N° d'ordre : 234 Année : 2002
N° bibliothèque : 02ENSLO 234

THÈSE DE DOCTORAT

Laboratoire de Physique

de l'École normale supérieure de Lyon

# Modèles et outils pour les invariances d'échelle brisées :

## variations sur la transformation de Lamperti et contributions aux modèles statistiques de vortex en turbulence

présentée et soutenue publiquement le 22 novembre 2002 par

Pierre BORGNAT

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'École normale supérieure de Lyon**

Spécialité : Physique

devant la commission d'examen formée de

| | |
|---|---|
| **M. Bernard CASTAING** | |
| **M. Patrick FLANDRIN** | Directeur de thèse |
| **M. Olivier MICHEL** | |
| **M. Jean-Marie NICOLAS** | Rapporteur |
| **M. Bruno TORRÉSANI** | Président |
| **M. John Christos VASSILICOS** | Rapporteur |

*Ces lignes, ajoutées alors que le texte que vous tenez en main part bientôt à la reprographie, ont la tâche toujours délicate de présenter mes remerciements aux nombreuses personnes à qui cette thèse, et plus généralement mon travail, doivent énormément. L'entreprise est difficile car les formules convenues sont des écueils que je ne réussis que peu à éviter. Malgré cela, la suite est tout ce qu'il y a de plus sincère.*

*Scientifiquement, ce travail n'aurait pu exister sans ma rencontre avec Patrick Flandrin et Olivier Michel. D'abord comme enseignants exposant au tableau et aux élèves de maîtrise les bases du traitement du signal, ensuite comme encadrants du moment où ils me proposèrent un sujet de recherche. Ensuite comme partenaires réguliers et attentionnés des travaux exposés ici. Leur disponibilité (même à longue distance), et leur compétence sont à l'origine même de ces réflexions. Comme leur présence amicale et continue n'est par surcroît pas étrangère à l'achèvement de ces dits travaux, je les remercie doublement.*

*Jean-Marie Nicolas m'a fait le plaisir de rapporter ce manuscrit de thèse, sans restreindre ses commentaires, suggestions ni ses questions. J. Christos Vassilicos a accepté aussi la lourde (ne serait-ce qu'en poids de papier) charge de rapporteur et je l'en remercie vivement.*

*Je remercie aussi Bernard Castaing qui, en dépit d'un emploi du temps toujours chargé (en particulier en soutenances de thèses), a accepté de se joindre au jury. Ma reconnaissance va plus loin pour la disponibilité avec laquelle il répond toujours aux moindres interrogations qu'on lui reporte.*

*Enfin, puisqu'il apporte un regard de physicien familier avec les formalismes mathématiques en analyse du signal, je remercie M. Bruno Torrésani d'avoir accepté la présidence du jury de thèse.*

*Mon travail de thèse ne fut pas une œuvre solitaire et doit énormément au cadre agréable à la recherche que constitue le laboratoire de physique de l'ENS Lyon. Agréable par la disponibilité des chercheurs, que ce soit pour souffler au coin café, pour y discuter de sujets variés, y compris s'il le faut de science, ou pour aider à résoudre un problème qui sans eux attendraient toujours une ébauche de réponse.*

*Les membres de l'équipe Sisyphe furent au premier rang pour me soutenir, ou me supporter (selon les jours). Patrick et Olivier ont déjà eu leur place. Je suis redevable ainsi de Patrice, Stéphane, Pierre et Bruno (malgré eux peut-être). Éric aussi que le statut d'expérimentateur n'a pas mis à l'abri de mes demandes (ni moi des siennes).*

*Au-delà, nombreux sont ceux que je veux remercier au laboratoire et la liste risquerait d'en être bien longue. Remercions donc collectivement le laboratoire et l'ambiance agréable qui y règne, et son directeur Sergio Ciliberto. Spécifiquement, Bruno, Zoher, Lionel, Doru, Catherine, Nicolas, Baptiste, Jean-François (en particulier pour son aide dans les expériences), Antoine, Éric, Claude, Bertrand, Djamel, Laurence, Anne, Nadine, ont chacun été maintes fois d'un secours essentiel. Je n'oublie pas non plus Pierre-Olivier, principal collaborateur* *en dehors du laboratoire, qui subit mes mêmes humeurs répercutées sur mon entourage, au rythme de discussions téléphoniques souvent étendues.*

*Je veux rajouter un mot particulier de remerciement pour Christophe Baudet et Yves Gagne, et autour d'eux Cédric et Philippe. Christophe est partie prenante de nos réflexions initiales sur les vortex de Lundgren et a continué amicalement à apporter ses remarques, et ses idées, sur ce sujet.*

*D'autres personnes enfin ont constitué mon environnement en-dehors du laboratoire durant ces quelques années et, si leur part fut plus souvent de m'attirer à des activités bien différentes de mes tentatives de recherches, je ne pense pas que sans leur présence la fin de ce travail aurait été possible. Ne voulant pas étendre plus longuement encore ces phrases, une lecture de longueur suffisante vous attendant ensuite, je me permets de les citer simplement et dans un ordre cabalistique. Merci à Bénédicte, Bertrand, Emmanuel, François, Hervé, Hubert, Jean-Christophe, Jean-Michel, Jean-Yves, Juliette, Muriel, Olivier, Pierre, Sonia, Stan, Vincent... Philippe Thibaut et son ouvrage méritent une mention particulière pour le temps qu'ils m'ont pris. Mes parents, mon frère, mes grands-parents n'ont pas besoin d'être plus mis en avant : ils savent j'espère tout ce que ces années leur doivent et combien leur présence me fut nécessaire, et le restera.*

"But I don't want to go among mad people," Alice remarked.
"Oh, you can't help that," said the Cat : "we're all mad here. I'm mad. You're mad."
"How do you know I'm mad ?" said Alice.
"You must be," said the Cat, "or you wouldn't have come here."

Lewis Carroll, *Alice's Adventures in Wonderland.*

# Sommaire

## Table de notations fréquentes et des conventions

**Notations concernant les nombres**

$\overline{f(t)}$ ou $\overline{f}(t)$ ........ complexe conjugué de $f(t)$

$\mathrm{Re}f$ ........ partie réelle de $f$

$< f|g >$ ........ produit scalaire (pour tout espace de Hilbert $\mathfrak{H}$)

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_*^+, \mathbb{R}_*^-, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ ........ les ensembles de nombres

**Transformations de fonctions**

$< f|g > = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$ ........ produit scalaire usuel utilisé

$(\mathbf{F}f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i2\pi\nu u} \mathrm{d}u$ ........ transformée de Fourier

$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u) g(u) \mathrm{d}u$ ........ convolution

$(\mathbf{M}f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{-s-1} \mathrm{d}t$ ........ transformée de Mellin

$(\mathbf{M}_H f)(\beta) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{-i2\pi\beta-H-1} \mathrm{d}t$ ........ transformée de Mellin d'exposant $H$

$(f \otimes g)(t) = \int_0^{+\infty} f(t/u) g(u) \mathrm{d}u$ ........ convolution multiplicative

$(\mathbf{H}f)(t) = \mathrm{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{t-s} \mathrm{d}s$ ........ transformée de Hilbert

$(\mathbf{S}f)(\sigma) = e^{(H+1)\sigma} f(e^{\sigma t_0})$ ........ représentation en échelle de Baraniuk

**Fonctions usuelles**

$e_\nu(t) = e^{i2\pi\nu t}$ ........ fonction de Fourier

$E_\beta^H(t)$ ou $E_\beta(t) = t^{H+i2\pi\beta}$ ........ fonction de Mellin

$E_\beta^\alpha(t) = t^{-1-\alpha+i2\pi\beta}$ ........ fonction de Mellin (ch. IV)

$\mathbb{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{s} \quad t \geq 0 \end{cases}$ ........ fonction de Heaviside

$\mathbf{\Pi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \quad \text{ou} \quad t > 1 \\ 1 & \text{s} \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ ........ fonction porte

$\mathbf{\Gamma}(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \mathrm{d}t$ ........ fonction Gamma d'Euler

**Représentations temps-fréquence**

$W_Y(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi f\tau} R_Y(t+\tau/2, t-\tau/2) \mathrm{d}\tau$ ........ spectre de Wigner

$C_Y(t,f)$ ........ une représentation de la classe de Cohen

$H_X(t,f)$ ........ une représentation de la classe hyperbolique

$\underline{W}_X(t,\beta) = t^{2H} W_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(\ln t, \beta)$ ........ spectre de Wigner invariant en échelle

$\underline{D}_X(t,\beta) = t^{2H} C_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(\ln t, \beta)$ ........ une représentation de la classe de Mellin

### Notations pour les processus stochastiques

$p_{Y(t)}(y)$ .......... loi de probabilité de $Y(t)$ pour la valeur $y$
$\stackrel{d}{=}$ .......... égalité des lois multi-dimensionnelles
$\mathbb{E}$ .......... espérance mathématique
$R_Y(t,s) = \mathbb{E}\left\{ Y(t)\overline{Y(s)} \right\}$ .......... covariance
*Spécifiquement pour les processus stationnaires ou à stationnarité brisée*
$M_Y(\theta) = \mathbb{E}\left\{ e^{i2\pi\theta Y} \right\}$ .......... fonction caractéristique
$\gamma_Y(\tau) = R_Y(t+\tau, t)$ .......... fonction de corrélation stationnaire
$\Gamma_Y(f) = (\mathbf{F}\gamma_Y)(f)$ .......... densité spectrale de puissance
$\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu) = f_{\tilde{Y}}(\nu)\mathrm{d}\nu$ .......... représentation harmonique
$\mathrm{d}S_Y(\nu) = \Gamma_Y(\nu)\mathrm{d}\nu$ .......... mesure spectrale de puissance
$\mathrm{d}^2\Phi_Y(\nu_1,\nu_2) = \mathbb{E}\left\{ \mathrm{d}\tilde{Y}(\nu_1)\overline{\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu_2)} \right\}$ .......... mesure spectrale d'harmonisabilité
*Spécifiquement pour les processus auto-similaires ou à auto-similarité brisée*
$c_X(k) = t^{-2H}k^{-H}R_X(kt,t)$ .......... fonction de corrélation multiplicative d'un processus $H$-ss
$\Xi_X(\beta) = (\mathbf{M}c_X)(i2\pi\beta)$ .......... densité spectrale multiplicative auto-similaire
$\mathrm{d}\underline{X}(\beta) = \underline{f}_X(\beta)\mathrm{d}\beta$ .......... représentation harmonique multiplicative
$\mathrm{d}\underline{S}_X(\beta) = \Xi_X(\beta)\mathrm{d}\beta$ .......... mesure spectrale multiplicative
$\mathrm{d}^2\underline{\Phi}_X(\beta_1,\beta_2) = \mathbb{E}\left\{ \mathrm{d}\underline{X}(\beta_1)\overline{\mathrm{d}\underline{X}(\beta_2)} \right\}$ .......... mesure spectrale d'harmonisabilité multiplicative
*Quelques processus récurrents*
$\{B(t), t\in\mathbb{R}\}$ .......... mouvement brownien
$\{W(t), t\in\mathbb{R}\}$ avec $W(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}B(t)$ .......... bruit blanc gaussien de Wiener
$\{U_a(t), t\in\mathbb{R}\}$ .......... processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU)
$\{Z_\alpha(t), t\in\mathbb{R}\}$ .......... mouvement de Lévy symétrique $\alpha$-stable
$\{U_\lambda^\alpha(t), t\in\mathbb{R}\}$ .......... processus d'Ornstein-Uhlenbeck symétrique $\alpha$-stable
$Y_H = {\mathcal{L}_H}^{-1}B_H$ .......... processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé (gOU)
$\{B_H(t), t\in\mathbb{R}_*^+\}$ .......... mouvement brownien fractionnaire (fBm)
$G_{H,\tau}(t) = B_H(t+\tau) - B_H(t)$ .......... bruit gaussien fractionnaire (fGn)
$\{V(t), t\in\mathbb{R}_*^+\}$, avec $V(t) \stackrel{d}{=} t^{H+1/2}W(t)$ .......... bruit de Wiener multiplicatif d'exposant $H$
$\{X_{H,a}(t), t\in\mathbb{R}_*^+\}$ avec $X_{H,a} = \mathcal{L}_H U_a$ .......... processus de Noret ou EC d'ordre 1
$B_{H(t)}(t)$ .......... mouvement brownien multifractionnaire

### Conventions habituelles (chapitre II)

$\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$ .......... un processus stationnaire ou déviant de la stationnarité
$\{Z(t), t\in\mathbb{R}\}$ .......... idem
$\tilde{(\cdot)}$ .......... grandeur $(\cdot)$ en représentation spectrale (de Fourier)
$\mathcal{H}$ et $h(t)$ .......... un filtre stationnaire et sa fonction de réponse (ch. II)
$\{X(t), t\in\mathbb{R}_*^+\}$ .......... un processus $H$-ss ou non invariant en échelle
$\{A(t), t\in\mathbb{R}_*^+\}$ .......... idem
$\underline{(\cdot)}$ .......... grandeur $(\cdot)$ multiplicative (pour $H$-ss ou invariance en échelle brisée)
$\mathcal{G}$ et $g(t)$ .......... un filtre invariant en échelle et sa fonction de réponse (ch. II)
$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{M}g)(s)$ .......... fonction de transfert invariante en échelle

**Opérateurs**

$(\mathbf{I}\,Y)(t) = Y(t)$ .................... identité
$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t)$ .................... transformation de Lamperti
$(\mathcal{L}_{H,a} Y(t) = t^H Y(a \ln t)$ .................... transformation de Lamperti généralisée de Burnecki *et al.*
$(\mathcal{L}_H{}^{-1} X)(t) = e^{-Ht} X(e^t)$ .................... transformation de Lamperti inverse
$(\mathcal{S}_\tau Y)(t) = Y(t+\tau)$ .................... translation temporelle
$(\tilde{\mathcal{S}}_f Y)(t) = e^{-i2\pi f t} Y(t)$ .................... translation fréquentielle
$(\mathcal{T} Y)(t) = t Y(t)$ .................... opérateur temps
$(\mathcal{F} Y)(t) = \dfrac{1}{i2\pi} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y(t)$ .................... opérateur fréquence
$(\mathcal{D}_{H,\lambda} X)(t) = \lambda^{-H} X(\lambda t)$ .................... opérateur dilatation
$(\mathcal{C} X)(t) = \left(t \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - H\right) X(t)$ .................... opérateur d'échelle
$(\mathcal{H}_\beta X)(t) = t^{-i2\pi\beta} X(t)$ .................... opérateur de « chirp » ou de Mellin
*Pour le chapitre III*
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ .................... des opérateurs non spécifiés
$e_a, e_b$ .................... leurs vecteurs propres
$\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B$ .................... analyse de Fourier généralisée associée à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

**Pour les signaux à temps discret (surtout au II.5 et IV.3)**

$Ш_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau)$ .................... peigne de Dirac
$X_\tau[n] = X(n\tau)$ .................... échantillonnage linéaire
$\mathbf{B}$ avec $(\mathbf{B}X)_\tau[n] = X_\tau[n-1]$ .................... opérateur « pas en arrière »
$z$ .................... variable de la transformée en $z$ ou opérateur $z$
$s$ .................... variable de Laplace
$p$ .................... opérateur (dérivation) de Laplace
$\Omega$ .................... fréquence d'un signal continu
$\omega$ .................... fréqunce réduite d'un signal échantillonné
$Ш_q^g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^n \delta(t - q^n)$ .................... peigne de Diac géométrique
$X^{(g)}[n] = X(q^n)$ .................... échantillonnage géométrique
$Y^{(l)}[n] = Y(\ln(n\tau))$ .................... échantillonnage logarithmique
$\mathbf{M}_H^e$ .................... transformée de Mellin discrète (TMD)
$\mathcal{D}_{H,\lambda}^{(d)}$ .................... opérateur dilatation à temps discret de R. Rao

**Pour le chapitre III.3 uniquement**

$\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{U}$ .................... des intervalles pour définir les bornes
$\oplus, \otimes, \odot$ .................... lois de composition pour les intervalles bornés
$\mathcal{L}_H^{fs}$ .................... transformation de Lamperti pour les effets de taille finie
$\mathcal{L}_H^{fs\,-1}$ .................... son inverse
$\mathcal{L}_H^{b}$ .................... transformation de Lamperti bornée pour les effets de taille finie
$\mathcal{L}_H^{b\;-1}$ .................... son inverse

# I. Introduction : les propriétés en échelle pour la physique et l'analyse du signal

*Ce premier chapitre explique ce que le lecteur trouvera dans la suite du texte, à la fois en expliquant l'approche (parfois les détours) suivie, et en exposant le contexte général des questions abordées, invariance d'échelle pour l'analyse du signal d'un côté, turbulence de l'autre. Un survol synthétique des chapitres est proposé dans cette introduction.*

## 1 Avant-propos – historique et survol des travaux exposés

Le travail que nous rapportons a suivi un déroulement courant : il ne s'est pas attaché à son origine à ce qui est finalement le fil directeur de la thèse et il même émergé en premier de tentatives en turbulence qui n'ont au final pas bien abouti. D'un travail issu d'efforts en physique de la turbulence, les réflexions et contributions principales avancées ici portent sur des méthodologies, assez théoriques, en traitement du signal.

Le thème central retenu et qui irrigue l'ensemble de la thèse est en définitive la propriété d'**invariance d'échelle**, que nous déclinons sous diverses formes, à la recherche des façons de l'étudier, de la modéliser et de l'analyser.

Les déclinaisons portent elles-mêmes sur plusieurs aspects. La première série concerne le point de vue utilisé qui, selon le cas s'inscrit en physique, en traitement du signal, voire pour quelques ébauches en mathématiques.

• *Physique* quand l'intérêt est de comprendre les relations d'un modèle avec une forme d'invariance d'échelle (parfois incomplète). C'est sous ce thème que se situe le sujet initial en turbulence, et on trouvera aussi plusieurs idées sur la pertinence en physique de certaines brisures de l'invariance d'échelle exacte (comme l'invariance d'échelle discrète).

• *Traitement du signal* quand nous proposons des outils d'analyse, de synthèse mais aussi de description théorique de signaux supposés posséder les symétries étudiées ; dans ce cas la question de l'origine de la symétrie ou de la brisure n'est pas posée. Le corps du travail concerne cet aspect de développement d'outils et de modèles.

• *Mathématiques* (légères) parfois quand les développements du travail nous ont obligés à réflechir en amont sur les notions de représentations d'objets physiques : processus stochastiques et leurs propriétés statistiques et de symétrie ; observables physiques et leurs descriptions comme opérateurs.

Deuxième déclinaison, l'invariance d'échelle est regardée en premier comme une symétrie privilégiée pour laquelle il faut construire des outils spécifiques du fait de sa compatibilité imparfaite avec les hypothèses qui fondent le traitement du signal usuel, la stationnarité y occupant le premier rang. Plus loin la symétrie en échelle devient une affirmation contraignante et c'est aux brisures de cette symétrie que nous nous attachons. Bien entendu il existera diverses manières de briser l'invariance et nous en étudierons un petit nombre. Enfin l'invariance d'échelle fut quand même dès le départ au centre des travaux de cette thèse du fait de son importance pour les descriptions de la turbulence ; c'est à ce titre que nous avons examiné une possibilité de la dépasser, cette fois en se plongeant dans des modèles physiques précis qui trouvent leur origine dans la description des petites échelles de la turbulence par des modèles de dynamique des fluides (au moins dans leur inspiration).

Dernière forme de variations que l'on trouvera ici, les outils et modèles développés sont tour à tour principalement théoriques ou fortement et longuement commentés dans leurs aspects pratiques (traduire « numériques », en regardant l'adaptation des outils au traitement numérique de signaux qui pourraient être d'origine expérimentale).

Notons ainsi que les transformations de Lamperti et de Mellin, définies en premier lieu par des approches mathématiques, sont dans ces pages envisagées aussi dans leur mise en œuvre numérique.

## 2 Une symétrie privilégiée : l'invariance d'échelle

La propriété d'invariance en échelle[1] fut popularisée par Mandelbrot [Man82] tant auprès des physiciens que des mathématiciens. Plusieurs notions, définies par des communautés scientifiques distinctes, coexistent sous ce même nom et nous devons le spécifier selon les circonstances.

**« Dilatations » et invariance d'échelle.** En un sens général, un objet d'étude est invariant d'échelle si il est laissé inchangé par l'action d'une dilatation ; il est symétrique pour cette transformation. L'essentiel alors est reporté dans la définition de l'objet d'étude et de ce qu'est une dilatation pour lui. Plus précisément, comme nous n'avons accès en tant que physicien qu'à des observations issues du système étudié, il nous faut dire comment la dilatation affecte les quantités observées.

De façon plus globale, ce travail est construit autour de notions d'invariances sous certaines transformations (encore appelées symétries). Nous définirons au fil de leur rencontre diverses symétries : stationnarité et invariance d'échelle au chapitre II, des invariances d'échelle brisées au chapitres III et IV avant de se plonger dans la turbulence au V.

