Détermination du spectre de singularité d'un signal fractal par la méthode du Module du Maxima de la Transformée en Ondelettes

Pierre Borgnat

sous la direction de Pierre-Olivier Amblard et Patrice Abry

Stage de 2ème année de magistère
Avril-Juillet 1996

Introduction

L'objectif de ce stage est de réussir à étudier des **courbes fractales**, c'est à dire des figures manifestant apparemment un très grand degré d'irrégularité (ils sont souvent singuliers en tous points) et ne possédant pas de longueur caractéristique. Ils obéissent cependant à un ordre intrinsèque précis. La propriété fondamentale d'un tel ensemble est celle d'**autosimilarité**, *i.e.* il est identique à lui-même, quel que soit le niveau de détail que l'on considère ou, autrement dit, quelle que soit l'échelle à laquelle on le regarde. En fait nous voulons pouvoir principalement étudier des signaux issus de la **turbulence** développée, qui présenteraient selon certains développements du modèle de Kolmogorov 62, une structure fractale.

Nous présentons d'abord un formalisme permettant de décrire un signal fractal en terme de **spectre de singularité** $D(h)$, qui représente l'éventail des forces des singularités du signal et leur importance statistique. Une première méthode pour accéder à ce spectre est indiquée : celle des fonctions de structure. Cependant elle n'est guère performante (elle ne donne pas accès 'a l'ensemble du spectre), ainsi nous en présentons une autre basée sur l'utilisation de la **transformation en ondelettes** dont la mise en oeuvre effective constituait une grande partie du stage. Les deux dernières parties présentent les résultats obtenus après implémentation de la méthode et en exposent les principales difficultés pratiques et les solutions apportées.

Remerciements

Je voudrais d'abord citer le laboratoire qui m'a accueilli pour ce travail : le CEPHAG (Centre d'Etude des PHénomènes Aléatoires et Géophysiques), sis à Grenoble. Je souhaite remercier tous ceux qui m'ont aidé, en premier lieu le responsable du stage Pierre-Olivier Amblard ainsi que Patrice Abry du laboratoire de physique de L'ENSL qui ont suivi tout au long mon travail. J'ai apprécié l'accueil et l'aide de l'équipe de Traitement du Signal de l'ENSL, en particulier Patrick Flandrin et Olivier Michel.

Je ne voudrai pas oublier Alain Arnéodo qui nous a permis de voir la complexité de mise au point et la finesse de la méthode MMTO dont il est l'un des initiateurs. Merci enfin a tous ceux qui ont lu ou liront ce travail.

1 Le formalisme multifractal

1.1 Exposants de singularité et dimension fractale

Le *fomalisme multifractal* permet de décrire les propriétés *statistiques* de mesures ou de signaux singuliers, *i.e.* non dérivables, généralement en tout point. Il est utilisé dans de nombreux domaines, en particulier dans le contexte de la turbulence développée [1]. Ce formalisme passe par l'introduction d'exposants de singularité α et du spectre de singularité $f(\alpha)$, défini ci-dessous, du signal ou de la mesure.

Afin de mesurer correctement la *dimension d'ensembles fractals*, Hausdorff introduisit une nouvelle notion de dimension plus fine. Si on considère un ensemble S et une partition en boules de rayon ϵ de cet ensemble (appartenant à $\mathbb{R}^n$), le nombre $N(\epsilon)$ de boules nécessaire définit, par son comportement en loi de puissance, la dimension fractale d_F de S :

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-d_F(S)}. \tag{1}$$

La dimension de Hausdorff $d_F(S)$ ainsi quantifiée sert à définir le spectre de singularité d'une mesure μ quelconque :

$$f(\alpha) = \dim_H\{x|\mu(B_x(\epsilon)) \sim \epsilon^\alpha, \text{ pour } \epsilon \to 0\}, \tag{2}$$

où $B_x(\epsilon)$ est une boule de diamètre ϵ centrée en x et $\dim_H$ est la dimension de Hausdorff de cet ensemble. L'exposant de singularité $\alpha(x)$ rend compte du degré de régularité de la mesure en ce point. Cette mesure est dite *monofractale* si $f(\alpha)$ se réduit à un point (même α en tout x). Elle est *multifractale* si le support de $f(\alpha)$ est large et qu'il y existe une variété d'exposants.

Il n'est pas aisé de calculer le spectre à partir de la loi en puissance (1), en pavant le support de boules de rayon ϵ. Une description thermodynamique des mesures fractales a été introduite pour permettre leur détermination. Elle passe par l'écriture d'une fonction de partition dont le comportement en puissance donne une variable observable $\tau(q)$:

$$\mathcal{Z}_q(\epsilon) = \sum_i \mu(B_x(\epsilon))^q \sim \epsilon^{\tau(q)}, \text{ pour } \epsilon \to 0. \tag{3}$$

La somme est faite sur une partition du support de la mesure μ. Ce spectre se relie simplement à la notion de dimension fractale généralisée D_q, qui fut introduite avant le formalisme multifractal pour décrire les propriétés de systèmes dynamiques chaotiques, par la relation :

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}. \tag{4}$$

Remarquons que pour $q = 0$, cette notion coïncide avec celle de dimension de Hausdorff du support de la mesure d_F.

Grâce à un argument de domination du plus petit exposant dans la somme définissant la fonction de partition, il est possible de démontrer que les variables q et $\tau(q)$ sont reliées aux variables α et $f(\alpha)$ par une transformation de Legendre :

$$f(\alpha) = \min_q (q\alpha - \tau(q)). \tag{5}$$

C'est en cette transformation que réside l'analogie avec la thermodynamique. Nous reviendrons un peu plus loin sur les propriétés que nous pouvons en tirer pour une meilleure détermination de $f(\alpha)$.

1.2 Le formalisme multifractal en turbulence et la méthode des fonctions de structure

Le modèle multifractal a initialement été introduit pour décrire la turbulence pleinement développée dans les écoulements aux grands nombres de Reynolds. Les premières idées en ce domaine sont dues à Kolmogorov qui formule en 1941 une théorie statistique de la turbulence (voir par exemple [3][4]). Il démontre le résultat suivant reliant le champ de dissipation local ϵ et les moments des incréments de vitesses :

$$\epsilon \sim \frac{<(\delta v_l)^3>}{l}, \tag{6}$$

où l'incrément de vitesse s'écrit au point x_0 : $\delta v_l(x_0) = v(x_0 + l) - v(x_0)$. Cette relation est ensuite supposée généralisable aux autres moments :

$$<(\delta v_l)^n> \sim \epsilon^{n/3}\, l^{n/3}. \tag{7}$$

La théorie K41 a été complétée par la suite par les travaux d'Obukhov-Kolmogorov en 1962. Ceux-ci supposent que l'énergie passe en cascade des grandes échelles, en particulier l'échelle intégrale où elle est présente, vers les petites échelles, et se dissipe dans ces dernières. Il faut prendre alors, dans la relation précédente, les champs de dissipation locaux à une échelle donnée $<\epsilon^{n/3}>$ pour décrire les moments des incréments de vitesse. Ce modèle ouvre la voie à des descriptions fractales de la turbulence, où le champ de dissipation est une mesure singulière.

En particulier, le formalisme multifractal, introduit pour la première fois par Parisi et Frisch [1] donne une description de la nature singulière du *champ de vitesse* d'un écoulement turbulent. Ils ont supposé que le champ des incréments de vitesse présentait des propriétés d'autosimilarité avec des singularités d'exposant h :

$$\delta v_l \sim l^h \text{ à la limite } l \to 0. \tag{8}$$

Ils supposèrent qu'il y avait plusieurs exposants, chacun caractérisé par la dimension de Hausdorff $D(h)$ de l'ensemble des points où l'on retrouve cet exposant. Afin de calculer le spectre de singularité, ils utilisèrent les *fonctions de structure* d'ordre p des incréments de vitesse :

$$S_p(l) = <(\delta v_l)^p> . \tag{9}$$

Ces fonctions présentent conformément au modèle K41 un comportement en loi de puissance avec l'échelle :

$$S_p(l) \sim l^{\zeta_p}, \text{ pour } l \to 0. \tag{10}$$

En combinant les variations, du fait des singularités, des fonctions de structure (9) et celles des incréments de vitesse (8), équations similaires au comportement de la mesure d'une boule $\mu(B_x(\epsilon))$ en (2) et à la fonction de partition (3), le modèle multifractal présenté précédemment donne le lien entre le spectre de singularite $D(h)$ et l'exposant ζ_p. Une simple transformée de Legendre permet de passer de l'un à l'autre :

$$D(h) = \min_p (ph - \zeta_p - 1). \tag{11}$$

La présence du 1 vient de ce que la fonction de partition est définie comme la moyenne multipliée par le nombre d'éléments dans la somme, qui est proportionnel à l, longueur caractéristique (ou taille des boules). Ainsi cette fonction se comporte en l^{ζ_p+1} et on peut écrire *a priori* l'égalité :

$$\tau(q) = \zeta_q + 1. \tag{12}$$

En réalité cela n'est pas valable pour toutes les valeurs de q car l'approche par les fonctions de structure des incréments est intrinséquement limitée dans les exposants qu'elle peut saisir [7].

1.3 Les limites de l'approche par les fonctions de structure

La définition originale des fonctions de structure n'est valable que pour des valeurs de p entières et positives : ce sont les moments d'ordre p des incréments de vitesse. Il est facile d'étendre cette définition à toutes le valeurs positives en prenant le module des incréments de vitesse dans la définition.

Cependant nous ne pouvons pas définir ces fonctions pour $p < 0$. La densité de probabilité n'a en effet aucune raison de s'annuler quand δv_l tend vers 0, et les fonctions de structure pour p négatif divergent quand on considère des incréments aussi petits que l'on veut. Ainsi cette approche ne donnera qu'une moitié de la courbe du spectre de singularité, qui est usuellement une courbe en cloche. Seule la partie de $D(h)$ correspondant aux singularités les plus fortes ($h > h_{\text{sommet}}$) sera détectée [7].

