

“Chirps”, fréquence instantanée,  
temps-fréquence, etc.

Patrick Flandrin  
CNRS — École Normale Supérieure de Lyon

Nice, 22-23 mars 2004

observer

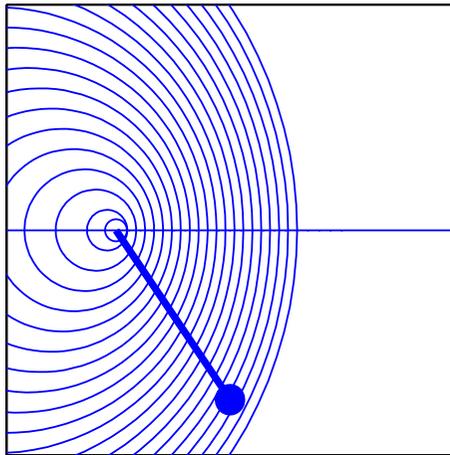


doppler\_sirene.m

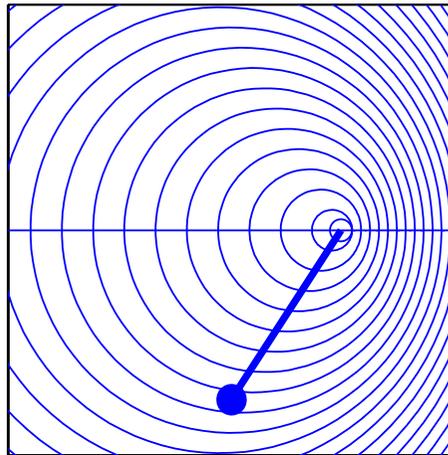
# L'effet Doppler

Source monochromatique en mouvement  $\Rightarrow$  perception *différentielle* de la fréquence émise.

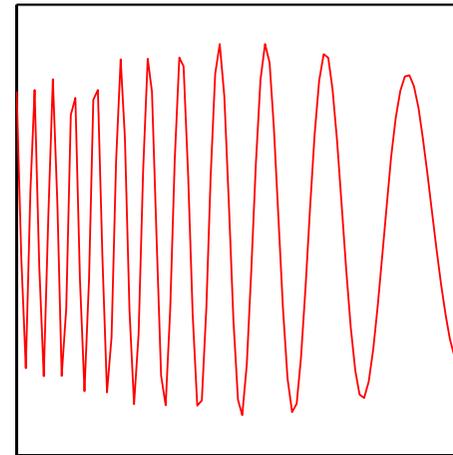
$f + \Delta f$



$f - \Delta f$



"chirp"

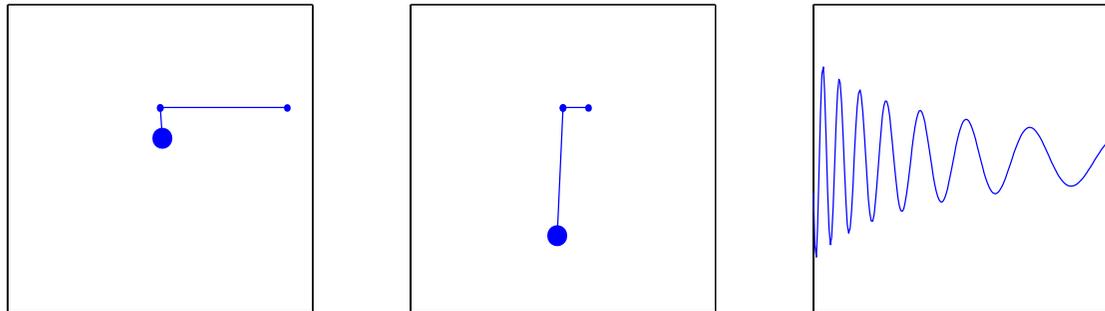




pendule\_N.m

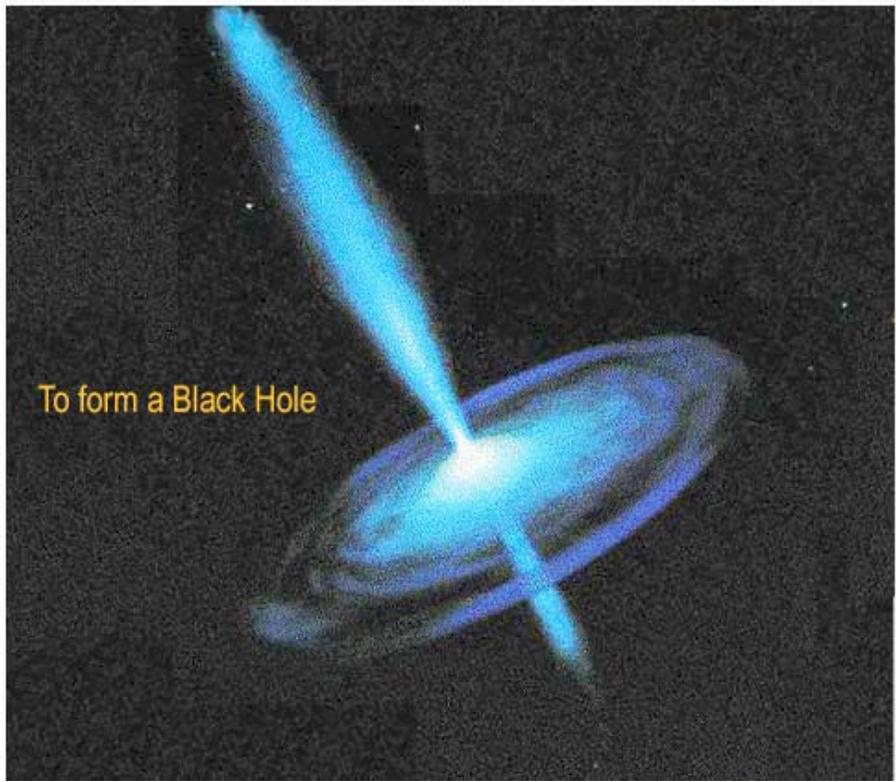
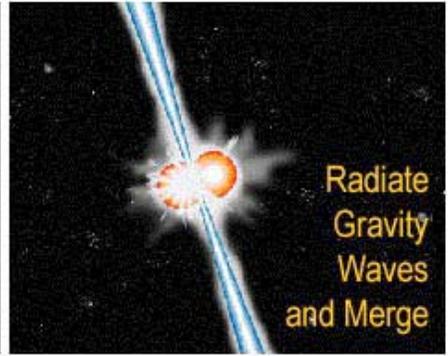
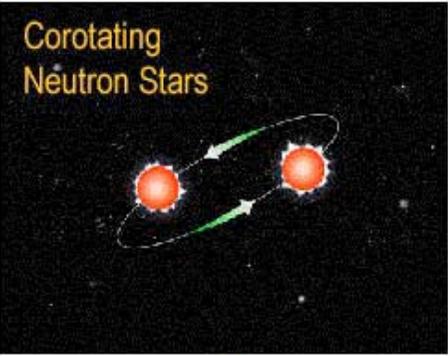
# Le pendule simple

$$\ddot{\theta}(t) + (g/L) \theta(t) = 0$$



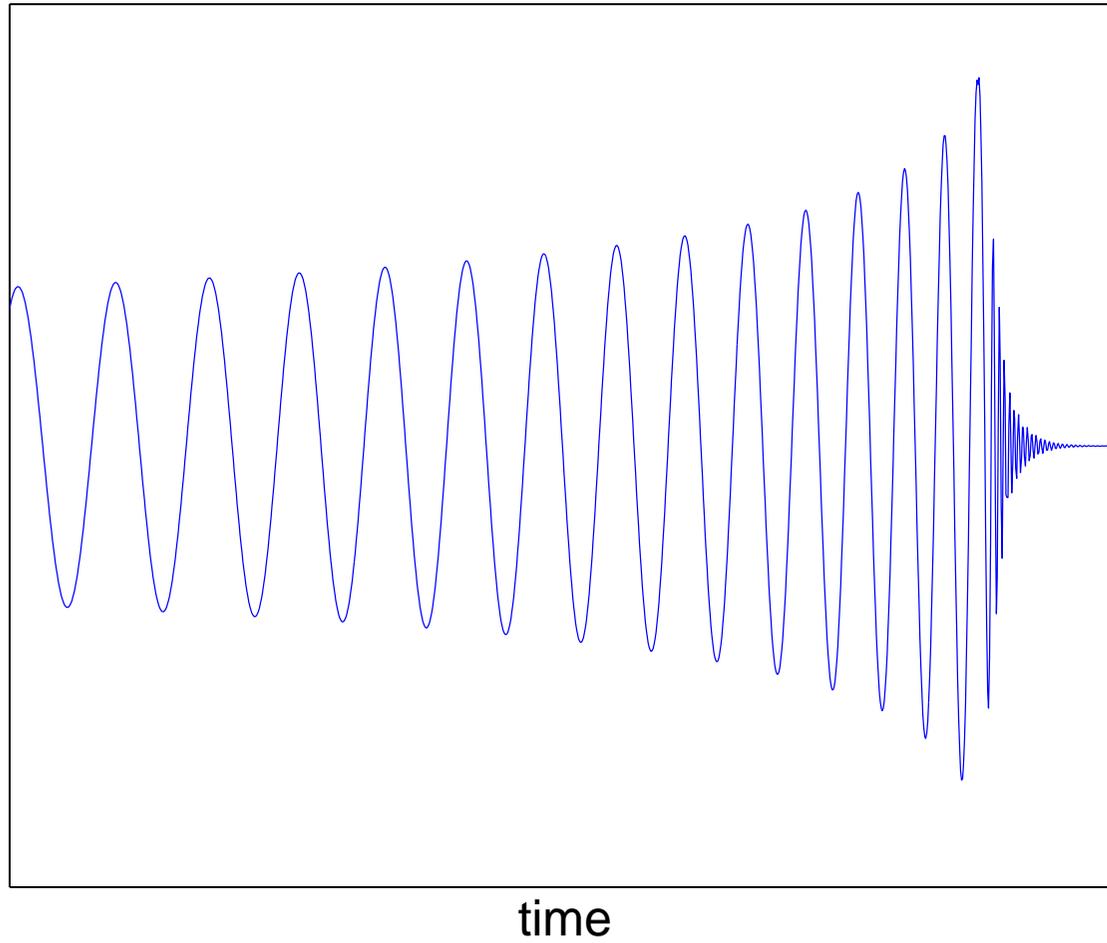
*Longueur fixe*  $L = L_0$  — Petites oscillations sinusoidales, de période fixe  $T_0 = 2\pi\sqrt{L_0/g}$ .