**Domaines d'applications de l'invariance d'échelle.** Dans de nombreux domaines de physique on trouvera des utilisations de cette symétrie [Wie01]. Qu'on nous permette ainsi de citer sans s'y attarder l'étude des transistions de phase par le groupe de renormalisation de Wilson, les calculs de renormalisations en théorie des champs [Fis83, Ami84], les comportements en loi de puissance qui émergent des principes d'analyse dimensionnelle (théorème $\Pi$ ou de Buckingham) [Bar96b], les tendances en « $1/f$ » des spectres [Kes82, Van01], les relations entre nombres sans dimensions, les comportements en lois de puissance normales ou anormales...

En mathématiques aussi on rencontre des objets invariants en échelle ou, selon le terme

[1] Le terme d'usage fréquent est « invariance d'échelle » alors que l'expression « invariance en échelle » paraît plus convenable ; nous jonglerons entre les deux selon l'humeur...

plus fréquent, auto-similaires. Les premiers sont les ensembles géométriques fractals qui suivent l'inspiration directe de Mandelbrot et sont semblables à eux-mêmes par une dilatation de l'espace. La propriété admet un équivalent assoupli où la figure et sa dilatée doivent seulement se ressembler ou avoir les mêmes propriétés générales (par exemple pour les fractales aléatoires [Fal86]). Ces géométries fractales ont d'ailleurs une importance claire en physique, comme modèles mais aussi en étant au cœur de l'étude des systèmes dynamiques qui deviennent chaotiques.

Une étape suivante est d'adopter un formalisme principalement stochastique pour décrire l'auto-similarité. L'intérêt est que la modélisation et l'analyse stochastiques sont des outils importants en traitement du signal. Le chapitre II est ainsi consacré à cette version de l'invariance en échelle.

**Invariance d'échelle et lois de puissance.** Une définition possible de cette symétrie est de dire qu'aucune échelle n'est privilégiée par rapport aux autres, qu'elles sont toutes équivalentes. Énoncée ainsi, la propriété est incomplète car elle nécessite une définition de ce qu'est une échelle. Passant outre cet obstacle pour travailler avec des échelles intuitives de temps ou d'espace, par exemple les fréquences, on peut dire que la densité spectrale[2] d'un signal ayant la symétrie en échelle vérifie :

$$\frac{\Gamma(\lambda f)}{\Gamma(f)} = g(\lambda) \;\Rightarrow\; g(\lambda_1)g(\lambda_2) = g(\lambda_1\lambda_2) \;\Rightarrow\; g(\lambda) \propto \lambda^{-\alpha}. \tag{I.1}$$

La première égalité exprime la propriété d'absence d'échelle privilégiée, donc que la fréquence $f$ doit disparaître quand on compare les contributions à $f$ et $\lambda f$ dans le signal. Cette analyse simple justifie l'émergence de lois de puissance dans les problèmes à invariance en échelle.

Nous formaliserons donc ce que nous appelerons invariance en échelle en définissant d'abord les dilatations dans le cadre des processus stochastiques (apparaissant ici comme outil pour comparer $\Gamma(\lambda f)$ et $\Gamma(f)$ à deux fréquences différentes), ensuite les échelles et enfin l'invariance.

Le début du chapitre II, les sections 1 et 2, servent à formaliser cette approche et nous y réintroduirons les définitions et les propriétés essentielles des symétries qui vont nous occuper : stationnarité des processus aléatoires, leur représentations et leur propriétés importantes, opérateurs de dilatation, auto-similarité, définition des échelles à l'aide des dilatations et de la transformation de Mellin qui sera prouvée comme indispensable à cette étude.

La partie III.1 adoptera un point de vue plus global en se penchant sur les situations où les invariances dont nous parlons sont brisées ou perdues. L'outil théorique que nous privilégions alors est la reformulation des symétries, complètes ou brisées, à l'aide de la théorie des représentations de groupes dans l'esprit de la monographie d'Hannan [Han65]. Le propos sera de montrer comment poser les bases qui servent à fonder des outils d'analyse du signal pour les processus ayant ces invariances moins habituelles.

[2] Nous donnerons les définitions précises des différents objets dans le texte des chapitres II à V.

## 3 Outils et modèles pour le traitement du signal : la transformation de Lamperti

L'objectif premier est ensuite de développer les méthodes d'étude, principalement d'analyse du signal, des auto-similarités complètes puis brisées que nous regardons dans les parties citées. Un travail abondant existe déjà en ce domaine et il serait trop long de vouloir en faire le tour ; le lecteur s'adressera donc à des lectures classiques ou générales sur le sujet (à titre d'exemples, voir [Ver87, ST94, AFTV00, Sor00]).

**Chapitre II.** Nous avons privilégié une approche originale de la question en montrant que l'on peut étudier les processus auto-similaires à l'image des processus stationnaires. « Image » est à comprendre ici en un double sens. D'abord parce que nous réutilisons le théorème de J. Lamperti [Lam62] qui fait des processus invariants en échelle les images par une certaine transformation inversible des processus stationnaires. Il permet alors de porter de multiples propriétés des processus stationnaires vers ceux auto-similaires. Leur étude est ensuite à l'image des études de la stationnarité car nous pouvons introduire les propriétés de covariance, l'analyse spectrale, la modélisation par des filtres, par des systèmes différentiels, etc, des processus auto-similaires comme on le fait pour les stationnaires en analyse du signal classique. Ce sera la substance du chapitre II.

**Chapitre III.** Le chapitre III (et à sa suite le IV) prolonge la démarche qui met en correspondance auto-similarité et stationnarité, à des processus qui n'obéissent plus à l'invariance en échelle stricte. Pour un système présentant des déviations un peu quelconques à l'auto-similarité, nous montrerons au III.2 comment alors les méthodes d'analyse non stationnaire (principalement celles du problème « temps-fréquence ») se transposent dans des méthodes images adaptées aux analyses des ruptures de l'invariance d'échelle. Les outils décrivant les symétries complètes ou brisées à l'aide des groupes de transformation que l'on présente au III.1 sont essentiels pour fonder et comprendre ces nouvelles méthodes.

La possibilité qu'une brisure de symétrie se reformule comme une nouvelle invariance sous un nouveau groupe de transformation (par exemple moins large) constitue une situation importante. On peut introduire parfois une transformation de Lamperti généralisée qui permet à nouveau de trouver une image stationnaire des processus avec cette symétrie brisée, et ce sera l'objet du III.3 qui traitera de deux exemples en particulier (effets de taille finie ou invariance seulement locale).

**Chapitre IV.** Dans le cas précis où l'invariance d'échelle est respectée uniquement pour des rapports d'échelle discrets [Sor98a], la stationnarisation par la transformation de Lamperti devient une stationnarisation incomplète en une symétrie stationnaire brisée connue sous le nom de cyclostationnarité [Gar86]. Cette brisure spécifique de l'auto-similarité étant riche à la fois en conséquences, en possibilités d'analyse et de modélisation, ainsi qu'en intérêt ou pertinence en physique, elle fait l'objet d'un chapitre à part entière qui essaie de couvrir ces trois aspects.

## 4 La turbulence : système entre statistique et dynamique

Ainsi que nous l'annoncions, le **Chapitre V** a un statut particulier qui le détache un peu du restant du manuscrit. Sujet originel des recherches de la thèse, et sujet d'une grande partie du temps qui y fut consacré, il ne fait pas exactement usage des mêmes principes d'analyse en échelle, exacte ou incomplète, que les pages précédentes.

La question posée concernait la place des objets structurés comme les tourbillons dans les propriétés statistiques de la turbulence, propriétés dont un facteur essentiel est justement le comportement statistique en échelle. Notre espoir était de savoir caractériser des signatures spécifiques de ces structures cohérentes dans des expériences de turbulence en décrivant les objets dans le formalisme qui étudie les échelles par la décomposition de Mellin, la notion de brisure de symétries globales (ici qui introduisent des structures – qui ne sont pas bien différentes de singularités oscillantes – dans le signal à analyser), et les analyses non stationnaires en échelle au cours du temps. Le cadre théorique choisi pour examiner le problème est celui de la modélisation des petites échelles de la turbulence par des collections d'objets structurés en vorticité : les vortex, en privilégiant les descriptions dynamiques de type modèles de Lundgren ou géométriques (vortex spiralés) de ces objets.

Le thème central devient alors d'étudier les modèles construits sur la dynamique et la géométrie des flots turbulents pour en prédire les comportements statistiques, alors que les théories sont en général formulées dans des cadres statistiques et qu'on peine un peu ensuite à y retrouver la dynamique des fluides.

Les obstacles qui nous ont empêchés d'arriver à des conclusions claires se résument ainsi :
- les modèles théoriques envisagés ne contraignent pas vraiment en fait les classes d'objets auxquelles on peut s'attendre dans les signaux de turbulence ;
- les méthodes d'analyse directement associées à ces modèles se sont révélées peu conclusives et ne révèlent pas de signatures des objets ;
- des méthodes d'analyse plus générales n'ont pas été adaptées avec réussite à la détection de l'effet des objets à petite échelle en turbulence ; en particulier nous avons regardé ce qui ressort de signaux synthétiques naïfs en comparaison avec des signaux réels par ces méthodes.

Le lecteur trouvera au V.1 un survol de la turbulence, ses statistiques, et pourquoi l'idée existe d'aller chercher des signatures d'objets structurés dans ce problème. Le V.2 s'intéresse à la bibliographie sur les théories de vortex avant que nous ne présentions au V.3 certains modèles de collection de vortex en en développant les propriétés irréductibles. Enfin le V.4 expose les analyses alternatives que nous avons poursuivies.

**Avertissement.** Le texte a été redigé en vue d'une lecture linéaire et les débuts de chapitres ou de parties sont en général des rappels de notions qui peuvent être connues ou classiques. Nous les présentons afin de rendre le document compréhensible aux lecteurs peu familiers avec certaines approches.

Quelques calculs ou démonstrations sont mis entre une annonce de *Démonstration* — et une marque de fin qui est □. Le calcul en soi n'est en général pas réutilisé après et le résultat est toujours indiqué en dehors de ce qui constitue alors une parenthèse que l'on est libre de dépasser.

# II. Voyage entre stationnarité et invariance en échelle

*Ce chapitre débute en posant un cadre général de l'étude de l'invariance d'échelle. Un rappel sur les bases théoriques de représentation de l'information contenue dans un signal sera la première étape et l'objet du 1 et 2. Notre point de vue, fortement inspiré en fait des travaux sur le monde non-stationnaire, ne sera pas exposé d'abord dans toute sa généralité. Nous réservons l'introduction plus formelle des possibilités générales de représenter un signal, même quand il ne reste pas stationnaire, pour le chapitre suivant.*

*Nous voulons ici montrer comment les résultats de base de l'analyse stationnaire des signaux vus comme des fonctions aléatoires, cadre agréable à une étude de traitement du signal, peuvent servir à la description et l'analyse des processus invariants en échelle. Nous argumentons que la transcription des résultats et même un passage utilisable entre le monde stationnaire et le monde auto-similaire, trouve sa formalisation à l'aide de la transformation de Lamperti.*

*Avant d'introduire cette transformation de Lamperti en section 3, des bases de l'étude stochastique de signaux stationnaires sont rappelées en 1, puis les définitions nécessaires de l'auto-similarité pour les fonctions aléatoires en 2. Dans cette même section 2 nous introduisons la transformation de Mellin qui sera au centre du formalisme obtenu pour les signaux invariants en échelle. La 4^e^ section est consacrée à de nombreux résultats, principalement originaux, et à des exemples obtenus par cette approche. Enfin le 5 est consacré au côté pratique : transformée de Mellin puis de Lamperti numériques et synthèse de séquences échantillonnées invariantes en échelle.*

## 1 Cadre général de l'analyse de signaux stationnaires

### 1.1 Aléatoire ou déterministe

Le traitement du signal est consacré à comprendre comment extraire une information d'une mesure donnée. Alors que la physique aide à savoir quelle expérience et quelle mesure mettre en œuvre, il est souvent nécessaire de recourir à des méthodes sophistiquées pour arracher à la mesure la grandeur physique recherchée.

La quantité d'intérêt que l'on obtient souvent sans traitement est une trace temporelle $x(t)$ assez fluctuante, avec des variations parfois importantes d'une réalisation à l'autre, des comportements transitoires, des périodicités claires ou des événements isolés, bref, un signal riche en information qu'il faut savoir isoler dans la complexité de la mesure.

Un premier choix admissible pour développer les méthodes de traitement du signal est de regarder les signaux comme des fonctions déterministes du temps, sur lesquelles les méthodes habituelles d'analyse fonctionelle sont possibles. C'est un cadre dans lequel beaucoup d'outils sont d'abord introduits (par exemple les analyses de type « temps-fréquence », nous y reviendrons au chapitre III). La constation de la dispersion des mesures qui ne donnent jamais exactement la même chose dès que l'objet regardé est un tant soit peu complexe, ou quand les outils de mesures sont bruités, incite à s'adresser au cadre des *probabilités* pour l'interpréter et l'analyser. On consultera par exemple [BLF53] ou [BLP81] pour des plaidoyers toujours très actuels incitant à utiliser le cadre probabiliste.

Le mérite du premier point de vue est de conserver un langage simple pour le physicien qui n'a que peu à se préoccuper de la nature mathématique de l'objet à manipuler : c'est une fonction tout simplement. C'est cependant au second choix que nous ferons principalement allégeance ici : considérer la mesure $x(t)$ comme une réalisation possible de ce que l'on aurait pu obtenir. Le cadre est alors probabiliste, $x(t)$ devenant une fonction aléatoire $X(t;\omega)$ dont on doit décrire les statistiques quand $\omega \in \Omega$, un certain espace de probabilité [Pap84]. La complexité formelle du processus aléatoire vivant dans cet espace probabiliste $\Omega$ ne posera en fait aucun inconvénient et elle disparaît rapidement en pour le physicien. Conceptuellement, l'avantage de ce cadre est patent dès que l'on regarde des données bruitées, qui contiennent une part qui semble aléatoire et contingente à la réalisation précise de l'expérience analysée.

Dans la suite nous adopterons assez généralement l'approche probabiliste. Nos objets d'études seront souvent des *processus stochastiques*, c'est-à-dire des fonctions aléatoires du temps $X(t;\omega)$. En fait il n'est que rarement utile de noter explicitement la variable de probabilité $\omega$ qui rappelle que c'est une fonction aléatoire qui est devant nous. Nous nous contenterons donc de parler de processus stochastique à temps continu $\{X(t), t \in \mathcal{D}\}$ où $\mathcal{D}$ est un domaine de définition inclu dans $\mathbb{R}$, ou à temps discret $\{X_n, n \in \mathcal{D}\}$, $\mathcal{D}$ étant usuellement un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, ou un autre ensemble dénombrable (série géométrique par exemple). Les signaux définis pour des temps discrets dans $\mathbb{Z}$ seront appelés *séquences aléatoires*.

**Égalité en loi.** Il n'est nul besoin d'esquisser toutes les propriétés de base de processus stochastiques [Pap84, Yag87, ST94]. Un unique point peut être utile à rappeler. Nous utiliserons la notation $\stackrel{d}{=}$ pour désigner l'égalité de toutes les lois distributions multi-dimensionnelles finies des processus, qui sont les lois conjointes des variables $U(t_1)$ à $U(t_N)$ pour n'importe quel $N \in \mathbb{N}$. Ainsi, si $\{U(t), t \in \mathcal{D}\} \stackrel{d}{=} \{V(t), t \in \mathcal{D}\}$, on doit avoir pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tous choix de $t_1, t_2, \ldots, t_N$ dans $\mathcal{D}$,

$$p_U(U(t_1), \ldots, U(t_N)) = p_V(V(t_1), \ldots, V(t_N)), \tag{II.1}$$

où $p_U$ désigne la loi de probabilité conjointe du processus regardé aux différents temps[1]. Ainsi définie, cette égalité probabiliste permet de rigoureusement définir les propriétés de symétrie de processus stochastiques.

Une notion affaiblie d'égalité pourrait être utilisée : l'égalité en moyenne quadratique de processus stochastiques.

$$\mathbb{E}\left\{ (U(t) - V(t))^2 \right\} = 0 \text{ pour tout } t. \tag{II.2}$$

[1] Les densités de probabilité $p_U$ et $p_V$ sont ici implicitement supposées continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Elle ne teste que les deux premiers moments des processus cependant (ici en un seul point). Pour des processus Gaussiens, qui sont déterminés par ces moments, cette égalité serait suffisante mais nous préférons rester général et utiliser $\stackrel{d}{=}$ pour les processus étudiés qui ne sont pas toujours Gaussiens. Dans certains cas, c'est la notion au second ordre seulement qui sera supposée (pour l'intégration stochastique parfois). On la désigne comme égalité au sens large (*wide-sense*) ou au second ordre.

**Fonction de corrélation, fonctions caractéristiques.** Les processus stochastiques sont en général caractérisés par la manière dont le signal reste statistiquement lié à lui-même au cours du temps. Ceci est résumé, pour la partie des propriétés au second ordre, dans la **covariance** à deux temps que nous appelerons aussi **fonction de corrélation**[2] du processus qui par définition est

$$R_Y(t,s) = \mathbb{E}\left\{Y(t)\overline{Y(s)}\right\}. \tag{II.3}$$

Nous avons ici pris la forme de la fonction de corrélation pour des processus à valeurs dans $\mathbb{C}$, en introduisant le conjugué complexe de $Y$ qui est noté $\overline{Y}$. Ceci est à dessein car, bien que la majorité des applications que l'on envisage par la suite concernent des mesures à valeurs réelles, la théorie n'est pas plus compliquée ainsi et surtout elle permet d'utiliser sans se poser de questions les fonctions complexes comme $e^{i2\pi\nu t}$.

Les moments d'ordres supérieurs des processus véhiculent des informations supplémentaires et peuvent aussi être regardés. Ils caractérisent le comportement au-delà de la gaussiannité et parfois sont reliées à des propriétés non-linéaires du système sur lequel on a fait une mesure[3] [Pri88]. De manière générale, la **fonction caractéristique** $M_Y$ du processus $Y$ est connue pour contenir la loi de probabilité $p_Y$ du processus à un instant.

$$M_Y(\theta) = \mathbb{E}\left\{e^{i2\pi\theta Y}\right\} = (\mathbf{F}p_Y)(\theta). \tag{II.4}$$

$\mathbb{E}$ désigne l'espérance mathématique (la moyenne sur la loi de probabilité) et $\mathbf{F}$ désigne la transformée de Fourier, définie selon (II.6). Les moments du processus sont obtenus à partir des coefficients dans le développement en série entière de $M_Y(\theta)$ près de l'origine.

Les propriétés statistiques à tout ordre au cours du temps sont ensuite spécifiées par les fonctions caractéristiques des vecteurs de dimension finie $(Y(t_1),\ldots,Y(t_N))$. On se limite souvent au vecteur à deux dimensions, à deux temps, qui génère en particulier la fonction de corrélation. On examinera ainsi $M_Y(\theta_1,\theta_2) = \mathbb{E}\, e^{i2\pi\{\theta_1 Y(t_1)+\theta_2 Y(t_2)\}}$.

## 1.2 Représentations temporelle ou fréquentielle.

Les deux symétries qui nous occupent principalement sont la stationnarité et l'invariance d'échelle de signaux qui seront principalement vus comme des processus stochastisques. Nous débutons par un survol des représentations possibles d'un signal aléatoire stationnaire et de quelques propriétés fondamentales.

[2] La terminologie exacte est de réserver le terme fonction de corrélation à la covariance d'un processus stationnaire car alors elle est une fonction d'un seule variable ; nous ne respectons guère cet usage en parlant en général de fonction de corrélation pour un peu tous les processus. On entendra covariance par ce terme.

[3] Cette remarque est valable par exemple pour au système dont l'entrée est gaussienne ; la sortie peut révèler alors les caractéristique non linéaires du système.

**Le signal au fil du temps.** Le temps sera par extension la coordonnée par rapport à laquelle on observe l'évolution des processus (et pourrait être une coordonnée d'espace dans certains cas). C'est la variable naturelle en fonction de laquelle on représente un signal : $x(t)$, par exemple par une simple courbe sur un papier de ce qu'on mesure au cours de l'expérience. Se rendre compte que cette trace temporelle n'est qu'une manière de représenter les informations contenues dans la mesure est un premier pas pour chercher d'autres manières de le faire. Exprimé en temps, le signal est en effet la projection du signal sur la base des impulsions de Dirac $\delta_t(u) = \delta(t-u)$, parfaitement localisées en temps. La notation $< | >$ sera réservée au produit scalaire défini par $< x|y >= \int \overline{x}(t)y(t)\mathrm{d}t$ en règle générale.

$$x(t) = \int x(u)\delta(t-u)\mathrm{d}u =< \delta_t|x > . \tag{II.5}$$

On sait cependant que certaines propriétés se révèlent plus nettement en étudiant une autre représentation du signal.

**Analyse spectrale de Fourier.** L'analyse la plus classique que l'on rencontre en traitement du signal autant qu'en physique est de regarder dans l'espace de Fourier quel est le contenu du signal. On s'intéresse à une représentation en fonction de la fréquence $\nu$ :

$$(\mathbf{F}x)(\nu) = \tilde{x}(\nu) = \int x(u)e^{-i2\pi\nu u}\mathrm{d}u =< e_\nu|x >, \tag{II.6}$$

où on introduit dans cette écriture $e_\nu(u) = e^{i2\pi\nu u}$ la fonction de Fourier de fréquence $\nu$. On notera dans la suite $\mathbf{F}$ pour désigner la transformation de Fourier.

