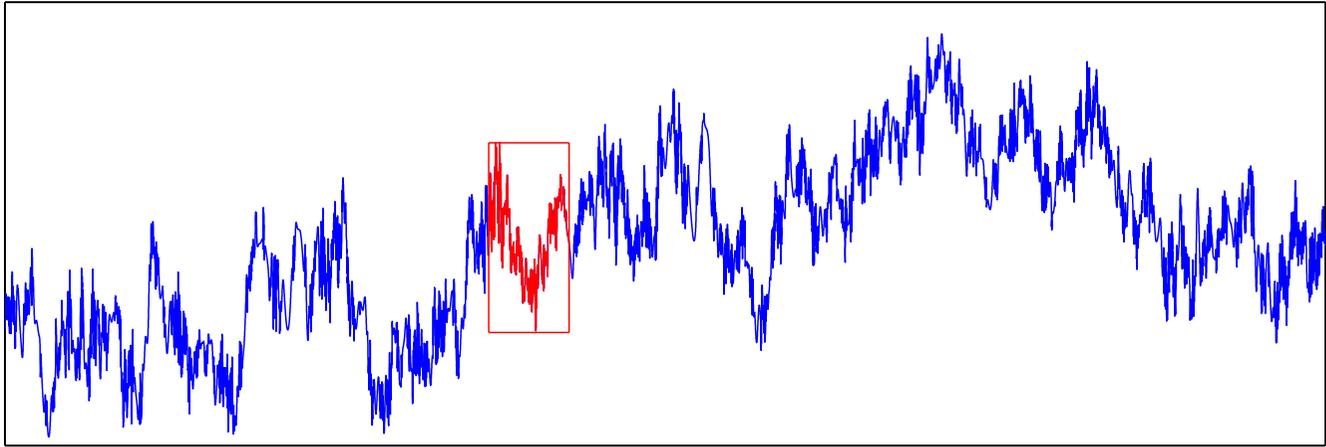
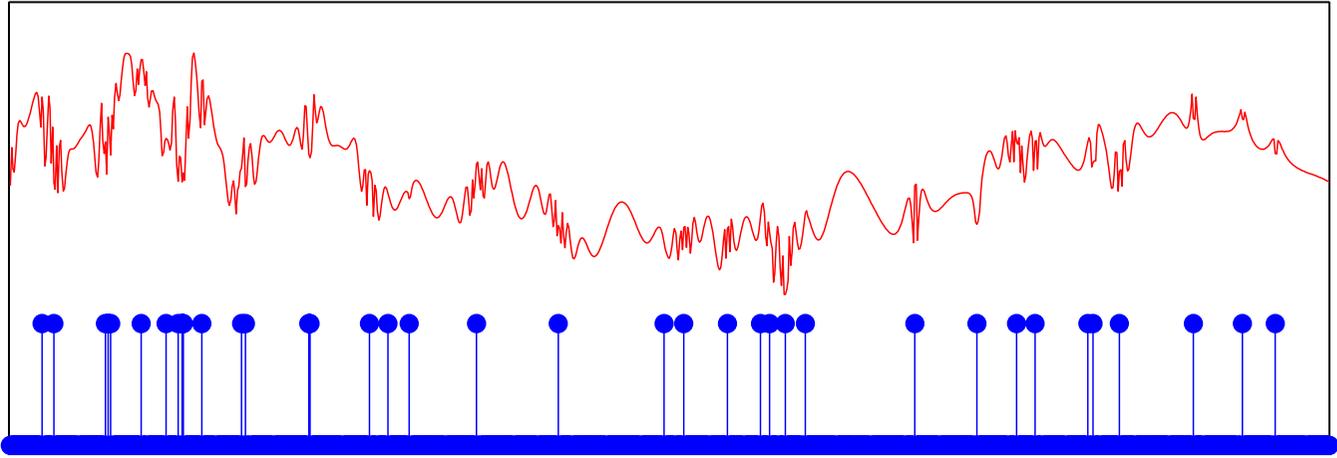
La turbulence

Intermittence — Parallèlement à des descriptions *statistiques* intégrées (fonctions de structure, spectre de singularités), le caractère *non homogène* des champs turbulents peut donner lieu à des descriptions *géométriques* (objets spatiaux, structures cohérentes).