Un dernier inconvénient vient de la limitation intrinsèque sur les exposants décelables. Les incréments de vitesse peuvent se réécrire sous la forme :

$$\delta v_l(x_0) = \frac{1}{l} \int \Delta^{(1)} \left(\frac{u - x_0}{l} \right) v(u) du, \tag{13}$$

où $\Delta^{(1)}(u) = \delta(u+1) - \delta(u)$. Les incréments sont donc équivalents à la transformée en ondelettes par l'ondelette dite «du pauvre». Nous verrons dans la partie suivante la théorie de la transformation en ondelettes et son application au formalisme multifractal. Nous anticipons en utilisant un théorème concernant cette méthode (*cf.* 2.2) : les exposants décelables sont limités par le nombre de moments nuls de l'ondelette. Comme celle correspondant aux incréments de vitesse ne possède qu'un seul moment non nul pour $m = 1$, elle ne peut détecter que des exposants inférieurs à 1.

La méthode des fonctions de structure n'est donc pas vraiment adéquate pour saisir les caractéristiques de signaux multifractals. Nous introduisons ci-dessous la méthode utilisant la transformation en ondelettes proposées par A. Arnéodo *et al.* [4] [6].

2 La transformation en ondelettes

2.1 Définition

La *transformation en ondelettes* est une technique d'analyse des signaux introduite au début des années 80 par le géophysicien Morlet [2]. Son principe est de représenter le signal vu à des échelles différentes, autour de toutes les positions spatiales. Pour ce faire, il est décomposé linéairement sur des fonctions que l'on appelle *ondelettes* et qui sont caractérisées par leur position dans l'espace x et leur échelle a. Elles sont déduites par translations et dilatations d'une unique fonction mère : $\psi_{a,x}(u) = \psi((u-x)/a)/a$.

La transformée en ondelettes (abréviation TO) est alors la représentation du signal dans le demi-plan position-échelle ainsi défini et s'écrit de façon générale avec le produit scalaire :

$$T_\psi[s](x,a) = \int \overline{\psi}_{a,x}(u)s(u)du \tag{14}$$

où s est le signal à analyser, a est l'échelle (positive) et x est la position. Nous présentons ici uniquement la transformée continue, définie en tout point du plan. L'ondelette doit vérifier certaines propriétés pour que cette décomposition soit correcte. Elle doit être à moyenne nulle et vérifier une condition d'*admissibilité* afin qu'il y ait une formule de reconstruction du signal à partir de sa transformée en ondelettes (*cf.* [3] pour le cadre mathématique rigoureux de la TO). Cela impose en particulier que la fonction soit oscillante.

Les conditions que doit vérifier l'ondelette, laissent cependant une grande liberté de choix. La plupart du temps, elle est choisie localisée assez précisément en position et en fréquence. Il est possible alors de relier l'échelle d'analyse à la fréquence de l'ondelette : $\nu = \nu_0/a$, où ν_0 est choisie conventionnellement (par exemple une fréquence caractéristique[1] de l'ondelette-mère (passe-bande)). L'ondelette de Morlet fut une des premières introduites, ainsi que celle de Haar, utile en traitement d'images. Pour le problème qui nous intéresse, la détermination du spectre de singularité d'un signal fractal, nous imposons une condition supplémentaire à l'ondelette. Elle doit être orthogonale aux polynômes des premiers degrés :

$$\int x^m \psi(x)dx = 0, \text{pour } 0 \leq m < N. \tag{15}$$

Les N premiers moments sont alors nuls. Cette condition nous amène à considérer en particulier $\psi^{(N)}$ la dérivée d'ordre N d'une gaussienne, qui a justement cette propriété (*cf.* figure 1, indiquant les profils des ondelettes). Elle est définie par :

$$\psi^{(N)}(x) = \frac{d^N}{dx^N}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{16}$$

Nous devons aussi *normaliser* de la même manière toutes les ondelettes déduites de la fonction mère. Il est courant de choisir comme critère la conservation de l'énergie des ondelettes. Cependant dans le contexte d'analyse multifractale

1. maximum de $\tilde{\psi}(\nu)$ ou son moment d'ordre 1.

qui nous préoccupe, il est préférable d'assurer une variation de l'énergie des ondelettes en $1/\sqrt{a}$. En supposant l'ondelette-mère d'énergie unité, nous écrivons donc les ondelettes dilatées sous la forme :

$$\psi_{a,x}(u) = \frac{1}{a}\,\psi\left(\frac{u-x}{a}\right). \tag{17}$$

Ce choix de normalisation particulière permet de déduire directement de résultats mathématiques sur les mesures, des résultats équivalents sur les fonctions fractales [8]. Il n'y a alors pas lieu de faire de distinction entre l'analyse de mesures ou de signaux.

2.2 Transformée en ondelettes de signaux singuliers

Le comportement singulier d'un signal en un point x_0 peut être caractérisé par un *exposant de Hölder* $h(x_0)$, qui est le plus grand exposant tel qu'il existe un polynôme de degré n vérifiant :

$$|s(x) - P_n(x - x_0)| = \mathcal{O}(|x - x_0|^{h(x_0)}). \tag{18}$$

Dans ce cas, $h(x_0)$ est compris entre n et $n+1$ et est le premier terme singulier apparaissant dans le développement de Taylor autour de x_0. Cette notion se relie facilement à celle d'exposant de singularité du modèle multifractal, en l'étendant aux valeurs supérieures à 1.

Les propriétés d'autosimilarité des signaux fractals permettent de trouver le comportement de la transformée en ondelette d'un signal fractal en fonction de l'échelle [5]. Si l'ondelette vérifie la condition (15), alors pout tout exposant inférieur à N on a :

$$|T_\psi[s](x,a)| = \mathcal{O}(a^{h(x)}), \text{quand } a \to 0. \tag{19}$$

Les exposants de Hölder supérieurs à N se comportent comme le terme dominant du développement de Taylor, moins les premiers moments qui sont annulés, donc en a^N. *L'analyse en ondelette nous permet alors de déterminer les exposants de singularité en chaque point.* Il n'est cependant pas faisable de calculer ces exposants, puis d'essayer de trouver l'ensemble des positions où l'on trouve un exposant donné et de calculer la dimension de Hausdorff de ce support. La méthode du Maximum du Module évite ces obstacles et permet le calcul de $D(h)$ à partir de la transformée en ondelette.

2.3 Méthode du Maxima du Module de la TO

Cette approche consiste à former une fonction de partition basée sur les maxima locaux, définis à chaque échelle, du module de la TO. Nous pouvons remarquer d'emblée que ces maxima s'organisent selon des lignes quasiment verticales dans le plan position-échelle, en pointant vers un point singulier. De fait, chaque point singulier x_0 admet une telle ligne de maxima du module pointant vers sa position et se comportant en $a^{h(x_0)}$. Les maxima locaux seront déterminés à chaque échelle indépendamment des autres échelles.

Nous construisons une *fonction de partition* à partir de ces ensembles de maxima qui s'écrit naturellement, par similitude avec la définition (3) :

$$\mathcal{Z}(a,q) = \sum_{(x_i,a)} |T_\psi[s](x_i,a)|^q \,, \tag{20}$$

où $\{(x_i,a)\}_i$ est l'ensemble des maxima locaux à l'échelle a. L'ondelette peut en fait être vue comme une sorte de boule de taille a qui recouvre le support du signal en se plaçant sur les maxima locaux. Le comportement aux petites échelles définit l'exposant $\tau(q)$:

$$\mathcal{Z}(a,q) \sim a^{\tau(q)}, \text{quand } a \to 0. \tag{21}$$

La description thermodynamique des signaux fractals nous assure alors que $D(h)$ se déduit de $\tau(q)$ par une simple transformée de Legendre, s'écrivant :

$$D(h) = \min_q (qh - \tau(q)). \tag{22}$$

Les variables conjuguées de $\tau(q)$ et q sont donc $D(h)$ et h. De façon plus pratique, la transformée de Legendre se fait mal numériquement en passant par cette minimisation. Il vaut mieux utiliser les formules suivantes, établies en écrivant $\mathcal{Z}$ sous forme intégrale (ce qui est justifié si $D(h)$ et $\tau(q)$ sont continûment dérivables) [4] :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h & = & d\tau/dq \\ D(h) & = & qh - \tau(q). \end{array} \right. \tag{23}$$

Il est possible de pousser plus loin l'interprétation thermodynamique de ce calcul [9]. L'exposant q joue le rôle de β, l'inverse d'une température, τ est l'énergie libre. Les variables conjuguées h et D sont alors semblables à l'énergie interne et à l'entropie. Le calcul indiqué est simplement celui de la fonction de partition dans le cadre micro-canonique. Un problème sévère limite son utilisation : nous verrons que la transformée de Legendre telle que nous la définissons est très instable numériquement et induit une forte erreur sur le spectre $D(h)$. Chhabra *et al.* [10] ont introduit une méthode pour estimer directement D et h sans passer par $\tau(q)$ en se plaçant dans un cadre canonique. On détermine alors les valeurs moyennes de D et h avec les poids de Boltzmann ci-dessous :

$$\hat{T}_\psi[s](q,x_i,a) = \frac{|T_\psi[s](x_i,a)|^q}{\mathcal{Z}(q,a)}. \tag{24}$$

Il faut alors calculer les fonctions moyennes suivantes :

$$< h > (q,a) = \sum_{(x_i,a)} \hat{T}_\psi[s](q,x_i,a) \ln |T_\psi[s](x_i,a)|, \tag{25}$$

$$D(q,a) = \sum_{(x_i,a)} \hat{T}_\psi[s](q,x_i,a) \ln(\hat{T}_\psi[s](q,x_i,a)), \tag{26}$$