L'analyse spectrale dont on a l'habitude tant en traitement du signal qu'en physique est construite sur cette représentation, équivalente à la première mais qui met en exergue des qualités différentes du signal. Les fonctions de la base de représentation ont une durée de vie infinie : elles se poursuivent identiques à elles-mêmes à tout instant (à la phase près). Si le signal est *stationnaire*, il est alors intuitif et exact de l'analyser par sa représentation sur cette base.

**Analyse harmonique et représentation de Cramér.** Nous venons de négliger le cadre de l'étude que nous menons : le signal est une fonction aléatoire et l'écriture en série de Fourier (II.6) a un sens à clarifier. Un pan entier de l'étude des processus stochastiques vise à concevoir cet équivalent de la transformation de Fourier, connue d'abord en analyse fonctionnelle pour un signal déterministe $x(t)$, qui serve aux fonctions aléatoires. Le principal obstacle est de trouver les conditions sous lesquelles l'écriture harmonique d'un processus $\{Y(t), t \in \mathcal{D}\}$ sur la base de Fourier est légitime :

$$Y(t) \stackrel{?}{=} \int e^{i2\pi\nu t}\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu) = \int e^{i2\pi\nu t} f_{\tilde{Y}}(\nu)\mathrm{d}\nu = (\mathbf{F}^{-1}f_{\tilde{Y}})(t). \tag{II.7}$$

L'avant-dernière écriture est une simplification valable si la mesure spectrale $\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu)$ est continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}\nu$. Ce n'est pas chose si courante et nous choisirons l'une ou l'autre forme, parfois pour la simple commodité d'écriture des résultats.

Une telle représentation est appelée représentation de Cramér [Cra40, Cra42] et nous allons voir qu'elle est toujours possible pour les processus stationnaires [BLF53]. Plus généralement, la validité d'une décomposition de type (II.7) reçoit une réponse par le principe d'harmonisabilité de Loève [Loè62], voir au III.2.1.

## 1.3 Translation et stationnarité.

Aux deux cadres mathématiques, probabilité pour les fonctions aléatoires, et analyse pour les signaux déterministes, il est possible d'ajouter une 3e manière de construire des outils de traitement du signal : le langage de la mécanique quantique s'adapte à l'analyse du signal pour dire que les quantités observables sont représentées par des opérateurs hermitiens sur l'espace des signaux que l'on munit de la structure d'un espace de Hilbert, avec le produit scalaire[4] noté $< \ | \ >$. Conjointement à ces opérateurs sont étudiées des transformations unitaires du signal (voir au III.1.3.2).

Ce point de vue a un double avantage. D'une part il recouvre les deux autres approches car il suffit alors de préciser cet espace de Hilbert comme étant au choix celui des fonctions (usuellement $L^2(\mathbb{R})$) ou celui des fonctions aléatoires. D'autre part il permet de donner des interprétations originales de ce que sont certaines quantités comme le temps, la fréquence, l'énergie ou l'échelle.

Nous nous pencherons dans le chapitre III plus en avant sur la richesse de cette approche mais dès maintenant nous anticipons un peu son utilisation en centrant notre discours sur les opérateurs qui fondent l'analyse des signaux stationnaires. La partie III.1 sera consacrée à l'extension aux situations non stationnaires.

**Les translations.** Les deux symétries sur lesquelles l'étude des signaux stationnaires repose, sont les translations en temps et en fréquence. Elles transforment un signal en le décalant simplement soit en temps (cela revient à changer son origine) soit en fréquence, en opérant une translation simple de sa décomposition en fréquence. Les définitions suivent.

Définition II.1: *Étant donné $\tau \in \mathbb{R}$, l'opérateur (unitaire) de translation temporelle $\mathcal{S}_\tau$ agit sur $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ de la manière suivante :*

$$(\mathcal{S}_\tau Y)(t) = Y(t+\tau). \tag{II.8}$$

Définition II.2: *Étant donné $f \in \mathbb{R}$, l'opérateur (unitaire) de translation en fréquence $\tilde{\mathcal{S}}_f$ agit sur $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ à travers sa représentation harmonique $d\tilde{Y}(\nu)$ :*

$$(\tilde{\mathcal{S}}_f \mathrm{d}\tilde{Y})(\nu) = \mathrm{d}\tilde{Y}(\nu + f). \tag{II.9}$$

Ces deux opérateurs partagent la propriété d'être *unitaires* sur l'espace de Hilbert d'intérêt, c'est-à-dire que pour tout couple $(X, Y)$ d'éléments de l'espace, l'utilisation de l'opérateur préserve le produit scalaire : $< \mathcal{S}_\tau X | \mathcal{S}_\tau Y > = < X | Y >$. Cela traduit le fait que les translations définies sont des isométries.

[4] Sans autre précision donnée, le produit scalaire sera habituel : $< f|g > = \int \overline{f}(t) g(t) \mathrm{d}t$.

**Représentation des opérateurs.** Ces deux classes d'opérateurs forment chacune un groupe continu pour la loi de composition naturelle, $(\{\mathcal{S}_\tau, \tau \in \mathbb{R}\}, \circ)$ et $(\{\tilde{\mathcal{S}}_f, f \in \mathbb{R}\}, \circ)$. Remarquons que nous n'écrirons pas systématiquement le signe de la composition, il sera implicite.

Nous allons montrer qu'ils admettent des générateurs infinitésimaux. Le développement de Taylor de (II.8) s'écrit, quand il est possible :

$$(\mathcal{S}_\tau Y)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau)^n}{n!} \left.\frac{\mathrm{d}^n Y}{\mathrm{d}t^n}\right|_t . \tag{II.10}$$

On reconnaît un développement en série de Taylor de l'exponentielle d'un opérateur construit sur la dérivation en temps. En suivant les conventions habituelles, nous introduisons ci-dessous l'opérateur *dérivation en temps* du signal, noté $\mathcal{F}$. Il est facile de montrer que cet opérateur est alors *hermitien*, c'est-à-dire que pour tout couple $(X, Y)$ d'éléments de l'espace, on doit avoir $< X|\mathcal{S}_\tau Y > = < \mathcal{S}_\tau X|Y >$. Une définition de $\mathcal{F}$ et sa relation à $\mathcal{S}_\tau$ sont données par :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{i2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_\tau = e^{i2\pi\tau\mathcal{F}} \tag{II.11}$$

Le raisonnement passant par (II.10) est en fait bien faible car il suppose la possibilité de dériver le processus stochastique et l'on sait que ce n'est pas souvent possible. L'introduction *ab initio* de l'opérateur $\mathcal{F}$ en le définissant par son effet sur la décomposition en fréquence du signal pose moins de problème. On pose alors :

$$\mathcal{F}Y \equiv \frac{1}{i2\pi}\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu \, \mathrm{d}\tilde{Y}(\nu). \tag{II.12}$$

On appelle aussi $\mathcal{F}$ l'*opérateur de fréquence* car il agit par multiplication de la décomposition de Cramér par $\nu$ (variable de fréquence) selon $\mathrm{d}(\widetilde{\mathcal{F}Y})(\nu) = \nu \, \mathrm{d}\tilde{Y}(\nu)$. L'opérateur $e^{i2\pi\tau\mathcal{F}}$ agit alors simplement comme la multiplication par $e^{i2\pi\tau\nu}$ de la décomposition harmonique (II.7) et est par conséquent égal à la translation dans le temps $\mathcal{S}_\tau$. On montre en effet facilement, par un changement de variable, que $\mathcal{S}_\tau$ agit bien comme tel sur la représentation harmonique de $Y$.

Nous retrouvons ici le fait que des grandeurs physiques sont naturellement associées à des opérateurs hermitiens. Le résultat est aussi que les propriétés en temps sont intimement associées à l'observable fréquence.

Un raisonnement analogue en jonglant entre les deux représentations en $t$ et $\nu$ permet de démontrer que les décalages en fréquence admettent pour générateur l'opérateur hermitien qui est l'*observable temps* $\mathcal{T}$ :

$$\mathcal{T}Y = tY(t) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathcal{S}}_f = e^{-i2\pi f\mathcal{T}}. \tag{II.13}$$

On dit que les propriétés en temps et en fréquence sont *conjuguées* ou *duales* l'une de l'autre. Une conséquence essentielle est qu'elles ne commutent pas (ce qui conduit à l'inégalité de Gabor-Heisenberg, voir (II.23)) [Gab46] :

$$[\mathcal{T}, \mathcal{F}] = \mathcal{T}\mathcal{F} - \mathcal{F}\mathcal{T} = -\frac{\mathbf{I}}{i2\pi}. \tag{II.14}$$

Les quelques pas que nous venons de faire peuvent être les premiers vers les analyses conjointes en temps et en fréquence qui sont une manière d'analyser les signaux non stationnaires. Nous reportons à nouveau au chapitre III les développement en ce sens.

## 1.4 Les processus stationnaires et leurs propriétés.

Définition II.3: *Un processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit stationnaire si il vérifie pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ :*

$$\{(\mathcal{S}_\tau Y(t)), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}. \tag{II.15}$$

Une fonction $f(t)$ qui serait stationnaire au sens exposé ci-dessus doit vérifier $f(t+\tau) = f(t)$ pour tout $t$ et pour tout $\tau$ elle est donc constante. On voit donc que ce sont les fonctions aléatoires qui vont être pertinentes ici.

Des livres entiers ont été consacrés à l'étude des processus stationnaires. Nous esquissons ici une sélection de propriétés que nous retrouverons utilisées au détour de la suite de l'exposé. Ces résultats (et bien d'autres) sont détaillés dans par exemple [Yag87], ou dans les ouvrages déjà mentionnés de Blanc-Lapierre [BLF53], [BLP81]. Le long exposé de Priestley [Pri81] constitue une mine sur ce sujet.

### Quelques propriétés (et notations).

• La propriété fondatrice de la stationnarité est que la covariance d'un processus stationnaire est une fonction de corrélation qui ne peut dépendre que de l'écart entre les deux instants considérés.

Proposition II.1: *Pour tout processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ stationnaire il existe une fonction définie positive $\gamma_Y(\cdot)$, appelée fonction de corrélation stationnaire, telle que*

$$R_Y(t,s) = \gamma_Y(t-s). \tag{II.16}$$

La moyenne du processus doit aussi rester constante, $\mathbb{E}Y(t) = m$, ainsi que tous ses moments ponctuels (à un temps).

• Kolmogorov a le premier montré que les fonctions aléatoires stationnaires admettent toutes une **représentation harmonique** sur la base de Fourier (II.7) dont les incréments spectraux ne sont pas corrélés (la fonction $S_Y$ prend son sens juste après).

$$\mathbb{E}\left\{\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu_1)\overline{\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu_2)}\right\} = \delta(\nu_1 - \nu_2)\mathrm{d}S_Y(\nu_1)\mathrm{d}\nu_2. \tag{II.17}$$

• Le **théorème de Wiener-Khintchine** relie alors la fonction de corrélation à l'analyse spectrale. On nomme $\mathrm{d}S_Y(\nu)$ mesure spectrale de puissance et elle vérifie :

$$\gamma_Y(\tau) = \int e^{i2\pi\nu\tau}\mathrm{d}S_Y(\nu). \tag{II.18}$$

Si les mesures dans les équations ci-dessus sont continues par rapport à $\mathrm{d}\nu$, on introduit alors $f_Y(\nu)$, comme dans (II.7), telle que $\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu) = f_Y(\nu)\mathrm{d}\nu$, ainsi que la densités spectrales de puissance $\Gamma_Y(\nu)$, développant de même $\mathrm{d}S_Y(\nu)$ en $\Gamma_Y(\nu)\mathrm{d}\nu$, et on a :

$$\Gamma_Y(\nu) = \mathbb{E}\,|f_Y(\nu)|^2 = \int e^{-i2\pi\nu\tau}\gamma_Y(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \text{et} \quad \gamma_Y(\tau) = \int e^{i2\pi\nu\tau}\Gamma_Y(\nu)\mathrm{d}\nu. \tag{II.19}$$

Ces relations constituent l'analyse spectrale (ou de Fourier). Elle porte en fait sur des fonctions et non des processus (dont l'analyse de Fourier est la décomposition de Cramér). En résumé on a : $\Gamma_Y(\nu) = (\mathbf{F}\gamma_Y)(\nu)$ et $\gamma_Y(\tau) = (\mathbf{F}^{-1}\Gamma_Y)(\tau)$.

• Une classe importante des processus stationnaires[5] obéit à un **principe ergodique** fort tel que on peut mesurer sa moyenne à l'aide de n'importe quelle réalisation du processus au fil du temps. Avec une probabilité 1, on a en effet

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Y(t;\omega)\mathrm{d}t = \mathbb{E}\{Y(0)\}\,. \tag{II.20}$$

Des résultats analogues existent pour les autres moments du processus et par conséquent pour toutes ses propriétés. Les processus stationnaires et ergodiques se comportent donc bien vis-à-vis de l'*estimation* de leurs propriétés.

• La **puissance instantanée** est définie comme $\mathbb{E}|Y(t)|^2$. Elle reste à l'évidence finie à tout temps pour les processus stationnaires dès que le moment d'ordre deux existe puisqu'on a $\mathbb{E}|Y(t)|^2 = \gamma_Y(0)$. La puissance se décompose spectralement par la formule de Wiener-Khintchine en $\tau = 0$ : $\mathbb{E}|Y(t)|^2 = \int \Gamma_Y(\nu)\mathrm{d}\nu$. On n'aura en revanche pas systématiquement une énergie totale finie ($\int \mathbb{E}|Y(t)|^2\mathrm{d}t < \infty$).

La relation avec l'énergie émerge de l'ergodicité de ces processus : leur puissance moyenne peut être évaluée à partir de l'énergie contenue dans une portion du signal.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |Y(t)|^2\mathrm{d}t = \mathbb{E}|Y(t)|^2. \tag{II.21}$$

• Notons alors, sans écrire les formules, qu'on dispose d'estimateurs consistants de la puissance, du spectre et de la fonction de corrélation de processus stationnaires dont on ne connaît qu'un trace temporelle. Il existe de plus des modèles paramétriques commodes de ces processus que sont la famille des systèmes auto-régressifs à moyenne ajustée, dits ARMA, qui génèrent des méthodes d'analyse paramétrique stationnaires. Nous renvoyons à [Pri81] pour cet aspect qu'il serait très long de détailler mais que nous utiliserons dans la suite.

• En dernière remarque, il nous faut poser une notation pour la **convolution** puisque de nombreuses propriétés stationnaires (comme la théorie des filtres) que nous aurons à reprendre s'expriment par son intermédiaire. La convolution, notée $*$, de deux fonctions est par définition :

$$(x * w)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)w(u)\mathrm{d}u. \tag{II.22}$$

**Une excursion dans le non stationnaire.** Bien que séduisante et ayant fait ses preuves depuis longtemps déjà, l'analyse stationnaire souffre de l'impossibilité de concilier exactement les deux descriptions sur lesquelles elle de fonde : celle en temps et celle en fréquence.

Cette difficulté est décrite par les **inégalités de Gabor-Heisenberg** [Gab46] qui sont l'expression de l'impossibilité d'une localisation parfaite en temps et en fréquence d'un signal [Fla99]. Nous ne rappellons pas la démonstration classique qui trouve son argument central (et généralisable) dans la non-commutativité des opérateurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{F}$ donnée en (II.14). Pour des fonctions usuelles, on note $\Delta t^2 = \int t^2|x(t)|^2\mathrm{d}t/E_x$ qui mesure le support en temps du

[5] Nous parlons ici de la classe des processus harmonisables et de fonction spectrale d'ordre 4 absolument sommable [BLF53] ; sinon les propriétés ergodiques sont gouvernées par le théorème ergodique de Birkhof.

signal ; et $\Delta\nu^2 = \int \nu^2|\tilde{x}(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu/E_x$ où $E_x$ est l'énergie totale du signal : $E_x = \int |X(t)|^2 \mathrm{d}t$. L'inégalité est :

$$\Delta t\ \Delta\nu \geq \frac{1}{4\pi}. \tag{II.23}$$

Puisque cela n'a pas de sens de localiser infiniment en une même description la fréquence et l'instant d'un signal, la recherche de ce que serait une fréquence instantanée est délicate. Pourtant chercher une trajectoire de la fréquence au cours du temps semble au physicien le premier pas à faire pour s'attacher à de situations où la stationnarité n'est plus de mise. Que l'on songe à la notation musicale qui est justement une écriture d'une certaine note (une fréquence) à instant précis ou, plus formellement, à des signaux de la forme $z(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$, il paraît intuitif de vouloir décomposer le signal en ses fréquences caractéristiques à chaque instant. Cependant les notes ne sont pas de durées infiniment courtes et la fonction que nous avons écrite voit les évolutions de l'amplitude et de la phase se mélanger en permanence, empêchant de définir proprement un unique ensemble de composantes essentielles de fréquence à un moment fugace.

Une solution à ce problème est connue et on consultera [Pic97] avec profit à ce sujet. La **fréquence instantanée** d'un signal $x(t)$ réel est définie à l'aide de la transformation de Hilbert $\mathbf{H}$ en lui associant un signal complexe $z_x(t)$ :

$$z_x(t) = x(t) + i(\mathbf{H}x)(t) = x(t) + i\mathrm{vp}\int \frac{x(s)}{t-s}\mathrm{d}s, \tag{II.24}$$

où vp désigne la valeur principale au sens de Cauchy [Sch65]. Le signal complexe $z_x(t) = A(t)e^{i\phi(t)}$ est analytique et son amplitude est prise comme amplitude instantanée du signal, tandis que la fréquence instantanée $f_x^i(t)$ est obtenue par :

$$f_x^i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{II.25}$$

La solution semble convenir mais pas toujours. À un signal donné par $x(t) = A(t)\cos(\varphi(t))$, le signal analytique complexe associé n'est pas a priori $A(t)e^{i\varphi(t)}$... Cela est justement dû à ce mélange temps-fréquence non commutatif qui empêche de définir correctement une évolution instantanée (qui serait ici intuitive en $\dot{\varphi}(t)/2\pi$) dans tous les cas.

Nous poursuivrons la présentation de méthodes plus élaborées de description non stationnaires au chapitre suivant. Elles ouvrent la voie à des représentations conjointes en temps et en fréquence ; elles seront plus générales... au prix d'un choix à effectuer entre beaucoup de solutions.

**Des stationnarités affaiblies.** Finissons notre revue de la stationnarité en temps en introduisant des formes affaiblies de celle-ci. Elles tirent leur importance de ce que la stationnarité stricte est souvent trop contraignante, en particulier dès que l'on a un système périodique ou invariant d'échelle

Définition II.4: *Un processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est* ***stationnaire au sens large*** *(ou au second ordre) si il existe une fonction $\gamma_Y(\cdot)$ définie positive et un nombre $m_Y$ tels que pour tout $t$ et $s$ dans $\mathbb{R}$ on a :*

$$\mathbb{E}\{Y(t)\} = m_Y \qquad et \qquad R_Y(t,s) = \gamma_Y(t-s). \tag{II.26}$$

Les propriétés au sens large ne portent que sur les statistiques d'ordre au plus deux. Pour les processus Gaussiens, elles sont équivalentes au sens strict. Nous ne définirons pas systématiquement les notions au sens large correpondant à des notions que l'on donne au sens strict (avec les égalités $\stackrel{d}{=}$) mais il nous arrivera de les utiliser.

Définition II.5: *Un processus* $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est* ***périodiquement corrélé*** *ou* ***cyclostationnaire*** *de période* $T$ *si*

$$\{(\mathcal{S}_T Y)(t), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}. \tag{II.27}$$

Ces processus ont été étudiés par exemple dans [Gla61, Hur69] sous les nom de périodiquement corrélé ou dans [GF75, Gar86] sous le vocable cyclostationnaire. Nous ferons une grande utilisation de ces processus au chapitre IV en détaillant leurs propriétés, quand nous étudierons l'invariance d'échelle discrète.

Cette définition impose un groupe de symétrie restreint à $Y$. Au lieu du groupe continu des translations temporelles, le groupe de symétrie est celui des translations discrètes $\{\mathcal{S}_{nT}, n \in \mathbb{Z}\}$. La propriété jusqu'au second ordre s'écrit $\mathbb{E}\{Y(t+T)\} = \mathbb{E}Y(t)$ pour tout $t$ et $R_Y(t+T, s+T) = R_Y(t,s)$ à tous les instants. Il s'en suit que $R_Y(t, t+\tau)$ est périodique pour la variable $t$ et admet un développement en série de Fourier.

$$R_Y(t, t+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\tau) e^{i2\pi nt/T}. \tag{II.28}$$

Définition II.6: *Un processus* $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est à* ***accroissements stationnaires*** *(noté en abrégé* ***a.s.****) si et seulement si pour tout* $\tau$ *le processus accroissement de pas* $\tau$ : $Z_\tau(t) \stackrel{d}{=} X(t+\tau) - X(t)$, *est stationnaire. On a donc pour tout* $(t,s) \in \mathbb{R}^2$

$$\{X(t+\tau) - X(t), \tau \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{X(s+\tau) - X(s), \tau \in \mathbb{R}\}. \tag{II.29}$$

Dans la majorité des situations où la stationnarité est trop restrictive, la stationnarité des accroissements sert de position de repli, réintroduisant celle-ci quelque peu. Des résultats généraux [Yag87] montrent que pour cette nouvelle classe de processus, c'est la fonction de structure $\mathbb{E}\{|Y(t) - Y(s)|^2\} = S_2(t-s)$ qui est pertinente. Par la suite cette forme faible de stationnarité peut être généralisée à des accroissements d'un ordre de dérivation plus élevé [Pic74]. L'hypothèse est alors que les variations (discrètes) d'ordre $N$ du processus sont stationnaires. Nous renvoyons à [Pic74] pour la théorie générale exploitant l'idée. On peut citer, pour revenir aux préoccupations sur les invariances en échelle, l'utilisation de ceci par Perrin et co-auteurs qui proposent des mouvements Browniens fractionnaires[6] avec un exposant de Hurst plus grand que 1 de cette manière [PHBJ⁺01].