Expérience — Existence de *tourbillons* en turbulence faible et de *filaments de vorticité* en turbulence développée.

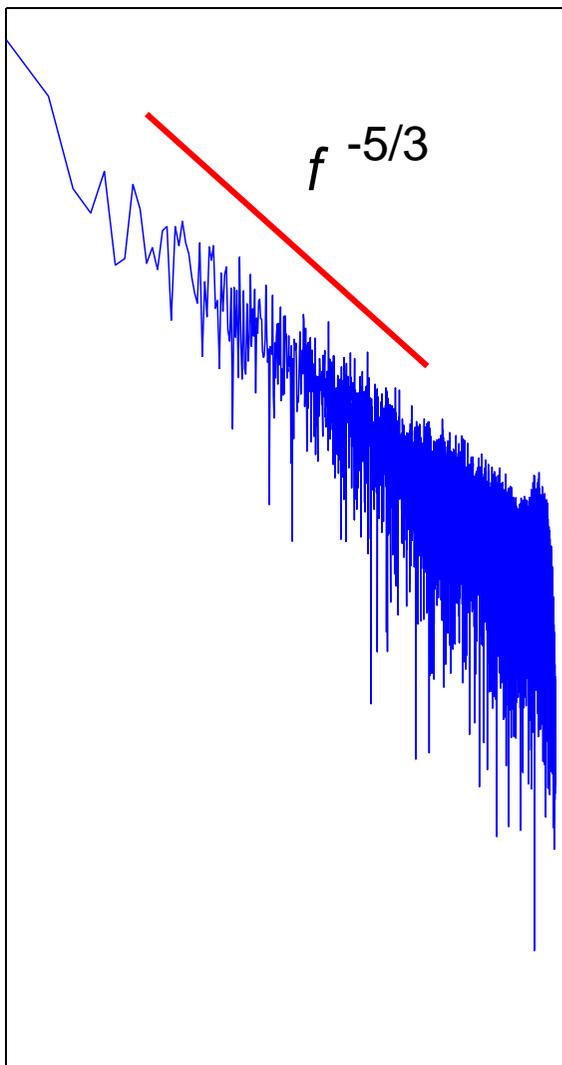
Théorie — Des solutions asymptotiques à l'équation de Navier-Stokes existent sous forme de *vortex spiralés* (Lundgren, '82).





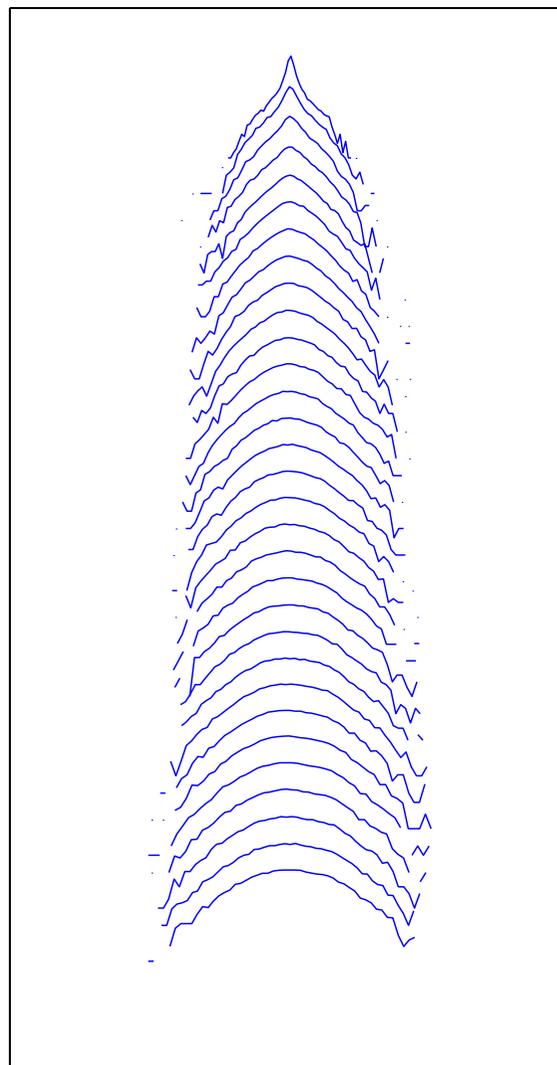
time

log-spectrum



log-frequency

log-pdf



amplitude

Chirps et auto-similarité

Dilatation — Soit $H, \lambda > 0$ et $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ l'opérateur agissant sur les processus $\{X(t), t > 0\}$ selon $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t)$.