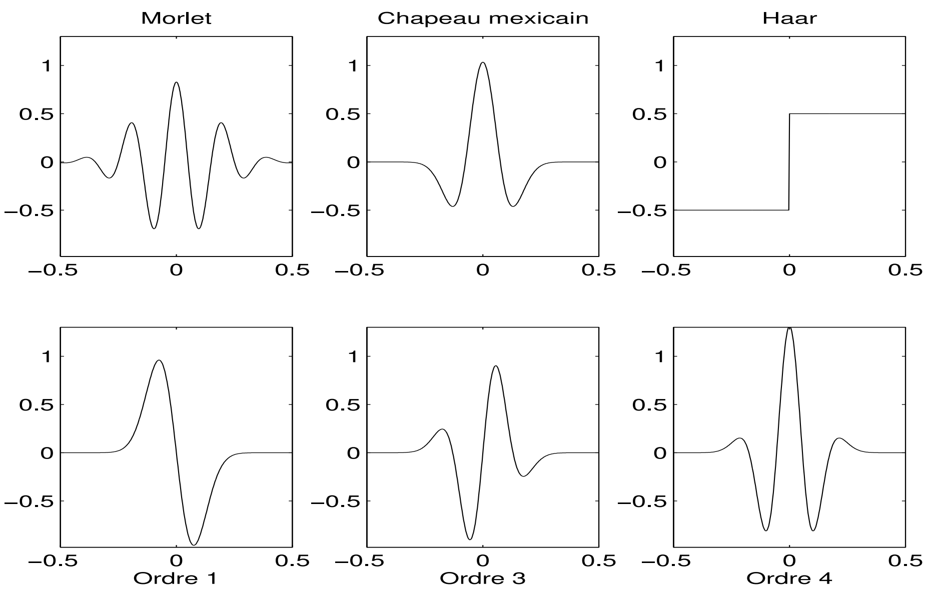

FIG. 1 - *Diverses formes d'ondelettes. Nous présentons les ondelettes de Morlet et de Haar, très utilisées, ainsi que les quatre premières dérivées gaussiennes, $\psi^{(1)}$ à $\psi^{(4)}$ (le chapeau mexicain est la dérivée seconde).*

dont les pentes en fonction de $\ln a$, quand $a \to 0$, donnent une représentation paramétrique en q de $D(h)$: $D(q)$ et $< h > (q)$. Dans ces conditions, on montre que l'on retrouve (23) pour une force de singularité moyenne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} < h > (q) & = & \partial\tau(q)/\partial q \\ D(q) & = & q* < h > (q) - \tau(q). \end{array} \right. \quad (27)$$

3 Tests sur des signaux simples

Afin de vérifier le bon fonctionnement de la mise en oeuvre des algorithmes, nous avons procédé à l'analyse du spectre de singularité de formes simples et parfaitement connues. Ces ensembles, pour lesquels nous obtenons des résultats satisfaisants, permettent aussi de déceler les nombreux problèmes numériques qui rendent plus difficile la détermination de $D(h)$ quand nous étudions des signaux plus complexes.

3.1 La transformée en ondelettes d'une singularité

3.1.1 Les étapes de la détermination du spectre de singularité

Nous étudions d'abord un signal comportant *une singularité en un point isolé*, dessiné sur la figure 2 en (a). L'exposant de Hölder h est ici 0.3. Sous le signal est représenté le module de sa transformée en ondelettes par la dérivée seconde d'une gaussienne. Les zones claires sont celles de plus haute valeur absolue, tandis que les noires sont celles proches de zéro. Nous pouvons suivre les trois lignes de maxima (une de valeurs positives et deux de valeurs négatives qui l'entourent), tracées en noir en surimpression sur la transformée en ondelettes à droite du signal. Elles pointent toutes trois vers le point singulier. Le graphe (d) montre le comportement en log-log [2] de l'amplitude de ces lignes de maxima en fonction de l'échelle a. Il est linéaire comme attendu et après régression, la pente est trouvée égale à 0.3.

A partir des lignes de maxima du module de la transformée en ondelettes nous cherchons maintenant à appliquer la théorie développée ci-dessus. La première étape consiste à calculer la fonction de partition :

$$\mathcal{Z}(a,q) = \sum_{(x_i,a)} |T_\psi[s](x_i,a)|^q \ ,$$

représentée dans la partie (e) pour des températures variant de -10 à 10. Elle suit bien une loi linéaire en fonction de l'échelle, tracée en log-log, dont nous pouvons prendre les pentes qui sont $\tau(q)$, *cf.* (f). La droite pleine est le $\tau(q)$ théorique, égal à $qh - D$, tandis que les points sont les pentes estimées sur la fonction de partition. On constate un bon accord des points calculés. La transformée de Legendre est effectuée ensuite et résulte en un point en $h = 0.3$ et $D = 0$, voir graphe (g).

La méthode dans un cadre canonique de l'analogie thermodynamique pour la transformation de Legendre induit des résultats similaires, illustrés en (h) et (i). Le calcul des pentes de $< h > (q,a)$ et $D(q,a)$ donne encore une fois un seul point dans le spectre de singularité, d'exposant 0.3 et de dimension nulle. Les deux cheminements sont, dans ce cas, équivalents car les pentes $\tau(q)$ extraites sont suffisamment justes pour que la transformation de Legendre subséquente ne donne pas de grande dispersion sur h et D, ce qui sera malheureusement assez souvent le cas sur des signaux plus complexes.

2. N.B. : nous prendrons toujours le logarithme népérien.

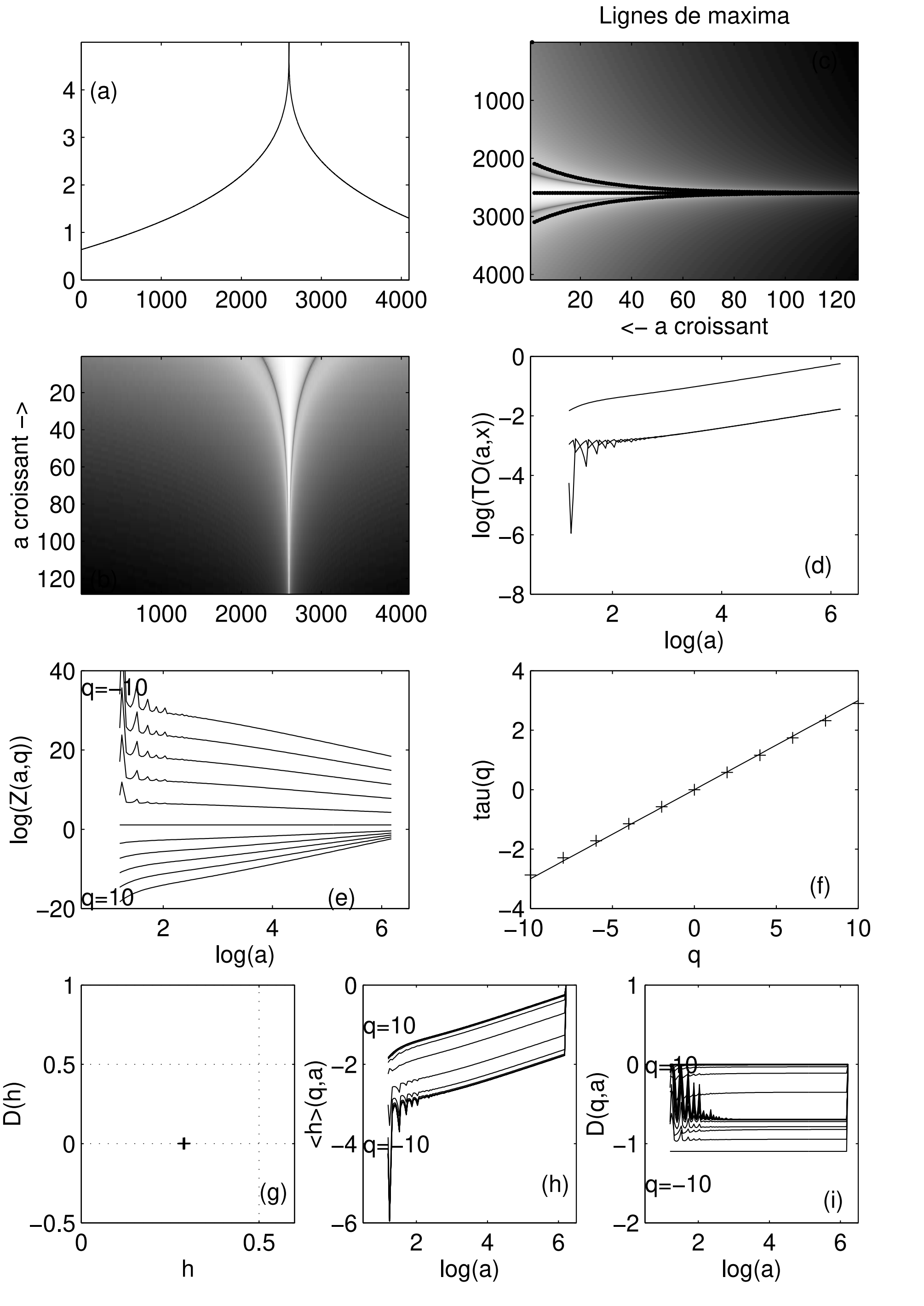

FIG. 2 - *Transformée en ondelette et détermination du spectre d'une singularité isolée. Les figures sont commentées dans le texte.*

3.1.2 Quelques subtilités dans cette détermination

Considérons le signal sur la figure ci-dessous 3 (a), constitué de deux singularités : une d'exposant 0.4, dans sa partie finale, l'autre d'exposant 2.6, vers son début. Une coupe du module de sa transformée en ondelettes par le chapeau mexicain ($\psi^{(2)}$) est dessinée en dessous (b) pour une échelle arbitraire. Comme attendu elle présente des maxima aux points où le signal est singulier : il y en a un pour le premier point dans ce cas, et trois maxima pour le deuxième (en fait, les deux plus petits sur les côtés sont associés à des valeurs négatives de la TO). Nous voyons aussi sur les bords des maxima inattendus, qui forment aussi des lignes pointant tout simplement vers les limites de la zone de définition du signal. Il faut s'affranchir de ces *effets de bords*. La zone grisée sur le signal est la partie que l'on enlève pour la suite des calculs sur la fonction de partition, dont la taille est égale à la demi-largeur de l'ondelette la plus large utilisée (celle donc à plus grande échelle). Cette opération a été effectuée pour les résultats du paragraphe précédent 3.1.1.

