Des signaux stationnaires en quel sens ?

Patrick Flandrin[1]

Cnrs & École normale supérieure de Lyon
Laboratoire de Physique, Équipe SiSyPhE

Journée See-Académie des Sciences
27 janvier 2009

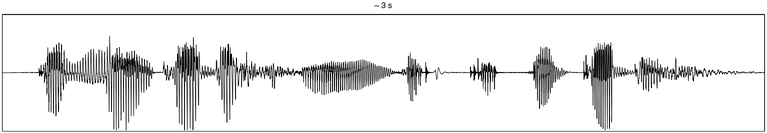
[1] avec la collaboration de Pierre-Olivier Amblard (CNRS & GIPSA-lab), Pierre Borgnat (CNRS & ENS Lyon), Cédric Richard (UTT) et Jun Xiao (ENS Lyon & ECNU Shanghai)

Quel(s) problème(s) ?

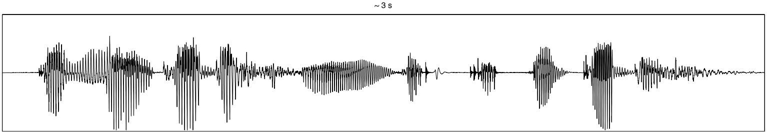
- concept de stationnarité
  - omniprésent en traitement du signal et des images
  - pré-requis pour de nombreuses tâches (analyse, modélisation, ...) mais idéalisation presque jamais observée
- de la théorie à la pratique
  1. définition fortement contrainte (cadre stochastique, e.g., $\mathbb{E}x(t)\,x(t-\tau) = \gamma_x(\tau)$ + invariance par rapport à tout temps t et tout décalage τ) très souvent implicitement assouplie (cadre déterministe, e.g., $x(t) \sim x(t-kT)$ + invariance par rapport à des temps t et/ou des décalages kT restreints)
  2. stationnarité de temps ou d'espace = forme particulière d'homogénéité

approches unifiées et opérationnelles ?

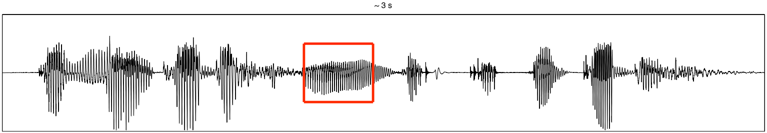
L'exemple de la parole



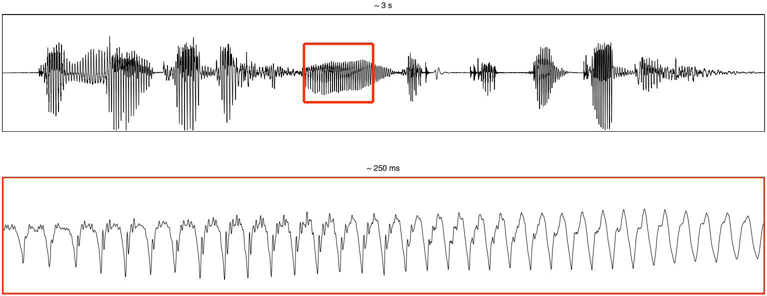
“non stationnaire”



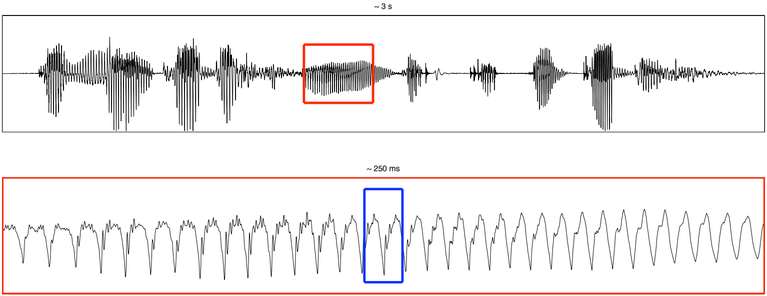
?


~ 3 s

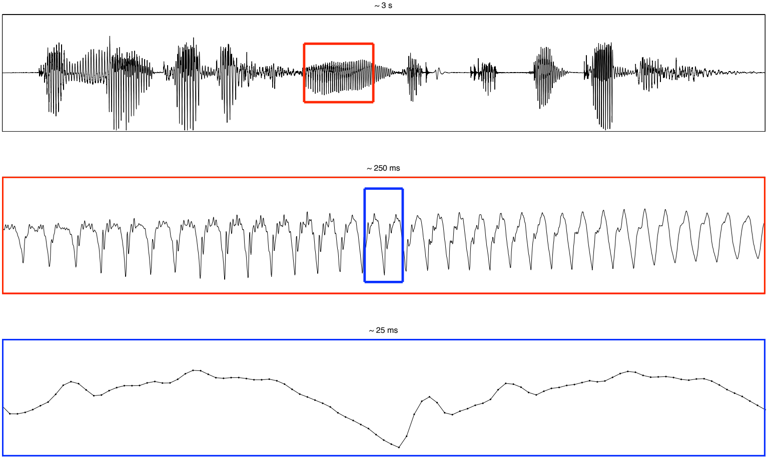
"stationnaire"