*Longueur "lentement" variable*  $L = L(t)$  — Petites oscillations quasi-sinusoidales, de pseudo-période variable  $T(t) \sim 2\pi\sqrt{L(t)/g}$ .



coalbin\_N.m

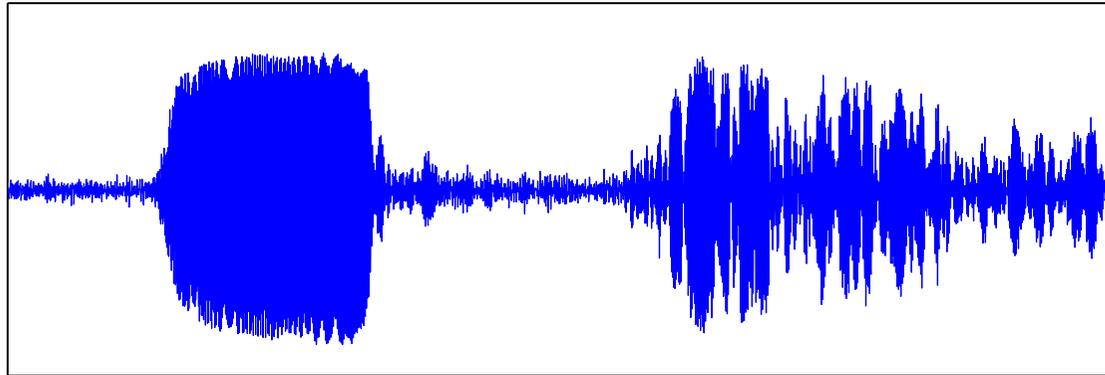
# gravitational wave





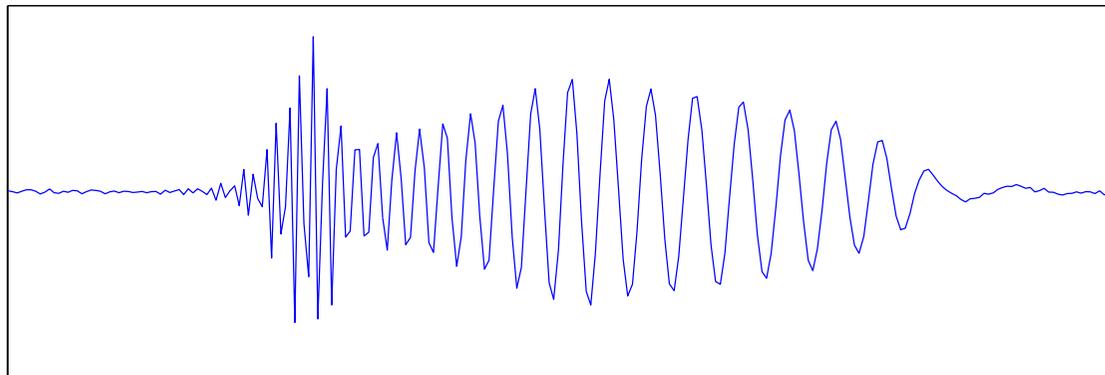
hearbat.m

bat echolocation call + echo



time

bat echolocation call (heterodyned)



time

# L'écholocation de la chauve-souris

*Systeme* — Système (*actif*) de navigation, sonar naturel.

*Signaux* — Ondes acoustiques ultrasonores, brèves (quelques ms) et “large bande” (quelques dizaines de kHz entre 40 et 100kHz).

*Performances* — Proches de l'optimalité, avec *adaptation* des formes d'ondes à des tâches multiples (détection, estimation, reconnaissance, réjection d'interférences, ...).



## La fonction de Riemann

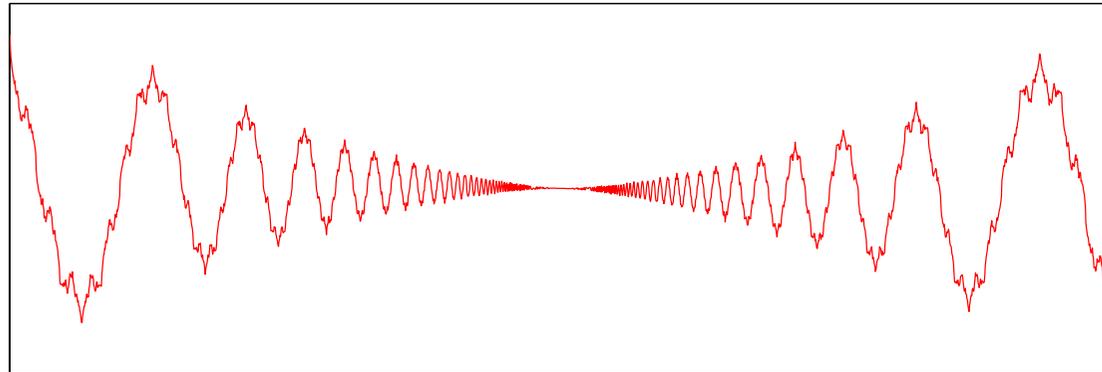
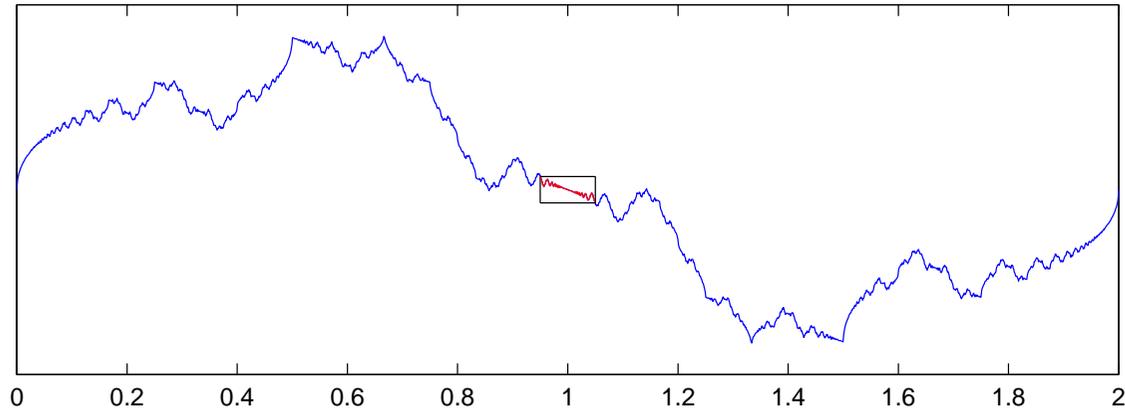
*Définition* —  $\sigma(t) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin \pi n^2 t$

*Dérivabilité* —  $\sigma(t)$  non dérivable si  $t \neq t_0 = (2p + 1)/(2q + 1)$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  (Hardy, '16) mais dérivable en  $t = t_0$  (Gerver, '70).

*Chirps locaux* — En fait on peut montrer (Meyer, '96) qu'au voisinage de  $z = 1$ , la version holomorphe de la fonction de Riemann peut s'écrire

$$\sigma(1 + z) = \sigma(1) - \pi z/2 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(z) C_{3/2, -1}(z),$$

conduisant à  $\sigma(1 + t) = \sigma(1) - \pi t/2 + O(|t|^{3/2})$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .



## D'autres exemples

*Ondes et vibrations* — Chants d'oiseaux, musique (“glissando”), parole, “sifflements atmosphériques”, vagues déferlantes, impulsions large-bande se propageant dans un milieu dispersif, diapason (corde, tuyau) de longueur variant dans le temps, vibro-sismique, radar, sonar large-bande, . . .

*Biologie et médecine* — EEG (crise d'épilepsie), EMG utérin (contractions), . . .

*Désordre et phénomènes critiques* — Structures cohérentes en turbulence, accumulation de précurseurs de tremblements de terre, “bulles spéculatives” précédant un crash financier, . . .

*Fonctions mathématiques* — Weierstrass, . . .

décrire

# Chirps

**Définition** — On appellera “chirp” tout signal complexe de la forme  $x(t) = a(t) \exp\{i\varphi(t)\}$ , où  $a(t) \geq 0$  est une amplitude passe-bas dont l'évolution est lente par rapport aux oscillations de la phase  $\varphi(t)$ .

**Évolution lente ?** — Les conditions heuristiques habituelles supposent que :

1.  $|\dot{a}(t)/a(t)| \ll |\dot{\varphi}(t)|$  : l'amplitude est *quasi-constante* à l'échelle d'une pseudo-période  $T(t) = 2\pi/|\dot{\varphi}(t)|$ .
2.  $|\ddot{\varphi}(t)|/|\dot{\varphi}^2(t)| \ll 1$  : la pseudo-période  $T(t)$  est elle-même *lente-ment variable* d'oscillation à oscillation.

## L'exemple des chirps en lois de puissance

*Un modèle général* —  $C_{\alpha,\beta}(t) = a t^\alpha \exp\{i(bt^\beta + c)\}$ .

*Cas particuliers* — Approximation newtonienne de la partie *spirante* des ondes gravitationnelles  $\rightarrow (\alpha, \beta) = (-1/4, 5/8)$  ; fonction de Riemann  $\rightarrow (\alpha, \beta) = (3/2, -1)$ .

*Typologie* — En  $t = 0$  : divergence de l'*amplitude* si  $\alpha < 0$ , de la "*fréquence instantanée*" si  $\beta < 1$  et de la *phase* si  $\beta < 0$ .

*Singularités oscillantes* — Le cas  $(\alpha > 0, \beta < 0)$  est au-delà d'une caractérisation hölderienne  $\Rightarrow$  développement d'outils spécifiques (*analyse 2-microlocale, ondelettes*).

## Le spectre d'un chirp

*Phase stationnaire* — Dans le cas où la dérivée  $\dot{\varphi}(t)$  est une fonction monotone, on peut approcher le spectre

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{i(\varphi(t) - 2\pi ft)} dt$$

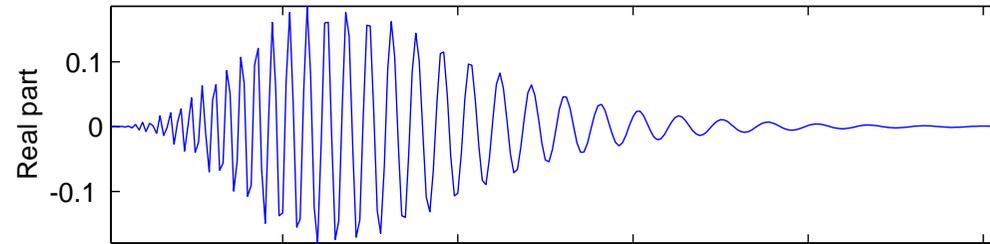
d'un chirp par son *approximation de phase stationnaire*  $\tilde{X}(f)$ .  
On a en particulier

$$|\tilde{X}(f)|^2 \propto \frac{a^2(t_s)}{|\ddot{\varphi}(t_s)|},$$

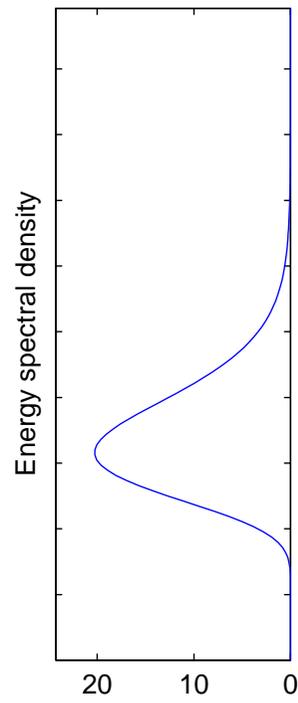
avec  $t_s$  tel que  $\dot{\varphi}(t_s) = 2\pi f$ .