Cet exemple a aussi l'avantage de nous montrer qu'il est possible de distinguer les différentes singularités,à la fois en position et en valeur. En construisant la fonction de partition $\mathcal{Z}(a,q)$, puis en en prenant les pentes, nous déterminons $\tau(q)$, qui est une courbe composée de deux parties affines. Pour $q > 0$, la pente est $h = 0.4$ et détecte la singularité la plus violente. Pour $q < 0$, la pente est 2, détectant la singularité plus faible d'exposant $h = 2.6$. De façon générale, les températures négatives amplifient les lignes associées aux singularités de plus grand exposant (qui sont d'amplitude plus faible), tandis que si $q > 0$, ce sont les singularités les plus faibles qui dominent le comportement de la fonction de partition $\mathcal{Z}$.

La deuxième subtilité est attendue et concerne la limite des exposants décelables. La figure suivante 4 montre les lignes de maxima du module (à la fois leur position et leur valeur, en-dessous) extraites de la transformée en ondelettes. Traçant ensuite le log de l'amplitude de ces lignes en fonction du log de l'échelle a, nous constatons le comportement linéaire de ces lignes. En prenant les pentes, nous obtenons bien l'exposant de Hölder associé à chaque ligne, donc à chaque singularité. Les lignes de plus faible inclinaison sont trouvées de pente 0.4. Celles de plus fortes inclinaisons n'ont pas le même comportement selon l'ondelette analysatrice. Pour $\psi^{(3)}$, leur pente est bien de 2.6 alors que pour $\psi^{(2)}$, dont le moment d'ordre 3 n'est pas nul ($N = 2$ dans nos notations précédentes), la pente n'est que 2. Ceci est bien en accord avec les prévisions théoriques de la partie précédente. Remarquons aussi que la dérivée d'ordre 3 donne lieu à plus de lignes de maxima pour une singularité donnée que celle d'ordre 2. C'est un effet du nombre plus grand d'oscillations de l'ondelette[3].

Le dernier point délicat à noter concerne la grande sensibilité de la fonction de partition et surtout de la transformée de Legendre paramétrique, à la forme

3. En particulier l'inconvénient d'utiliser une ondelette présentant beaucoup d'oscillations est net si l'on prend l'ondelette de Morlet. Comme on obtient beaucoup de lignes de maxima, qui, de plus, oscillent beaucoup (*cf.* à ce sujet ce que l'on obtient pour un ensemble de Cantor), cette ondelette est difficilement utilisable, même si sa propriété d'être asymptotiquement orthogonale à tout polynôme pouvait être intéressante.

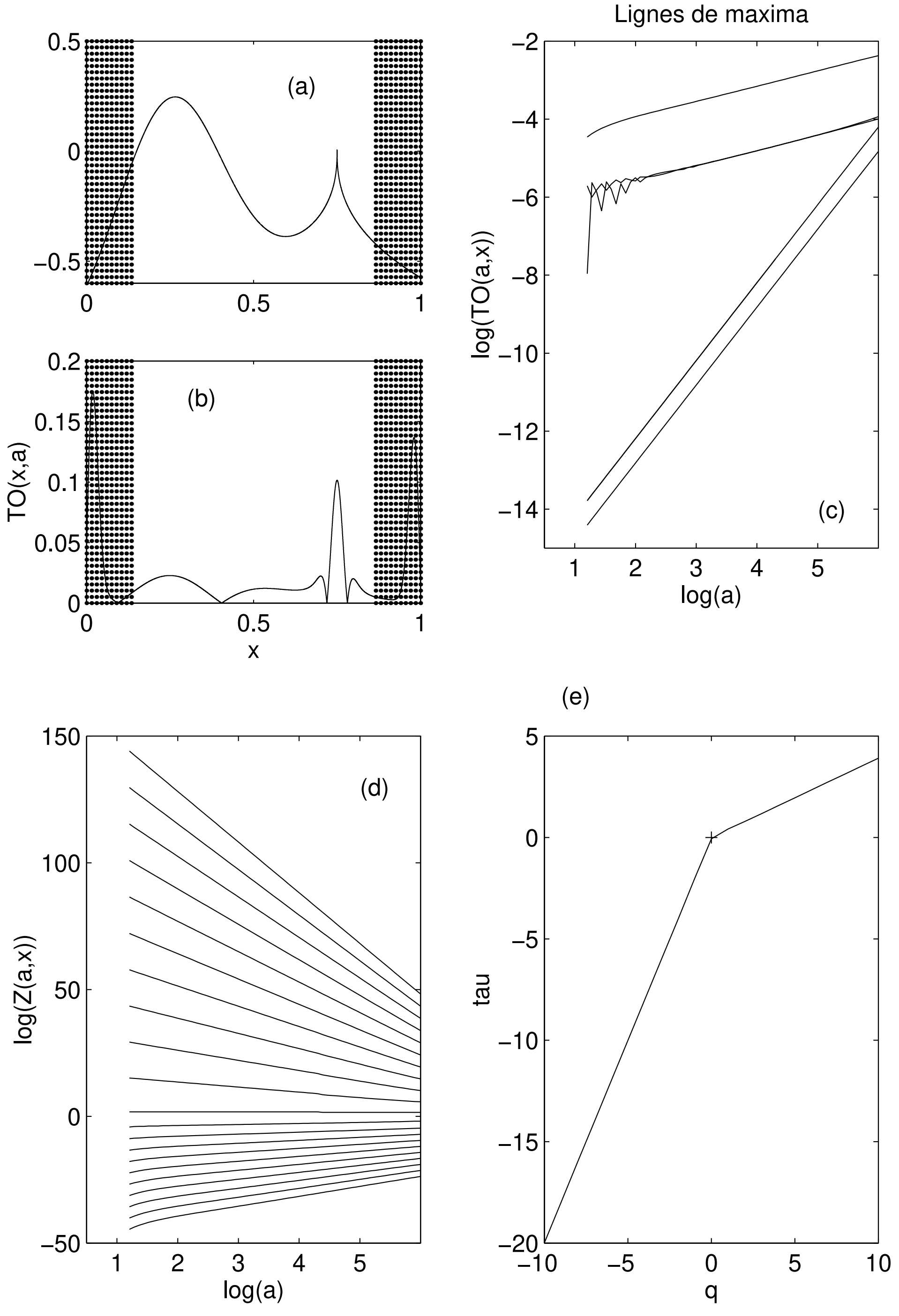

FIG. 3 - *Détection de plusieurs points singuliers par la MMTO et effets de bords.*

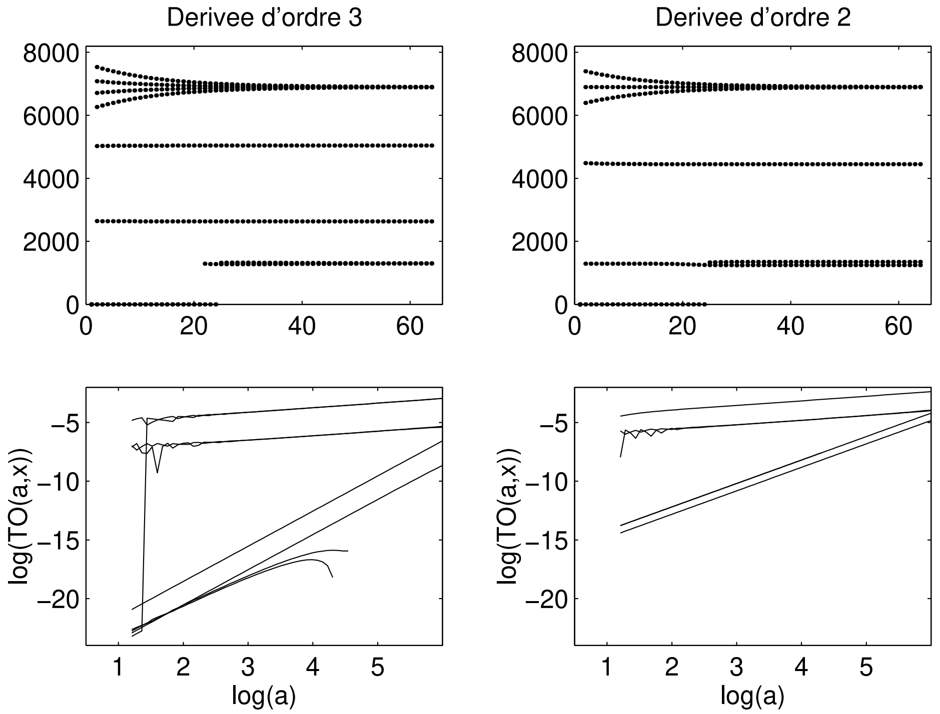

FIG. 4 - *Comparaison des lignes de maxima du module pour les ondelettes analysatrices $\psi^{(2)}$ et $\psi^{(3)}$. La pente des lignes associées à la singularité d'exposant* 2.6 *est limitée à* 2 *pour l'ondelette $\psi^{(2)}$. Remarquons que $\psi^{(3)}$ présentant plus d'oscillations, elle donne lieu à plus de lignes de maxima pointant vers une même singularité.*

des lignes de maxima quand elles s'écartent du comportement linéaire attendu en log-log. Les lignes sur la figure 2, graphes (d), montrent, pour, certaines des oscillations violentes à petite échelle, liées à des problèmes d'échantillonnage. Ces accidents ont une répercussion immédiate et facile à voir sur $\mathcal{Z}(a,q)$, sous forme de pics, et sur $< h > (q,a)$ ou $D(q,a)$. Peu importants dans cet exemple, ce sont des problèmes qui nous préoccuperont beaucoup en étudiant des signaux plus complexes.