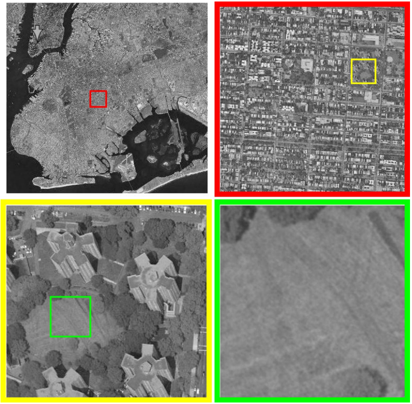
?


~ 3 s
~ 250 ms

“non stationnaire” !



Un exemple 2D



point de vue relatif + imbrication à travers les échelles

Plusieurs voies d'approche

1. adapter les méthodes stationnaires à des situations moins contraintes (stationnarité “locale”, évolutions “lentes”, etc.)
2. développer des méthodes nouvelles explicitement dédiées à des cas plus généraux
3. étendre la notion de stationnarité usuelle

Plan de l'exposé

1. stationnarité et non-stationnarités
   - harmonisabilité → temps-fréquence
   - représentations et estimations
   - un cadre unifié stochastique/déterministe
   - stationnarité relative et test
2. stationnarité et stationnarités généralisées
   - invariance d'échelle et transformation de Lamperti
   - au-delà de Lamperti
   - stationnarités de groupe
3. quelles (non-)stationnarités pour quelles applications ?

résultats généraux et interprétations

Stationnarité

Définition

Étant donné l'opérateur de translation de maille τ *tel que* $(\mathcal{S}_\tau Y)(t) := Y(t+\tau)$*, un processus* $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est dit stationnaire si* $\{(\mathcal{S}_\tau Y)(t), t \in \mathbb{R}\} \overset{d}{=} \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}, \forall \tau \in \mathbb{R}$

- stationnarité faible (2ème ordre) $\rightarrow$ représentation spectrale (Wiener-Khintchine-Bochner)

$$\Gamma_Y(\tau) := \mathbb{E} Y(t) Y^*(t \pm \tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\tau f} \, dS_Y(f)$$

- décomposition doublement orthogonale (en un sens *déterministe* pour les modes de Fourier et *stochastique* pour les poids)

Harmonisabilité

Définition (Loève, 1962)

Un processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est dit harmonisable s'il admet une représentation spectrale sur des modes de Fourier, mais avec des poids corrélés*

- représentation non diagonale de la covariance

$$R_Y(t,t') := \mathbb{E}Y(t)Y^*(t') = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i2\pi(tf-t'f')}\, d^2\Phi_Y(f,f')$$

- nécessité de deux variables de description $\rightarrow$ temps-temps, fréquence-fréquence ou temps-fréquence

Représentations

- constructions axiomatiques par unicité conditionnelle

$$\begin{array}{ccc} Y(t) & \rightarrow & \rho_Y(t,f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{T}Y)(t) & \rightarrow & \rho_{\mathbf{T}Y}(t,f) = (\tilde{\mathbf{T}}\rho_Y)(t,f) \end{array}$$

- exemple central ($\mathbf{T} = \mathcal{S}_{\tau,\xi}$, $\rho_Y \in \mathbb{R}$, marginales, etc.) $\Rightarrow$ spectre de Wigner :

$$\mathbf{W}_Y(t,f) = \int_{\mathbb{R}} R_y\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

- $Y(t)$ stationnaire $\Rightarrow \mathbf{W}_Y(t,f) = \Gamma_Y(\tau), \forall \tau \in \mathbb{R}$
- interprétation en termes de spectre local (TF de la corrélation locale) estimations

Une perspective temps-fréquence sur la stationnarité

Observation

Pour être opérationnel, le concept de stationnarité doit être rendu relatif et testable