Auto-similarité — Un processus $\{X(t), t > 0\}$ est dit *auto-similaire* de paramètre H (ou “ H -ss”) si, pour tout $\lambda > 0$,

$$\{(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t), t > 0\} \stackrel{d}{=} \{X(t), t > 0\}.$$

Auto-similarité et stationnarité — Les processus auto-similaires peuvent être mis en bijection avec les processus stationnaires (Lamperti, '62).

Lamperti

Définition — Pour tout $H > 0$, la *transformation de Lamperti* \mathcal{L}_H agit sur $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ selon :

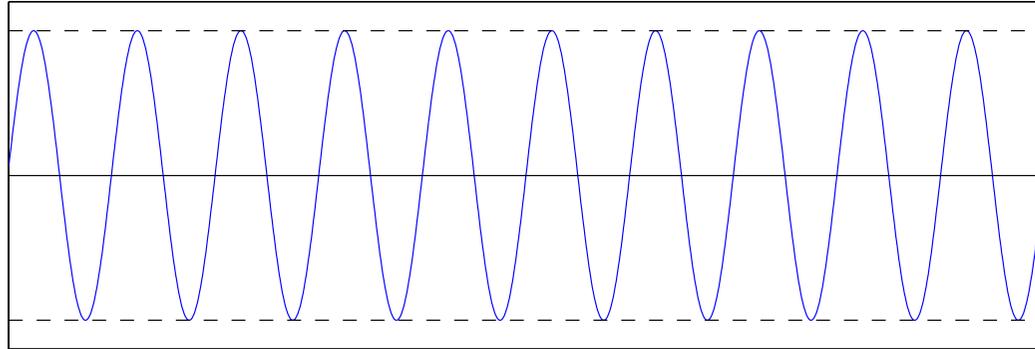
$$(\mathcal{L}_H Y)(t) := t^H Y(\log t), t > 0,$$

et son inverse \mathcal{L}_H^{-1} agit sur $\{X(t), t > 0\}$ selon :

$$(\mathcal{L}_H^{-1} X)(t) := e^{-Ht} X(e^t), t \in \mathbb{R}.$$

Théorème — Si $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire, sa transformée de Lamperti $\{(\mathcal{L}_H Y)(t), t > 0\}$ est H -ss. Réciproquement, si $\{X(t), t > 0\}$ est H -ss, sa transformée (inverse) de Lamperti $\{(\mathcal{L}_H^{-1} X)(t), t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire.

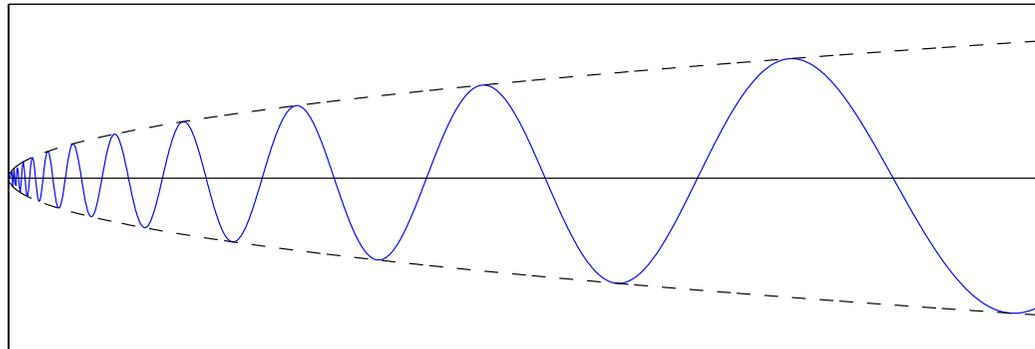
tone



Lamperti



chirp



Représentations “spectrales”