3.2 Ensembles de Cantor triadiques

3.2.1 Eléments théoriques

Définitions: l'ensemble de Cantor triadique est construit par le processus suivant itéré à l'infini. Un segment (par exemple [0 1]) est divisé en trois parties d'égales longueurs. La partie du centre est retirée (on lui assigne une mesure nulle). On répète ensuite cette opération sur les deux segments obtenus. L'ensemble final est un **ensemble de Cantor triadique**, de mesure uniforme, une figure fractale classique. C'est une mesure singulière que l'on peut étudier directement, ou bien en passant par l'*escalier du diable* associé qui n'est que l'intégration de cette mesure. Nous utiliserons préférentiellement l'escalier plutôt que la mesure, puisque nous avons écrit les résultats sur la transformée pour un signal et non sa mesure.

Il est très simple de calculer sa dimension fractale (*cf.* 1, donnant le formalisme) en prenant un pavage de boules de diamètre 3^{-n}. Après l'itération n, l'ensemble contient 2^n segments de longueur justement égale à 3^{-n}. On en déduit que $N(\epsilon) = 2^n$ et $d_F = \ln 2/\ln 3$. Il est facile de montrer que l'exposant de Hölder de cet ensemble est aussi $\ln 2/\ln 3$.

Une variante immédiate de cet ensemble sera très importante. Il s'agit de l'**ensemble de Cantor non uniforme**. Il est construit de la même façon que l'ensemble uniforme, en affectant simplement une mesure différente, appelée *mesure de Bernoulli*, aux deux segments obtenus : p_1 à l'un et à l'autre $p_2 = 1 - p_1$. Regardant à l'échelle 3^{-n}, le nombre de segments ayant pour mesure $p_1^m p_2^{n-m}$ est égal au coéfficient du binôme C_n^p. La fonction de partition s'écrit alors sous la forme d'un binôme ;

$$\mathcal{Z}(3^{-n}) = (p_1^q + p_2^q)^n. \tag{28}$$

A la limite $n \to +\infty$, on en déduit :

$$\tau(q) = \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln(1/3)}. \tag{29}$$

On retrouve en particulier le cas homogène pour $p_1 = p_2$. La transformée de Legendre de cette fonction nous donne le spectre $D(h)$, qui est une courbe en cloche dont le sommet est en h et D égaux à $\ln 2/\ln 3$, et les extremums en $h = -\ln p_1/\ln 3$ et $h = -\ln p_2/\ln 3$.

Le dernier point à noter concerne l'invariance par un changement d'échelle de 1/3 de ces ensembles. Il est montré dans [5] que cela implique l'existence d'oscillations de période $\ln 3$ autour du comportement principal des lignes de maxima de la transformée en ondelettes des ensembles de Cantor. Nous retrouvons ces oscillations ensuite sur les quantités calculées à partir de la TO.

3.2.2 Transformée en ondelettes d'un ensemble de Cantor triadique

Nous présentons dans cette partie les résultats de la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes appliquée aux exemples d'un ensemble de Cantor uniforme, figure 5 et d'un ensemble de Cantor non uniforme (de poids 0.6 et 0.4), figure 6. Dans l'ensemble ils correspondent à ce qui est attendu. Les lignes de maxima de la TO suivent clairement les branchements fractals à chaque nouvelle itération du processus de construction (changement d'échelle de 1/3). Les lignes de maxima sont linéaires en fonction de l'échelle, en représentation log-log, avec une pente égale comme attendu à ~ 0.63. Les oscillations tous les $\ln 3$ le long de ces lignes sont aussi bien visibles.

Avant d'étudier la fonction de partition et la détermination effective, à partir de la transformée en ondelettes, du spectre de singularité, nous devons nous pencher sur un problème majeur : le *début des lignes de maxima*. La figure 7 indique qu'avant d'avoir le comportement linéaire attendu, les lignes ne se divisent pas de manière égale. A l'échelle où se produit une bifurcation, pour

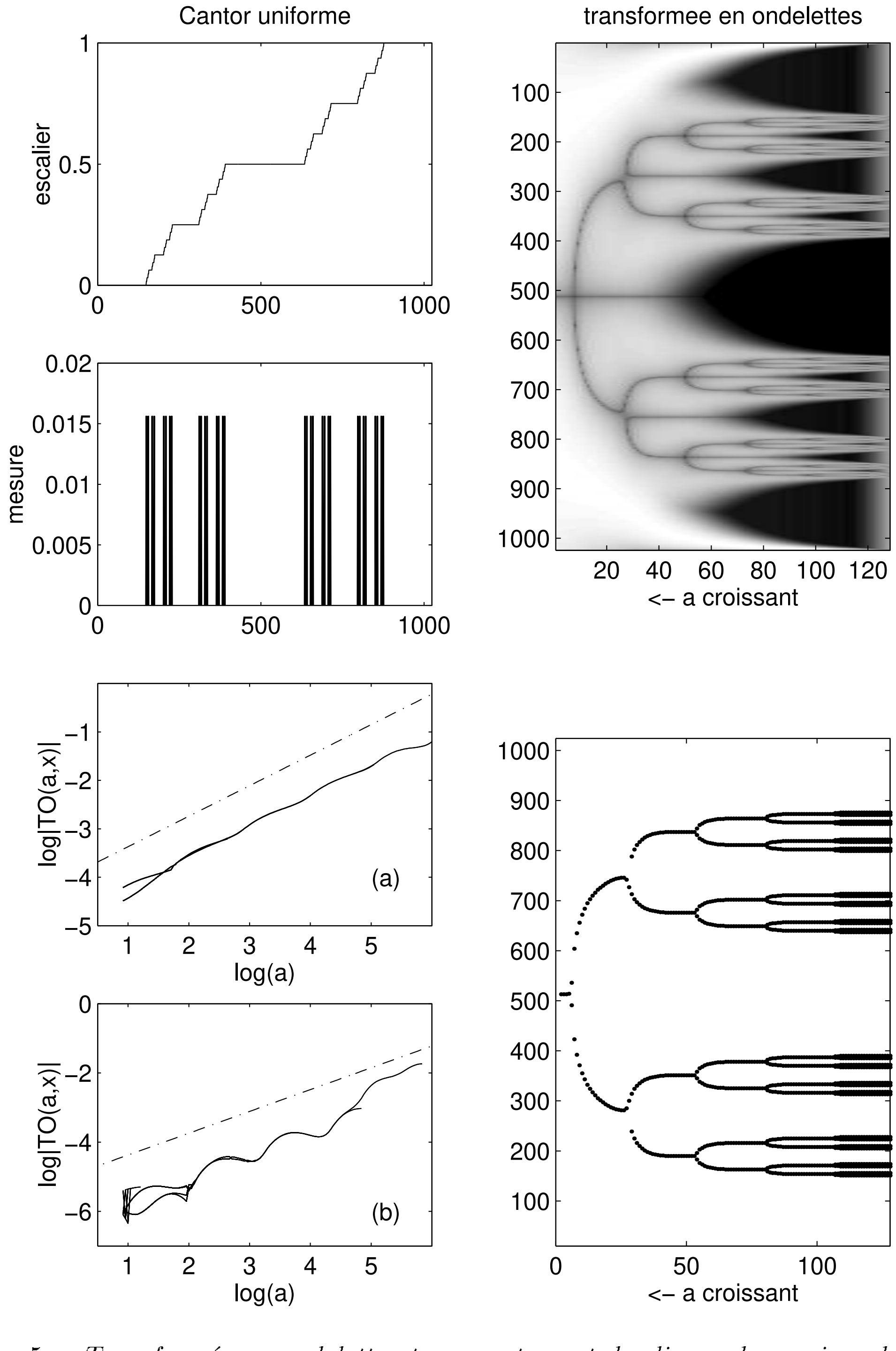

FIG. 5 - *Transformée en ondelette et comportement des lignes de maxima du module pour un escalier du diable dont la mesure est un ensemble de Cantor uniforme. Nous avons représenté l'escalier et sa mesure, la TO et la squelettisation déduite. Les graphes (a) et (b) contiennent les lignes de maxima en fonction de l'échelle, pour respectivement les ondelettes $\psi^{(1)}$ et $\psi^{(3)}$. Les oscillations en* $\ln 3 = 1.09$ *sont visibles, ainsi que le fait que $\psi^{(3)}$ induit plus d'oscillations sur les lignes. Les droites en pointillés ont une pente égale à l'exposant théorique :* $\ln 2/\ln 3$.