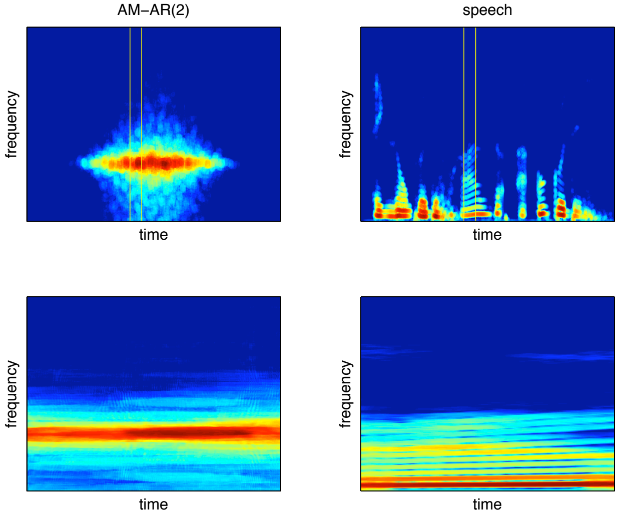
Idée

L'approche temps-fréquence offre un cadre naturel pour :

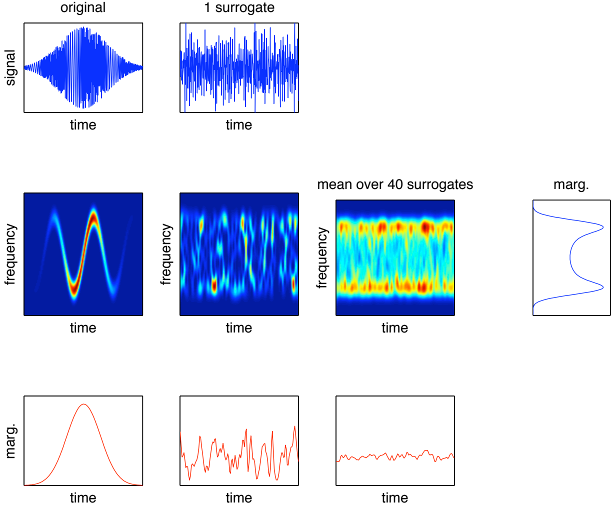
1. la mise en évidence de non-stationnarités éventuelles par comparaison "local vs. global"
2. leur test via une référence stationnaire

[Xiao, Borgnat, Richard & F., *IEEE-SSP* 2007]

1. Local vs. global

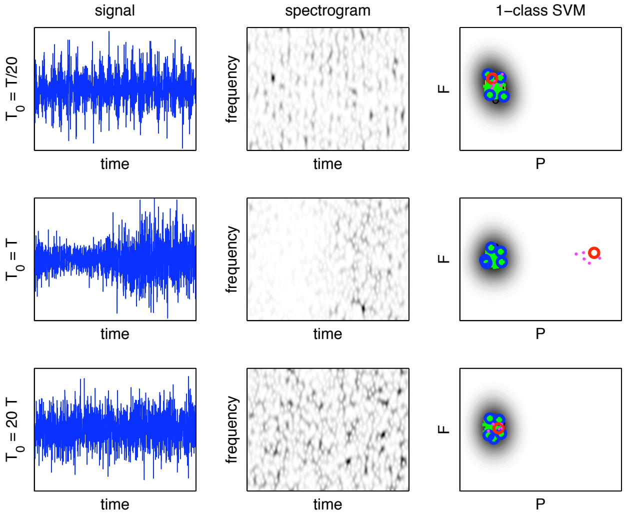


2. Référence stationnarisée par substituts



Un exemple de test de stationnarité relative

substituts et apprentissage



D’autres formes de stationnarité

Interprétation

Stationnarité = invariance par changement d’observation

Idée

Extension et généralisation à d’autres changements que la translation

1. 1D $\rightarrow$ 2D $\rightarrow$ nD : homogénéité (isotropie, etc.)
2. exemple de l’invariance d’échelle ▸ ondelettes

Invariance d'échelle et Lamperti

Définition

Étant donné l'opérateur renormalisé de changement d'échelle d'un facteur λ tel que $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H}\, X(\lambda t)$, un processus $\{X(t), t > 0\}$ est dit ***auto-similaire*** *d'indice H (ou "H-ss") si $\{(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t), t > 0\} \stackrel{d}{=} \{X(t), t > 0\}, \forall\lambda > 0$.*

Définition

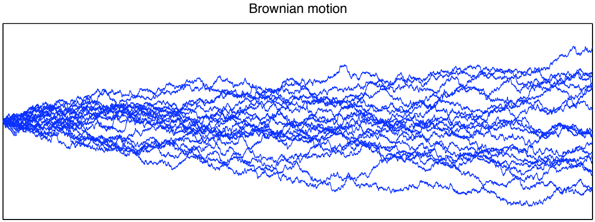
La ***transformée de Lamperti*** *$\mathcal{L}_H$ agit sur les processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ selon $(\mathcal{L}_H Y)(t) := t^H\, Y(\log t), t > 0$ et la transformée inverse $\mathcal{L}_H^{-1}$ sur les processes $\{X(t), t > 0\}$ selon $(\mathcal{L}_H^{-1} X)(t) := e^{-Ht}\, X(e^t), t \in \mathbb{R}$.*