Fourier — Les processus *stationnaires* (harmonisables) admettent une représentation spectrale sur des modes de Fourier (ondes monochromatiques) :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi ft} d\xi(f).$$

Mellin — Les processus *auto-similaires* (harmonisables en un sens multiplicatif) admettent une représentation analogue sur des modes de Mellin (chirps hyperboliques) :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{H+i2\pi f} d\xi(f).$$

L'exemple des fonctions de Weierstrass

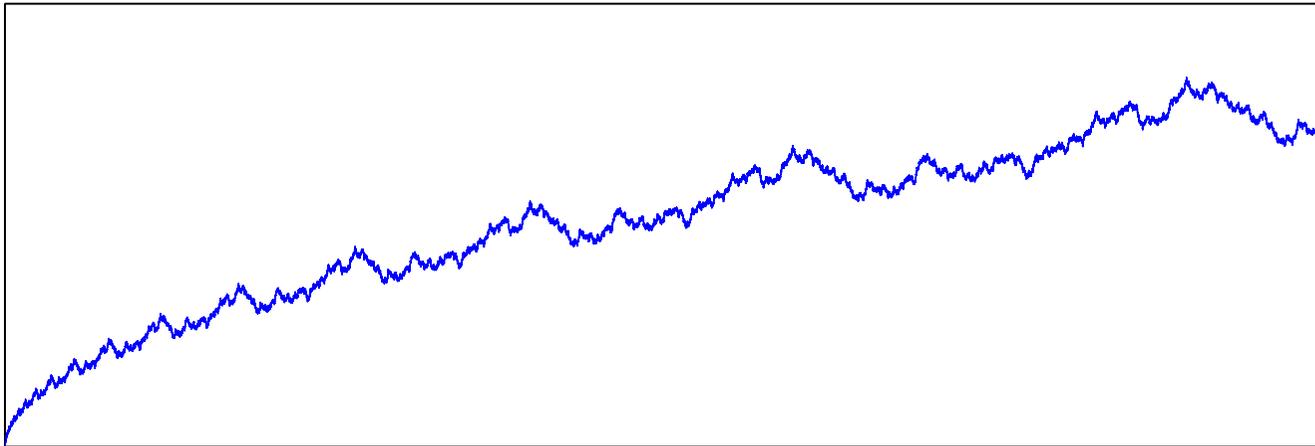
Invariance discrète — Pour tout jeu de phases i.i.d. $\varphi_n \in \mathcal{U}(0, 2\pi)$ et tout g 2π -périodique, les fonctions du type

$$W_{H,\lambda}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-Hn} g(\lambda^n t) e^{i\varphi_n},$$

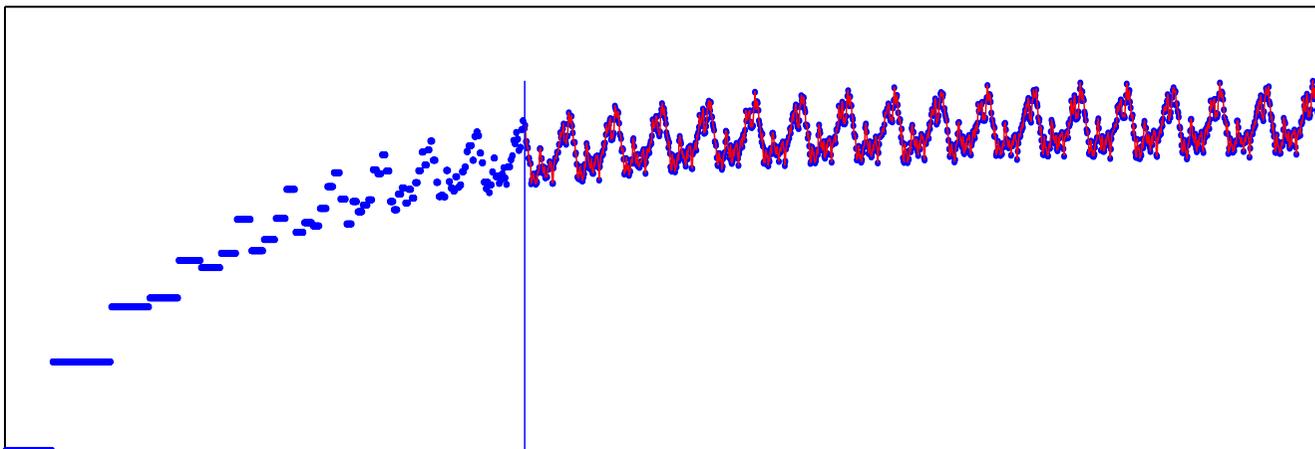
sont à *invariance d'échelle discrète* pour tout λ fixé, c'est-à-dire H -ss pour tout $\mu = \lambda^k, k \in \mathbb{Z}$.