## 2 Dilatation, invariance d'échelle et analyse de Mellin

L'objectif est ici de poser les jalons de la description des processus invariants par les changements d'échelle. Nous avons réservé certains principes généraux concernant le formalisme des opérateurs pour le chapitre suivant, quand les études non stationnaires les

[6] La définition vient plus loin, au II.4.4.

réclament réellement. Ici nous proposons une présentation plus intuitive des propriétés en échelle de processus auto-similaires, qui n'utilise que les transformations utiles : translations et dilatations. L'essentiel des propriétés des processus sera étudié en 4 après passage par la transformation de Lamperti.

## 2.1 Les processus auto-similaires.

**Définitions.** Les propriétés en échelle d'un processus sont comprises comme leur comportement sour l'effet de dilatations de l'espace. Nous définissons d'abord ces transformations.

Définition II.7: *Étant donnés $\lambda > 0$ et $H > 0$, l'opérateur de* ***dilatation*** $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ *agit sur* $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ *de la manière suivante :*

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) = \lambda^{-H}X(\lambda t). \tag{II.30}$$

Définition II.8: *Un processus* $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ *est dit* ***auto-similaire*** *d'indice $H$ s'il vérifie pour tout $\lambda > 0$ :*

$$\{(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t), t \in \mathbb{R}^+\} \stackrel{d}{=} \{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}. \tag{II.31}$$

Écrite autrement, l'égalité vérifiée est $X(\lambda t) \stackrel{d}{=} \lambda^H X(t)$. Nous adopterons $H$-ss comme abréviation d'auto-similaire d'indice $H$ en réminiscence du nom anglais (*self-similarity*). Une remarque importante est que la dilatation est naturellement définie pour $t > 0$. L'origine joue un rôle particulier puisque le 0 n'est jamais atteint strictement par un compression. Ainsi l'utilisation de dilatations pour ds temps négatifs, si elle reste possible, passe en fait par une copie des propriétés de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}_*^-$ et non d'un traitement d'ensemble de $\mathbb{R}$.

L'égalité en loi de probabilité correspondant à (II.30) s'écrit

$$p_X(X(\lambda t_1), \ldots, X(\lambda t_N)) = \lambda^{-NH} p_X(\lambda^H X(t_1), \ldots, \lambda^H X(t_2)). \tag{II.32}$$

Au second ordre la propriété impose l'invariance de la fonction de corrélation par dilatation des deux variables. Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$R_X(\lambda t, \lambda s) = \lambda^{2H} R_X(t, s). \tag{II.33}$$

Les fonctions déterministes qui obéissent à cette propriété sont une classe restreinte. Une fonction $g(t)$ qui est auto-similaire vérifie (II.31) pour l'égalité usuelle des fonctions. En prenant $t = 1$ dans cette équation $g(\lambda t) = \lambda^H g(t)$, on ne garde que des lois de puissance comme solutions : $g(\lambda) = g(1)\lambda^H$. Puisque les lois de probabilité de dimensions finies des processus aléatoires $H$-ss vérifient cette invariance d'échelle déterministe, il est attendu de trouver des lois de puissance omniprésentes comme grandeurs statistiques des processus $H$-ss.

**Relation avec l'invariance en échelle géométrique.** Une confusion doit être évitée : une trace d'une réalisation donnée d'un processus auto-similaire n'est en général pas invariante en échelle au sens géométrique, c'est-à-dire semblable à sa version après l'effet d'une dilatation de l'espace. Par ailleurs les traces obtenues sont de manière générale fractales (de dimension non entière) et se ressemblent... Ce sont les propriétés statistiques uniquement qui vérifient l'invariance.

Le théorème de récurrence de Poincaré permet cependant d'accomplir un pas vers l'auto-similarité des trajectoires [Ver87] : un processus ergodique vis-à-vis des dilatations de facteur $\lambda$ et invariant au sens statistique par ces mêmes dilatations a, avec une probabilité 1, pour chaque réalisation du processus et pour chaque voisinage de celle-ci, un ensemble non borné de $\lambda$ tel que la version dilatée par ces $\lambda$ de la trajectoire reste dans ce voisinage. En somme, les trajectoires dilatées restent souvent proches d'une réalisation du processus pour un nombre acceptable de rapports de dilatation.

**Auto-similarité et stationnarité.** Les propriétés de stationnarité d'un processus et d'auto-similarité ne sont pas compatibles. C'est une conséquence directe de ce que les statistiques d'un processus $H$-ss doivent augmenter en lois de puissance au cours du temps tandis que la stationnarité impose qu'elles ne varient pas.

*Démonstration* — Soit $\{X(t), t > 0\}$ un processus supposé stationnaire et auto-similaire de $H > 0$. On ne regarde donc que les propriétés pour les temps $t > 0$. On a pour tout $a > 0$

$$X(t) \stackrel{d}{=} X(at) \stackrel{d}{=} a^H X(t). \tag{II.34}$$

Quand on fait tendre $a$ vers $+\infty$, on aurait $X(t) \to +\infty$ ce qui est incohérent.

□

Dès lors que l'on suppose des lois en échelles pour un système physique, et qu'on cherche à la qualifier dans des modèles ou dans des données, la stationnarité en temps n'est plus donnée et les outils d'analyse stationnaire ne sont pas nécessairement bien adaptés.

Deux solutions principales se proposent à nous :
- réintroduire une hypothèse qui est une forme de stationnarité plus faible. C'est ainsi que la propriété d'accroissements stationnaires facilite les études courantes des processus $H$-ss [ST94] ;
- chercher des analyses qui « stationnarisent » le signal ou ses propriétés. L'outil de la transformation en ondelettes est une solution souvent intéressante car elle stationnarise en grande partie les propriétés des processsus qui ont des accroissements stationnaires [AFTV00].

L'objectif de la première partie du manuscrit est de proposer une autre réponse qui passe par la stationnarisation non des propriétés mais directement du processus à l'aide d'une transformation *ad hoc*.

**Un exemple : le mouvement Brownien.** Le premier exemple physique d'auto-similarité est donné par le mouvement Brownien défini comme il suit.

Définition II.9: *Le processus de Wiener, ou mouvement Brownien, $\{B(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus aléatoire Gaussien, centré, dont la corrélation est*

$$R_B(t,s) = \begin{cases} \sigma^2 \min(t,s) & si \quad t \geq 0, s \geq 0 \\ 0 & si \quad ts < 0 \\ \sigma^2 \min(-t,-s) & si \quad t \leq 0, s \leq 0. \end{cases} \tag{II.35}$$

La définition de $B(t)$ sur $\mathbb{R}$ en entier est possible ici car on recopie ses propriétés de corrélation de $\mathbb{R}_*^+$ en fixant les mêmes sur $\mathbb{R}_*^-$. C'est en quelque sorte deux fois le même processus partant de l'origine, l'un vers le futur, l'autre vers le passé mais sans avoir d'autre relation l'un avec l'autre (corrélation nulle si $ts < 0$).

Le mouvement Brownien admet une écriture intégrale à l'aide du processus bruit blanc à temps continu $\mathrm{d}B(s) = W(s)\mathrm{d}s$ qui est en quelque sorte sa dérivée. Puisque cette dérivée n'existe pas au sens usuel des fonctions, sa définition passe par des subtilités mathématiques [Pri81, Pap84] que nous n'abordons pas.

Définition II.10: *Le bruit blanc à temps continu* $\{W(t), t \in \mathbb{R}\}$, *ou bruit de Wiener, est le processus (dégénéré) dérivé du processus de Wiener dont la caractéristique essentielle est*

$$\mathbb{E}\{W(t)W(s)\} = \sigma^2\delta(t-s) \qquad ou \qquad \mathbb{E}\{dB(t)dB(s)\} = \sigma^2\delta(t-s)dtds. \tag{II.36}$$

L'écriture intégrale justifie la notation $\mathrm{d}B(s)$ :

$$B(t) = \int_0^t \mathrm{d}B(s). \tag{II.37}$$

Proposition II.2: *Le processus de Wiener* $\{B(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est auto-similaire d'indice* $1/2$.

*Démonstration* — Soit un nombre $\lambda > 0$. On fait le changement de variable $s \to \lambda s$ dans l'écriture intégrale (II.37).

$$B(\lambda t) = \int_0^{\lambda t} \mathrm{d}B(s) = \int_0^t \mathrm{d}B(\lambda s) = \int_0^t \lambda W(\lambda s)\mathrm{d}s. \tag{II.38}$$

Le bruit blanc à temps continu vérifie par changement de variable

$$R_W(\lambda t, \lambda s) = \sigma^2\delta(\lambda(t-s)) = \sigma^2\lambda^{-1}\delta(t-s) \tag{II.39}$$

Puisque le bruit de Wiener est Gaussien de moyenne nulle, l'égalité précédente implique directement que, de manière formelle, le bruit de Wiener est auto-similaire d'indice $H = -1/2$. Nous retiendrons pour la suite cette propriété grâce à l'égalité suivante pour tout $t > 0$ et $\lambda > 0$ :

$$\mathrm{d}B(\lambda t) \stackrel{d}{=} \lambda^{1/2}\mathrm{d}B(t) \qquad \text{et} \qquad W(\lambda t) \stackrel{d}{=} \lambda^{-1/2}W(t). \tag{II.40}$$

Il reste à calculer alors le comportement de la covariance de $B$ aux temps dilatés :

$$R_B(\lambda t, \lambda s) = \int_0^t\int_0^s \lambda^2\mathbb{E}\{W(\lambda u)W(\lambda v)\}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{II.41}$$

$$= \int_0^t\int_0^s \sigma^2\lambda^{-1}\delta(u-v)\lambda\mathrm{d}u\lambda\mathrm{d}v \tag{II.42}$$

$$= \lambda\int_0^{\min(t,s)} \sigma^2\mathrm{d}u = (\lambda^{1/2})^2\sigma^2\min(t,s). \tag{II.43}$$

On reconnait, grâce à (II.35), la même propriété que (II.33), suffisante pour montrer que $B(t)$ est $H$-ss, et au sens strict puisque le processus est Gaussien.

□

Nous ne donnons ici qu'un exemple Gaussien de processus $H$-ss. Le lecteur est renvoyé à 4.3.2 où nous étudions les propriétés d'un processus $H$-ss qui sort du cadre Gaussien (et sera un cas $\alpha$-stable).

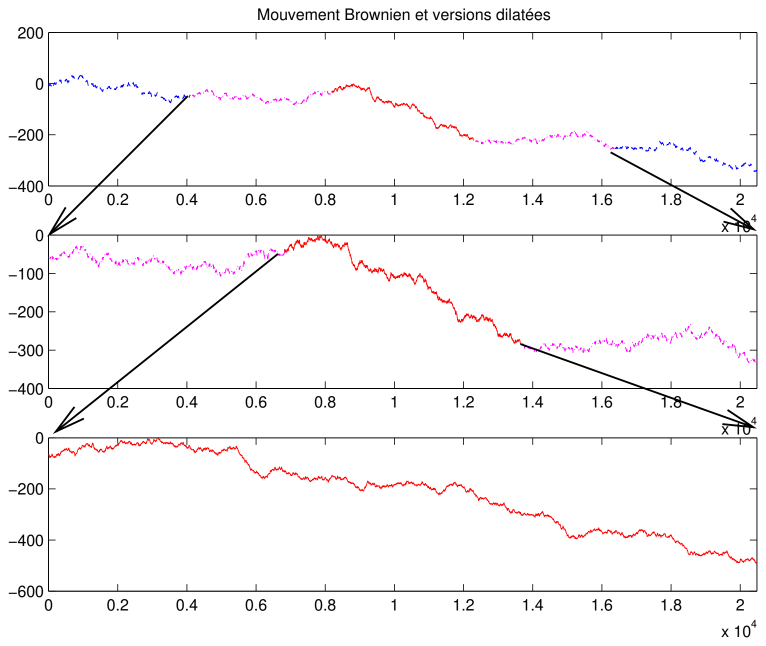



Fig. II.1: Exemple de réalisation d'un mouvement Brownien où l'on a dilaté les parties centrales pour illustrer son auto-similarité.

## 2.2 Les propriétés en échelles et les opérateurs.

L'auto-similarité a été introduite comme une propriété liée à un opérateur spécifique : l'opérateur de dilatation. Guidés par la connaissance que la représentation à l'aide des opérateurs est importante dès qu'on s'éloigne des cas simplement invariants (voir au III.1.3.2), nous introduisons ici l'analyse associée pour les propriétés en échelle.

Cette présentation trouve son origine dans les travaux parallèles de L. Cohen [Coh93] et R. Baraniuk [Bar93], qui fondent la généralisation de l'analyse non stationnaire des signaux dans le formalisme des opérateurs et apparaîtront à ce titre plus tard dans notre manuscrit.

**Les opérateurs associés à l'échelle.** Les dilatations $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ forment un groupe continu indexé par $\mathbb{R}_*^+$, pour la loi de composition naturelle $\circ$. Si on impose que les dilatations définies ici sont unitaires, il nous faut préciser l'espace de Hilbert de travail comme n'étant pas celui muni du produit scalaire usuel [BBO96]. On doit avoir pour toutes fonctions $f_1$, $f_2$ et quel que soit $\lambda$ :

$$< \mathcal{D}_{H,\lambda} f_1 | \mathcal{D}_{H,\lambda} f_2 > = < f_1 | f_2 > . \tag{II.44}$$

On se place alors dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+, t^{-2H-1}\mathrm{d}t)$ (ou l'espace des fonctions aléatoires associées), invariant pour le groupe des dilatations. Le produit scalaire[7] associé est :

$$< f_1 | f_2 > = \int_0^\infty \overline{f_1}(t) f_2(t) t^{-2H-1} \mathrm{d}t. \tag{II.45}$$

[7] Afin de ne pas compliquer les notations nous utiliserons aussi $< \; | \; >$ pour ce produit scalaire. De toute façon nous n'utiliserons pas fréquemment cette écriture et l'espace de travail sera toujours bien explicite.

Le groupe des dilatations est un groupe continu d'opérateurs unitaires qui admet un générateur infinitésimal hermitien. Le calcul précisant cela a été proposé dans [Coh93], et se trouve déjà pour l'essentiel dans [Fla93].

Partant de la représentation dans l'espace temporel des dilatations, le générateur hermitien recherché $\mathcal{C}$ doit vérifier $\mathcal{D}_{H,\lambda} = e^{i2\pi\lambda\mathcal{C}}$ [Vil69] et en dérivant l'expression, on a pour tout $X(t)$ :

$$\begin{aligned} i2\pi(\mathcal{C}X)(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t)\right|_{\lambda=1} \\ &= \left[-H\lambda^{-H-1}X(\lambda t) + \lambda^{-H}t\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(\lambda t)\right]_{\lambda=1} \\ &= \left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - H\right)X(t). \end{aligned} \tag{II.46}$$

Comme d'autre part l'opérateur $t\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ est naïvement associé à $\mathcal{TF}$, nous pouvons l'expliciter en fonction de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{T}$. Un calcul précis donne :

$$i2\pi\frac{\mathcal{TF}+\mathcal{FT}}{2} = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathbf{I}}{2}, \tag{II.47}$$

*Démonstration* — Le calcul est inspiré de [Coh93] ou [Fla93]. Soit $X(t)$ une grandeur dépendant du temps.

$$\begin{aligned} i2\pi(\mathcal{TF}+\mathcal{FT})X(t) &= t\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}tX(t) \\ &= 2t\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + X(t) \\ &= 2\left((i2\pi\mathcal{TF} + \frac{\mathbf{I}}{2})X\right)(t) \end{aligned} \tag{II.48}$$

□

Combiner cette équation avec (II.46), permet de poser la définition suivante.

Définition II.11: *L'opérateur hermitien générateur infinitésimal des dilatations est appelé* ***opérateur d'échelle*** *et est défini par :*

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{TF}+\mathcal{FT}}{2} - \left(\frac{1}{2}+H\right)\frac{\mathbf{I}}{i2\pi} = (1+H)\mathcal{TF} - \mathcal{FT}. \tag{II.49}$$

La dernière forme se prouve en utilisant le commutateur (II.14) entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{F}$. On pourrait d'ailleurs exprimer $\mathcal{C}$ uniquement en fonction de $\mathcal{TF}$ ou uniquement avec $\mathcal{FT}$ et des termes constants. Notons que les dilatations sont en général regardées avec $H = -1/2$ pour ne plus avoir de terme constant et rester dans l'espace de mesure usuelle $\mathrm{d}t$ : $\mathcal{C} = (\mathcal{TF}+\mathcal{FT})/2$ et $\mathcal{D}_\lambda X(t) = \sqrt{\lambda}X(\lambda t)$ ; ou encore avec $H = 0$ qui s'affranchit du terme multiplicatif devant la dilatation. Nous continuerons avec des dilatations renormalisées à l'aide de l'indice $H$ quelconque.

L'idée essentielle, pour l'interprétation physique de la grandeur livrée par $\mathcal{C}$, est que les fonctions propres de $\mathcal{C}$ sont insensibles (à la phase près) aux dilatations qui agissent sur les échelles. En effet, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ partagent ces mêmes fonctions propres et l'unitarité de $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ implique que ces valeurs propres sont de module unité. Les fonctions propres vivent en quelque sorte à une seule échelle et la valeur propre associée est ainsi une qualité de l'échelle unique de cette fonction.

Dimensionnellement, la quantité mesurée par l'opérateur d'échelle est analogue à un temps que multiplie une fréquence. L'échelle définie ainsi est donc une grandeur sans dimension physique. Nous la commenterons en comparaison avec les échelles dont on a l'habitude en physique : celles issues de la représentation de Fourier ou celles fournies par les ondelettes.

**La décomposition en échelle.** Les fonctions propres de $\mathcal{C}$ sont notées $E_\beta(t)$ et définies pour $t > 0$ par l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{i2\pi}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - H\right) E_\beta(t) &= \beta E_\beta(t), \\ \frac{\mathrm{d}E_\beta(t)}{E_\beta(t)} &= (H + i2\pi\beta)\frac{\mathrm{d}t}{t}. \end{aligned} \tag{II.50}$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions proportionnelles à $E_\beta(t) = t^{H+i2\pi\beta}$. Elles vérifient bien que $\mathcal{D}_{H,\lambda}E_\beta(t)$ reste égal à $E_\beta(t)$ à une phase près, et que $\mathcal{C}E_\beta(t) = \beta E_\beta(t)$. Les fonctions propres en échelle sont ainsi des « chirps », ou sinus glissants, dont la fréquence est modulée hyperboliquement.

L'**observable échelle** $\beta$ prend alors une nouvelle signification physique. La loi de fréquence instantanée des fonctions propres de $\mathcal{C}$ est hyperbolique en $\beta/t$ (puisque la phase instantanée est $e^{i2\pi\beta \ln t}$). Le paramètre adimensionnel $\beta$ est donc une caractéristique de taux de modulation de chirp et décomposer sur ces « échelles propres » un signal est une sorte de recherche de son contenu en chirps.

Il est alors possible de proposer une représentation insensible aux dilatations, à la phase près, des signaux. Elle est obtenue par décomposition sur la base de fonctions $E_\beta(t)$, avec $t^{-2H-1}\mathrm{d}t$ comme mesure d'intégration.

$$\underline{f}_X(\beta) = \int_0^{+\infty} t^{-H-i2\pi\beta} X(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \text{et} \qquad X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{H+i2\pi\beta}\underline{f}_X(\beta)\mathrm{d}\beta. \tag{II.51}$$

Cette décomposition a été de nombreuses fois (ré)-introduite pour des applications précises en traitement du signal. Son origine mathématique est claire : nous reconnaissons la transformation de Mellin, par exemple étudiée dans [Zem87].

Nous laissons temporairement de côté le problème de la validité, pour des processus stochastiques, de la décomposition sur les fonctions $E_\beta(t)$. Nous donnerons une réponse à ce problème en II.4.1 pour les processus auto-similaires, et en III.2.1 pour une approche plus générale.

## 2.3 La transformation de Mellin.

Des ouvrages classiques présentent la transformation de Mellin dans un contexte mathématique [Dav84, Zem87, Vil69], parfois proche du traitement du signal [Pap84]. Mais pour les applications en ce domaine, les travaux reportés dans [BBO96] constituent une somme incontournable. Nous faisons rappel dans ce paragraphe de certains résultats essentiels et mettons en place des notations pour la suite.