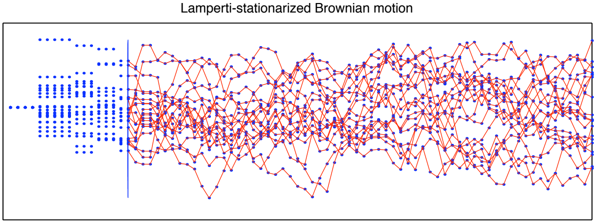
[Lamperti, *Trans. Amer. Math. Soc.* 1962]

Théorème

Si $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire, sa transformée de Lamperti est H-ss. Réciproquement, si $\{X(t), t > 0\}$ est H-ss, sa transformée de Lamperti inverse est stationnaire.

L'exemple du mouvement brownien





Lamperti et Mellin

- la transformée de Lamperti du mode de Fourier

$$Y_0(t) := a\cos(2\pi f_0 t + \varphi), t \in \mathbb{R},$$

est le “chirp" hyperbolique (auto-similaire) :

$$X_0(t) := (\mathcal{L}_H Y_0)(t) = a\, t^H \cos(2\pi f_0 \log t + \varphi), t > 0.$$

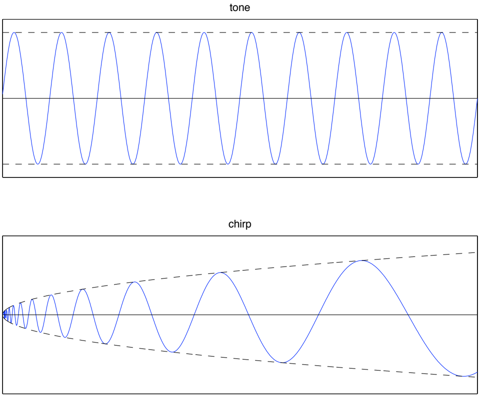
- $X_0(t) = Re\{a\, e^{i\varphi}\, m_{H,f_0}(t)\}$, avec $m_{H,\beta}(t) := t^{H+i2\pi\beta}$ la brique de base de la transformée de Mellin :

$$(\mathcal{M}_H X)(\beta) := \int_{\mathbb{R}_+} X(t)\, m^*_{H,\beta}(t)\, \frac{dt}{t^{2H+1}};$$

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{M}_H X)(\beta)\, m_{H,\beta}(t)\, d\beta.$$

Fréquence pure et “chirp”

“Mellin = Fourier anamorphosé”



Invariance d'échelle discrète et cyclostationnarité

Définition

Un processus $\{X(t), t > 0\}$ *est dit invariant d'échelle discrète d'indice H et de facteur* λ *(ou "*(H, λ)*-DSI") si*
$\{(\mathcal{D}_{H,\lambda^n} X)(t), t > 0\} \stackrel{d}{=} \{X(t), t > 0\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

[Sornette, *Phys. Rep.* 1998]

Résultat

L'invariance d'échelle discrète (H, λ)*-DSI est équivalente, par transformation de Lamperti, à la cyclostationnarité de période élémentaire* $T = \log \lambda$.

[Borgnat, F. & Amblard, *IEEE SPL* 2002]

Corollaire

Un processus (H, λ)*-DSI possède un spectre de Mellin discret.*

Exemple

La fonction de Weierstrass-Mandelbrot.

Weierstrass-Mandelbrot

Définition (originale)

Modes de Fourier en progression géométrique

$$W(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-nH} \cos \lambda^n t, \lambda > 1.$$

[Weierstrass, 1872]

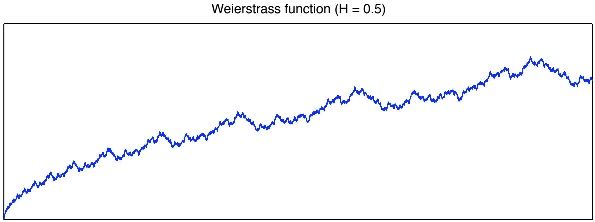
Définition (modifiée)

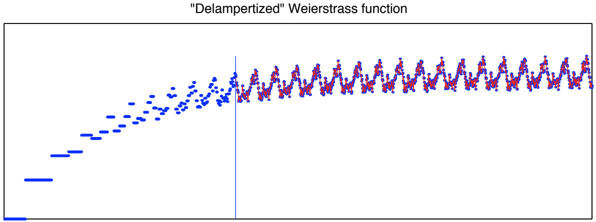
$$W_g(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-nH} \left(g(0) - g(\lambda^n t)\right) e^{i\varphi_n}, \lambda > 1,$$

avec $g(\cdot)$ 2π-périodique et $\varphi_n \in \mathcal{U}(0, 2\pi)$.