Conséquence — De tels processus “ (H, λ) -DSI” ont des images de Lamperti *cyclostationnaires* et sont représentables sur une base *discrète* de chirps de Mellin (Borgnat et al., '01).

Weierstrass function ($H = 0.5$)



"delampertized" Weierstrass function

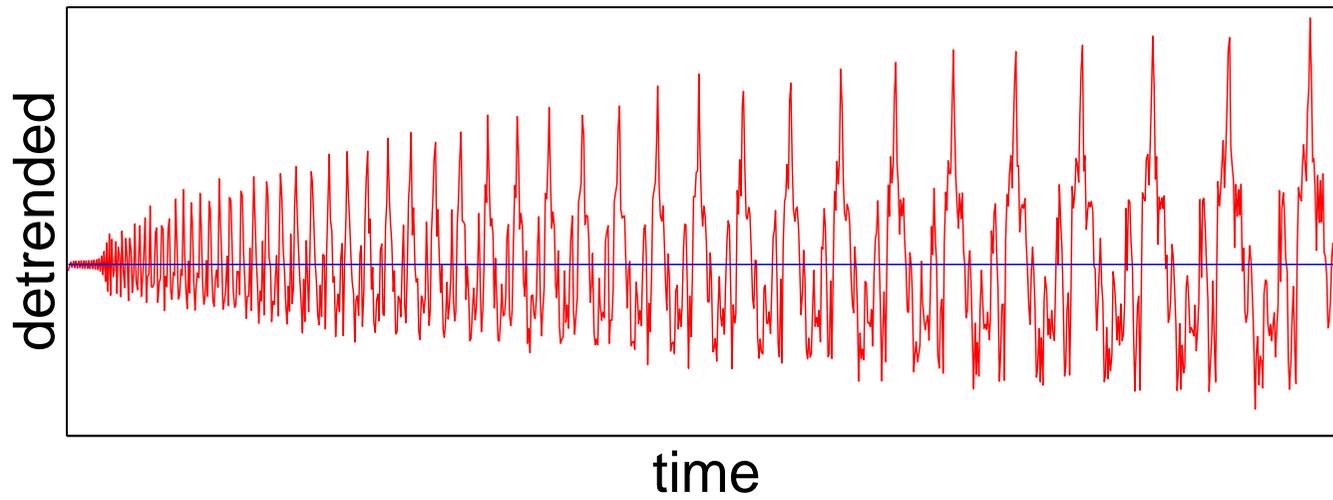
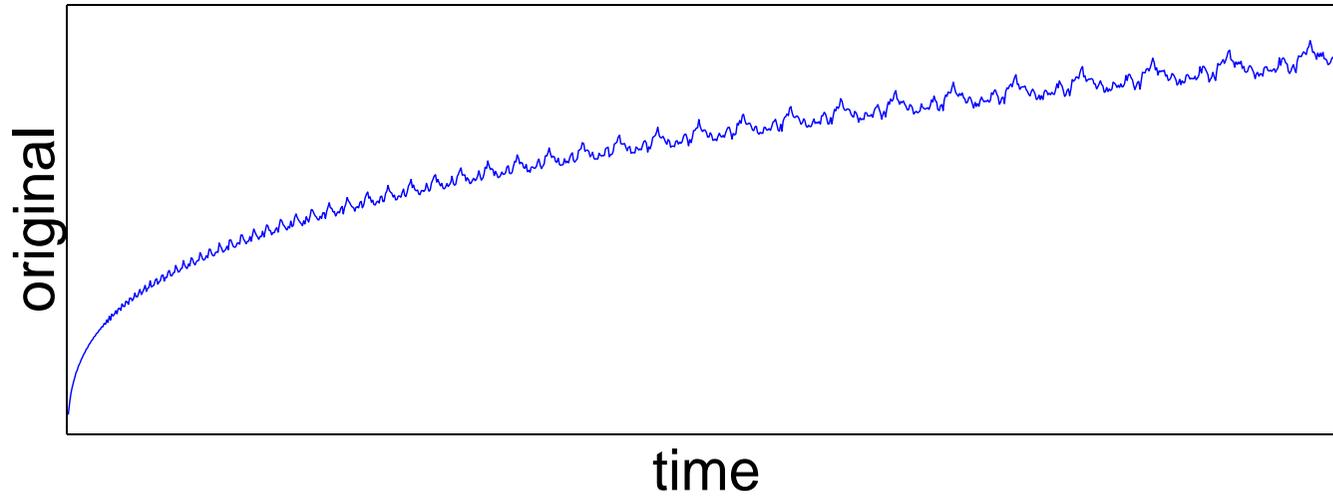