*Interprétation* — La courbe de “fréquence instantanée”  $\dot{\varphi}(t)$  met en correspondance bijective un temps et une fréquence. Le spectre s'en déduit en pondérant les *fréquences visitées* par les *durées de résidence*.

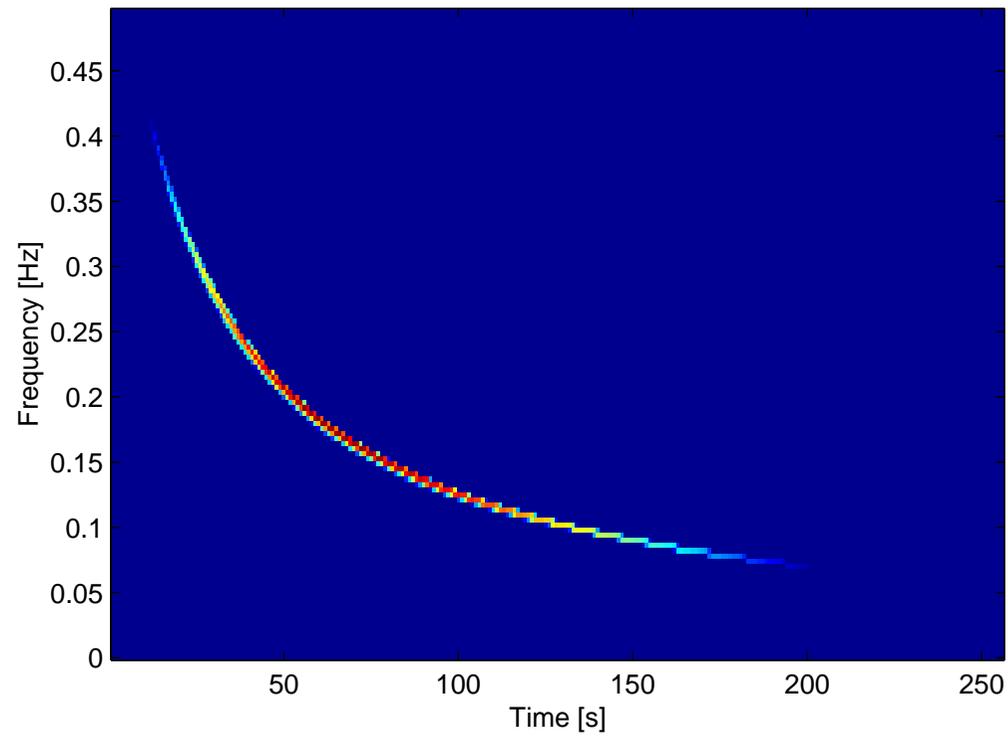
Signal in time



Linear scale



RSP, Lh=15, Nf=128, log. scale, Threshold=0.05%



représenter

# Modulations

*Onde monochromatique* — Dans le cas d'un modèle harmonique  $x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ , l'observation de  $x(t)$  permet d'accéder de manière univoque à l'amplitude  $a$  et à la fréquence  $f_0$ .

*Modulations d'amplitude et de fréquence* — Passer à un modèle évolutif revient intuitivement à effectuer la transformation

$$a \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \rightarrow a(t) \cos \varphi(t)$$

avec  $a(t)$  variable et  $\varphi(t)$  non linéaire.

Dans un contexte d'*observation*, on perd cependant l'unicité de la représentation car

$$a(t) \cos \varphi(t) = \left[ \frac{a(t)}{b(t)} \right] [b(t) \cos \varphi(t)] =: \tilde{a}(t) \cos \tilde{\varphi}(t)$$

pour n'importe quelle fonction  $0 < b(t) < 1$ .

## Représentation de Fresnel

*Onde monochromatique* — Le modèle harmonique *réel* peut en fait s'écrire

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Re} \{ a \exp i(2\pi f_0 t + \varphi_0) \},$$

avec

$$a \exp i(2\pi f_0 t + \varphi_0) = x(t) + i (\mathbf{H}x)(t)$$

et où  $\mathbf{H}$  est la *transformation de Hilbert* (quadrature).

*Interprétation* — Une onde monochromatique (prototype de signal déterministe “stationnaire”) est décrite, dans le plan complexe, par un *vecteur tournant* dont le module et la vitesse de rotation sont des grandeurs *constantes* au cours du temps.

## Amplitude et fréquence instantanées

*Généralisation* — Une onde *modulée* en amplitude et en fréquence (prototype de signal déterministe “non stationnaire”) est décrite, dans le plan complexe, par un *vecteur tournant* dont le module et la vitesse de rotation sont des grandeurs *variables* au cours du temps, la complexification étant calquée, pour une observation réelle  $x(t)$  quelconque, sur le cas “stationnaire” :

$$x(t) \rightarrow z_x(t) := x(t) + i (\mathbf{H}x)(t).$$

*Définition* — L’amplitude et la fréquence instantanées se déduisent alors de cette représentation complexe — appelée *signal analytique* — selon (Ville, '48) :

$$a_x(t) := |z_x(t)| \quad ; \quad f_x(t) := \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg z_x(t).$$

fi\_1comp.m

## Trois limitations

*Composantes multiples* — Par construction, la fréquence instantanée ne peut associer qu'*une* valeur fréquentielle à un instant  
⇒ moyenne pondérée dans le cas de signaux multicomposantes.

*Tendances* — Même problème dans le cas d'un signal monocomposante *avec composante continue non nulle* ou superposé à une *tendance* à très basses fréquences.

Amélioration par représentation de Fresnel “osculatrice” (Aboutajdine *et al.*, '80).

*Bruit* — Définition *différentielle* très sensible à un bruit additif, même faible.

fi\_2comp.m  
fi\_trend.m  
fio\_trend.m  
fi\_1comp\_b.m

# Temps-fréquence



*Idée* — Donner un sens mathématique à la notation musicale

*Objectif* — Écrire la “partition” d’un signal à composantes multiples et évolutives

*Contrainte* — Obtenir une représentation *localisée* dans le cas d’un chirp isolé :

$$\rho(t, f) \sim a^2(t) \delta(f - \dot{\varphi}(t)/2\pi).$$

# Méthodes locales et localisation

*L'exemple de la TF à court-terme* — On définit la quantité locale

$$F_x^{(h)}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \overline{h(s-t)} e^{-i2\pi f s} ds,$$

où  $h(t)$  est une fenêtre d'observation à court-terme.

*Mesure* — La représentation résulte d'une interaction entre le signal et un *appareil de mesure* (la fenêtre  $h(t)$ ).

*Compromis* — Une fenêtre courte favorise la “résolution” temporelle au détriment de la “résolution” fréquentielle, et vice-versa.

S\_1trans\_L.m

S\_1trans\_S.m

S\_1trans\_M.m

# Adaptation

*Chirps* — Adaptation aux *impulsions* si  $h(t) \rightarrow \delta(t)$  et aux *raies spectrales* si  $h(t) \rightarrow 1 \Rightarrow$  adapter l'analyse à des *chirps* quelconques suggère que  $h(t)$  dépende (localement) du signal.

*Chirp linéaire* — Dans le cas linéaire  $f_x(t) = f_0 + \alpha t$ , la largeur fréquentielle équivalente de  $|F_x^{(h)}(t, f)|^2$  (spectrogramme) se comporte comme :

$$\delta f_S \approx \sqrt{\frac{1}{\delta t_h^2} + \alpha^2 \delta t_h^2}$$

pour une fenêtre  $h(t)$  de largeur temporelle équivalente  $\delta t_h \Rightarrow$  minimum pour  $\delta t_h \approx 1/\sqrt{\alpha}$  (mais  $\alpha$  inconnu...).

S\_chirprate.m

## Auto-adaptation des méthodes locales

*Filtrage adapté* — Si l'on prend pour fenêtre  $h(t)$  le signal retourné dans le temps  $x_-(t) := x(-t)$ , on obtient directement que  $F_x^{(x_-)}(t, f) = W_x(t/2, f/2)/2$ , où

$$W_x(t, f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) \overline{x(t - \tau/2)} e^{-i2\pi f\tau} d\tau,$$

est la *Distribution de Wigner-Ville* (Wigner, '32; Ville, '48).

*Chirps linéaires* — La DWV se localise *parfaitement* sur les droites du plan:

$$x(t) = \exp\{i2\pi(f_0 t + \alpha t^2/2)\} \Rightarrow W_x(t, f) = \delta(f - (f_0 + \alpha t)).$$

*Remarque* — La localisation par auto-adaptation conduit à une transformation *quadratique* (distribution d'énergie).

## Interprétation

*Symétrie miroir* — En rapportant le signal analysé à un repère local glissant selon  $x_t(s) := x(s + t)$ , on a :

$$W_x(t, f) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ x_t(+\tau/2) \overline{x_t(-\tau/2)} \right] e^{-i2\pi f\tau} d\tau,$$

*Signal de phase* — Si  $x_t(s) = \exp\{i\varphi_t(s)\}$ , alors  $W_x(t, f)$  est, en  $t$ , la TF d'un signal de phase  $\Phi_t(\tau) := \varphi_t(+\tau/2) - \varphi_t(-\tau/2)$ , et donc de “fréquence instantanée”

$$\tilde{f}_{x_t}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_t(\tau) = \frac{1}{2} [f_{x_t}(+\tau/2) + f_{x_t}(-\tau/2)]$$

*Localisation* — On a par suite  $\tilde{f}_{x_t}(\tau) = f_0$  si  $f_{x_t}(s) = f_0 + \alpha s$ , et ceci pour toute pente de modulation  $\alpha$ .

SvsWV\_chirprate.m

WV\_1trans.m

# Interférences

*Superposition quadratique* — Pour tout couple de signaux  $\{x(t), y(t)\}$  et de coefficients  $(a, b)$ , on a

$$W_{ax+by}(t, f) = |a|^2 W_x(t, f) + |b|^2 W_y(t, f) + 2 \operatorname{Re} \{a b^* W_{x,y}(t, f)\},$$

avec

$$W_{x,y}(t, f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) \overline{y(t - \tau/2)} e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

*Inconvénient* — Les interférences entre composantes *disjointes* réduisent la lisibilité.

*Avantage* — Les interférences internes à des composantes *cohérentes* permettent la localisation.