[Mandelbrot 1977]
[Berry & Lewis, *Proc. Roy. Soc. London A* 1980]

Weierstrass





Weierstrass, de Fourier à Mellin

Résultat

La fonction de Weierstrass-Mandelbrot est (H, λ)*-DSI et admet la décomposition de Mellin équivalente :*

$$W_g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(\mathcal{M}_H G)(m/\log\lambda)}{\log\lambda}\, m_{H,m/\log\lambda}(t),$$

avec $G(t) := g(0) - g(t)$.

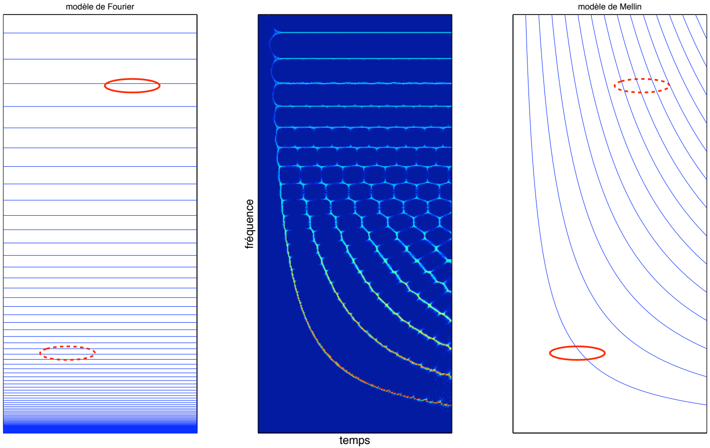
[Borgnat & F., *ACHA* 2003]

Interprétation

Co-existence naturelle des deux lectures (Fourier et Mellin) dans le plan temps-fréquence.

Weierstrass et temps-fréquence

entre Fourier et Mellin



Un cadre général

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
X(t) \arrow[r, red, "?"] \arrow[d, "\textit{Lamperti inverse}"'] & (\mathcal{T}X)(t) & (\textit{monde auto-similaire}) \\
(\mathcal{L}_H^{-1}X)(t) \arrow[r] & (\tilde{\mathcal{T}}\mathcal{L}_H^{-1}X)(t) \arrow[u, "\textit{Lamperti}"'] & (\textit{monde stationnaire})
\end{tikzcd}
$$

- harmonisabilité multiplicative [Gray & Zhang, *JTSA* 1988]
- théorie des systèmes invariants d'échelle [Yazici & Kashyap, *IEEE T-SP* 1997]
- estimation de processus auto-similaires [Nuzman & Poor, *J. Appl. Proba.* 2000]

Lamperti et au-delà

- invariances globales $=$ modèles idéalisés
- deux points de vue complémentaires :
  1. appliquer Lamperti à des formes modifiées de stationnarité (invariance d'échelle discrète, quasi-stationnarité, etc.)
  2. modifier Lamperti pour l'adapter à des invariances réduites ou brisées
- exemple de l'invariance d'échelle brisée

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H}X(\lambda t) \rightarrow (\mathcal{D}^{g}_{H,\lambda}X)(t) := g(\lambda) \otimes X(\lambda \odot t),$$

avec invariance sur un domaine d'échelles $\mathbb{A}$ et une gamme d'amplitudes $\mathbb{X}$ tels que les groupes $(\mathbb{A}, \odot)$ et $(\mathbb{X}, \otimes)$ soient isomorphes à $(\mathbb{R}^{+}_{*}, \times)$ ▸ Lamperti généralisé

[Borgnat, Amblard & F., *J. Phys. A* 2005]

Stationnarité généralisée

- stationnarité usuelle basée sur le groupe des translations, auto-similarité sur celui des dilatations
  - "chirp = mode de Fourier anamorphosé"
  - $\Rightarrow$ anamorphoses $\neq \{\log, \exp\}$?
- stationnarité généralisée basée sur des groupes "quelconques" [Yaglom 1961] [Hannan 1965]
- possibilités accrues en dimension > 1 : rotations, isotropie,... [Hillion *et al.*, *MGVIJ* 2006]

Pour quelles applications ?

1. des non-stationnarités...
   - TF non paramétrique : analyse exploratoire ("visible speech" parole), pré-modélisation, décisions (détection/classification de transitoires et/ou "chirps" : VIRGO, EEG, ECG, etc.)
   - test de "stationnarité" : validation d'emploi de méthodes "stationnaires", diagnostic de changements, etc.
2. . . . aux stationnarités généralisées
   - analyse de textures
   - lois d'échelle omniprésentes dans les systèmes complexes (turbulence, internet, réseaux sociaux VéloV, etc.)