### Définition et existence.

Définition II.12: *La transformation de Mellin, notée* $\mathbf{M}$*, d'une fonction* $f(t)$ *définie sur l'axe positif, est l'opération qui lui associe une fonction d'un argument* $s \in \mathbb{C}$ *telle que :*

$$(\mathbf{M}f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{-s-1} \mathrm{d}t. \tag{II.52}$$

Il est a noter que nous avons choisi une définition peu usuelle de la transformation de Mellin. Elle est habituellement donnée comme $\int_0^\infty f(t)t^{s-1}\mathrm{d}t$ et nous avons ici effectué un changement de $s$ en $-s$. La raison de ceci est liée à l'utilisation de la transformation de Lamperti plus tard, qui s'associera naturellement à regarder $(\mathbf{M}f)$ en la variable $s = H+i2\pi\beta$ avec nos notations et non son opposé.

On montre que cette intégrale converge dans une bande parallèle à l'axe imaginaire, telle que $s = a + ib$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in (a_1, a_2)$. Les limites de la partie réelle $a_1$ et $a_2$ dépendent de la fonction analysée, ainsi que la convergence ou non de $\mathbf{M}f$ sur ces deux droites. Il n'est pas exclu que l'une et/ou l'autre limite de la bande de convergence soit rejetée à l'infini.

Alors que la transformation de Fourier s'applique sans problème à des objets (fonctions ou processus) prenant des valeurs complexes, cela n'est pas simplement possible pour celle de Mellin. Le principal problème est que rien n'assure la convergence dans la même bande des parties réelles et imaginaires. Dans la suite, lorsque nous utilison une analyse de Mellin, il est entendu que le processus ou la fonction considérée reste à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans certains cas on préfère fixer la partie réelle de l'exposant dans l'analyse de Mellin. C'est de cette manière que la décomposition en échelle fut introduite, équation (II.51), avec un $H$ précis qui fixe l'espace de représentation. Cette transformation s'applique aux fonctions appartenant à $L^2(\mathbb{R}^+, t^{-2H-1}\mathrm{d}t)$. On note dans ce cas $\mathbf{M}_H$ pour l'analyse de Mellin de facteur d'amplitude $H$ et avec notre choix (II.52) pour la variable de Mellin, elle vérifie :

$$(\mathbf{M}_H f)(\beta) = (\mathbf{M}f)(H + i2\pi\beta) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{-H-i2\pi\beta} \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{II.53}$$

Ce cas correspond alors à la décomposition de $f(t)$ sur les chirps $E_\beta(t)$ introduits comme fonctions propres de l'opérateur d'échelle. En un sens général, la transformation de Mellin opère une décomposition en échelle que nous continuerons à préciser dans la suite.

On consultera [BBO96, Zem87] la démarche mathématique nécessaire pour importer la transformation de Mellin dans la théorie des distributions. Le principe est, en deux mots, analogue à ce qui est fait pour l'analyse de Fourier [Sch65]. Il faut définir la transformation de Mellin d'une distribution $f$ par son action sur les fonctions tests $t^{-s-1}$ telle que :

$$(\mathbf{M}f)(s) = < t^{-s-1} | f > . \tag{II.54}$$

| Fonction originelle | Transformée de Mellin |
|---|---|
| $f(at)$ pour $a > 0$ | $a^s(\mathbf{M}f)(s)$ |
| $f(t^a), a \in \mathbb{R}^*$ | $\|a\|^{-1}(\mathbf{M}f)(s/a)$ |
| $t^z f(t)$ pour $z \in \mathcal{C}$ | $(\mathbf{M}f)(s-z)$ |
| $(-\ln t)^k f(t)$ pour $k \in \mathbb{N}$ | $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}(\mathbf{M}f)(s)$ |
| $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(t)$ pour $k \in \mathbb{N}$ | $(s+1)_k(\mathbf{M}f)(s+k)$ où $(s)_k = s(s+1)\dots(s+k-1)$. |
| $t^k \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(t)$ pour $k \in \mathbb{N}$ | $(s-k+1)_k(\mathbf{M}f)(s)$ |
| $(f \otimes g)(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)g(t/u)\frac{\mathrm{d}u}{u}$ | $(\mathbf{M}f)(s)(\mathbf{M}g)(s)$ |
| $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(tu)g(u)u\,\mathrm{d}u$ | $(\mathbf{M}f)(s)(\mathbf{M}g)(2-s)$ |

Fig. II.2: Quelques propriétés notables de la transformation de Mellin.

**Propriétés de M.** La première propriété, qui découle du théorème de Cauchy, est l'existence d'une formule d'inversion de la transformée. Si on prend un nombre $c \in (a_1, a_2)$, c'est-à-dire dans la bande de convergence de la transformée, la fonction

$$h(u) = \frac{1}{i2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\mathbf{M}f)(s)u^s \mathrm{d}s \tag{II.55}$$

est égale en général à $f(u)$. Une condition suffisante [Zem87] est que $(\mathbf{M}f)(s)$ soit holomorphe dans sa bande de convergence et bornée par une constante $K$ telle que $|(\mathbf{M}f)(s)| < K|s|^{-2}$.

L'inversion est toujours possible pour la transformation de Mellin sur $L^2(\mathbb{R}^+, t^{-2H-1})$. Elle s'écrit dans ce cas avec $c = H$ qui est sur la droite de convergence testée par $\mathbf{M}_H$.

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{M}_H f)(\beta)u^{H+i2\pi\beta}\mathrm{d}\beta. \tag{II.56}$$

Le tableau II.2 résume un nombre de propriétés usuelles de la transformation de Mellin qui nous seront utiles dans certains calculs. Elles sont valables quand les objets manipulés sont bien définis et regardés dans la bande de convergence.

La dernière ligne du tableau est presque la plus importante. On y introduit en effet une variante de la **convolution**, dite **multiplicative**, qui joue un rôle analogue pour $\mathbf{M}$ à celui de la convolution usuelle pour $\mathbf{F}$. La transformée de Mellin d'une convolution multiplicative est le produit des transformées de Mellin de chacune des fonctions. Nous noterons $\otimes$ cette forme de convolution qui est définie par :

$$(f \otimes g)(t) = \int_0^{+\infty} f(u)g(t/u)\frac{\mathrm{d}u}{u}. \tag{II.57}$$

Une autre propriété est qu'il existe une formule de Parseval pour la transformation de Mellin. Elle est un corrolaire direct de la formule d'inversion (et il faut qu'un nombre réel $c$

soit dans la bande de convergence de $\mathbf{M}f$ tandis que $1-c$ est dans celle de $\mathbf{M}g$).

$$\int_0^{+\infty} f(u)g(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{i2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+\infty} (\mathbf{M}f)(s)\ (\mathbf{M}g)(1-s)\mathrm{d}s. \tag{II.58}$$

**Inverse et corrélation de Mellin.**[8] Plus riche pour les applications que nous en tirons au paragraphe II.4, la relation de corrélation pour les transformées de Mellin a été proposée dans [Nic02] sous la forme :

$$(\mathbf{M}f)(s)\ (\mathbf{M}g)(2-s).$$

Cette corrélation est en quelque sorte celle entre $f$ et la fonction $g$ inversée en temps sur $\mathbb{R}_*^+$ (retournement autour de 1, de $t$ en $1/t$) puisque $(\mathbf{M}[u^{-2}g(1/u)])\,(s) = (\mathbf{M}[g(u)])(2-s)$. La valeur $s=1$ joue un rôle bien particulier puisque la transformée de Mellin en ce point reste invariant l'inversion en temps $1/t$. En particulier, la relation de corrélation induit une relation entre le produit scalaire de deux fonctions pour la mesure $t\mathrm{d}t$ associée à $H=-1$ pour nos notations.

$$\int_0^{+\infty} f(u)g(u)u\mathrm{d}u = \frac{1}{i2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+\infty} (\mathbf{M}f)(s)\ (\mathbf{M}g)(2-s)\mathrm{d}s. \tag{II.59}$$

Dans le cas de la transformation $\mathbf{M}_H$, cette équation exprime la conservation du produit scalaire dans l'espace de travail $L^2(\mathbb{R}^+, t^{-2H-1}\mathrm{d}t)$, espace naturellement imposée du fait que l'on veut alors préserver l'unitarité de $\mathbf{M}_H$.

$$\int_0^{+\infty} f(u)g(u)u^{-2H-1}\mathrm{d}u = < f|g > = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{M}_H f)(\beta)\ (\mathbf{M}_H g)(-\beta)\mathrm{d}\beta \tag{II.60}$$

Dans cet espace, l'inversion en temps a pour conséquence en représentation de Mellin : $\left(\mathbf{M}_H[u^H g(1/u]\right)(\beta) = (\mathbf{M}_H g)(-\beta)$. Nous utiliserons ces propriétés dans les parties qui suivent.

**La transformation de Mellin pour le traitement du signal.** Nous avons déjà cité les travaux de Ovarlez, Bertrand et Bertrand, résumés par exemple dans [BBO96], comme étant un argumentaire solide pour l'utilisation de la transformation de Mellin en traitement du signal. La suite du manuscrit renforce nous l'espérons ce discours en prouvant comment le formalisme de Mellin est naturellement derrière les propriétés en échelle.

Une des premières applications porte sur les signaux large-bande qui, par la dispersion importante de leur spectre, se plient mal aux méthodes de Fourier classiques. Les radars ou sonars abondent de ce genre de signaux et profitent d'analyses spectrales alternatives sur les fonctions de Mellin. Plus récemment la transformation a été directement employée pour qualifier des densité de probabilité définies sur $\mathbb{R}$, dans un souci premier d'application à l'imagerie cohérente. On consultera [Nic02] à ce propos. Notons aussi l'existence de bornes d'incertitude propres pour les signaux large-bande en parallèle avec des conditions de localisation maximale ; elles peuvent se définir à l'aide de $\mathbf{M}$ (voir [Fla98]).

[8] Je suis particulièrement redevable à Jean-Marie Nicolas pour avoir, par ses commentaires, clarifié l'apparition de la corrélation de Mellin dans les travaux exposés ici.

Un autre ensemble de travaux de traitement du signal motivés par l'extension des méthodes non stationnaires s'est appuyé sur la transformation de Mellin. Soit en proposant de la considérer comme une « représentation en échelle » qui peut remplacer celle de Fourier dans certains cas, comme le défend L. Cohen [Coh93]. Soit ensuite en regardant l'échelle de Mellin comme une variable de représentation pour généraliser les approches non stationnaires « temps-fréquence » usuelles, voir le chapitre III.

## 2.4 Échelle de Mellin ou ondelettes ?

Le propos tenu jusqu'ici avait pour objectif de résumer les résultats connus sur les représentations en échelle et en donner une lecture condensée. L'argument central est dans tous les cas que pour s'intéresser à l'échelle, ou aux échelles, qui existent dans un signal, il faut se pencher sur son comportement vis-à-vis des dilatations. C'est alors naturellement que la notion d'échelle qui émerge est le paramètre $\beta$ de la représentation de Mellin, qui est aussi l'observable de l'opérateur d'échelle $\mathcal{C}$.

Ce paradigme général n'est cependant pas le seul employé pour étudier des propriétés d'un signal en fonction de l'échelle. L'habitude en physique est depuis l'aboutissement des travaux d'un côté sur la transformation en ondelettes [Mey90], de l'autre sur les représentations quadratiques temps-fréquence ou temps-échelle [Fla99], est plutôt d'utiliser une notion d'échelle liée à la transformation de Fourier et donc à la fréquence. De nombreuses utilisations ont prouvé la validité et l'utilité de cette approche pour bien des systèmes physiques (on pourra consulter pour des exemples dans des domaines variés [Abr97, Fla99, AAB$^+$95, ST94, PW00, Wor96, FHV93]).

Pourquoi alors changer de point de vue ? La suite du manuscrit montre d'abord que l'analyse naturelle des processus (et donc des systèmes physiques) auto-similaires passe par un formalisme qui s'appuie sur l'échelle de Mellin alors que l'analyse en ondelettes n'apparaît que si on ajoute une certaine stationnarité en temps. Un deuxième argument est que le formalisme s'étend bien, tant pour la théorie que pour construire des méthodes d'analyse, à des systèmes où l'invariance en échelle est violée. Les parties III et IV sont consacrées à cette étude.

Enfin nous avons pousuivi, dans la dernière application (qui fut chronologiquement la première), l'idée que cet environnement d'analyse fondé sur l'échelle de Mellin, et donc sur des objets ayant une organisation cohérente précise de type chirp, pourrait servir de cadre pour aborder le problème de pertinence des modèles statistiques de la tubulence construits sur l'existence de structures cohérentes. La difficulté du problème est finalement semblable à celle à laquelle les analyses en ondelettes se confrontent en turbulence : il faut concilier une sorte d'invariance au cours du temps des signaux issus d'expériences, tout en décrivant les propriétés en fonction de l'échelle d'un flot qui est largement organisé par ses structures internes. Nous renvoyons à la dernière partie pour les contributions que nous proposons sur ce sujet.

# 3 La transformation de Lamperti

Invariance en échelle et stationnarité sont donc incompatibles. À moins de réintroduire la stationnarité par la petite porte, et c'est ce qu'on fait en supposant les accroissements stationnaires, pour établir une théorie générale des processus $H$-ss (dans ce cas explicité dans [Yag87]), nous n'avons pas de théorie « spectrale » pour ceux-ci, pas de représentation harmonique, aucun outil d'analyse, etc. Nous défendons ici la possibilité de construire cette théorie générale en partant d'un résultat établi en 1962 par J. Lamperti, [Lam62].

**Élements historiques.** Selon J. Lamperti lui-même, la transformation qu'il a proposé fait sa première apparition chez Doob. Le résultat de Lamperti a en soi été peu utilisé. Il apparaît dans l'article général de Vervaat sur les processus $H$-ss [Ver87] ainsi que dans le traité de Samorodnistky et Taqqu au chapitre sur l'auto-similarité [ST94]. Notons que dans un contexte différent et sans y faire référence, le livre de C. Tricot [Tri93] sur les courbes fractales utilise le résultat et montre au chapitre 12 une illustration graphique, pour une courbe déterministe, du théorème de Lamperti. Très récemment le résultat a été l'objet de nouveaux travaux mathématiques dans [BMW97], [Alb98], ou en analyse du signal avec les travaux de Nuzman et Poor [NP99, NP00a, NP00c, NP00b] ou des images dans [Don97]. Nous verrons aussi que, sans faire référence au résultat de Lamperti, des auteurs ont proprosé des cadres d'étude des systèmes ou signaux auto-similaires qui découlent en fait de celui-ci. Par exemple on regardera [BG86], [GZ88], [Wor96], [YK97], [VV99], [Nor99]. Plus généralement, les variations sur les analyses temps-fréquence conduisent à des idées proches - le lecteur en trouvera le cheminement et les résultats au chapitre III.

## 3.1 La transformation

Définition II.13: *Étant donné $H \geq 0$, la **transformation de Lamperti** $\mathcal{L}_H$ d'un processus stochastique $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t),\ t > 0. \tag{II.61}$$

Définition II.14: *Étant donné $H \geq 0$, la **transformation de Lamperti inverse** ${\mathcal{L}_H}^{-1}$ d'un processus stochastique $\{X(t), t > 0\}$ est définie par :*

$$({\mathcal{L}_H}^{-1} X)(t) = e^{-Ht} X(e^t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{II.62}$$

Remarquons d'abord que la transformation de Lamperti est inversible et que des définitions données on montre simplement l'égalité $({\mathcal{L}_H}^{-1}\mathcal{L}_H Y)(t) = Y(t)$ pour tout processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$. Si on prend des indices différents pour les transformées directes et inverses, $H_1$ et $H_2$, on établit des relations simples :

$$({\mathcal{L}_{H_1}}^{-1}\mathcal{L}_{H_2} Y)(t) = e^{(H_2-H_1)t} Y(t), \tag{II.63}$$

et pour l'application des transformées dans l'autre sens sur $\{X(t), t > 0\}$ :

$$(\mathcal{L}_{H_2}{\mathcal{L}_{H_1}}^{-1} X)(t) = t^{H_2-H_1} X(t). \tag{II.64}$$

Ces deux transformations peuvent être appliquées à des fonctions déterministes autant que des processus aléatoires. Elle transforme alors trivialement les fonctions constantes en lois de puissance.

Les opérations que nous venons d'introduire furent utilisées en premier par Lamperti dans son article de 1962 pour caractériser les processus auto-similaires [Lam62].

## 3.2 Entre stationnarité et auto-similarité

Théorème II.1: *[Lam62] Si $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus stationnaire alors sa transformée de Lamperti $\{(\mathcal{L}_H Y)(t), t > 0\}$ est auto-similaire d'indice $H$.*

*Inversement, si $\{X(t), t > 0\}$ est auto-similaire d'indice $H$, alors sa transformée de Lamperti inverse $\{({\mathcal{L}_H}^{-1} X)(t), t > 0\}$ est stationnaire.*

Ce résultat est souvent un premier paragraphe des traités sur les procesus auto-similaires [Ver87, ST94]. Il a été prouvé par Lamperti dès l'introduction (sous le nom de processus semi-stables) des processus appelés maintenant auto-similaires. Bien qu'il offre une caractérisation des processus $H$-ss en fonction des processus stationnaires, ce résultat ne permet pas de tout obtenir. Un point particulier est que $\mathcal{L}_H$ modifie profondément toutes les propriétés du processus qu'il transforme, comme les accroissements, si on les suppose stationnaires, ou les lois d'évolution en temps.

Nous emploierons le terme « générateur stationnaire » pour parler du processus « délampertisé » stationnaire associé à un processus auto-similaire. Ce dernier néologisme sera parfois utilisé commodément (en « lampertisé » ou « délampertisé ») pour indiquer un processus, une propriété, une représentation, etc, après application de la transformation.

**Preuve du théorème.** La preuve tient en quelques lignes seulement. Il est essentiel pour la suite de donner l'argument central du théorème : la transformation de Lamperti met en image les opérateurs de dilatation et de translation.

Lemme II.1: *La transformation de Lamperti garantit pour tout $\lambda > 0$ l'équivalence*

$$ {\mathcal{L}_H}^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln \lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_H \mathcal{S}_\tau {\mathcal{L}_H}^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}. \tag{II.65} $$

*Démonstration* — Le lemme repose sur le calcul suivant valable pour l'égalité au sens probabiliste $\stackrel{d}{=}$. Ce calcul prouve que $\mathcal{L}_H$ est l'opérateur qui permet l'équivalence unitaire (voir 3.3.2) entre $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et $\mathcal{S}$.

$$ \begin{aligned} ({\mathcal{L}_H}^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H Y)(t) &= ({\mathcal{L}_H}^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda})(t^H Y(\ln t)) && \text{(II.66)} \\ &= {\mathcal{L}_H}^{-1} (\lambda^{-H} (\lambda t)^H Y(\ln \lambda t)) && \text{(II.67)} \\ &= e^{-Ht} (u^H Y(\ln u + \ln \lambda))_{u=e^t} && \text{(II.68)} \\ &= Y(t + \ln \lambda) && \text{(II.69)} \\ &= (\mathcal{S}_{\ln \lambda} Y)(t). && \text{(II.70)} \end{aligned} $$

La deuxième relation est simplement l'inverse et le décalage en temps $\tau$ à considérer est relié au facteur de dilatation par $\ln \lambda = \tau$.

□

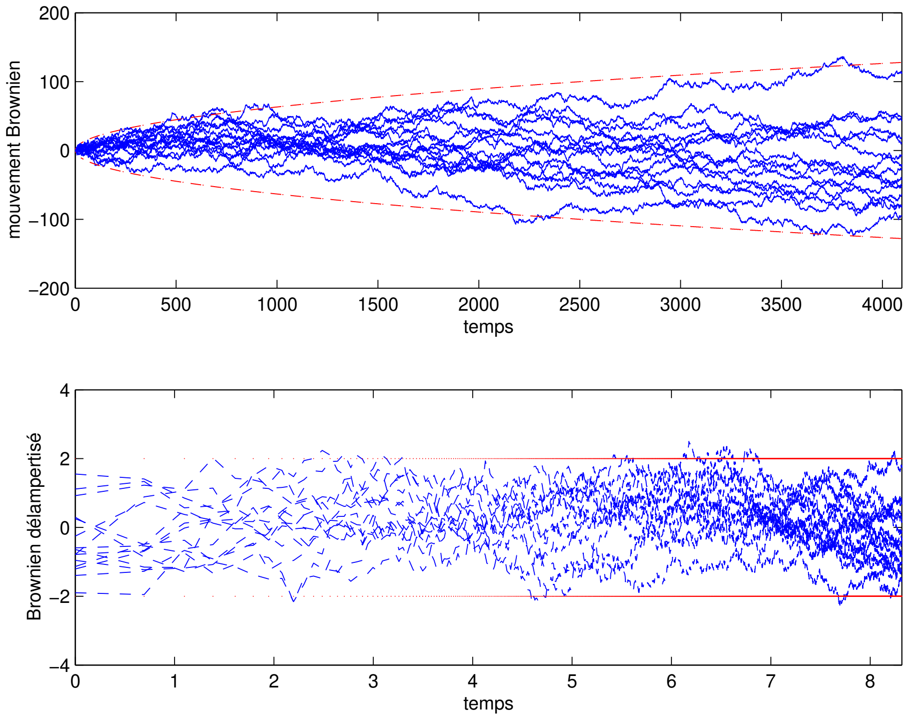



Fig. II.3: Illustration de la transformée de Lamperti : en haut sont représentées différentes réalisations de mouvement Brownien, où l'évolution de deux fois la variance est indiquée en trait - -, tandis qu'en-dessous on montre les processus stationnaires délampertisés qui restent confinés principalement entre les deux traits mis à 2 fois la variance du processus.