WV\_interf.m  
sum\_comp\_N.m  
sum\_lin\_N.m

## Distributions quadratiques

*Covariances* — Des classes générales de distributions quadratiques de la forme  $\rho_x(t, f) = \langle x, \mathbf{K}_{t,f} x \rangle$  peuvent être construites sur la base de contraintes de covariance :

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \rightarrow & \rho_x(t, f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{T}x)(t) & \rightarrow & \rho_{\mathbf{T}x}(t, f) = (\tilde{\mathbf{T}}\rho_x)(t, f) \end{array}$$

*Translations* — Le choix  $(\mathbf{T}_{t_0, f_0} x)(t) = x(t - t_0) \exp\{i2\pi f_0 t\}$  conduit à la *classe de Cohen* (Cohen, '66) :

$$C_x(t, f) := \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(s, \xi) \Pi(s - t, \xi - f) ds d\xi,$$

avec  $\Pi(t, f)$  “arbitraire”.

## Un point de vue complémentaire

*Dualité distribution-corrélation* — Dans le cas “stationnaire”, la distribution d’énergie *fréquentielle* peut s’estimer comme image de Fourier de la corrélation *temporelle*  $\langle x, \mathbf{T}_\tau x \rangle$ , éventuellement pondérée.

*Extension* — Dans le cas “non stationnaire”, il faut recourir à une *corrélation temps-fréquence*  $A_x(\xi, \tau) \propto \langle x, \mathbf{T}_{\tau, \xi} x \rangle$  (*fonction d’ambiguïté*) qui, après pondération et transformation de Fourier, conduit à la classe de Cohen :

$$C_x(t, f) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \tau) A_x(\xi, \tau) e^{-i2\pi(\xi t + \tau f)} d\xi d\tau.$$

WVvsAF.m

## Classe de Cohen et lissages

*Spectrogramme* — Pour une fenêtre passe-bas  $h(t)$ , on a la relation de *lissage* :

$$S_x^{(h)}(t, f) := |F_x^{(h)}(t, f)|^2 = \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - f) ds d\xi$$

*De Wigner-Ville au spectrogramme* — Une généralisation consiste, à l'intérieur de la classe de Cohen, à utiliser une fonction de lissage  $\Pi(t, f)$  permettant une transition *continue* et *séparable* entre Wigner-Ville et spectrogramme (distributions dites *pseudo-Wigner-Ville lissées*) :

Wigner – Ville ...  $\rightarrow$  PWVL ...  $\rightarrow$  spectrogramme

$$\delta(t) \delta(f)$$

$$g(t) H(f)$$

$$W_h(t, f)$$

WV2S\_movie\_N.m

## Retour sur la localisation

*Approche globale* — La distribution de Wigner-Ville se localise parfaitement sur les *droites* du plan (chirps linéaires). On peut construire d'autres distributions se localisant sur des *courbes* plus générales (ex. : distributions de Bertrand adaptées aux chirps hyperboliques).

*Approche locale* — Une autre voie consiste à repartir de la relation de lissage définissant le spectrogramme et à envisager la localisation relativement à la fréquence instantanée telle qu'elle peut être mesurée *localement*, à l'échelle de la fenêtre à court-terme  $\Rightarrow$  *réallocation*.

realloc\_principe.m

## Réallocation

*Principe* — L'idée est de (1) remplacer le centre *géométrique* du domaine temps-fréquence de lissage par le *centre de gravité* de la distribution de Wigner-Ville sur ce domaine, et (2) de *réallouer* les valeurs calculées de la distribution lissée à ce centre de gravité local :

$$S_x^{(h)}(t, f) \mapsto \int \int_{-\infty}^{+\infty} S_x^{(h)}(s, \xi) \delta(t - \hat{t}_x(s, \xi), f - \hat{f}_x(s, \xi)) ds d\xi.$$

*Remarque* — La réallocation a été introduite dans un premier temps pour les seuls spectrogrammes (Kodera *et al.*, '76), mais son principe a été généralisé à *toute* distribution résultant du lissage d'une distribution-mère localisable (Auger & F., '95).

demo\_realloc.m

## La réallocation en action

*Spectrogramme* — Calcul *implicite* des centres de gravité locaux (Auger & F., '95) :

$$\hat{t}_x(t, f) = t + \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_x^{(\mathcal{T}h)}}{F_x^{(h)}} \right\} (t, f)$$

et

$$\hat{f}_x(t, f) = f - \operatorname{Im} \left\{ \frac{F_x^{(\mathcal{D}h)}}{F_x^{(h)}} \right\} (t, f),$$

avec  $(\mathcal{T}h)(t) = th(t)$  et  $(\mathcal{D}h)(t) = (dh/dt)(t)/2\pi$ .

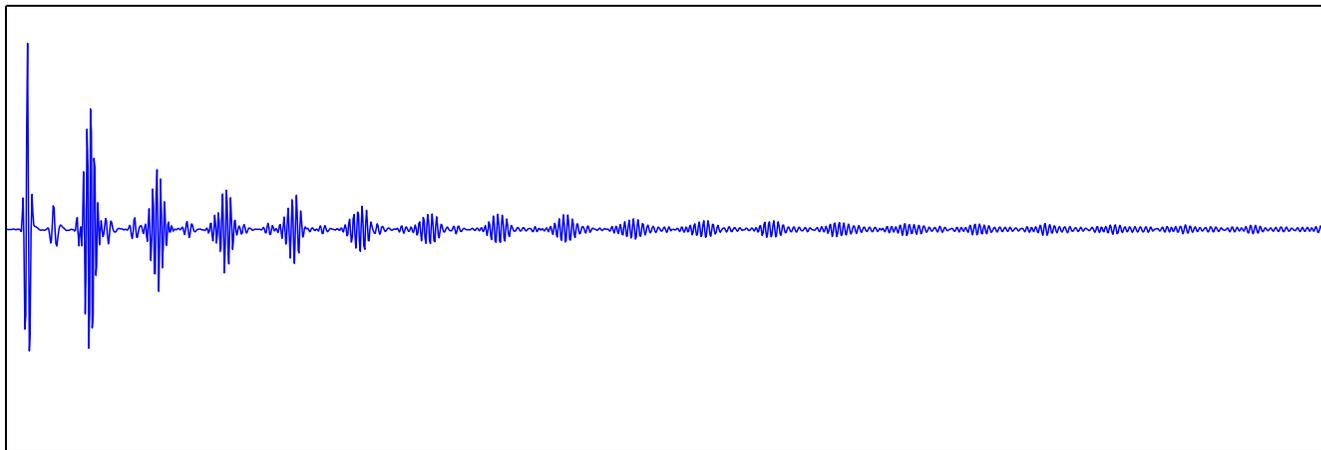
*Au-delà du spectrogramme* — Généralisations possibles à d'autres lissages (pseudo-Wigner-Ville lissée, scalogramme, etc.).

manipuler

## Chirps et dispersion

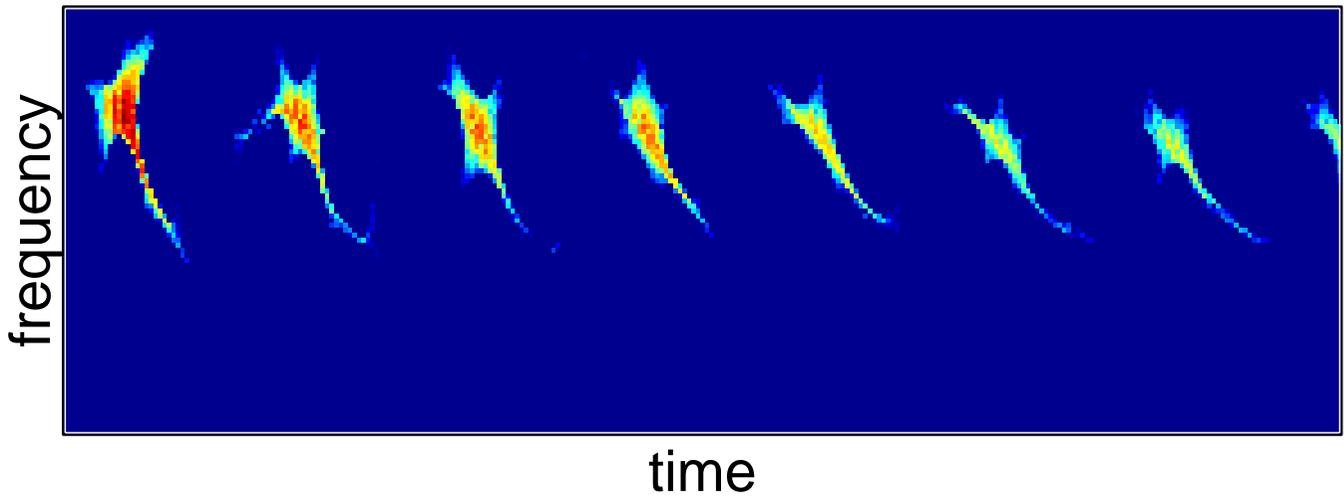
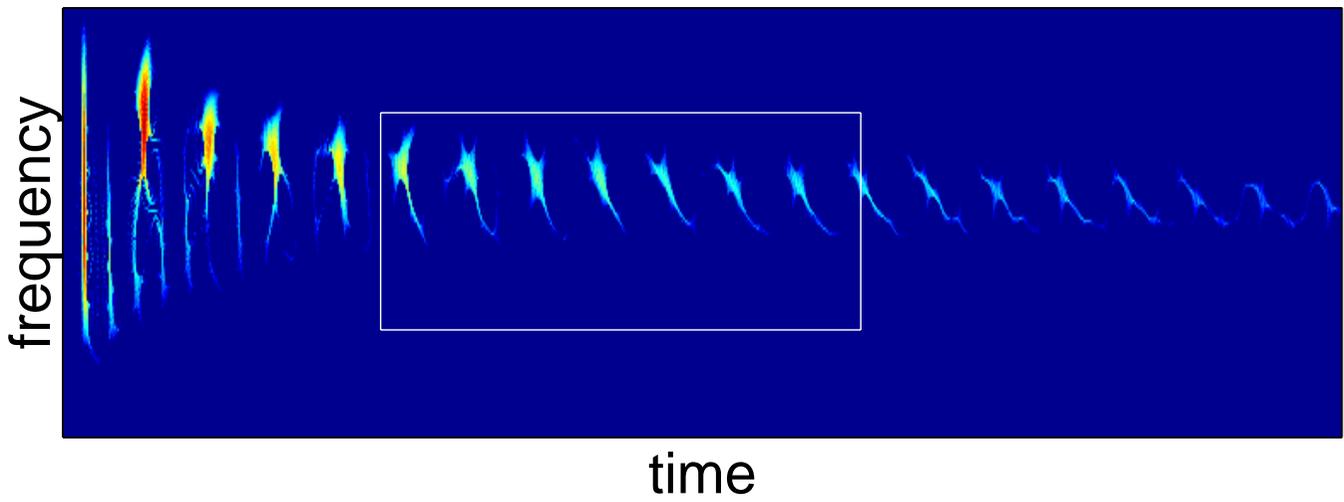
*Exemple* — Rétrodiffusion acoustique d'une onde ultrasonore sur une coque sphérique mince  $\Rightarrow$  dispersion fréquentielle des ondes de surface élastiques.