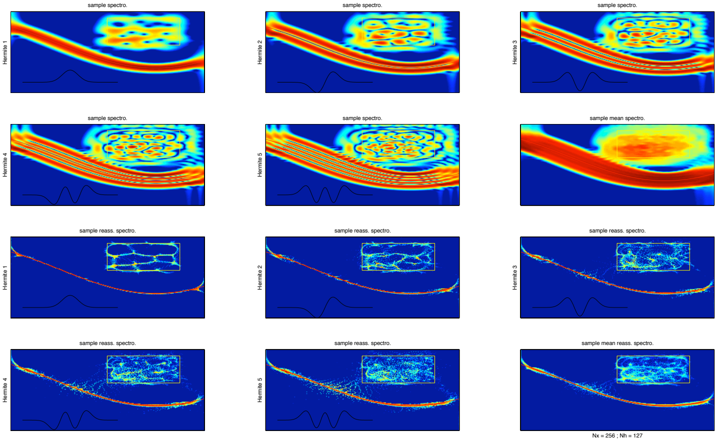
Estimations

- une réalisation observée ⇒ ~~moyenne d'ensemble~~ → moyenne temps-fréquence (identification à la "classe de Cohen") [Cohen, *J. Math. Phys.* 1966]
- nombreux travaux dans les années 1980-1990
- amélioration au conflit biais-variance en non stationnaire [Xiao & F., *IEEE Trans. SP* 2007]

  1. géométrique : ~~lissage~~ → réallocation
     concentration énergétique sur les centres de gravité locaux
  2. stochastique : ~~extra-lissage~~ → multi-fenêtrage
     moyenne instantanée de projections (quasi-décorrélées) sur une base de fonctions orthogonales

Un cadre de description unifié

stochastique et déterministe



retour

Invariances brisées et Lamperti généralisé

retour

Contrainte

La fonction de renormalisation $g(\lambda)$ *doit être telle que* $g(\lambda_1 \odot \lambda_2) = g(\lambda_1) \otimes g(\lambda_2) \Rightarrow$ *forme acceptable* $g(\lambda) := S_\otimes^{-1}(S_\odot(\lambda)^{-H})$ *avec* $S_{\{\odot,\otimes\}} : \{\mathbb{A}, \mathbb{X}\} \to \mathbb{R}_*^+$ *les morphismes associés aux nouvelles lois de composition*

Définition

La transformée de Lamperti généralisée $\mathcal{L}_H^g$ *agit sur les processus* $Y(t)$ *selon* $(\mathcal{L}_H^g Y)(t) := S_\otimes^{-1}(S_\odot(t)^H Y(\log S_\odot(t)))$

Corollaire

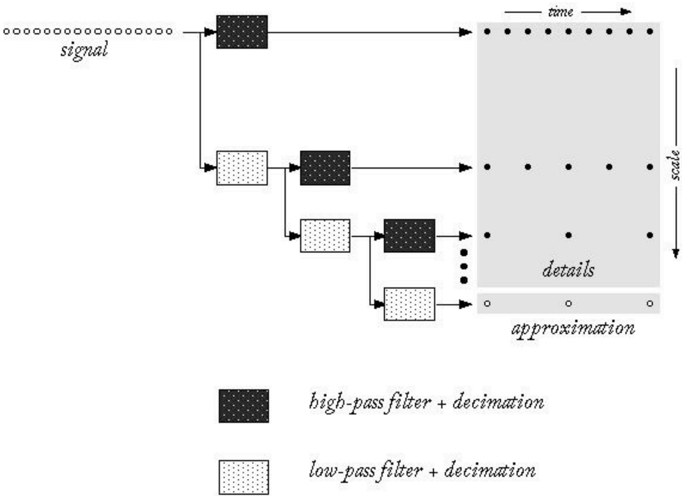
$(\mathcal{L}_H^g)^{-1}\mathcal{D}_{H,\lambda}^g \mathcal{L}_H^g = \mathcal{S}_{\log S_\odot(\lambda)}$ et $(\mathcal{L}_H^g Y)(t) = S_\otimes^{-1}((\mathcal{L}_H Y)(S_\odot(t)))$