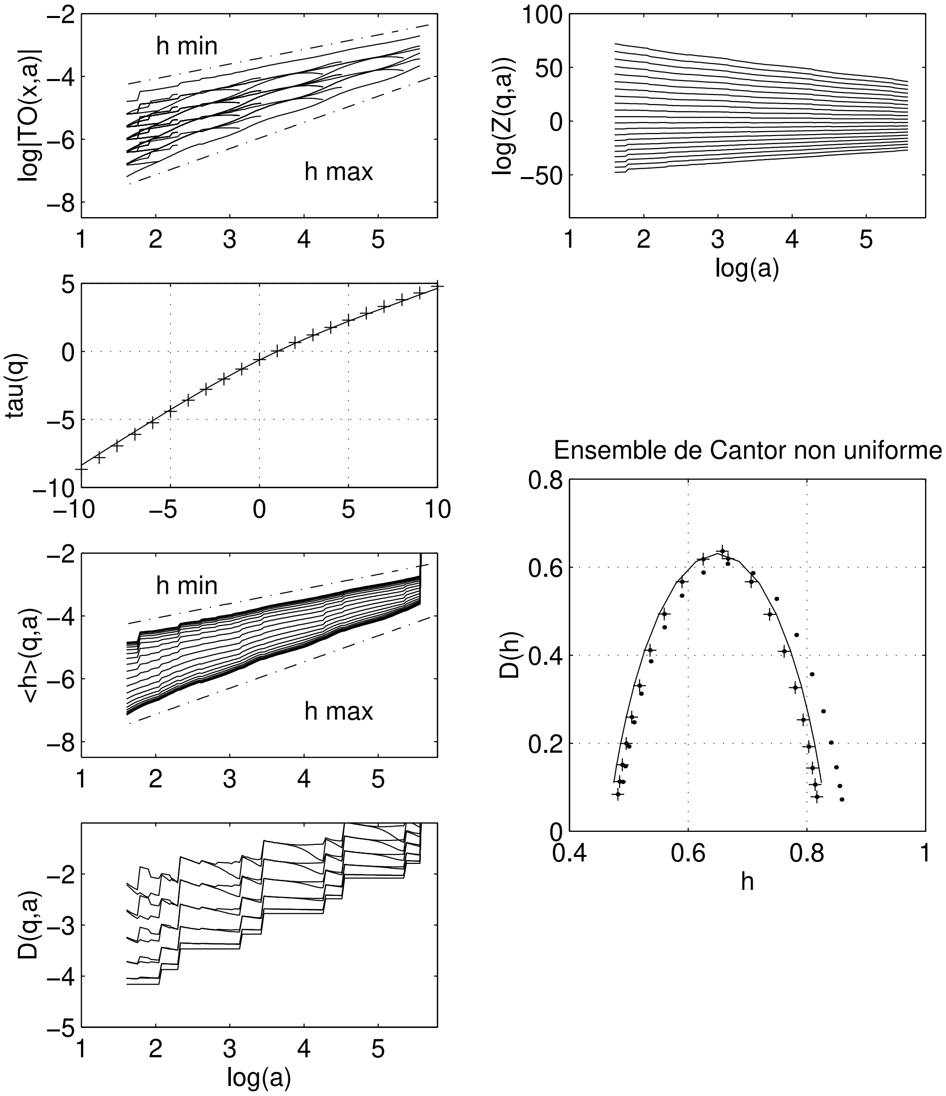

Fig. 6 - *Détermination du spectre de singularité d'un ensemble de Cantor non uniforme. Nous avons représenté les lignes de maxima (en log-log) entourées de deux droites en pointillés dont les pentes sont les exposants de Hölder extrêma théoriques de l'ensemble. A côté, la fonction de partition et le spectre* $\tau(q)$ *qui en est déduit. En dessous se trouvent les résultats de la transformation de Legendre paramétrique. Le spectre* $D(h)$ *rassemble le tracé théorique (en trait plein), le spectre déduit de* $\tau(q)$ *(les points) et celui déduit de* $< h > (q, a)$ *et* $D(q, a)$ *(les croix). Ce dernier est nettement meilleur.*

un segment donné que l'on coupe en deux morceaux, il n'y a qu'une ligne qui part de l'unique ligne de maxima aux échelles plus grandes. Les autres naissent à partir d'une valeur nulle. C'est ainsi qu'on a un profil descendant pour beaucoup de lignes à leur extrêmité de plus grande échelle. Les calculs ci-dessous montrent que ces *accidents*, des maxima qui sont très proches de zéro, induisent des comportements très violents sur la fonction de partition et le calcul de la transformation de Legendre sous la forme de pics. Il faut trouver un moyen pour supprimer ces pics et ainsi pouvoir effectuer par la suite des régressions linéaires convenables. Pour ce faire, nous imposons dans la construction des lignes une forme relativement linéaire (en limitant sa dérivée à un intervalle correspondant à la pente du début de la ligne), et nous tronquons celle-ci dès qu'elle quitte ce comportement pour tendre brutalement vers 0.

Les différentes figures (6 et 7) montrent, une fois ces corrections effectuées, des spectres de singularités estimés en accord avec celui théorique. Nous pouvons comparer les deux approches possibles : calcul de $\mathcal{Z}(a,q)$, puis par régression linéaire de $\tau(q)$ et enfin de $D(h)$ donné par une transformée de Legendre numérique ; calcul de $< h > (q,a)$ et $D(q,a)$ puis estimation de $< h > (q)$ et $D(q)$ par régression linéaire en fonction de $\ln a$, qui donnent $D(h)$ de façon implicite. La première comporte des résultats très propres sur la fonction de partition, puis sur $\tau(q)$, mais le spectre $D(h)$ présente une incertitude assez grande du fait de la transformée de Legendre. La deuxième voie donne de meilleurs résultats. Le seul problème restant est celui de l'estimation des pentes, surtout quand on a des comportements en escalier ou avec des pics dûs à des accidents. Nous revenons en détail dans le paragraphe suivant sur les comportements anormaux qui peuvent se produire sur ces fonctions.

3.2.3 Etude des accidents

Fonction de partition. Dès que la température s'éloigne de zéro, les valeurs extrêmales de l'ensemble des lignes considérées dominent le comportement de $\mathcal{Z}$. Ainsi nous pouvons écrire l'approximation suivante :

- $\mathcal{Z}(a,q) = (\min |T_\psi[s](x_i,a)|)^q + \sum |T_\psi[s](x_i,a)|^q$,

  donc $\underline{\text{si } q < 0,\ \mathcal{Z}(a,q) \sim (\min |T_\psi[s](x_i,a)|)^q \to +\infty}$, et ce d'autant plus que le min est proche de zéro.

Constatant que le début des lignes de maxima part, dans beaucoup de cas, d'une valeur très petite, proche de zéro, nous obtenons naturellement un pic important dans la fonction de partition aux points de début de lignes. C'est ce que nous avions remarqué pour l'exemple de l'ensemble de Cantor.

Le comportement parallèle concernant les températures positives est moins intéressant. Le seul cas rencontré où la valeur d'une ligne de maxima était nettement plus importante que toutes les autres par accident est celui où l'on oublie de tenir compte des effets de bords, qui donnent naissance à des lignes de maxima, sur les côtés, de grande valeur.

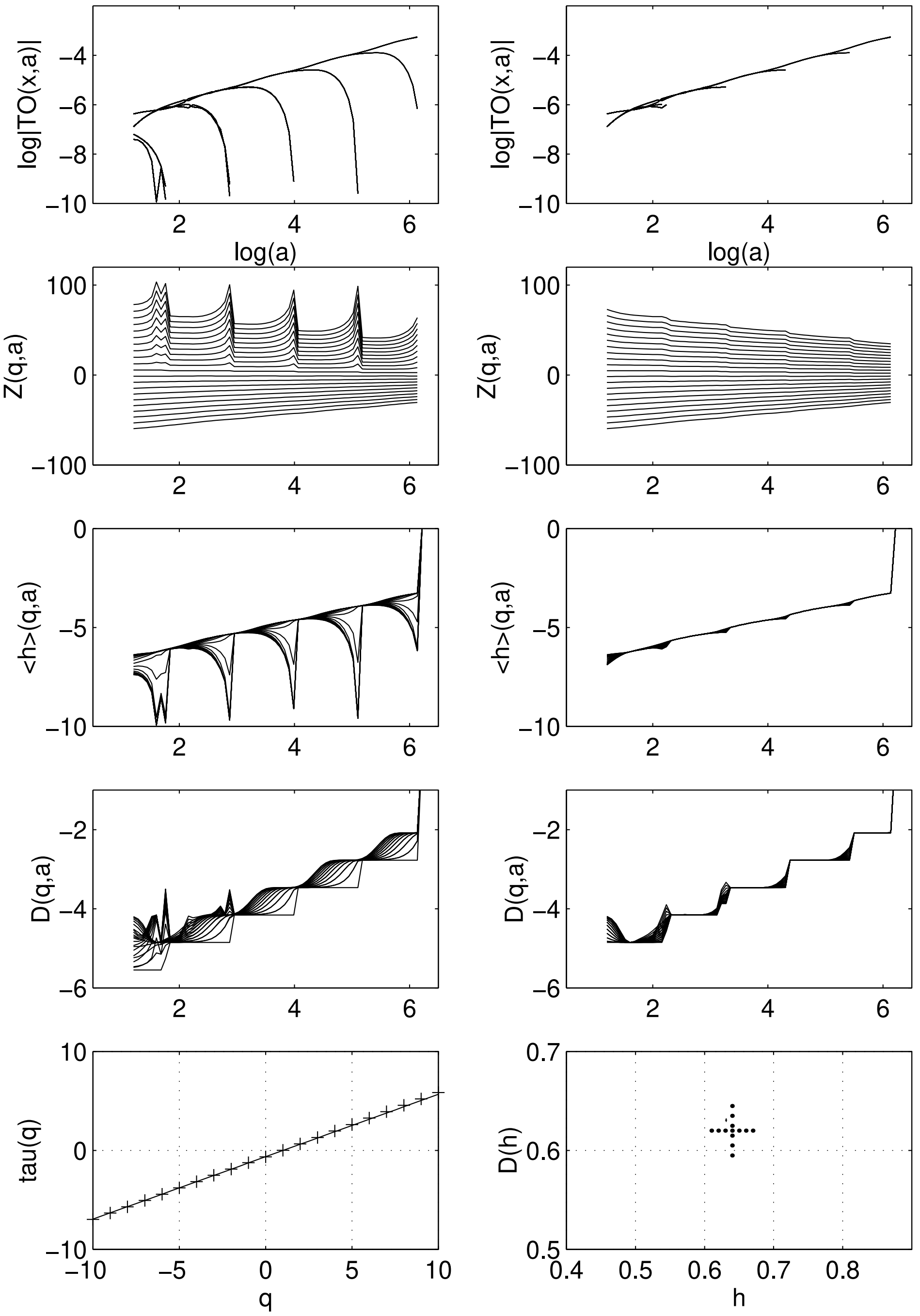

FIG. 7 - *Comparaison entre les lignes de maxima, les fonctions de partition, les résultats de la transformation paramétrique de Legendre, dans le cas où l'on prend entières les lignes de maxima (colonne de gauche), et celui où on en extrait la partie linéaire (colonne de droite). Cette opération permet d'opérer les régressions linéaires convenablement. Les résultats pour $\tau(q)$ et $D(h)$ sont présentés en dessous, avec en pointillés la marge d'erreur issue de l'approche par $\tau(q)$, et la croix (quasiment un point) en plein étant une surestimation de la boîte d'erreur obtenue par la méthode de la transfornée paramétrique (qui ne donnerait qu'un point à cette échelle, confondu avec la valeur théorique).*

Exposant de Hölder paramétrisé. La formule, dans le cadre canonique de la transformation de Legendre, donnant $< h > (q, a)$ peut être étudiée dans les mêmes conditions.

$$< h > (q, a) = \sum \hat{T}_\psi[s](q, x_i, a) \ln |T_\psi[s](x_i, a)|,$$

– si $q < 0$, $\mathcal{Z}(a, q) \sim (\min |T_\psi[s](x_i, a)|)^q$, et ce d'autant plus que $q \to -\infty$,

donc $\underline{< h > (q, a) \sim \ln (\min |T_\psi[s](x_i, a)|)}$.