Weierstrass-Mandelbrot

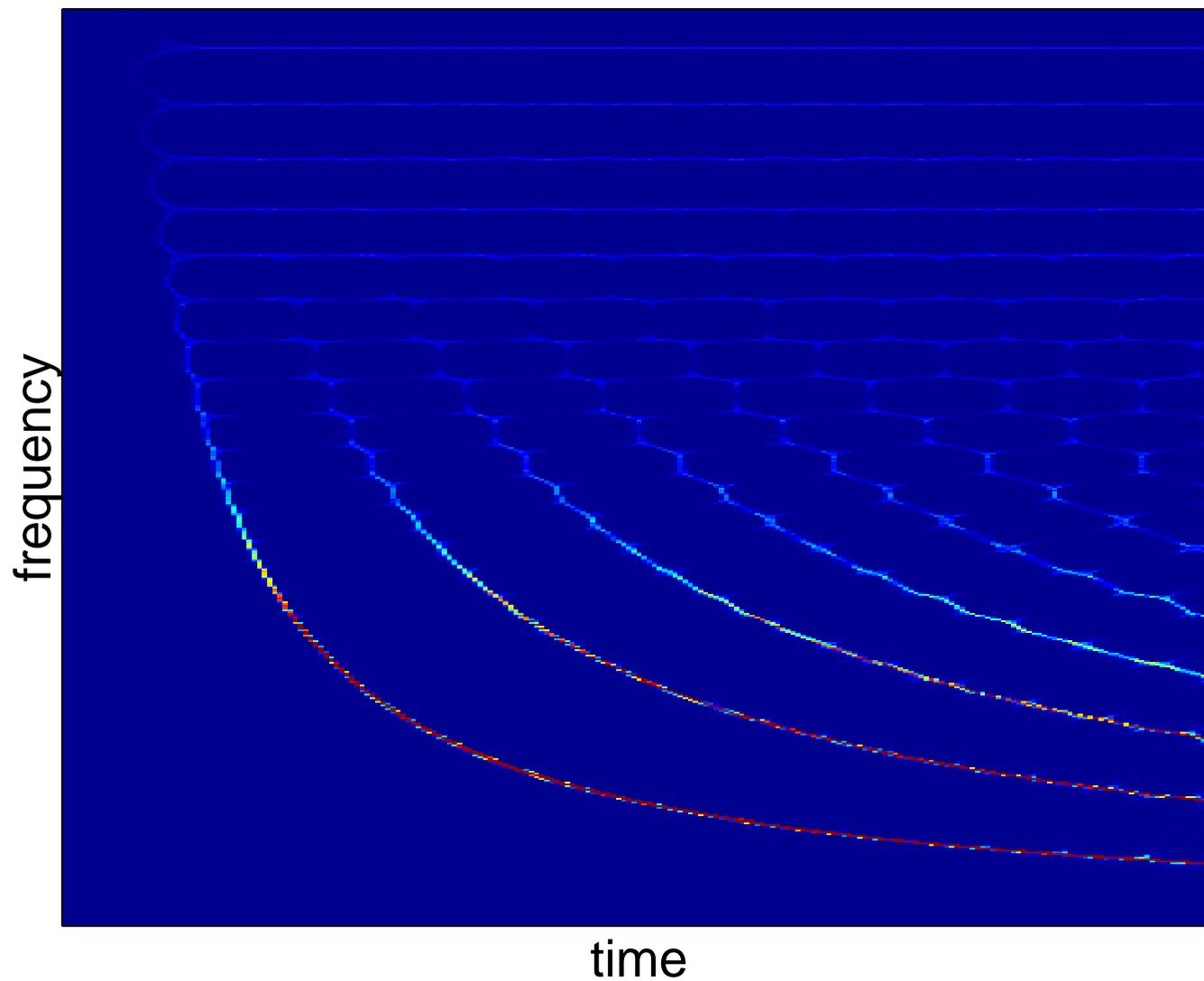
Fourier — Dans le cas $g(t) = 1 - \exp(it)$, on obtient la fonction de Weierstrass-Mandelbrot, dont la représentation usuelle est donnée par une superposition de modes de Fourier (en progression géométrique).