acoustic backscattering

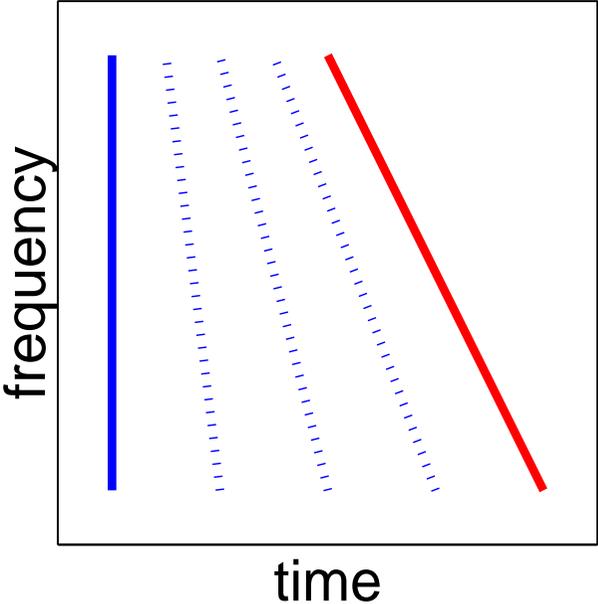


time

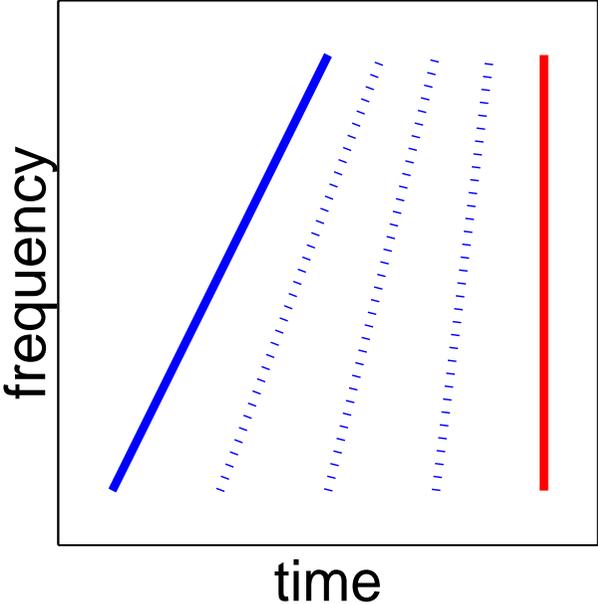
# acoustic backscattering



dispersion



compression



## Compression d'impulsion

*Limite* — Rayon de corrélation  $\sim 1/\text{bande spectrale}$ , et ceci indépendamment de la durée du signal.

*“Réception”* — Post-traitement par *filtrage adapté* (radar, sonar, vibrosismique, contrôle non destructif).

*“Émission”* — Pré-traitement par *réseau dispersif* (production d'impulsions laser ultra-brèves).

# Chirps et détection/estimation

*Optimalité* — Filtrage adapté, maximum de vraisemblance, contraste, . . . : ingrédient de base = *corrélation* “signal reçu — copie du signal émis” .

*Interprétation temps-fréquence* — L'*unitarité* d'une distribution temps-fréquence  $\rho_x(t, f)$  garantit l'équivalence :

$$|\langle x, y \rangle|^2 = \langle \langle \rho_x, \rho_y \rangle \rangle.$$

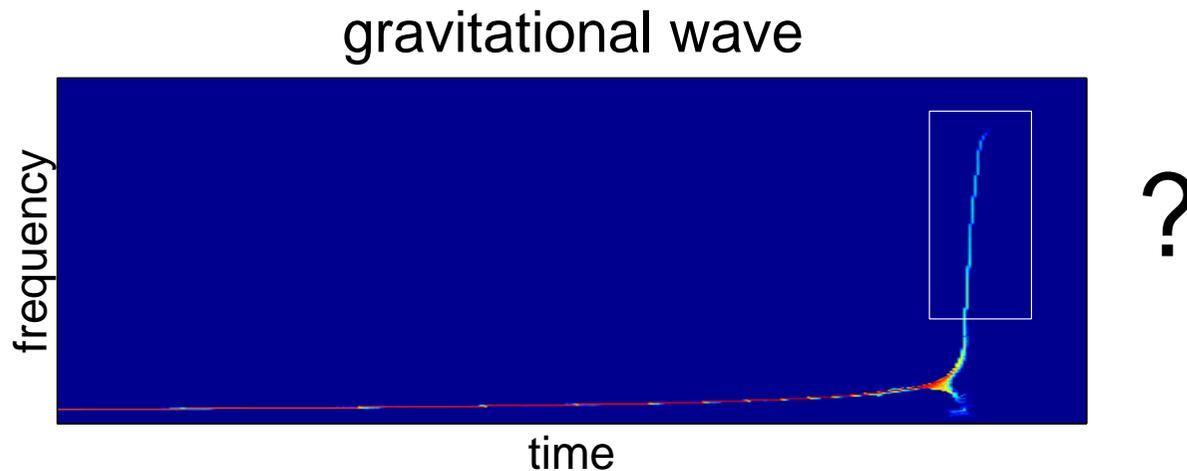
*Chirps* — Unitarité + localisation  $\Rightarrow$  détection/estimation par *intégration de chemin* dans le plan (ex. : Wigner-Ville et chirps linéaires).

detect\_tf.m

## Détection temps-fréquence ?

*Langage* — Le point de vue temps-fréquence offre un *langage* naturel pour aborder des problèmes de détection/estimation *au-delà* des situations nominales.

*Robustesse* — Incorporation d'*incertitudes* sur le modèle d'un chirp en remplaçant la *courbe* d'intégration par un *domaine* (exemple des approximations post-newtoniennes dans le cas des ondes gravitationnelles).



# Tolérance à l'effet Doppler

*Localisation d'une cible mobile* — Lorsqu'il s'agit d'estimer un retard par filtrage adapté en présence d'un effet Doppler inconnu, les estimations du retard et du Doppler sont couplées  $\Rightarrow$  *biais* et *perte de contraste* en sortie du détecteur.

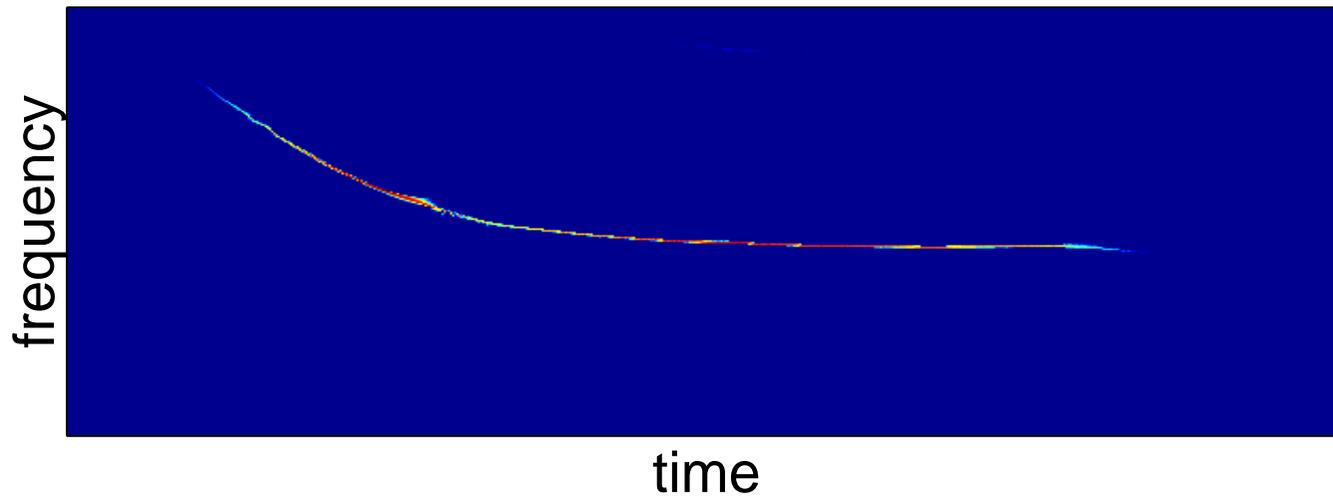
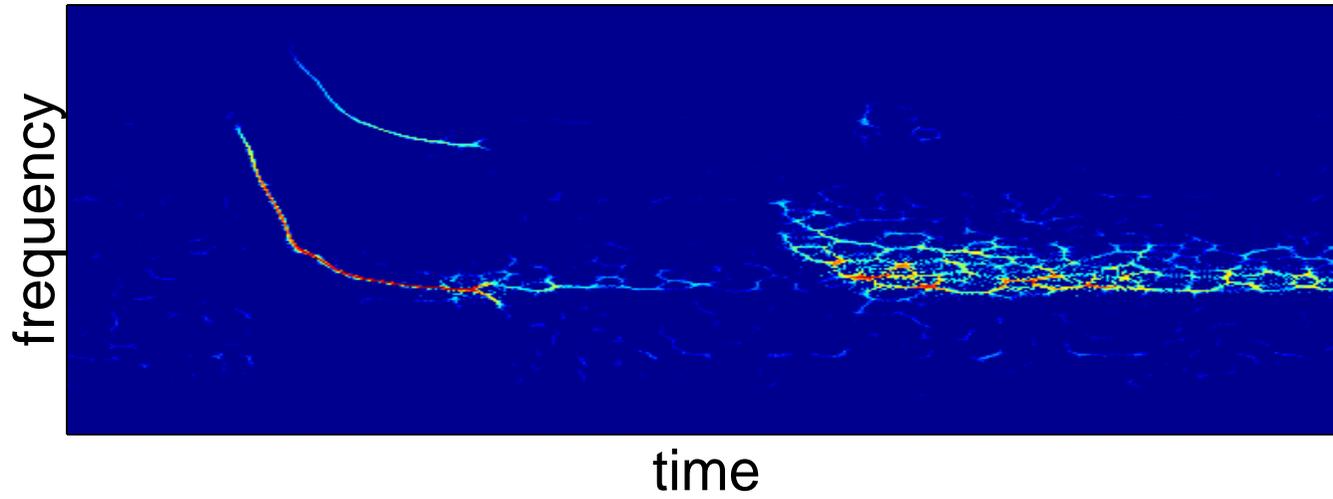
*Problème posé* — Annuler le biais sur le retard et minimiser la perte de contraste.