Pour une température positive :

– si $q > 0$, $\mathcal{Z}(a, q) \sim (\max |T_\psi[s](x_i, a)|)^q$, et ce d'autant plus que $q \to +\infty$,

donc $\underline{< h > (q, a) \sim \ln (\max |T_\psi[s](x_i, a)|)}$.

On déduit de ces deux comportements que l'enveloppe du logarithme des lignes de maxima définit aussi l'enveloppe des exposants paramétrés, qui est atteinte par les températures éloignées de zéro. Puisque les lignes de maxima ont une pente, en diagramme ln-ln, égale aux exposants de singularités, cette particularité ne pose *a priori* pas de problèmes : l'enveloppe est formée de droites de pentes correctes. Cependant, comme en fait du côté $q < 0$ dès qu'une nouvelle ligne commence, on rompt la droite faisant l'enveloppe à plus grande échelle, le profil est plus découpé. C'est une droite par morceaux, avec des décalages entre deux parties linéaires, ce qui complique l'estimation des pentes.

Dimension fractale paramétrisée. L'équation servant à calculer $D(q, a)$ obéit à des comportements plus génants dans les mêmes cas extrêmes.

$$D(q, a) = \sum_{(x_i, a)} \hat{T}_\psi[s](q, x_i, a) \ln(\hat{T}_\psi[s](q, x_i, a))$$

– Si $q < 0$, $\mathcal{Z}(a, q) \sim (\min |T_\psi[s](x_i, a)|)^q$, et ce d'autant plus que $q \to -\infty$

donc $\hat{T}_\psi[s](q, x_i, a) = \dfrac{|T_\psi[s](x_i, a)|^q}{\mathcal{Z}(q, a)} \sim \dfrac{|T_\psi[s](x_i, a)|^q}{(\min |T_\psi[s](x_i, a)|)^q}$,

d'où $\left\{ \begin{array}{l} \hat{T}_\psi[s](q, x_i, a) \to 0^+ \text{ si } |T_\psi[s](x_i, a)| > \min |T_\psi[s](x_i, a)|, \\ \\ \hat{T}_\psi[s](q, x_i, a) \to 1^- \text{ si } |T_\psi[s](x_i, a)| = \min |T_\psi[s](x_i, a)|. \end{array} \right.$

– Comme $x \ln x \to 0^-$ si $x \to 0^+$ ou 1^+, on obtient que,

si $\min |T_\psi[s](x_i, a)| \ll T_\psi[s](x_i, a)|$, alors quand $\underline{q \to -\infty,\ D(q, a) \to 0^-}$.

De façon plus marginale, un raisonnement exactement identique avec les températures positives nous permet de déduire le comportement, nettement moins crucial[4], de $D(q, a)$ quand q tend vers l'infini :

– si $\max |T_\psi[s](x_i, a)| \gg T_\psi[s](x_i, a)|$, alors quand $\underline{q \to +\infty,\ D(q, a) \to 0^-}$.

4. Nous avons vu que le cas de différence notable entre la valeurs maximale sur les lignes et les autres amplitudes n'est quasiment pas rencontré.

En fait, on constate dans les calculs que, dès que le max ou le min s'écarte, en logarithme, de ~ 0.2 des autres valeurs des lignes de maxima locaux, voire moins, à température relativement élevée comme $q < -5$ le comportement de $D(q, a)$ est fortement perturbé par cet effet et ne permet plus la détermination du spectre. Les symboles $\gg$ et $\ll$ recouvrent en fait des différences bien faibles. Ce type d'accident est de loin le plus perturbateur et le plus difficile à corriger. Améliorer la statistique par le nombre de points ou effectuer un travail précis de sélection et contrôle des lignes est nécessaire.

4 Signaux singuliers en tout point

Les processus browniens ont été choisi comme exemple pour la détermination du spectre de singularité de signaux *singuliers en tout point*. Nous avons aussi effectué des tests sur des signaux gaussiens fractionnaires (le processus dérivé d'un signal brownien fractionnaire) ou sur des modèles FARIMA, qui amènent des conclusions identiques sur la méthode. Il faut bien remarquer que cette propriété complique visiblement le calcul. Du fait de l'échantillonnage obligatoire, il faut correctement choisir la plage d'échelle sur laquelle on travaille et ne pas descendre trop bas en échelle pour ne pas avoir de problème de repliements ni suréchantillonner la TO en fréquence (ce qui pourrait entraîner des oscillations nocives sur les valeurs des lignes de maxima). Le nombre important de lignes de maxima renforce leur susceptibilité à ces problèmes déchantillonnage. Il faut en permanence effectuer un travail de surveillance de l'allure de ces lignes et vérifier qu'il n'y a pas trop d'oscillations ou de chutes de la valeur intempestives.

4.1 Processus Browniens fractionnaires

Les signaux Browniens fractionnaires [3] constituent une famille de processus aléatoires et singuliers partout, servant idéalement d'exemples d'école. Leur première propriété est une auto-similarité statistique exacte, *i.e.* leur structure est invariante quelle que soit l'échelle à laquelle ils sont observés. Formellement nous pouvons écrire pour tout l proche de 0, en dilatant un tel signal d'un facteur λ autour d'un point x donné :

$$f(x + \lambda l) - f(x) \sim \lambda^H (f(x + l) - f(x)). \tag{30}$$

Le signe $\sim$ signifie une identité de loi. L'exposant H est le même en tout point pour ce type d'ensemble. C'est le paramètre indexant les processus Browniens, que nous noterons dorénavant $B_H(x)$. L'autre propriété les définissant est que ce sont des réalisations aléatoires gaussiennes, de moyenne nulle et de variance :

$$\mathrm{var}(B_H(x)) = \sigma^2 |x|^{2H}. \tag{31}$$

Remarquons que le cas $H = 0.5$ correspond au processus Brownien classique, dont le processus incrément est entièrement décorrélé (bruit blanc). Une description statistique plus complète de ces ensembles peut être consultée dans [12].

Dans le formalisme multifractal, ces résultats expriment que ces signaux sont singuliers en tout point d'exposant de Hölder $h(x) = H$. La dimension de Hausdorff associée à cet unique exposant est alors naturellement :

$$D(h = H) = 1. \tag{32}$$

Ils sont simplement monofractals puisque $D(h)$ est réduit à un point. De plus leur spectre $\tau(q)$ est alors une droite :

$$\tau(q) = qH - 1. \tag{33}$$

Ce sont ces résultats que nous allons essayer de retrouver par le méthode des maxima de la transformée en ondelettes.

4.2 Compléments à la méthode des MMTO

Nous résumons ici tous les points évoqués dans la partie précédente qui posaient problèmes et les solutions adoptées pour les contourner. Les explications théoriques de ces comportements ayant déjà été fournies, nous ne les rappellerons pas.

Effets de bord. Afin de ne pas prendre en compte des lignes de maxima du module dont l'existence est induite par le support limité de définition du signal, nous enlevons de chaque côté de la TO une bande dont la largeur est celle de l'ondelette à la plus grande échelle, typiquement 1500 points. Nous pourrions enlever seulement à chaque échelle la demi-largeur de l'ondelette correspondant, mais cela ne ferait que compliquer le calcul sans aider beaucoup à la détermination.

Débuts des lignes. Les accidents que nous avons étudiés dans la partie précédente sont cruciaux. Afin de réduire leur influence, la procédure utilisée pour squelettiser la TO à partir des maxima locaux impose aux lignes un comportement relativement linéaire, et ne tient pas en compte les extrêmités des lignes qui tendent vers zéro à grande échelle.

Définition alternative de la fonction de partition. Il existe une autre méthode pour s'affranchir des valeurs très basses de certains maxima : il s'agit d'utiliser une méthode de calcul légèrement différente de la fonction de partition. Cette formule est issue de [7] et mène exactement aux mêmes résultats théoriques. En particulier, l'article [8] utilise cette définition pour $\mathcal{Z}(a, q)$.

Soit $\mathcal{L}(a_0)$ l'ensemble des lignes l de maxima du module à l'échelle a_0, *i.e.* vérifiant les propriétés :

- $(x, a) \in l \Longrightarrow a \leq a_0$,
- $\forall a \leq a_0,\ \exists (x, a) \in l$.

La fonction de partition est écrite comme il s'en suit :

$$\mathcal{Z}(a,q) = \sum_{l\in\mathcal{L}(a)} \Big(\sup_{(x,a')\in l} |T_\psi[s](x,a')| \Big)^q. \tag{34}$$

Ce calcul présente l'inconvénient d'être légèrement plus long (il faut maximiser sur les lignes de maxima une fois le squelette déterminé), mais la différence de temps n'est pas très significative.

Evolution du nombre de lignes. Nous parlons ici pour la première fois d'une correction possible sur la fonction de partition. Quand la température q est égale à zéro, nous mesurons simplement le nombre de lignes dans le squelette du module de la TO. Ainsi nous pouvons vérifier qu'il évolue correctement en fonction de l'échelle, avec un comportement linéaire en diagramme log-log. Si ce n'est pas le cas, il est possible de s'en rendre alors compte et de corriger ce défaut.

Amélioration de la statistique. Le dernier point, et non le moindre, consiste en l'augmentation de la longueur du signal sur laquelle faire les calculs. Nous voyons bien qu'en effet, plus le nombre de lignes utilisées est grand, moins les accidents ponctuels se feront sentir. C'est le seul point qui permet d'obtenir des résultats exploitables sur $D(q,a)$. Une statistique insuffisante ne donnera jamais de bons résultats. Cependant, l'augmentation du nombre de points se fait au détriment du coût de calcul...