Mellin — Une représentation équivalente existe (Berry et Lewis, '80), comme superposition de modes de Mellin, c'est-à-dire de chirps hyperboliques.

Weierstrass function ($\lambda = 1.07$; $H = 0.3$; $t_{\max} = 1$; $N = 1000$; $\nu = 1$)



detrended Weierstrass function



Chirps et lois de puissance

Un modèle général — $C_{\alpha,\beta}(t) = a t^\alpha \exp\{i(bt^\beta + c)\}$.

Exemple — Approximation newtonienne de la partie *spiralante* des ondes gravitationnelles $\rightarrow (\alpha, \beta) = (-1/4, 5/8)$.

Typologie — En $t = 0$: divergence de l'*amplitude* si $\alpha < 0$, de la "*fréquence instantanée*" si $\beta < 1$ et de la *phase* si $\beta < 0$.

Singularités oscillantes. Le cas $(\alpha > 0, \beta < 0)$ est au-delà d'une caractérisation hölderienne \Rightarrow développement d'outils spécifiques (*analyse 2-microlocale, ondelettes*).

L'exemple de la fonction de Riemann

Définition — $\sigma(t) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin \pi n^2 t$

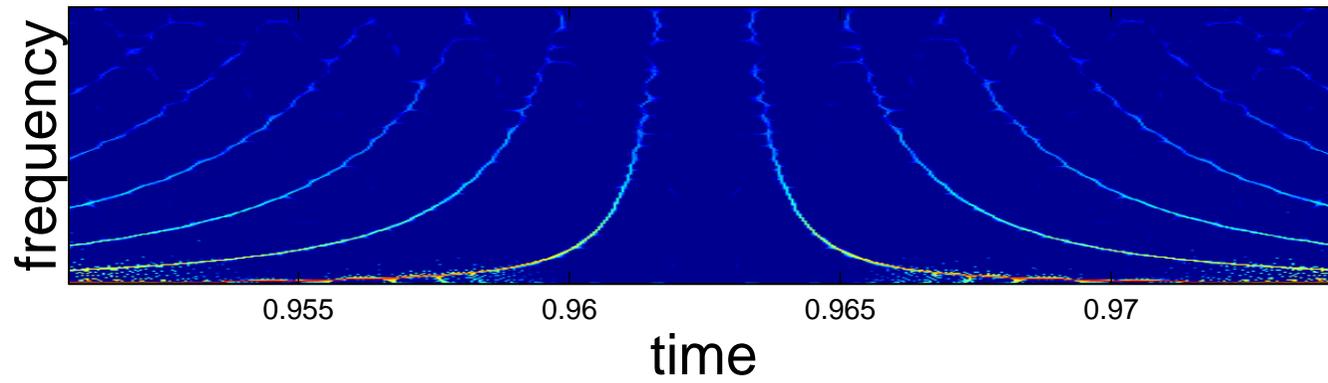
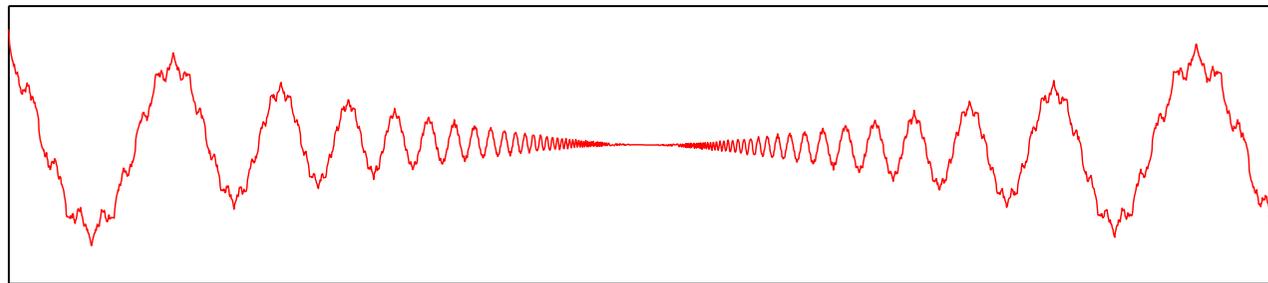
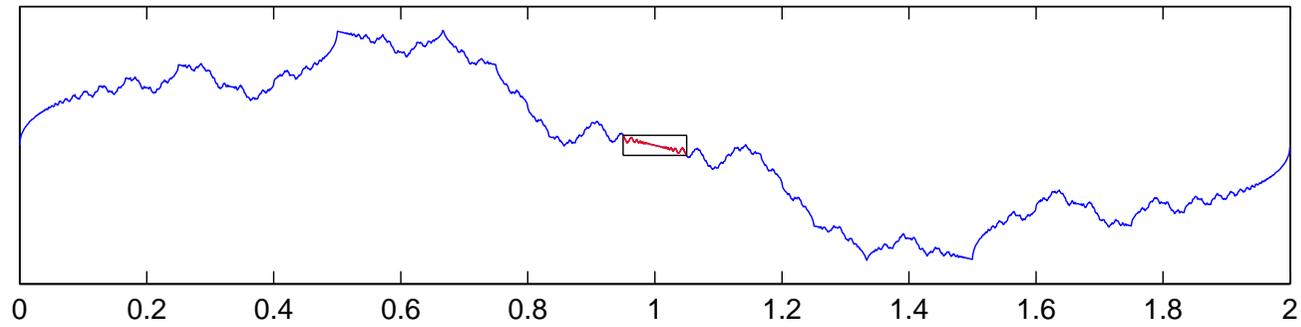
Dérivabilité — $\sigma(t)$ non dérivable si $t \neq t_0 = (2p + 1)/(2q + 1)$, $p, q \in \mathbb{N}$ (Hardy, '16) mais dérivable en $t = t_0$ (Gerver, '70).

Chirps locaux — En fait on peut montrer (Meyer, '96) qu'au voisinage de $z = 1$, la version holomorphe de la fonction de Riemann peut s'écrire

$$\sigma(1 + z) = \sigma(1) - \pi z/2 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(z) C_{3/2, -1}(z),$$

conduisant à $\sigma(1 + t) = \sigma(1) - \pi t/2 + O(|t|^{3/2})$ lorsque $t \rightarrow 0$.

Riemann function



conclure

Chirps et temps-fréquence

Signaux — Des chirps “partout”

Représentations — Cadre naturel de description = le plan temps-fréquence

Modélisations — “Chirps = trajectoires temps-fréquence” \Rightarrow définir la notion de fréquence instantanée comme sous-produit de représentations dans le plan (ex.: “ridges”, points fixes des opérateurs de réallocation)