Exemple

Invariance d'échelle de taille finie par transformation de Lorentz sur l'échelle

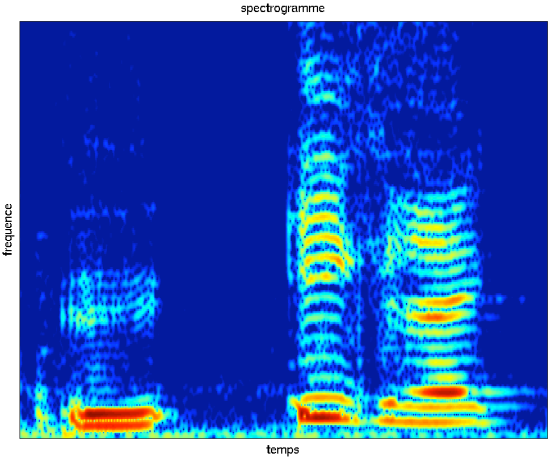
[Dubrulle & Graner, *J. Phys. II* 1996]

Ondelettes



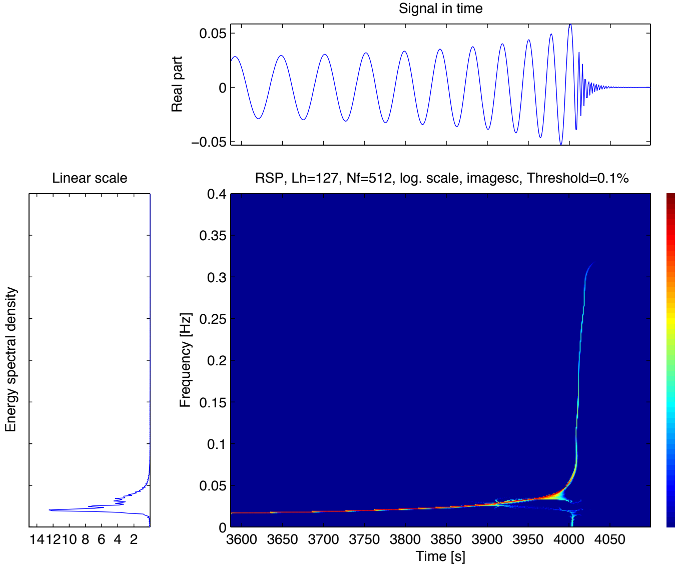
retour

Parole

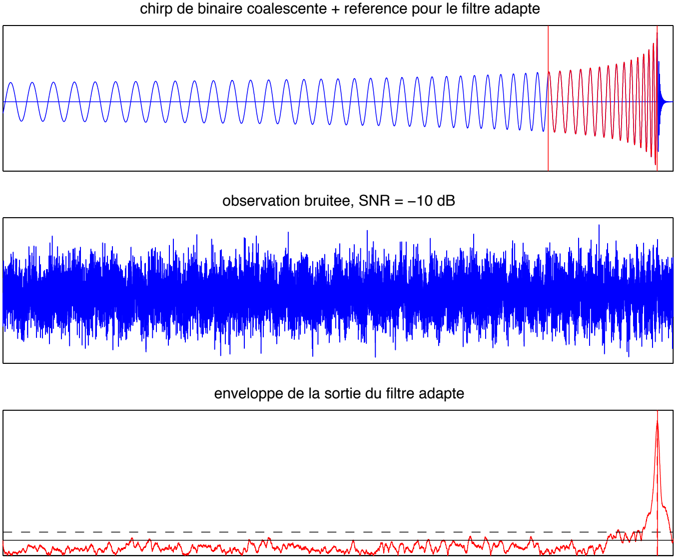


L'interféromètre

Coalescence de binaire

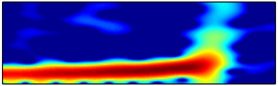


Filtrage adapté

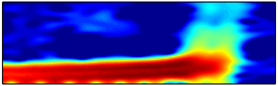


Estimations

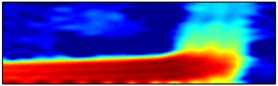
spectro. (M = 1)



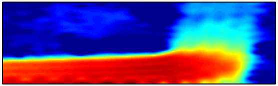
spectro. (M = 2)



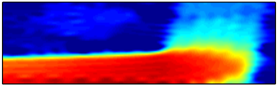
spectro. (M = 3)



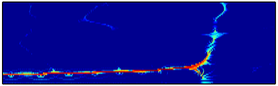
spectro. (M = 4)



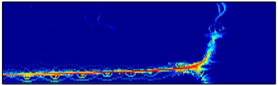
spectro. (M = 5)



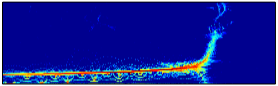
reass. spectro. (M = 1)



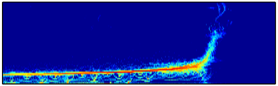
reass. spectro. (M = 2)



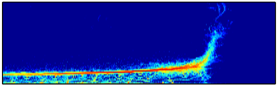
reass. spectro. (M = 3)