On peut alors démontrer le théorème de Lamperti lui-même. Soit un processus stationnaire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ et un nombre $H$. Il vérifie pour tout $\lambda > 0$ :

$$\{Y(t), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{(\mathcal{S}_{\ln \lambda} Y(t)), t \in \mathbb{R}\} = \{({\mathcal{L}_H}^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H Y)(t), t \in \mathbb{R}\}. \tag{II.71}$$

Par conséquent, en posant $X(t) = (\mathcal{L}_H Y)(t)$, ce processus est $H$-ss selon la définition II.14 car, par l'application de $\mathcal{L}_H$ à gauche et à droite, on a :

$$\{(\mathcal{D}_{H,\lambda} X)(t), t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{X(t), t \geq 0\}. \tag{II.72}$$

Inversement, nous partons d'un processus auto-similaire d'indice $H$, $\{X(t), t \geq 0\}$. Le lemme permet à nouveau d'écrire l'égalité :

$$\{X(t), t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{(\mathcal{D}_{H,\lambda} X)(t), t \geq 0\} = \{(\mathcal{L}_H \mathcal{S}_{\ln \lambda} {\mathcal{L}_H}^{-1} X)(t), t > 0\}. \tag{II.73}$$

L'égalité au centre de la stationnarité est dans ces conditions vérifiée par $Y(t) = ({\mathcal{L}_H}^{-1} X)(t)$ pour n'importe quel déplacement temporel. L'application de ${\mathcal{L}_H}^{-1}$ à (II.73) donne en effet :

$$\{(\mathcal{S}_{\ln \lambda} Y(t)), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}. \tag{II.74}$$

□

## 3.3 Propriétés fondamentales de la transformation

### 3.3.1 Transformation de Lamperti et analyse de Mellin.

Pour justifier la construction théorique qui suivra pour les processus auto-similaires, notons que l'essentiel des propriétés que nous établissons dans cette partie s'appuie en fait sur deux choses. La première est le théorème de Lamperti et son extension non stationnaire qu'autorise le Lemme II.1. La seconde surgit du comportement de la transformation de Fourier par $\mathcal{L}_H$.

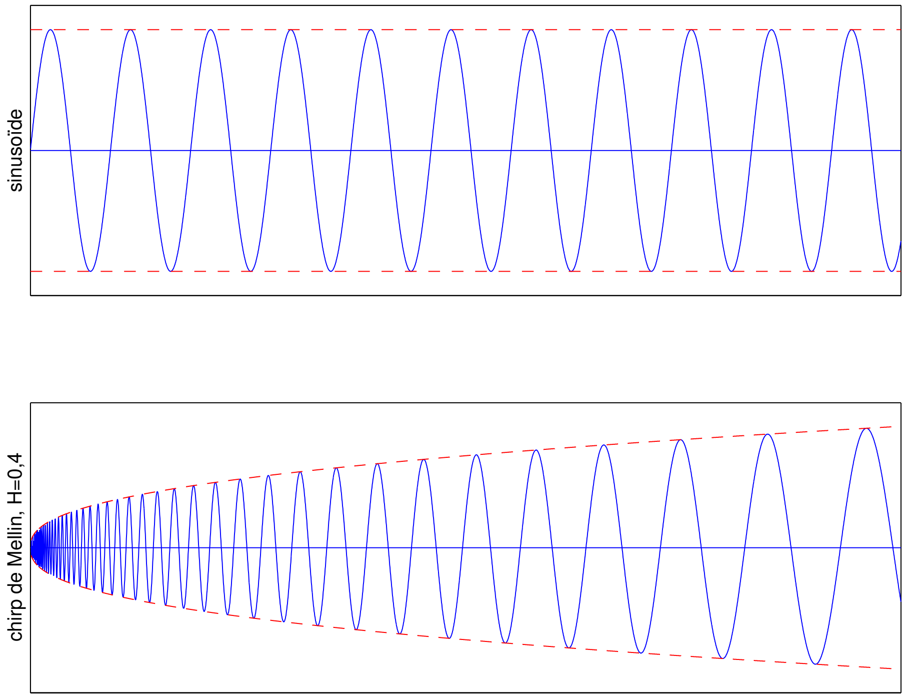



Fig. II.4: La transformée de Lamperti de la sinusoïde, qui réside à une fréquence unique, est un chirp de Mellin (représenté en-dessous) dont l'amplitude croît en $t^H$ et la phase est modulée logarithmiquement.

L'application de la transformation de Lamperti aux fonctions de la base de Fourier est en effet intéressante : $\mathcal{L}_H$ envoie ces fonctions (ayant une fréquence unique) sur les fonctions de la base de Mellin (définies par leur échelle propre).

$$\left(\mathcal{L}_H e^{i2\pi\nu u}\right)(t) = t^{H+i2\pi\nu}. \tag{II.75}$$

Ces fonctions sont des chirps, dits de Mellin, dont la fréquence instantanée selon (II.25) évolue en $\nu/t$. Par la suite, une batterie de résultats connecte les représentations de Fourier et de Mellin. Pour tout $s = H + i2\pi\beta \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_H x)(\beta) = (\mathbf{M}x)(H+i2\pi\beta) &= \int_0^{\infty} t^{-H} x(t) t^{-i2\pi\beta-1}\mathrm{d}t & \text{(II.76)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_H{}^{-1}x)(u) e^{-i2\pi\beta u}\mathrm{d}u = (\mathbf{F}\mathcal{L}_H{}^{-1}x)(\beta). & \text{(II.77)} \end{aligned}$$

On retiendra donc l'équivalence centrale entre la représentation de Fourier et celle proposée par Mellin sous la forme :

$$\mathbf{M}_H = \mathbf{F}{\mathcal{L}_H}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{M}_H\mathcal{L}_H = \mathbf{F}. \tag{II.78}$$

L'autre conséquence qui reviendra plusieurs fois dans la suite porte sur la convolution de fonctions (aléatoires ou non). La transformée de Lamperti change une convolution $*$ de fonctions en la convolution multiplicative $\otimes$ des transformées de Lamperti des deux objets initiaux.

$$(\mathcal{L}_H(x * w))(t) = (\mathcal{L}_H x) \otimes (\mathcal{L}_H w)(t). \tag{II.79}$$

*Démonstration* — Le résultat est immédiat du fait des équivalences entre $\mathbf{F}$ et $\mathbf{M}$ et de la dernière propriété du tableau II.2 pour la transformation de Mellin vis-à-vis de $\otimes$.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_H(x * w))(t) &= \mathcal{L}_H\mathbf{F}^{-1}\left((\mathbf{F}x)\ (\mathbf{F}w)\right)(t) && \text{(II.80)}\\
&= \mathbf{M}_H^{-1}\left((\mathbf{M}_H\mathcal{L}_H x)(\mathbf{M}_H\mathcal{L}_H w)\right)(t) && \text{(II.81)}\\
&= \left((\mathcal{L}_H x)\otimes(\mathcal{L}_H w)\right)(t). && \text{(II.82)}
\end{aligned}$$

□

Notons enfin que l'équivalence (II.78) permet d'interpréter le cas $H = -1$ en termes connus. La transformée de Lamperti de $f(t)$ est alors $t^{-1}f(\ln t)$ qui est le changement usuellement adopté pour passer en échelles temporelles logarithmique. Par exemple, l'inversion en temps de $g(u)$ sur $\mathbb{R}_*^+$ est alors simplement donnée par la fonction $u^{-1}g(1/u)$ pour retrouver la forme correcte de la corrélation de Mellin pour $H = -1$ selon (II.60).

### 3.3.2 Transformation de Lamperti et équivalence unitaire.

La transformation de Lamperti peut être réinterprétée au sein des études issues des analyses non stationnaires comme une forme particulière d'équivalence unitaire. Les principes généraux de l'équivalence unitaire ont été formulés dans [BC95].

Pour retrouver le soucis de R. Baraniuk [Bar93] d'adopter des quantités dimensionnelles correctes, nous introduisons ici (mais temporairement) un temps de référence $t_0$ pour mesurer les quantités temporelles. Ce temps est associé au choix de l'unité et n'intervient pas autrement [Bar96b]. Les transformations de Lamperti directes et inverses sont alors :

$$({\mathcal{L}_H}^{-1}g)(u) = e^{-Hu}g(e^u t_0) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{L}_H f)(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^H f\left(t_0 \ln\frac{t}{t_0}\right). \tag{II.83}$$

Proposition II.3: *La transformation de Lamperti est l'opérateur d'équivalence unitaire entre les opérateurs de fréquence et d'échelle, ou entre les translations temporelles et les dilatations, c'est-à-dire qu'elle assure les égalités :*

$$\mathcal{C} = \mathcal{L}_H\mathcal{F}{\mathcal{L}_H}^{-1} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{D}_{H,\lambda} = \mathcal{L}_H\mathcal{S}_{\ln\lambda}{\mathcal{L}_H}^{-1}. \tag{II.84}$$

La démonstration concernant $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ a déjà été donnée pour le lemme II.1 et l'équivalence pour les observables s'établit en usant du fait qu'ils sont les opérateurs dérivés de ces transformations.

**Opérateur conjugué à l'échelle.** L'équivalence unitaire permet d'aller plus loin. Partant des deux représentations conjuguées, une en temps et l'autre en fréquence, mises en jeu par l'analyse stationnaire usuelle, elle permet de découvrir quel opérateur est naturellement conjugué à $\mathcal{C}$, et quelle transformation est l'équivalente de $\mathcal{D}_{H,\lambda}$. Ces opérateurs duaux sont issus de l'application de l'équivalence d'abord à $\mathcal{F}$ et d'autre part aux translations en fréquence $\tilde{\mathcal{S}}_f$.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_H \mathcal{T} {\mathcal{L}_H}^{-1} g)(t) &= (\mathcal{L}_H u e^{-Hu} g(e^u t_0))(t) && \text{(II.85)}\\
&= \left(\frac{t}{t_0}\right)^H t_0 \ln \frac{t}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-H} g(t) = t_0 \ln \frac{t}{t_0} g(t); && \text{(II.86)}\\
(\mathcal{L}_H \tilde{\mathcal{S}}_f {\mathcal{L}_H}^{-1} g)(t) &= (\mathcal{L}_H e^{-i2\pi f u} e^{-Hu} g(e^u t_0))(t) && \text{(II.87)}\\
&= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{H-H} e^{-i2\pi f t_0 \ln(t/t_0)} g(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-i2\pi f t_0} g(t). && \text{(II.88)}
\end{aligned}$$

Nous reconnaissons alors comme équivalent de $\mathcal{T}$ l'opérateur logarithme du temps, que nous notons $\ln \mathcal{T}$ – bien qu'en fait il faille, pour être rigoureux, introduire le temps de référence $t_0$ qui permet d'ajuster dimensionnellement l'équation. L'équivalent de $\tilde{\mathcal{S}}_f$ est la multiplication par un chirp de Mellin, aussi appelé opérateur de Mellin [BJ95] ; nous la notons $\mathcal{H}_\beta : (\mathcal{H}_\beta g)(u) = (u/t_0)^{-i2\pi\beta} g(u)$. Le paramètre apparaissant dans le calcul d'équivalence est $\beta = f t_0$ qui est bien du type « échelle » car égal à un temps multiplié par une fréquence. Nous résumons dans un tableau les propriétés en temps ou en échelle.

| Grandeur | Transformation unitaire | Observable hermitienne | Analyse associée | Base d'analyse de Fourier | Fonctions covariantes |
|---|---|---|---|---|---|
| fréquence | $\{\mathcal{S}_\tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ | $\mathcal{F}$ | $\mathbf{F}$ | $e_\nu(u)$ | $\delta_t(u)$ |
| temps | $\{\tilde{\mathcal{S}}_f, f \in \mathbb{R}\}$ | $\mathcal{T}$ | $\mathbf{I}_t$ | $\delta_t(u)$ | $e_\nu(u)$ |
| échelle | $\mathcal{D}_{H,e^\tau}$ | $\mathcal{C}$ | $\mathbf{M}$ | $E_\beta(u)$ | $\mathcal{L}_H \delta_t(u)$ |
| log temps | $\mathcal{H}_{ft_0}$ | $\ln \mathcal{T}$ | $\mathbf{S}$ | $\mathcal{L}_H \delta_t(u)$ | $E_\beta(u)$ |

L'opérateur $\ln \mathcal{T}$ est conjugué de celui d'échelle et vérifie alors que $[\ln \mathcal{T}, \mathcal{C}] = -\mathbf{I}/(2i\pi)$. Les fonctions propres de $\ln \mathcal{T}$ (ou de $\mathcal{H}_{ft_0}$) sont obtenues par la transformation de celles de $\mathcal{T}$ (ou $\tilde{\mathcal{S}}_f$) par $\mathcal{L}_H$. Le calcul donne :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H \delta(u-t) &= \left(\frac{u}{t_0}\right)^H \delta\left(t_0 \ln \frac{u}{t_0} - t\right) && \text{(II.89)}\\
&= \left(\frac{u}{t_0}\right)^H \frac{u}{t_0} \delta\left(u - t_0 e^t\right) = e^{(H+1)t} \delta(u - t_0 e^t). && \text{(II.90)}
\end{aligned}$$

**Représentations invariantes et covariantes en échelle.** La décomposition spectrale d'un opérateur engendre une analyse de Fourier généralisée spécifique à cet opérateur. C'est à partir de la base d'analyse de Fourier généralisée associée à l'opérateur de Mellin $\mathcal{H}_\beta$ que R. Baraniuk introduit la **représentation covariante en échelle** [Bar93]. Nous la notons $\mathbf{S}$ ; elle est définie par :

$$(\mathbf{S}x)(\sigma) = e^{(H+1)\sigma} x(e^\sigma t_0), \qquad \text{(II.91)}$$

Comme le notait déjà Baraniuk, la solution est simple et presque décevante. La représentation covariante en échelle n'est rien d'autre qu'une version modifiée et regardée autour d'un $t_0$ du signal d'origine. Elle est de plus une variante simplement de la transformation de Lamperti inverse.

Les deux termes covariants et invariants renvoient au comportement inverse des décompositions obtenues par $\mathbf{S}$ et par la transformation de Mellin quant à l'action des dilatations sur les signaux analysés. Dans le premier cas, nous avons :

$$\textbf{Covariance :} \quad (\mathbf{S}\mathcal{D}_{H,\lambda}x)(\sigma) = (\mathcal{S}_{\ln\lambda}\mathbf{S}x)(\sigma), \tag{II.92}$$

c'est-à-dire que la dilatation agit sur la représentation en échelle comme une translation de la variable. On réserve le mot covariant quand la représentation d'une transformation, ici la dilatation, modifie la représentation « de manière analogue », la façon la plus simple étant de la modifier comme une translation seule. La colonne fonction covariante du tableau précédent annonçait cette base de décomposition. Ici la transformation covariante doit changer les dilatations en translations ; rien d'étonnant donc de retrouver ${\mathcal{L}_H}^{-1}$. Le résultat d'unicité (prouvé ci-dessous en 3.3.5) de $\mathcal{L}_H$ nous y contraint.

Dans le deuxième cas, nous rappelons que :

$$\textbf{Invariance :} \quad (\mathbf{M}_H\mathcal{D}_{H,\lambda}x)(\beta) = \lambda^{i2\pi\beta}(\mathbf{M}_H x)(\beta), \tag{II.93}$$

c'est-à-dire que la représentation de Mellin est invariante, à la phase près, par dilatation. Que seul le module soit invariant n'est pas grave puisque pour les processus stochastiques ce seront les moments de la représentation qui nous intéresserons.

L'argumentation de R. Baraniuk est que les descriptions invariantes étant insensibles aux effets des transformations que l'on veut étudier, ici les dilatations, elles ne rendent pas vraiment compte de l'information contenue dans le signal sur la grandeur observable associée, ici l'échelle. Cependant les propriétés en échelle sont d'abord regardées ici par rapport à la symétrie la plus forte que l'on puisse envisager en ce domaine : une invariance complète par les changements d'échelle. Nous n'avons donc pas à rechercher le contenu en échelle du signal mais à décrire comment le signal reste sans échelle caractéristique tout en exhibant une variété de propriétés liées à cette absence d'échelle caractéristique. La décomposition de Mellin a cette interprétation.

Puisque la réflexion générale pour étudier les processus auto-similaires à l'aide de la transformation de Lamperti conduit aux outils fondés sur Mellin, nous gardons l'approche invariante en échelle et tenterons de la comprendre.

### 3.3.3 Conséquences immédiates pour les processus aléatoires.

**Fonction de corrélation.** La transformation $\mathcal{L}_H$ relie les propriétés de second ordre d'un processus et de son image par un changement de variable. On notera $R_X(t,s)\hat{=}\mathbb{E}\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}$ la fonction de covariance du processus $X$. On a

$$R_{\mathcal{L}_H Y}(t,s) = t^H s^H R_Y(\ln t, \ln s), \tag{II.94}$$

ou inversement

$$R_{{\mathcal{L}_H}^{-1}X}(t,s) = e^{-Ht-Hs}R_X(e^t, e^s). \tag{II.95}$$

Les moments d'ordre supérieur d'un processus et de sa transformée sont aussi reliés à l'aide d'un changement de variable analogue.

**Conséquences sur lois de probabilité.** Les relations entre les lois de probabilité d'un processus et de son image par $\mathcal{L}_H$ n'ont pas d'autres propriétés diectement identifiables que celles que le changement de variable impose brutalement. Nous pouvons par exemple écrire pour les lois ponctuelles de processus :

$$p_{X(t)}(x) = t^{-H} p_{Y(\ln t)}(t^{-H}x). \tag{II.96}$$

**Lamperti et accroissements stationnaires.** La propriété des accroissements stationnaires n'est pas conservée ni dans un sens ni dans l'autre par la transformation. Alors que les processus $H$-ss les plus usités sont à **a.s.**, $\mathcal{L}_H$ ne permet pas de les caractériser plus.

En fait le résultat de Lamperti est une approche alternative à l'hypothèse des accroissements stationnaires, qui permet d'utiliser des résultats de l'analyse stationnaire, bien utiles pour étudier des processus $H$-ss, par le biais détourné du générateur stationnaire. Nous perdons en revanche dans cette stationnarisation la majorité des autres propriétés spécifiques d'un processus donné.

### 3.3.4 Une première utilisation : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Définition II.15: *Un* ***processus d'Ornstein-Uhlenbeck*** $\{U_a(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est un processus aléatoire stationnaire, centré et Gaussien dont la fonction de corrélation s'écrit à l'aide de deux constantes* $a > 0$ *et* $C > 0$ *:*

$$R_{U_a}(t,s) = C \exp(-a|t-s|). \tag{II.97}$$

Ce processus émerge de l'étude physique du mouvement Brownien d'agitation thermique puisqu'il est solution d'une équation de Langevin et représente par la suite la vitesse d'une particule Browniennne. On notera OU pour Ornstein-Uhlenbeck en abrégé.

Proposition II.4: *Un processus d'Ornstein-Uhlenbeck* $\{U_a(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est une version filtrée du processus de Wiener et vérifie l'équation de Langevin puis la représentation intégrale suivantes.*

$$\frac{dU_a(t)}{dt} + aU_a(t) = \frac{dB(t)}{dt} = W(t), \tag{II.98}$$

$$U_a(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-s)} dB(s). \tag{II.99}$$

On remarquera qu'il n'y a essentiellement qu'une classe de processus d'Ornstein-Uhlenbeck. En effet c'est le seul processus Gaussien, stationnaire, Markovien et de loi de probabilité continue [ST94]. Comme de plus $\mathrm{d}B(ks) \stackrel{d}{=} k^{1/2}\mathrm{d}B(s)$ (processus Gaussien de même covariance), on passe d'un paramètre $a$ à un autre par la dilatation suivante de l'axe des temps d'un facteur $k$ :

$$U_a(kt) = \int_{-\infty}^{t} e^{-a(kt-ks)} \mathrm{d}B(ks) \stackrel{d}{=} k^{1/2} U_{ka}(t). \tag{II.100}$$

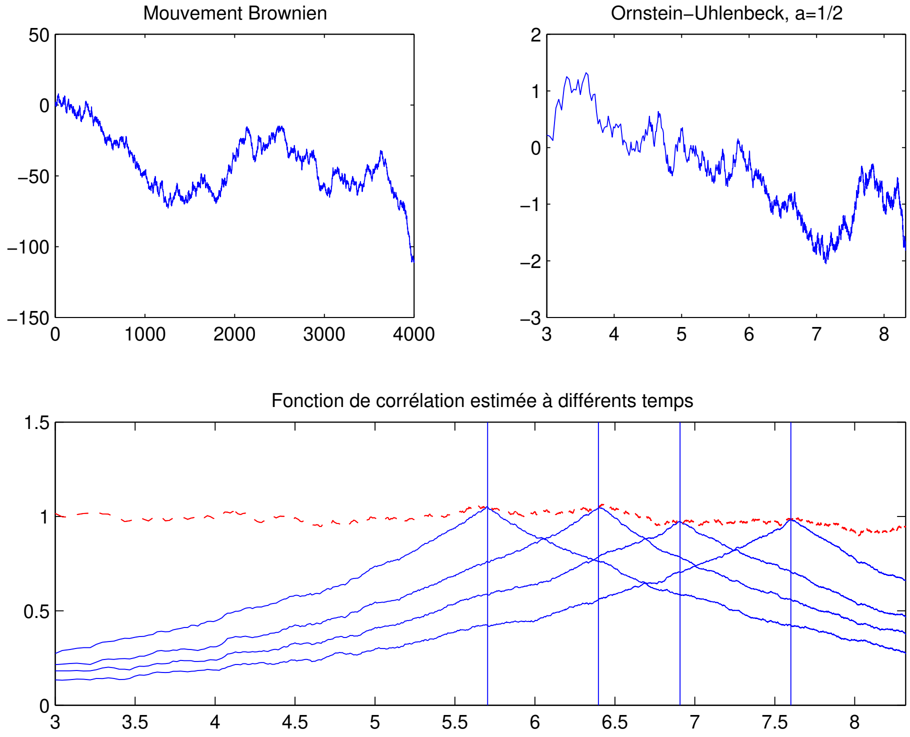



Fig. II.5: Transformée de Lamperti pour un processus d'OU, $a = 1/2$. On montre en dessous le comportement estimé numériquement de la corrélation de $(\mathcal{L}_{1/2}^{-1}B)(t)$ à partir de certains instants : la décroissance est bien exponentielle. La ligne en pointillés est l'estimation de la variance au cours du temps (stationnaire). Les estimations sont des moyennes d'ensemble sur $10^3$ réalisations.