*Conception de signal* — Spécification de performances par interprétation *géométrique* de la structure temps-fréquence d'un chirp.

dopptor\_N.m

fatf\_dopp.m

# bat echolocation calls (+ echo)



décomposer



## Chirps et décompositions “atomiques”

*Fourier* — La transformée de Fourier (TF) usuelle peut s’écrire formellement comme  $(\mathcal{F}x)(f) := \langle x, e_f \rangle$ , avec  $e_f(t) := \exp\{i2\pi ft\}$ , de telle sorte que :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x, e_f \rangle e_f(t) df.$$

*Extensions* — Remplacer les exponentielles complexes par des chirps, considérés comme des versions *anamorphosées* d’ondes monochromatiques, ou par des “chirplets” (chirps de courte durée)  $\Rightarrow$  *TF (à court-terme, ou TO) modifiées.*

## TF modifiées — Exemple 1

*Transformée de Fourier fractionnaire* — Calculer les projections  $(\mathcal{F}_\phi x)(\xi) := \langle x, y_\phi \rangle$ , avec

$$y_\phi(t) := \sqrt{1 - i \cot \phi} \exp\{-i\pi(\xi^2 \cot \phi - 2\xi t \csc \phi + t^2 \cot \phi)\}$$

définit la *Transformée de Fourier fractionnaire* (TFFr) d'angle  $\phi \in (-\pi/2, +\pi/2]$ .

- La TFFr est une analyse sur des chirps *linéaires* de “fréquence instantanée”  $f_{y_\phi}(t) = \xi \csc \phi - t \cot \phi$ .
- Elle peut aussi être vue comme une TF avec “rotation” FT, puisque  $f_{y_{\pi/2}}(t) = \xi \Rightarrow (\mathcal{F}_{\pi/2} x)(\xi) = (\mathcal{F} x)(\xi)$ .

## TF modifiées — Exemple 2

*Transformée de Mellin* — Une *Transformée de Mellin* (TM) d'un signal  $x(t) \in L^2(\mathbb{R}^+, t^{-2\alpha+1} dt)$  peut se définir par la projection :

$$(\mathcal{M}x)(s) := \int_0^{+\infty} x(t) t^{-i2\pi s - \alpha} dt = \langle x, c \rangle.$$

- Analyse sur les chirps *hyperboliques*  $c(t) := t^{-\alpha} \exp\{i2\pi s \log t\}$ .
- $\dot{\varphi}_c(t)/2\pi = s/t \Rightarrow$ , le paramètre de Mellin  $s$  peut s'interpréter comme un *taux de modulation hyperbolique*.
- La TM peut aussi se voir comme une TF *anamorphosée*, puisque  $\tilde{x}(t) := e^{(1-\alpha)t} x(e^t) \Rightarrow (\mathcal{M}x)(s) = (\mathcal{F}\tilde{x})(s)$ .

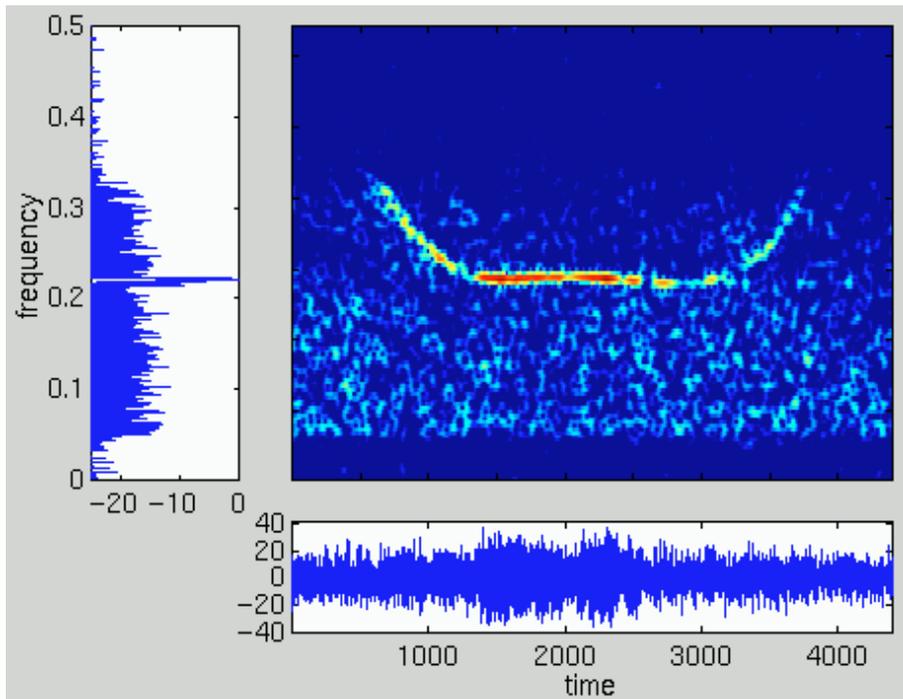
## “Chirplets”

*Des “gaborettes” et des “ondelettes” aux “chirplets”* — Localisation + modulation conduisent à des représentations à 4 paramètres, par exemple de la forme  $\langle x, x_{t,f,\alpha,\gamma} \rangle$  avec

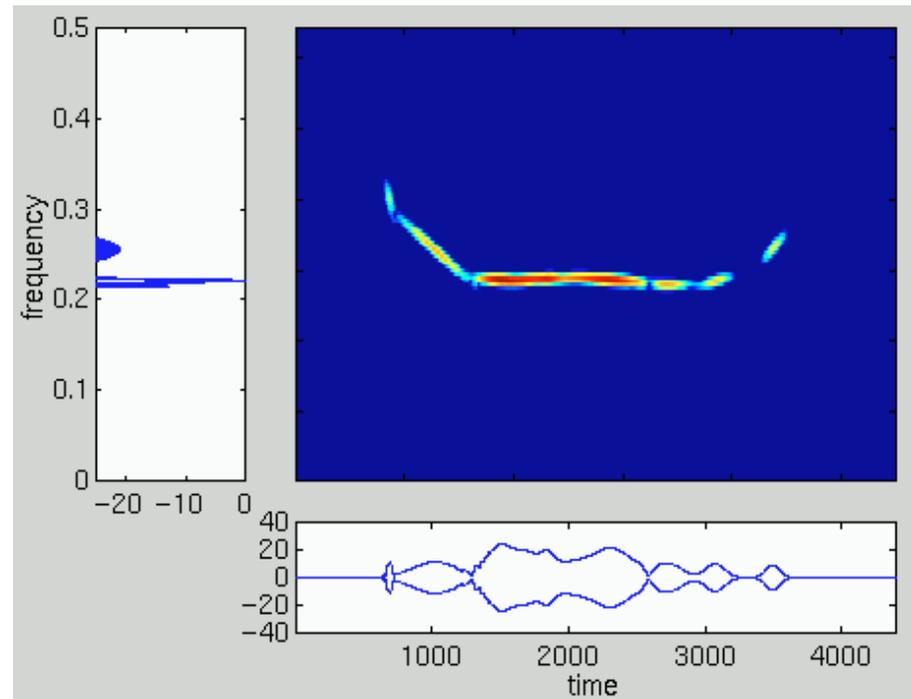
$$x_{t,f,\alpha,\gamma}(s) \propto \exp\{-\pi(\gamma + i\alpha)(s - t)^2 + i2\pi f(s - t)\}.$$

*La décomposition vue comme un problème d'estimation* — Les différentes chirplets constitutives d'un signal peuvent être *identifiées* séquentiellement par des techniques de type “matching (ou basis) pursuit” (Mallat & Zhang, '93; Chen & Donoho, '99; Bultan, '99; Gribonval, '99). Elles peuvent aussi être *estimées* au sens du maximum de vraisemblance (O'Neill & F., '98–'00).

*Limitations de nature “paramétrique”* — Compromis inévitable entre *richesse de dictionnaire* et *complexité algorithmique*.



signal + bruit



8 atomes

# Décomposition Modale Empirique

*Problème posé* — Sur la base d'une observation  $x(t)$ , obtenir une représentation de la forme :

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k(t) \psi_k(t),$$

où les  $a_k(t)$  mesurent des “modulations d'amplitude” et les  $\psi_k(t)$  des “oscillations”.

*Idée* — “signal = oscillations rapides sur oscillations lentes”.

*Mise en œuvre* (Huang *et al.*, '98) — (1) identifier (localement) l'oscillation la plus rapide ; (2) soustraire celle-ci au signal de départ ; (3) itérer sur le résidu.

emd\_principe.m

# L'algorithme de Huang

1. identifier les maxima et minima locaux du signal
2. en déduire une enveloppe supérieure et une enveloppe inférieure par interpolation (splines cubiques)
  - (a) soustraire l'enveloppe moyenne du signal
  - (b) itérer jusqu'à ce que  $\#\{\text{extrema}\} = \#\{\text{zéros}\} \pm 1$
3. soustraire le mode ainsi obtenu du signal
4. itérer sur le résidu

emd\_2fmsin.m

## Quelques caractéristiques

*Localité* — La méthode opère à l'échelle d'*une* oscillation.

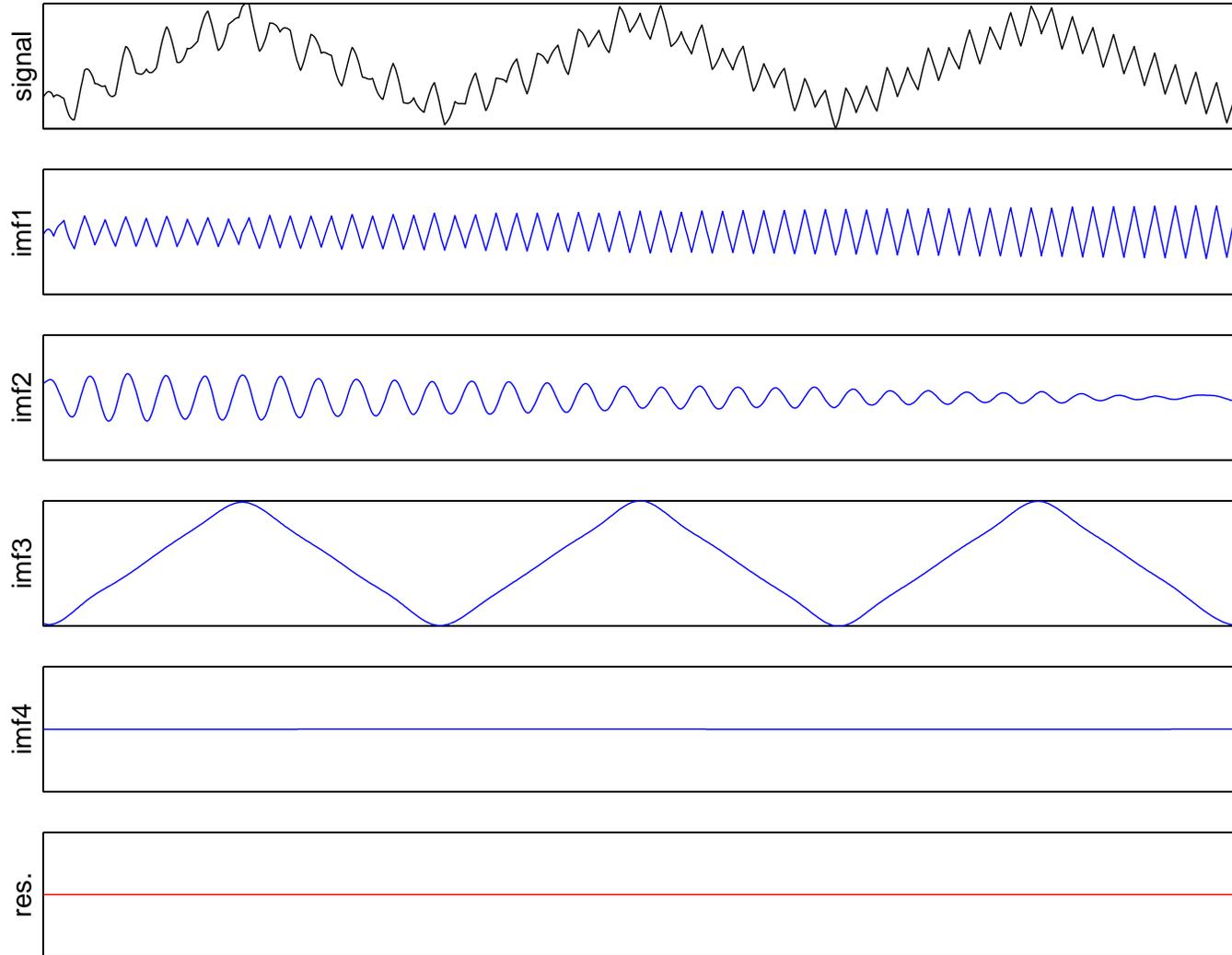
*Adaptativité* — La décomposition est entièrement *pilotée par les données*.