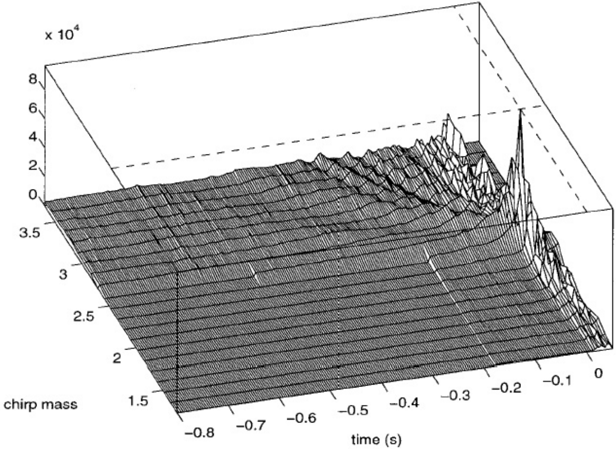
reass. spectro. (M = 4)



reass. spectro. (M = 5)

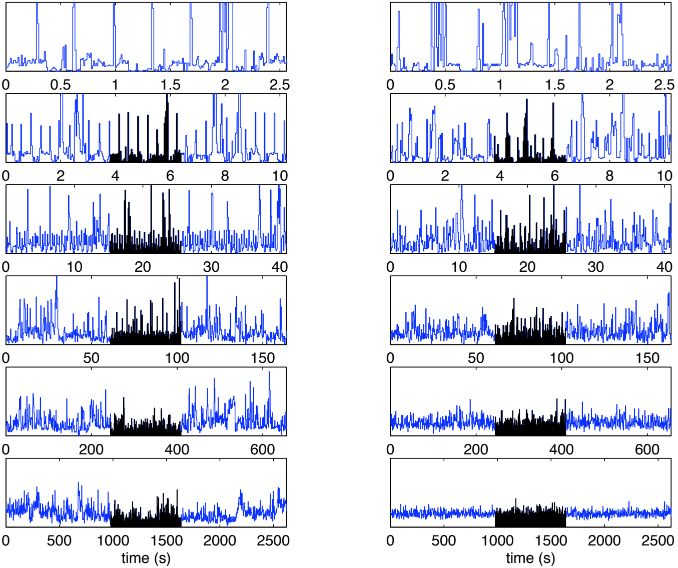


Filtrage adapté TF

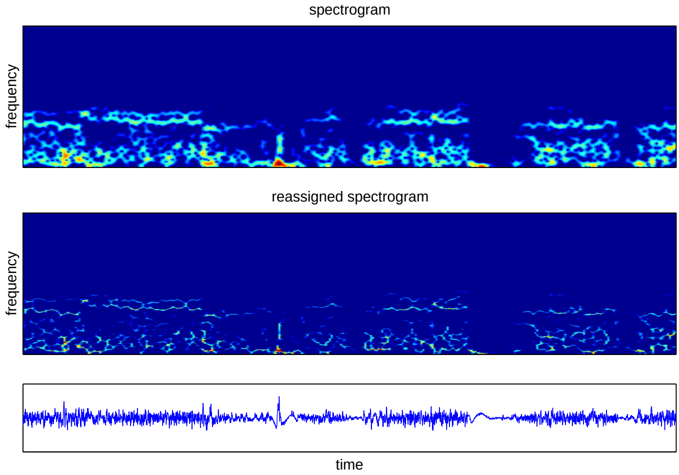


retour

Données internet

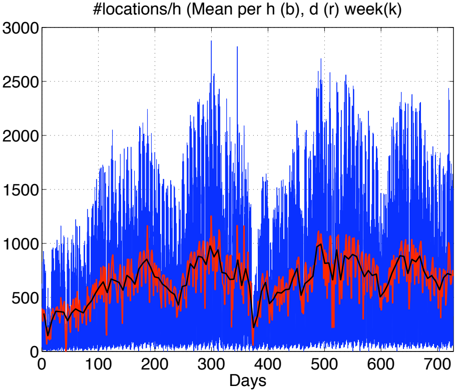


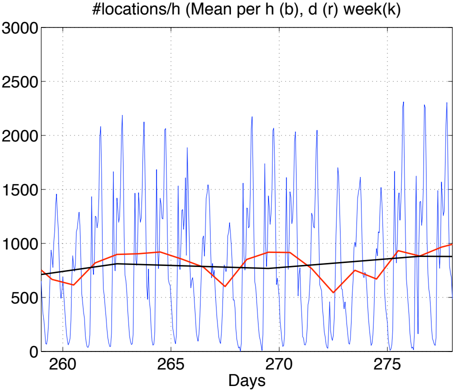
Données ECG



retour

Données VéloV





retour