Proposition II.5: *La transformation de Lamperti d'indice $H = 1/2$ du processus d'Ornstein-Uhlenbeck de covariance $\sigma^2 e^{-|\tau|/2}$ est le mouvement Brownien, processus auto-similaire d'indice $H = 1/2$.*

*Démonstration* — Le calcul pour $0 < t < s$ donne à l'aide de (II.94) :

$$R_{\mathcal{L}_{1/2}U_{1/2}}(t,s) = \sqrt{st}\sigma^2 e^{-|\ln s - \ln t|/2} = \sigma^2 \sqrt{st}\; e^{\ln(t/s)/2} \tag{II.101}$$

$$= \sigma^2 \sqrt{st}\sqrt{\frac{t}{s}} = \sigma^2 t = \sigma^2 \min(t,s). \tag{II.102}$$

Le calcul similaire quand $0 < s < t$ donne pour résultat $\sigma^2 s = \sigma^2 \min(t,s)$ à l'évidence. C'est bien la corrélation du mouvement Brownien.

□

L'illustration de la propriété est donnée en figure II.5. Cette transformation n'est valable que pour $H = 1/2$ mais on la généralisera aux variantes sur le mouvement Brownien au 4.3.

### 3.3.5 Unicité de la transformation.

Burnecki *et al.* [BMW97] ont posé le problème de l'unicité de la transformation de Lamperti dans les termes suivants : ils cherchent des transformations $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, $\zeta(t)$ et $\eta(t)$ telles que :

$$\begin{cases} \text{si } Y(t) \text{ est stationnaire, alors } X(t) \stackrel{d}{=} \Phi(t)Y(\Psi(t)) \text{ est auto-similaire;} \\ \text{si } X(t) \text{ est } H\text{-ss alors } Y(t) \stackrel{d}{=} \zeta(t)X(\eta(t)) \text{ est stationnaire.} \end{cases}$$

Le résultat central est que les formes des quatre fonctions $\Phi, \Psi, \eta$, et $\zeta$ sont fortement contraintes :

$$\Phi(t) = t^H \; ; \; \Psi(t) = a \ln t \; ; \; \eta(t) = e^{-bHt} \; ; \; \zeta(t) = e^{bt}. \tag{II.103}$$

La seule liberté réside dans les nombres $a$ et $b$ pris dans $\mathbb{R}$ qui sont principalement un changement général de l'unité de l'axe des temps dans un espace ou l'autre. Essentiellement donc, $\mathcal{L}_H$ et son inverse ${\mathcal{L}_H}^{-1}$ sont les seules solutions à ce problème. La solution répond aussi au problème de savoir stationnariser un processus $H$-ss.

*Démonstration* — On peut comprendre le résultat en deux étapes. Tout d'abord en remarquant qu'il est facile de changer l'indice d'auto-similarité d'un processus $H$-ss défini sur $\mathbb{R}^+$. Partant de $X(t)$, le processus modulé $\{X_{H'}(t), t > 0\}$ défini par :

$$X_{H'}(t) \stackrel{d}{=} t^{H'} X(t) \tag{II.104}$$

est $(H + H')$-ss, pour tout $H'$. La question restante est de pouvoir passer des processus stationnaires aux processus 0-ss.

Il faut alors transposer des propriétés liées à l'opérateur de translation en des propriétés correspondantes pour la dilatation sans renormalisation $\mathcal{D}_{0,\lambda}$. Ces opérateurs n'agissent que sur les variables de temps des processus, le premier via l'addition, le second via la multiplication. Il est alors évident que la solution est un morphisme entre les groupes additif $(\mathbb{R}, +)$ et multiplicatif $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$, la fonction logarithme est alors, au facteur $a$ près, la seule solution obtenue : $\Psi(t) = a \ln t$, et son inverse est l'exponentielle. Une fois cette transformation de Lamperti pour $H = 0$ construite, la dilatation continue en $t^H$ permet d'atteindre les processus $H$-ss.

On trouvera une formalisation plus mathématique de la preuve dans l'article précité [BMW97] et nous avons ici reformulée une trame originale différente de celle-ci.

□

Ces auteurs proposent même de généraliser la transformation de Lamperti en mettant explicitement le changement de l'axe des temps. On peut poser pour $a > 0$ et $H \geq 0$ :

$$(\mathcal{L}_{H,a}Y)(t) \stackrel{d}{=} t^H Y(a \ln t). \tag{II.105}$$

Cette transformée $\mathcal{L}_{H,a}$ a les mêmes propriétés que la transformation d'origine [BMW97]. Elle transforme bien en particulier les processus stationnaires en des processus invariants d'échelle. Cependant, alors que les distributions marginales ponctuelles (à un temps) de $(\mathcal{L}_{H,a}Y)$ sont indépendantes de $a$, les lois conjointes de dimension finies ne le sont pas. On ne peut en fait avoir l'égalité $(\mathcal{L}_{H,a}Y) \stackrel{d}{=} (\mathcal{L}_{H,a'}Y)$ que si $a = a'$ ou $a = -a'$ (théorème 4.1 de [BMW97]). À cette remarque près, on a tout de même une classe générale de même type qui émerge par l'utilisation de transformées avec des $a$ différents.

En combinant cette analyse avec la propriété de dilatation des processus OU, équation (II.100), on constate que l'entière classe de ces processus est essentiellement engendrée à partir du mouvement Brownien. On a d'une part en effet :

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{H,a}U_\lambda)(t) &= t^H U_\lambda(a \ln t) && \text{(II.106)}\\
&\stackrel{d}{=} \sqrt{a} t^H U_{a\lambda}(\ln t) && \text{(II.107)}\\
&= \sqrt{a}(\mathcal{L}_H U_{a\lambda})(t). && \text{(II.108)}
\end{aligned}
$$

En choisissant $a$ tel que $a\lambda = 1/2$ et $H = 1/2$, nous obtenons le passage entre le processus OU avec $\lambda$ quelconque au mouvement Brownien $B(t)$ :

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{H,1/2\lambda}U_\lambda)(t) &\stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}(\mathcal{L}_H U_{1/2})(t) && \text{(II.109)}\\
&\stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} B(t). && \text{(II.110)}
\end{aligned}
$$

## 3.4 Des remarques générales sur la transformation

**L'origine des temps.** La limitation importante à laquelle nous nous confronterons toujours est que la transformation de Lamperti impose une origine très particulière des temps en 0 et même, initialement, ne permet de regarder que des processus définis dans un sous-ensemble de la demi-droite réelle positive.

On peut écarter directement le faux problème que constitue la définition sur $\mathbb{R}^+$ seulement de ces processus. D'une part on déduit immédiatement des analyses analogues sur $\mathbb{R}^-$ par un changement de variable de $t$ en $-t$. D'autre part un processus défini sur $\mathbb{R}^+$ peut être considéré simplement comme un processus causal qui vit sur la droite réelle entière. Il n'est donc pas faux de mélanger parfois analyses classiques « à la Fourier » avec des études par les outils de Lamperti et Mellin.

Il n'est pas possible de dépasser simplement la contrainte sur l'origine intrinsèque au formalisme proposé. Elle est directement issue de ce que les dilatations que nous avons définies se font par rapport à une certaine origine des temps. Nous proposerons plusieurs tentatives pour assouplir ce cadre.

La première façon est de se restreindre à l'étude de systèmes qui ont une origine bien déterminée, un temps initial. Les études des processus auto-similaires, pour lesquels on sait que l'origine joue un rôle spécifique, des phénomènes de croissance à partir d'un point qui fournit une origine sans ambiguité, ou des problèmes de fracture où l'instant de rupture final est un point particulier, se placent justement dans cette classe de problèmes.

La deuxième sera d'introduire une transformation de Lamperti locale en temps pour obtenir des interprétations valables autour d'un temps précis et qui s'affranchissent partiellement de l'origine. Une variante est d'envisager plus généralement les représentations locales en temps et en échelle de Mellin dont nous parlerons. Nous tenterons de les employer à l'étude des ensembles statistiques d'objets cohérents aux propriétés précises en échelle.

Enfin la dernière possibilité serait de choisir l'échelle d'étude comme celle qui émerge des propriétés de covariance (et non d'invariance) par rapport aux dilatations. Nous reparlerons de la solution données dans les travaux de Baraniuk et de la solution consistant à prendre une échelle de Fourier (définie comme l'inverse d'une fréquence caractéristique) au moment de généraliser le travail aux processus non strictement invariants en échelle.

**Représentation en Fourier-Mellin.** La dernière solution est de chercher les échelles de Mellin à partir de la décomposition harmonique. C'est en partant de cette idée que les premières utilisations des fonctions de Mellin et de leur échelle portèrent sur la représentation en fréquence d'un signal. C'est-à-dire que les transformations de Mellin furent appliquées à $(\mathbf{F}x)(f)$. Pourquoi cela ?

Une première raison, qui fait appel à l'intuition physique, est que l'origine du paramètre sur lequel porte l'analyse est alors plus naturellement fixée à 0. On a en effet l'habitude de considérer plus universelle l'origine des fréquences (associée aux constantes dans le signal) que l'origine des temps (quand une certaine invariance du système en temps est implicitement adoptée).

La deuxième raison, plus formelle, vient de la représentation du groupe de dilatation sur les signaux écrits en fréquences. On a :

$$(\mathbf{F}\mathcal{D}_{H,\lambda}x)(\nu) = \lambda^{-H-1}(\mathbf{F}x)\left(\frac{\nu}{\lambda}\right). \tag{II.111}$$

Ainsi donc dans ce domaine fréquentiel, la dilatation temporelle est représentée par une compression sur l'axe des fréquences. Les principes de représentations développés grâce à l'écriture des dilatations en temps peuvent donc être utilisés tels quels sur le domaine de représentation en fréquence. L'introduction par Marinovic [Mar86] de la distribution de Wigner invariante en échelle est initialement formulée sur la transformation de Fourier du signal. De la même façon, la classe hyperbolique dont nous parlerons au III, porte sur les fréquences.

Cependant alors que l'approche de Fourier-Mellin est naturelle pour des problèmes de sonar par exemple, et de manière générale l'étude de fonctions large-bande [BBO96], elle ne permet guère de s'intéresser aux situations où les structures sont définies en temps. Ainsi, nous conservons dans la suite du manuscrit le point de vue du chasseur de structure (et de chirps en particulier) en appliquant les principes sur les représentations temporelles des signaux. Cela nous conduira à préciser à nouveau, et de manière un peu différente des interprétations classiques, ce que sont les représentations mixtes d'un signal en temps et échelle. L'esprit sera à ce moment de développer et généraliser ce qui fut accompli dans [Fla90] pour le seul spectre de Wigner.

## 4 Processus auto-similaires et transformée de Lamperti

Cette partie est dédiée à l'utilisation directe de la transformation de Lamperti et de la stationnarisation qu'elle réalise sur les processus auto-similaires, dans le but d'établir leurs propriétés générales. Certains de ces résultats ayant déjà été obtenus par d'autres auteurs, quoique souvent sans analyse systématique, nous citons explicitement où trouver l'équivalent de ce que nous prouvons. Le cadre général, les propriétés non explicitement référencées et les exemples sont originaux ou largement développés par rapport aux articles cités.

Un plan général de réflexion peut être dressé. Il existe deux manières d'utiliser le passage entre monde stationnaire et monde auto-similaire qu'ouvre la transformation de Lamperti. La première est évidemment de « lampertiser » des signaux stationnaires pour obtenir des classes de processus $H$-ss ; la même opération est possible sur les outils stationnaires. Le point de vue inverse est de « délampertiser » ces processus $H$-ss et ainsi d'utiliser toute la machinerie des méthodes stationnaires pour les appliquer *in fine* à l'analyse auto-similaire. Ainsi une transformation (ou méthode de traitement) $\mathbf{T}$ sur un processus $H$-ss peut être envisagée à l'aide du diagrame commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} X(t) & \xrightarrow{?} & (\mathbf{T}X)(t) \\ | & & \uparrow \\ \text{Lamperti inverse} & & \text{Lamperti} \\ \downarrow & & | \\ (\mathcal{L}_H^{-1}X)(t) & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{T}}\mathcal{L}_H^{-1}X)(t) \end{array}$$

Fig. II.6:

L'opération est au final décomposée sous la forme

$$\mathbf{T} = \mathcal{L}_H \tilde{\mathbf{T}} \mathcal{L}_H^{-1}. \tag{II.112}$$

On peut avoir avantage à construire $\mathbf{T}$ à partir de sa transformation $\tilde{\mathbf{T}}$ sœur de l'analyse stationnaire ou, inversement, préférer employer $\tilde{\mathbf{T}}$ après délampertisation du processus.

## 4.1 Propriétés spectrales et harmoniques

**Corrélation et spectre.** Les premières conséquences pour les processus auto-similaires $X(t)$ de l'existence d'un générateur stationnaire $Y = {\mathcal{L}_H}^{-1}X$ sont de caractériser leur fonction de corrélation et de montrer l'existence de représentations spectrales en partant des résultats classiques pour les processus stationnaires. On retrouve ici des propriétés établies dans [GZ88] (mais pour le cas $H = 0$ uniquement), ainsi que des formes données par [Fla90, YK97]

Proposition II.6: *Il existe, pour tout processus $H$-ss $\{X(t), t > 0\}$, une fonction $c_X(\cdot)$ telle que $c_X(e^{\cdot}) = \gamma_Y(\cdot)$ soit définie positive et :*

$$R_X(t,s) = (ts)^H \gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(\ln t/s) = (ts)^H c_X(t/s) \tag{II.113}$$

$$R_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(t,s) = \gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(t-s) = c_X(e^{t/s}). \tag{II.114}$$

*On appellera $c_X(\cdot)$ fonction de corrélation multiplicative génératrice.*

On pourrait avoir avantage à suivre Gray et Zhang [GZ88] et définir directement une corrélation dite multiplicative qui soit mieux adaptée à l'étude des processus $H$-ss parce qu'elle est définie avec un temps et un facteur de dilatation. Elle prend pour l'hypothèse $H$-ss la forme :

$$\mathbf{R}_X(t,k) = R_X(kt,t) = t^{2H} k^H c_X(k). \tag{II.115}$$

Nous éviterons par la suite d'employer cette notation $\mathbf{R}_X(t,k)$ par simple confort de lecture que compliquerait une définition de plus. Nous aurons un lot suffisant de nouvelles définitions dans la suite.

L'équivalence à retenir entre processus stationnaires et processus auto-similaires est résumée ainsi :

$$c_X(\cdot) = \gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(\ln \cdot) \qquad \text{et} \qquad \gamma_Y(\cdot) = c_{\mathcal{L}_H Y}(e^{\cdot}) \tag{II.116}$$

Une propriété de $c_X$ mérite d'être signalée. C'est l'analogue de la parité des fonctions de corrélation de processus stationnaires (et à valeurs dans $\mathbb{R}$) :

$$c_X(k) = c_X(1/k) \tag{II.117}$$

Comme la fonction $\gamma_Y$ est la corrélation stationnaire de $Y$ et admet, par le théorème de Wiener-Khintchine, une écriture sous forme spectrale, nous pouvons établir l'existence d'une densité spectrale pour les processus $H$-ss [YK97].

Définition II.16: *On appelle densité spectrale multiplicative $\Xi_X(\beta)$ d'un processus $X$ auto-similaire d'indice $H$, la transformée de Mellin de $c_X(k)$.*

$$\Xi_X(\beta) = \int_0^\infty c_X(k)k^{-i2\pi\beta-1}\mathrm{d}k = (\mathbf{M}c_X)(i2\pi\beta) = (\mathbf{M}_{H=0}c_X)(\beta). \tag{II.118}$$

L'existence de cette densité spectrale repose sur l'existence de celle, en Fourier, du générateur stationnaire. Cette densité prend la même forme quel que soit $H$ (et s'écrit ainsi à l'aide de la transformée de Mellin avec une partie réelle nulle, $\mathbf{M}_{H=0}$) car la dépendance avec l'indice d'auto-similarité fut reportée dans la convention adoptée en (II.113). On note $Y = \mathcal{L}_H{}^{-1}X$ pour la calcul suivant.

$$\begin{aligned}\Xi_X(\beta) &= \int_0^\infty c_X(k)k^{-i2\pi\beta-1}\mathrm{d}k \\ &= \int_0^\infty \gamma_Y(\ln k)k^{-i2\pi\beta-1}\mathrm{d}k \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_Y(\tau)e^{-i2\pi\beta\tau}\mathrm{d}\tau = \Gamma_Y(\beta).\end{aligned} \tag{II.119}$$

Le résultat important est que cette densité spectrale multiplicative est donnée par un transformée de Fourier normale portant sur la corrélation du générateur stationnaire, donc par des outils connus. On peut calculer inversement la fonction de corrélation à partir de la densité spectrale multiplicative $\Xi_X(\beta)$ par une transformation de Mellin inverse.

$$c_X(k) = \int_{\mathbb{R}} \Xi_X(\beta)k^{i2\pi\beta}\mathrm{d}\beta. \tag{II.120}$$

Corollaire II.1: *Il y a identité entre le spectre multiplicatif $\Xi_X(\nu)$ pour un processus $H$-ss $X$ et le spectre en Fourier habituel $\Gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(\nu)$ de son générateur stationnaire $Y = \mathcal{L}_H{}^{-1}X$.*

**Représentation harmonique.** Le générateur stationnaire qui est le transformé inverse par $\mathcal{L}_H{}^{-1}$ d'un processus auto-similaire admet une écriture sous forme harmonique (II.7) dont les incréments spectraux sont décorrélés, voir (II.17), [YK97].

$$Y(t) = \int e^{i2\pi\nu t}\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu) \qquad \left(= \int e^{i2\pi\nu t} f_{\tilde{Y}}(\nu)\mathrm{d}\nu\right). \tag{II.121}$$

La dernière forme (entre parenthèse) n'est pas proprement justifié car les incréments spectraux ne forment pas usuellement une mesure continue pour $\mathrm{d}\nu$. Appliquant $\mathcal{L}_H$ à la représentation, et comme $\mathcal{L}_H$ transforme la base de Fourier en base de Mellin, on obtient simplement :

$$X(t) = (\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H \int e^{i2\pi\nu \ln t} \mathrm{d}\tilde{Y}(\nu). \tag{II.122}$$

Définition II.17: *Un processus admet une représentation harmonique multiplicative s'il s'écrit comme la transformée de Mellin suivante :*

$$X(t) = \int_0^\infty t^{H+i2\pi\beta} \mathrm{d}\underline{X}(\beta) \qquad \left( = \int_0^\infty t^{H+i2\pi\beta} \underline{f}_X(\beta)\, \mathrm{d}\beta. \right) \tag{II.123}$$

Nous reportons à III.2.1 l'étude des conditions sous lesquelles cette écriture est possible quand le processus n'est pas strictement $H$-ss. Nous utiliserons assez souvent dans la suite le soulignement $\underline{\ \ldots\ }$ pour indiquer que l'on parle de propriétés multiplicatives (donc après utilisation de $\mathcal{L}_H$).