*Oscillation quelconque* — Pas de présupposé sur le caractère *harmonique* des oscillations  $\Rightarrow$  1 oscillation *non linéaire* = 1 mode.

*Multirésolution* — Le processus itératif explore *séquentiellement* les échelles constitutives “naturelles” d'un signal.

*Évaluation des performances* — La décomposition est définie comme la sortie de l'algorithme (*pas de définition analytique*)  $\Rightarrow$  recours intensif à des *simulations numériques* dans des situations bien contrôlées.

# Empirical Mode Decomposition



# La DME comme filtre

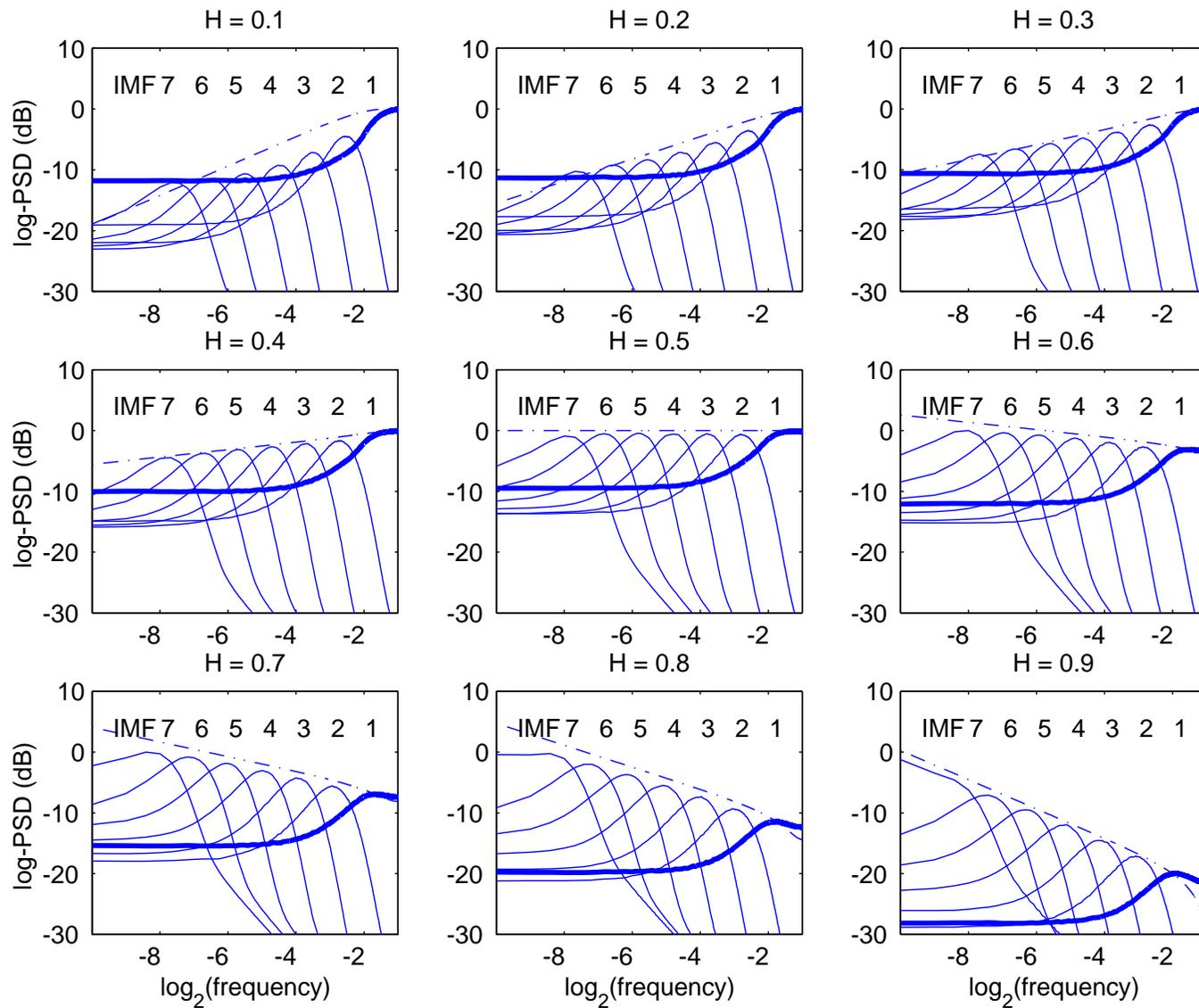
*Approche stochastique et fréquentielle* — Décomposition et analyse spectrale, mode par mode, d'un bruit large bande.

*Modèle* — Bruit gaussien fractionnaire (fGn), de densité spectrale  $\mathcal{S}(f) \sim |f|^{1-2H}$ , avec  $0 < H < 1$  (exposant de Hurst).

*Résultats* — Émergence “spontanée” d'une structure de banc de filtres quasi-dyadique, auto-similaire (F., Gonçalves et Rilling, '03) :

$$\mathcal{S}_{k',H}(f) = \rho_H^{\alpha(k'-k)} \mathcal{S}_{k,H}(\rho_H^{k'-k} f)$$

pour tout  $k' > k \geq 2$ , avec  $\alpha = 2H - 1$  et  $\rho_H \approx 2$ .

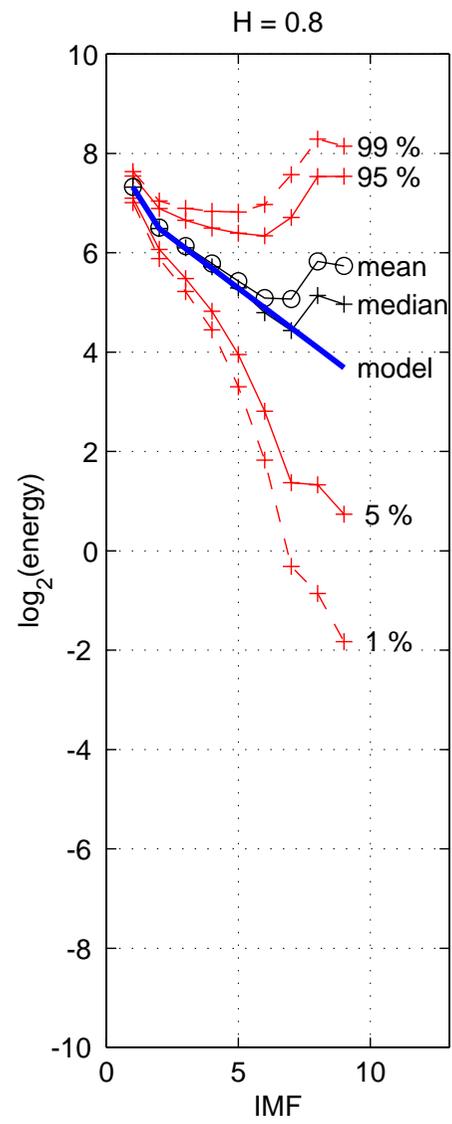
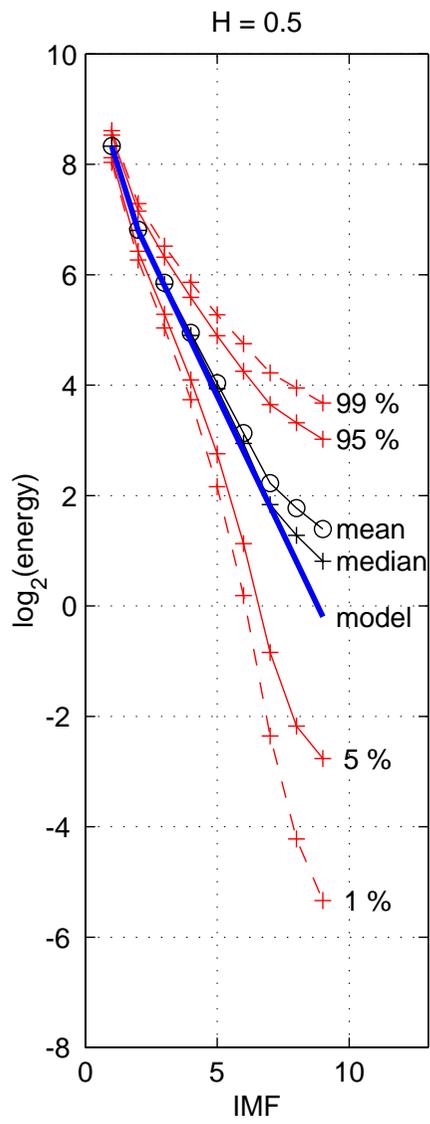
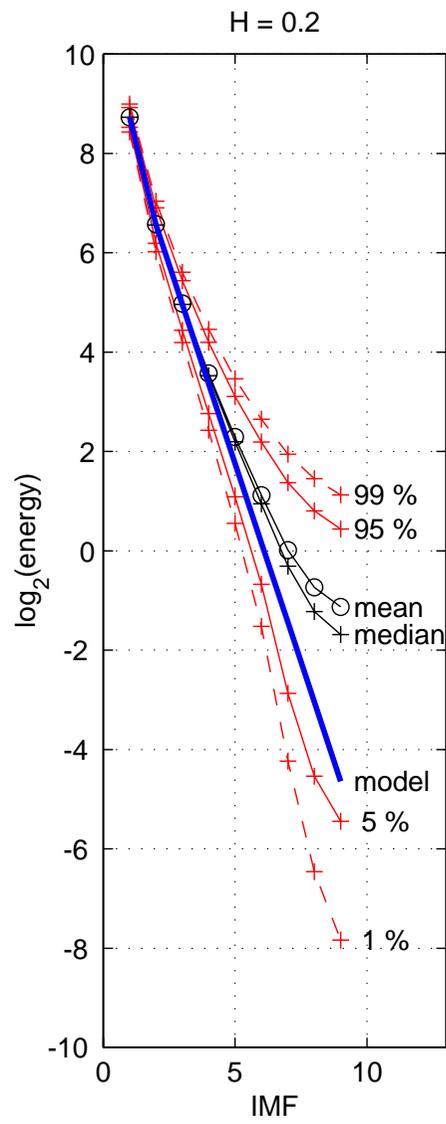