4.3 Estimation du spectre d'un signal Brownien fractionnaire

Les deux voies d'estimation du spectre de singularité sont, dans ce cas, clairement d'une fiabilité différente. Comme précédemment le calcul de la fonction de partition se déroule sans problème. Même en imposant peu de contraintes dans la recherche des lignes de maxima (sur le comportement de $\ln|T_\psi[s](x_i,a)|$ en fonction de $\ln(a)$), la fonction de partition est correcte et l'estimation du spectre $\tau(q)$ donne bien une droite. Cependant, comme il a déjà été signalé, la transformation de Legendre effectuée directement est tellement instable qu'elle entraîne à elle-seule une erreur de l'ordre de 0.2 à 0.3 sur h et D au minimum... Difficile dans ces conditions de différencier un signal monofractal pour lequel les exposants et dimensions caculés sont dispersés sur une large zone correspondant à l'erreur, d'un signal multifractal, qui possède effectivement une diversité d'exposants et de $D(h)$ correspondants !

Ainsi seule l'approche canonique peut donner accès de façon raisonnable au spectre de ce type de signaux (ou de signaux de turbulence, qui *apriori* sont singuliers partout). Toutes les mises en garde précédentes s'appliquent entièrement au sujet de la sensibilité des formules utilisées aux formes des lignes. Il faut de plus calculer sur un très grand nombre de points pour minimiser les fluctuations sur le squelette de la TO (accidents du type $|T_\psi[s](x_i,a)| \to 0^+$). Pour des raisons de limitation de la mémoire des ordinateurs, on est obligé de découper le signal en morceaux plus courts, de faire la transformation en

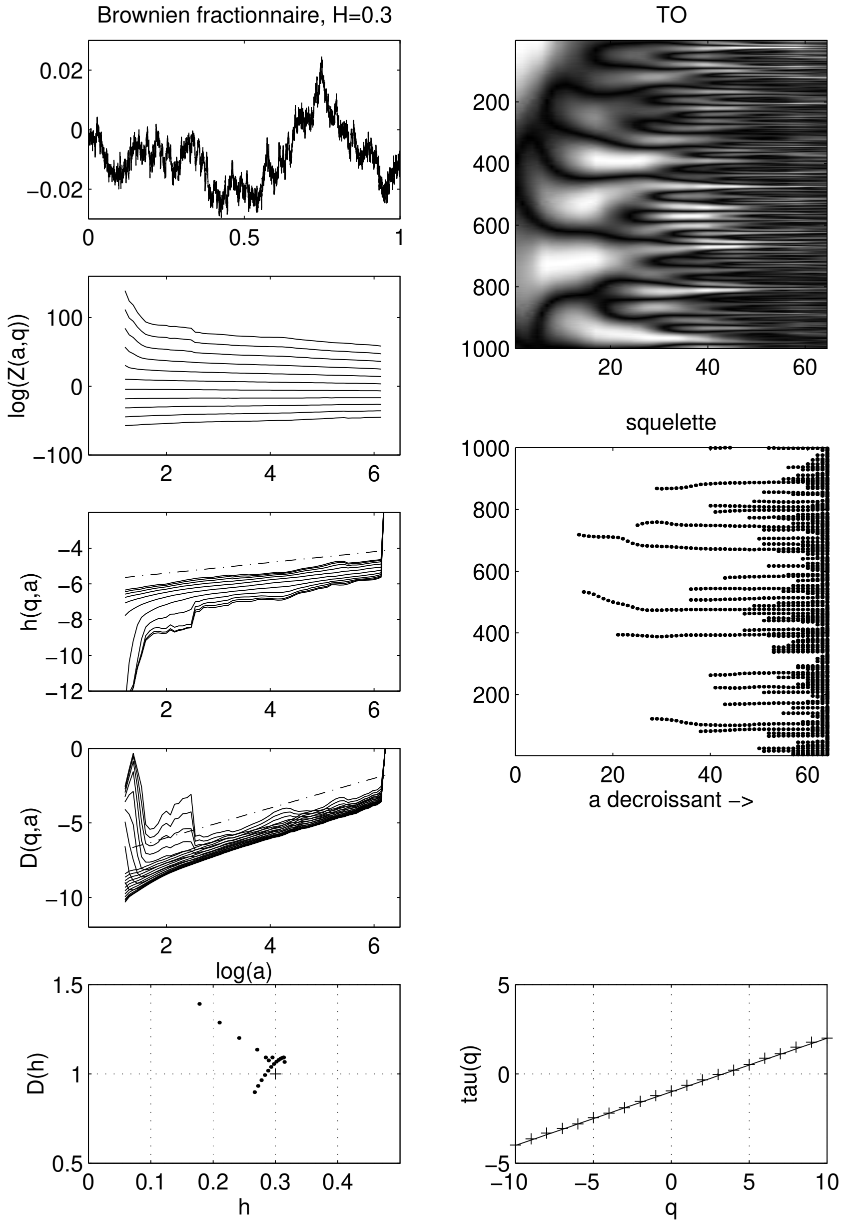

FIG. 8 - *Spectre d'un brownien fractionnaire. Nous montrons une réalisation du processus et sa transformée en ondelettes, ainsi que le squelette des lignes de maxima du module obtenu. Ci-contre on trouve la fonction de partition, les formes paramétrées de* $< h >$ *et* D*, le spectre* $\tau(q)$ *(la droite est théorique), pour des températures comprises entre -10 et 10. Les droites en pointillées pour* $< h >$ *et* D *ont pour pentes les valeurs théoriques 0.3 et 1. Enfin le spectre de singularité montre son estimation en passant par* $\tau(q)$ *sous forme de points, et par le calcul canonique (croix), qui amène très peu d'erreur.*

ondelettes sur ces parties séparées. Ensuite, après squelettisation de celles-ci, nous pouvons combiner les lignes de maxima. Remarquons qu'il n'est guère avantageux de moyenner ensuite sur les transformées de Legendre paramétriques (formules non linéaires), bien que cela soit possible sur la fonction de partition.

La figure 8 présente les divers résultats lors de l'estimation du spectre du signal. Le calcul présenté a été fait sur une réalisation de 128k points, le minimum acceptable presque pour avoir quelque chose d'exploitable pour $< h > (q, a)$ et $D(q, a)$! Nous pouvons refaire les mêmes commentaires qu'auparavant : la fonction de partition et le spectre $\tau(q)$ sont en parfait accord avec la théorie mais, du fait de l'instabilité de la transformée de Legendre, ne donnent au final que des résultats médiocres. Les formules dans le cadre canonique, une fois les accidents contrebalancés (et on voit qu'à petite échelle ce n'est pas encore le cas), permettent une estimation convenable de $D(h)$: un unique point en $h = 0.3$ et $D = 1$.

Conclusion

Ce travail nous a donc donné l'occasion de présenter le formalisme multifractal pour décrire des signaux singuliers et une manière très puissante d'accéder au spectre. L'essentiel du travail a porté sur la mise en oeuvre pratique de la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes, comme les quelques indications des deux dernières parties l'ont révélé. Cependant nous avons laissé de côté certains problèmes purement informatiques comme la gestion effective de la mémoire ou l'algorithmique de recherche des lignes de maxima. L'intérêt du travail effectué, outre de permettre à partir de maintenant d'étudier des signaux issus d'expériences réelles (dans le domaine de la turbulence de façon privilégiée), est de révéler les comportements fins et capricieux des formules théoriques. Il convient d'insister encore une fois sur la nécessité de vérifier à chaque étape du calcul la propreté des résultats, sous peine de se croire à tort en prsénce d'une structure multifractale !

Références

[1] U. Frisch, G. Parisi «Fully developed turbulence and intermittency» dans *Proc. of Int. School on «Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics»*, édité par M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi, (North Holland, Amsterdam), 1985.

[2] A. Grossmann, J. Molet dans *Mathematics and Physics, Lectures on Recent Results*, édité par L. Streit, (World Scientific, Singapore), 1985.

[3] P. Abry «Transformée en ondelettes - Analyse multirésolution et signaux de pression en turbulence», Thèse de l'Université Claude Bernard, Lyon 1.

[4] A. Arnéodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, J.F. Muzy, *Ondelettes, multifractales et turbulences*, Diderot Editeur, Arts et Science, 1995.

[5] A. Arnéodo, G. Graseau, M. Holschneider, «Wavelet Transform Analysis of Invariant Measures of Some Dynamical Systems»,??, p. 182, 1988??

[6] E. Bacry, A. Arnéodo, U. Frisch, Y. Gagne, E. Hopfinger, «Wavelet analysis of fully developped turbulence data and measurement of scaling exponents», from *Turbulence 89 : organised structures and turbulence in fluid mechanics*, Grenoble, 18-21 September 1989, O. Metais and M. Lesieur, eds., 1989.

[7] J.F. Muzy, E. Bacry, A. Arnéodo, «Multifractal formalism for fractal signals : the structure-fonction approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method», *Phys. rev. Lett. E*, Feb. 1993.

[8] E. Bacry, J.F. Muzy, A. Arnéodo, «Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis : exact results», Mars 1992.

[9] A. Chhabra, C. Meneveau, R.V. Jensen, K. Sreenivasan, «Direct Determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum and its application to fully dveloped turbulence», *Phys. Rev. A*, **Vol. 40, number 9**, Nov. 1989.

[10] A. Chhabra, R.V. Jensen, *Phys. Lett.* **131A**, p. 131, 1989.

[11] M. Vrhel, C. Lee, M. Unser, «Fractal dimension estimation using the fast continuous wavelet transform», *SPIE* **Vol. 2569**, p. 478, 1994.

[12] J. Beran, *Statistics for Long-Memory process*, ch. 2 «Stationary processes with long memory», p. 39, ed. Chapman & Halls, 1994.

Table des matières