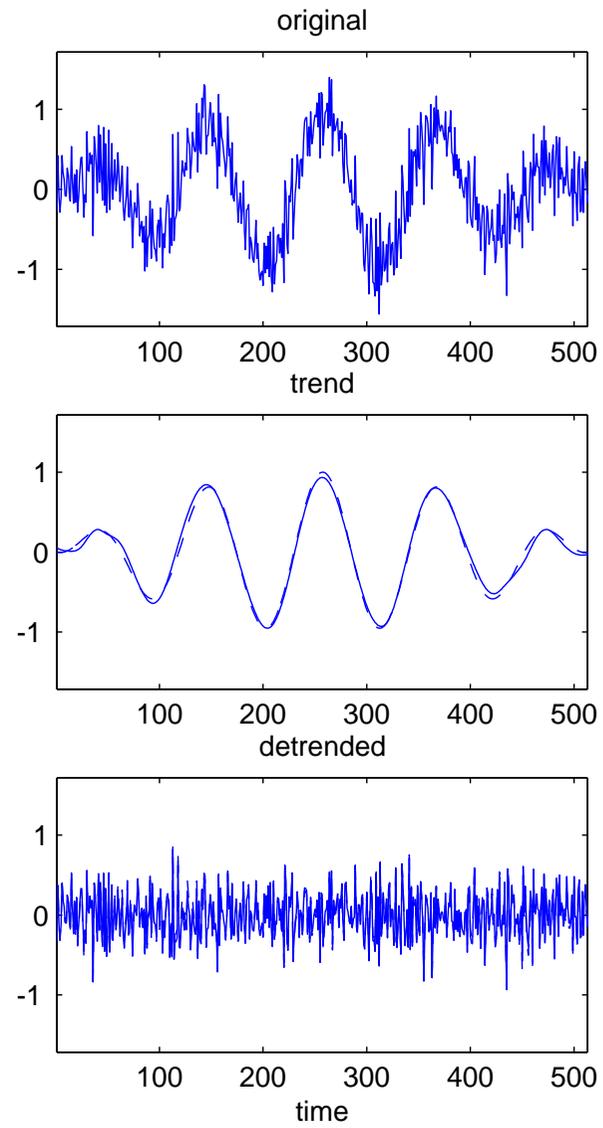
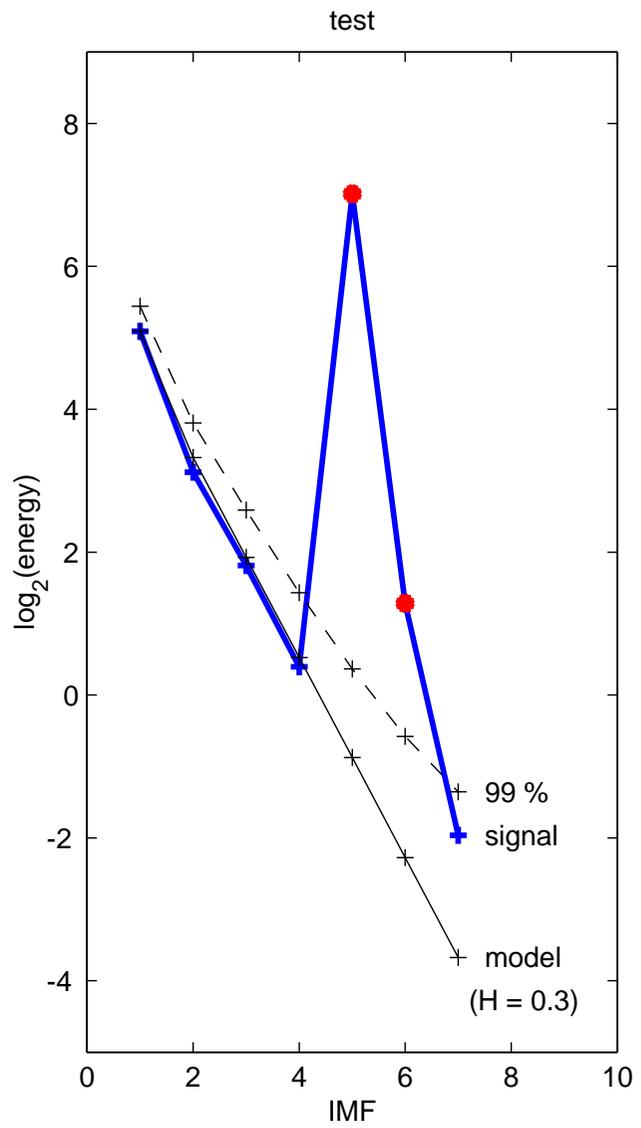
## Manipulation de modes

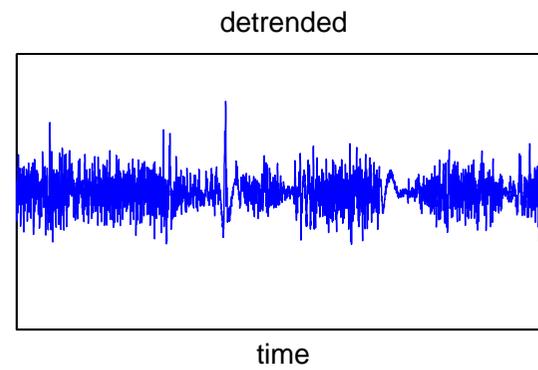
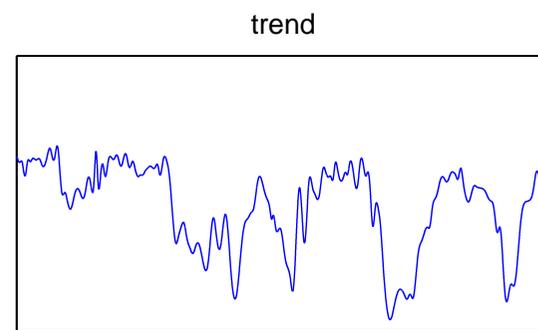
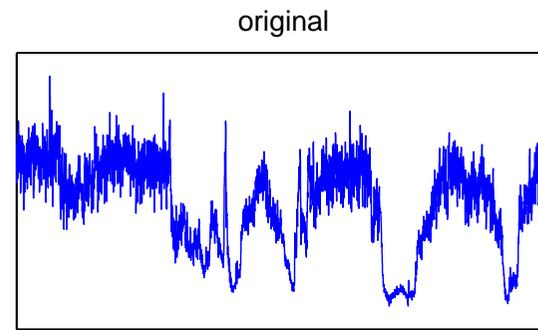
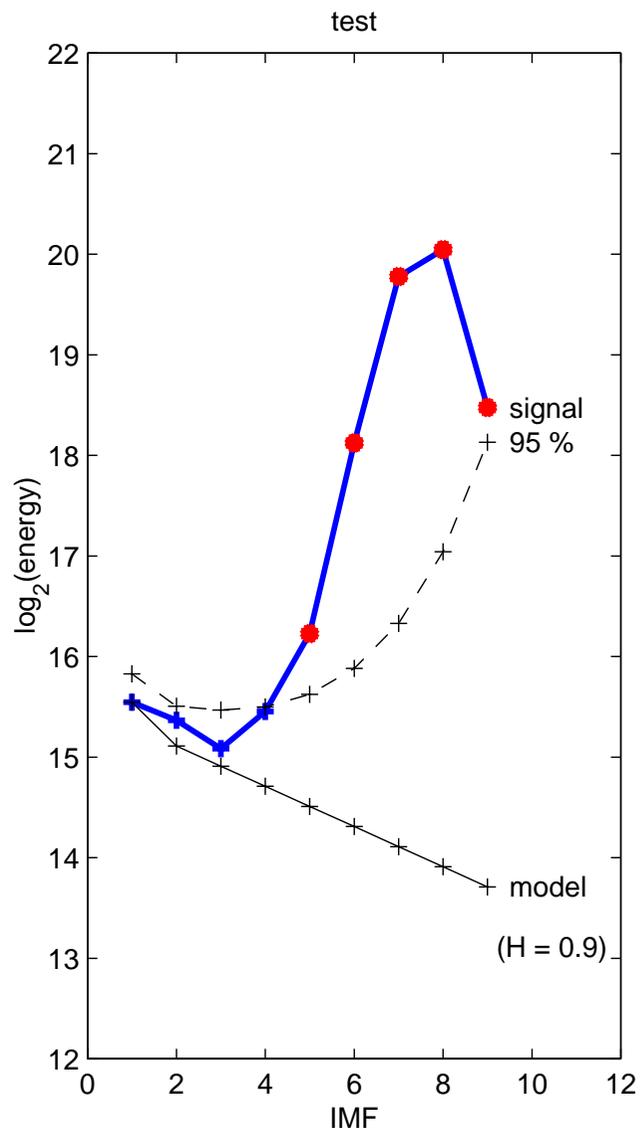
*Reconstruction* — L'extraction des modes est *non linéaire*, mais leur recombinaison linéaire est *exacte*. Sélection de modes  $\Rightarrow$  possibilités de reconstructions partielles.

*Modes significatifs* — Pour un modèle de bruit, l'évaluation (empirique) de la dispersion statistique permet, mode par mode, de rejeter le cas échéant l'hypothèse bruit seul.

*Applications* — *Débruitage* et *suppression de tendance*, suivant que l'on ne garde ou rejette que les modes excédant un seuil fixé par le modèle et un taux d'acceptation.







conclure

*Chirps* — Des chirps “*partout*”.

*Fréquence instantanée* — “Chirps = trajectoires temps-fréquence”  
⇒ re-définir la notion de *fréquence instantanée*, e.g., comme sous-produit de représentations dans le plan (ex.: “ridges”, points fixes des opérateurs de réallocation) ? Problème encore (et toujours ?) ouvert.

*Temps-fréquence* — Cadre naturel de description, aujourd’hui bien balisé.

*etc.* — Nouvelles approches (comme la DME) élargissant la notion de fréquence à celle d’oscillation. Cadre théorique ?

en savoir plus

## Références, pré-tirages, logiciels

<http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/>