Les processus auto-similaires admettent une telle écriture avec des incréments décorrélés puisque l'on a identité entre les incréments spectraux de la représentation en Mellin de $X$ avec ceux de la représentation harmonique de $Y$. Nous avons ainsi une réponse au problème de décomposition « à la Cramér » des processus $H$-ss : elle existe sur la base de Mellin. La correspondance avec les incréments spectraux du générateur stationnaire est :

$$\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu) = \mathrm{d}\underline{X}(\nu) \qquad \left(\text{et} \quad f_{\tilde{Y}}(\nu) = \underline{f}_X(\nu)\right), \tag{II.124}$$

et ces incréments sont décorrélés. On peut donc écrire (selon la continuité de $\mathrm{d}\underline{X}(\nu)$) :

$$\mathbb{E}\left\{ \mathrm{d}\underline{X}(\beta_1)\overline{\mathrm{d}\underline{X}(\beta_2)} \right\} = \delta(\beta_1 - \beta_2)\, \mathrm{d}\underline{S}_X(\beta_1)\mathrm{d}\beta_2. \tag{II.125}$$

Le théorème de Wiener-Khintchine suffit ensuite pour montrer que la densité spectrale du processus est reliée à son écriture harmonique multiplicative par

$$\Xi_X(\beta)\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\underline{S}_X(\beta), \tag{II.126}$$

tandis qu'en fonction de la corrélation elle s'exprime avec

$$\Xi_X(\beta) = \int_0^\infty c_X(k) k^{-i2\pi\beta - 1} \mathrm{d}k. \tag{II.127}$$

Par des voies détournées utilisant le formalisme des opérateurs de la mécanique quantique pour le traitement du signal, L. Cohen a établi une généralisation du théorème de Wiener-Khintchine en [Coh98]. Notre résultat en est un cas particulier pour la représentation des processus auto-similaires.

**Énergie et puissance.** Les processus non stationnaires, comme le sont les processus auto-similaires, n'ont pas toujours une puissance moyenne finie. Il n'est qu'à prendre exemple du mouvement Brownien dont la variance est $\mathbb{E}|B(t)|^2 = \sigma^2 t$ et vérifie :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}|B(t)|^2 \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sigma^2 \frac{T^2}{2} = +\infty. \tag{II.128}$$

Nous pouvons à l'aide du générateur délampertisé d'un processus non stationnaire introduire une notion adaptée de puissance qui reste finie pour les processus auto-similaires.

Définition II.18: *On appelle puissance instantanée multiplicative d'indice $H$ d'un processus $\{X(t), t > 0\}$ la puissance de son image de Lamperti inverse $Y = \mathcal{L}_H{}^{-1}X$ prise en $\ln t$ :*

$$(\mathcal{P}_H X)(t) = \mathbb{E}\,|(\mathcal{L}_H{}^{-1}X)(\ln t)|^2 = t^{-2H}\mathbb{E}\,|X(t)|^2. \tag{II.129}$$

La notion est adaptée car elle s'affranchit de la croissance en $t^H$ de la fonction aléatoire que l'invariance d'échelle d'indice $H$ implique.

Proposition II.7: *La puissance instantanée multiplicative d'indice $H$ d'un processus $\{X(t), t > 0\}$ $H$-ss est finie et on a les relations suivantes à l'aide du générateur stationnaire $Y = \mathcal{L}_H{}^{-1}X$ :*

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_H X)(t) = \mathbb{E}\,|Y(\ln t)|^2 &= \int \Xi_X(\beta)\mathrm{d}\beta = c_X(1) &\text{(II.130)}\\ &= \int \Gamma_Y(\nu)\mathrm{d}\nu = \gamma_Y(0) &\text{(II.131)}\end{aligned}$$

L'énergie associée à cette puissance est simplement l'intégrale au cours du temps et quand elle reste finie elle s'écrit :

$$\mathcal{E}_H X = \int_0^\infty (\mathcal{P}_H X)(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^\infty \mathbb{E}\,|X(t)|^2 t^{-2H}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\,|(\mathcal{L}_H{}^{-1}X)(u)|^2\mathrm{d}u. \tag{II.132}$$

Il faut de suite faire la remarque que, lorsque le processus est auto-similaire, la puissance définie ici est constante et son intégrale est alors infinie. Nous ne regarderons que rarement alors les processus d'énergie finie pour privilégier la puissance.

**Estimateurs.** Toutefois, en poussant plus avant le lien intime entre le générateur stationnaire $Y = \mathcal{L}_H{}^{-1}X$ et le processus $H$-ss, le résultat d'ergodicité pour la mesure de la puissance stationnaire de $Y$ induit une manière comparable d'estimer la puissance d'un processus $H$-ss.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\ln T}\int_1^T |X(t)|^2 t^{-2H}\frac{\mathrm{d}t}{t} = t^{-2H}\mathbb{E}\,|X(t)|^2 = (\mathcal{P}_H X)(t). \tag{II.133}$$

La puissance est donc donnée par une intégrale d'énergie du processus auto-similaire. Ici nous avons choisi la forme entre un point fixe ($t = 1$) et un horizon $T$ que l'on prend de plus en plus éloigné. La forme où l'on observe $X$ entre $1/T$ et $T$ existe aussi.

La puissance se décompose grâce à (II.130) en des composantes spectrales (en Mellin) indépendantes. Ensuite la méthode du périodogramme passée par la transformation de Lamperti engendre une estimation consistante (et biaisée par convolution multiplicative) de ce spectre :

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\ln T}|\underline{X}_T(\beta)|^2 = \Xi_X(\beta),\\ &\text{où } \underline{X}_T(\beta) = \int_1^T X(s)s^{-H-i2\pi\beta}\frac{\mathrm{d}s}{s}\end{aligned} \tag{II.134}$$

Les mêmes arguments conduisent à proposer les deux estimateurs de la fonction de corrélation multiplicative génératrice d'un processus auto-similaire, directement transformés par

$\mathcal{L}_H$ des estimateurs usuels du cas stationnaire. Ces estimateurs généralisent ceux proposés dans [GZ88] qui se limitent au cas $H = 0$. Ils forment des corrélations de Mellin empiriques ; les deux sont consistants mais le premier est biaisé, tandis que le second ne l'est pas, au prix d'une variance accrue.

$$c_X^1(k) = \frac{1}{\ln T} \int_1^{\ln T/k} X(ks)X(s)s^{-2H} \frac{\mathrm{d}s}{s} \quad \text{(II.135)}$$

$$c_X^2(k) = \frac{1}{\ln T/k} \int_1^{\ln T/k} X(ks)X(s)s^{-2H} \frac{\mathrm{d}s}{s} \quad \text{(II.136)}$$

(II.137)

Cette approche doit subir deux critiques majeures qui limitent son utilité :
- tant que le paramètre d'auto-similarité $H$ n'est pas connu, les estimateurs sont sans intérêt. Dans de nombreux cas cependant c'est justement $H$ que l'on chercherait. Il faut réaliser que les théories que nous développons trouvent leur sens quand on cherche des comportements qui ne sont pas pilotés seulement par ce $H$ et que l'indice peut être obtenu par ailleurs (de la théorie, ou des outils à ondelettes) [AGF95, AFTV00] ;
- le problème de l'origine qu'impose l'analyse à l'aide de la représentation de Mellin est patent ici. Il faut la connaître avec précision pour utiliser tels quels les estimateurs que nous donnons.

Ces deux remarques conduiront à une ébauche pour tenter de circonscrire les limitations qu'elles décrivent, au paragraphe II.5.

### Longue mémoire.

Définition II.19: *Un processus stationnaire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est à **mémoire longue** (noté LRD*[9] *si sa fonction de corrélation normée $\tilde{\gamma_Y}(\tau) = \gamma_Y(\tau)/\gamma_Y(0)$ n'est pas absolument sommable :*

$$\int_0^\infty |\tilde{\gamma}_Y(\tau)|\mathrm{d}\tau = +\infty. \quad \text{(II.138)}$$

Nous suivrons [Nor99] pour en donner un équivalent pour les processus qui ne restent pas stationnaires.

Définition II.20: *Un processus $\{X(t), t > 0\}$ est à mémoire longue (ou LRD) si sa fonction de corrélation normée :*

$$\tilde{R}_X(t,s) = \frac{R_X(t,s)}{\sqrt{R_X(t,t)R_X(s,s)}} \quad \text{(II.139)}$$

*n'est pas sommable, ou autrement dit, telle que :*

$$(\forall t \in \mathbb{R}), \int_0^\infty |\tilde{R}_X(t, t+\tau)|\mathrm{d}\tau = +\infty. \quad \text{(II.140)}$$

[9] LRD est pour le terme anglais *Long Range Dependence.*

La corrélation normée d'un processus $H$-ss s'exprime à l'aide du générateur stationnaire. En effet on a

$$\tilde{R}_X(t,s) = \frac{(ts)^H c_X(t/s)}{\sqrt{t^{2H} c_X(1) s^{2H} c_X(1)}} = \frac{c_H(t/s)}{c_H(1)} = \tilde{\gamma}_Y\left(\ln\frac{t}{s}\right). \tag{II.141}$$

La fonction $\tilde{\gamma}_Y(\cdot)$ est symétrique hermitienne donc ce dernier terme est aussi $\overline{\tilde{\gamma}_Y}(\ln s/t)$.

Proposition II.8: *Un processus $\{X(t), t > 0\}$, auto-similaire d'indice $H$, est à mémoire longue (définition II.20) si son générateur stationnaire $Y = {\mathcal{L}_H}^{-1} X$ vérifie*

$$\frac{1}{t}\int_0^\infty |\tilde{R}_X(t, t+\tau)| \mathrm{d}\tau = \int_1^\infty |\tilde{\gamma}_Y(\ln u)| \mathrm{d}u = +\infty. \tag{II.142}$$

**Interprétation.** Le changement de variable passant de $\tau$ pour la caractérisation directe de longue mémoire à $\ln u$ pour la caractérisation de la même propriété à l'aide de la fonction de corrélation stationnaire de son générateur si il s'agit d'un processus auto-similaire, est essentiel. Étant donné que la mémoire longue est généralement obtenue par la décroissance en loi de puissance de la fonction de corrélation, au lieu des dépendances courtes qu'impliquent la décroissance exponentielle, il est possible qu'un processus $H$-ss soit à mémoire longue (ainsi que ses accroissements) alors que son générateur stationnaire est à courte dépendance temporelle. Par exemple on peut avoir

$$\tilde{\gamma}_Y(\ln u) \sim u^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln u} \implies \tilde{\gamma}_Y(u) \sim e^{-\alpha u}. \tag{II.143}$$

Inversement un processus stationnaire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est à LRD (définition II.19) si et seulement si sa tranformée de Lamperti $X = \mathcal{L}_H Y$ vérifie

$$\int_0^\infty |\tilde{c}_X(e^\tau)| \mathrm{d}\tau = \int_1^\infty |\tilde{R}_X(1,\lambda)| \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = +\infty. \tag{II.144}$$

De manière équivalent, la symétrie $\tilde{R}_X(1,\lambda) = \overline{\tilde{R}}_X(1/\lambda, 1)$ pour tout $\lambda$ implique que $Y$ est à LRD si

$$\int_0^1 |\tilde{R}_X(\lambda, 1)| \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = +\infty. \tag{II.145}$$

## 4.2 Filtres covariants en échelle

**Caractérisation.** La question des systèmes linéaires covariants en échelle a été avancée de différentes manières. On trouve dans Braccini et coll. [BG86] des travaux en ce sens. Gray et Zhang [GZ88], Wornell [Wor96], Yazici et Kashyap [YK97] (la liste ne se veut pas exhaustive) ont aussi avancé des définitions de systèmes linéaires covariants en échelle. Nous proposons ici une lecture complète de ce sujet en montrant que les propriétés de ces systèmes découlent de l'analyse par la transformation de Lamperti.

La théorie classique des filtres linéaires suppose qu'ils sont covariants avec les translations temporelles, c'est-à-dire que décaler l'entrée induit le même décalage sur la sortie. On note $\mathcal{H}$ un tel opérateur linéaire.

$$(\forall \tau \in \mathbb{R}),\ \mathcal{H}\mathcal{S}_\tau = \mathcal{S}_\tau \mathcal{H}. \tag{II.146}$$

L'analogie consiste à remplacer la translation temporelle par l'opérateur de dilatation afin de définir les filtres[10] covariants en échelle.

Définition II.21: *Un opérateur linéaire $\mathcal{G}$ qui agit sur les processus $\{X(t), t > 0\}$ est dit* ***covariant en échelle*** *si il commute avec les opérateurs de dilatation $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ :*

$$(\forall H > 0)\ (\forall \lambda > 0), \quad \mathcal{G}\mathcal{D}_{H,\lambda} = \mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G}. \tag{II.147}$$

Proposition II.9: *Tout opérateur $\mathcal{G}$ covariant en échelle est caractérisé par une fonction $g(\cdot)$ et agit sur les processus $\{X(t), t > 0\}$ comme une convolution multiplicative :*

$$(\mathcal{G}X)(t) = \int_0^\infty g(t/s)X(s)\frac{\mathrm{d}s}{s} = \int_0^\infty g(s)X(t/s)\frac{\mathrm{d}s}{s}. \tag{II.148}$$

*Démonstration* — L'opérateur $\mathcal{G}$ étant linéaire il agit par l'intermédiaire d'un noyau d'intégration $k(t,s)$. Pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G}X)(t) &= \mathcal{D}_{H,\lambda}\int_0^\infty k(t,s)X(s)\mathrm{d}s \\ &= \lambda^{-H}\int_0^\infty k(\lambda t,s)X(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{II.149}$$

De même, l'utilisation des opérateurs dans l'ordre inverse donne :

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) &= \int_0^\infty k(t,s)\lambda^{-H}X(\lambda s)\mathrm{d}s \\ &= \lambda^{-H-1}\int_0^\infty k(t,u/\lambda)X(u)\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{II.150}$$

L'égalité des deux écritures impose donc

$$(\forall t > 0)\ (\forall u > 0)\ (\forall \lambda > 0), \quad k(\lambda t, \lambda s) = k(t,s)/\lambda. \tag{II.151}$$

En choisissant la dilatation particulière $\lambda = 1/s$, on impose comme forme à $k$ la suivante :

$$k(t,s) = \lambda k(\lambda t, 1)|_{\lambda=1/s} = \frac{1}{s}\, g\left(\frac{t}{s}\right). \tag{II.152}$$

Par conséquent $\mathcal{G}$ agit bien par la convolution multiplicative (II.148) qui à l'évidence satisfait à la propriété de covariance voulue. Les propriétés génériques de la convolution multiplicative expliquent les deux formes possibles de celle-ci dans (II.148).

□

Proposition II.10: *La transformation de Lamperti transforme les filtres linéaires (stationnaires) en des opérateurs linéaires covariants en échelle.*

[10] Nous utiliserons improprement le terme de filtre en place du terme système ici puisque filtre est d'usage consacré aux systèmes linéaires covariants en temps.

*Démonstration* — Un filtre linéaire $\mathcal{H}$ est caractérisé par sa réponse à une impulsion $h(t)$ qui opère par une convolution sur l'entrée $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$.

$$Z(t) = (\mathcal{H}Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)Y(s)\mathrm{d}s. \tag{II.153}$$

L'application de la transformation de Lamperti d'indice $H$ conduit à

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_H Z)(t) &= t^H \int_{-\infty}^{+\infty} h(\ln t - s)Y(s)\mathrm{d}s \\
&= t^H \int_0^{+\infty} h\left(\ln \frac{t}{u}\right) Y(\ln u)\frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{u}\right)^H h\left(\ln \frac{t}{u}\right) (\mathcal{L}_H Y)(u)\frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \int_0^{+\infty} (\mathcal{L}_H h)(t/u)\, (\mathcal{L}_H Y)(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}.
\end{aligned} \tag{II.154}$$

Nous avons refait le calcul explicitement ici. Cette relation entrée-sortie du système lampertisé est directement une convolution multiplicative comme dans (II.148), et par conséquent est celle d'un système linéaire covariant en échelle.

$$(\mathcal{L}_H Z)(t) = \int_0^{+\infty} (\mathcal{L}_H h)(t/s)\, (\mathcal{L}_H Y)(s)\frac{\mathrm{d}s}{s} \tag{II.155}$$

□

Par analogie avec les filtres stationnaires, on appelle $g(t)$ la fonction de réponse impulsionelle de $\mathcal{G}$. Elle est en fait la réponse du système quand $X(t) = \delta(\ln t) = \delta(t-1)$ est mis en entrée.

### Propriétés des filtres pour les processus $H$-ss.

Corollaire II.2: *Les opérateurs linéaires covariants en échelle préservent l'auto-similarité.*

*Démonstration* — Soit $\{X(t), t > 0\}$ un processus $H$-ss et $\mathcal{G}$ un système linéaire covariant en échelle. Nous avons à l'aide des équations de définition (II.31) et (II.147) :

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G}X)(t) = (\mathcal{G}\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) \stackrel{d}{=} (\mathcal{G}X)(t), \tag{II.156}$$

pour tout $t > 0$ ce qui prouve que $\{(\mathcal{G}X)(t), t > 0\}$ est $H$-ss.

□

On peut déduire de ceci beaucoup de propriétés des filtres covariants en échelle qui sont les correspondants des propriétés des filtres stationnaires. La correspondance se fait, comme expliqué au 3.3.1, en remplaçant les transformations de Fourier en celles de Mellin et les convolutions en convolutions multiplicatives. On retiendra par exemple les propriétés importantes suivantes.

Corollaire II.3: *(Formule des interférences généralisées). Les fonctions de corrélation multiplicatives d'un processus $H$-ss $X(t)$ et de son image $A(t)$ par un filtre covariant en échelle $\mathcal{G}$ (de noyau $g(\cdot)$) vérifient :*

$$c_A(k) = \int_0^\infty c_X(u)\underline{\rho_g}(k/u)\frac{\mathrm{d}u}{u}, \tag{II.157}$$

*où on utilise la corrélation de Mellin pour $g$ :*

$$\underline{\rho_g}(\lambda) = \int_0^\infty g(\lambda s)\overline{g(s)}s^{-2H}\frac{\mathrm{d}s}{s}. \tag{II.158}$$

*Démonstration* — Ce résultat est directement transformé de la propriété classique indiquant comment la corrélation évolue par filtrage stationnaire. On rappelle donc que si $Z(t)$ est l'image du processus stationnaire $Y(t)$ par le filtre stationnaire aussi $\mathcal{H}$ (de fonction de réponse $h(t)$), on a :

$$\gamma_Z(\tau) = \int \gamma_Y(\tau - t)\rho_h(t)\mathrm{d}t, \tag{II.159}$$

où la fonction de corrélation $\rho_h$ du filtre est donnée par la convolution de $h(t)$ par $\overline{h(-t)}$ :

$$\rho_h(t) = \int h(t+s)\overline{h(s)}\mathrm{d}s. \tag{II.160}$$

Passant ceci par la transformée de Lamperti, on est amené à remplacer les convolutions par des convolutions multiplicatives, $h$ par $g(t) = (\mathcal{L}_H h)(t)$ et les processus stationnaires par leurs transformées de Lamperti, auto-similaires : $X(t) = (\mathcal{L}_H Y)(t)$ et $A(t) = (\mathcal{L}_H Z)(t)$. On arrive alors à (II.157) où il faut que :

$$\begin{aligned} \underline{\rho_g}(k) &= (\mathcal{L}_H \rho_h)(k) = k^H \int h(t + \ln k)\overline{h(t)}\mathrm{d}t && \text{(II.161)} \\ &= \int (sk)^H h(\ln sk) s^H \overline{h(\ln s)} s^{-2H}\frac{\mathrm{d}s}{s}, && \text{(II.162)} \end{aligned}$$

et donc l'identification $g(t) = t^H h(\ln t)$ achève de démontrer (II.158).

□

Corollaire II.4: *Un filtre linéaire covariant en échelle défini par le noyau $g(\cdot)$ est causal si :*

$$(\forall u < 1) \quad g(u) = 0. \tag{II.163}$$

La causalité est vérifiée si la sortie du filtre $(\mathcal{G}X)(t)$ ne dépend que des valeurs de $X(s)$ pour $t \leq s$. L'écriture en convolution multiplicative (II.148) s'écrit alors dans ce cas :

$$(\mathcal{G}X)(t) = \int_0^t g(t/s)X(s)\frac{\mathrm{d}s}{s} = \int_1^\infty g(s)X(t/s)\frac{\mathrm{d}s}{s}. \tag{II.164}$$

Notons que si $g(t)$ est causale au sens donné ici, $({\mathcal{L}_H}^{-1} g)(t)$ définit un filtre stationnaire causal au sens usuel.

**Filtres, fonctions de transfert et représentation harmonique.** Les filtres covariants en échelle agissent en réalité sur les composantes harmoniques en transformée de Mellin du signal d'entrée. On peut en effet appliquer cette transformée à l'équation (II.148) et donner la relation de filtrage dans le domaine de Mellin pour tout $s \in \mathbb{C}$ dans le domaine de convergence des transformées. Dans cette section les processus et les filtres sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$(\mathbf{M}\mathcal{G}X)(s) = (\mathbf{M}g)(s)(\mathbf{M}X)(s). \tag{II.165}$$

Cette équation définit en fait une fonction de transfert pour le filtre covariant à l'aide de la représentation de Mellin. Elle joue le rôle exactement analogue à la fonction de transfert, exprimée comme transformée de Fourier d'un filtre stationnaire, mais ici pour un filtre covariant en échelle. On la notera :

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{M}g)(s) = \int_0^\infty g(t)t^{-s-1}\mathrm{d}t. \tag{II.166}$$

Plongeant la représentation harmonique (II.123) dans la relation de filtrage, il nous faut spécifier la partie réelle de la variable de Mellin comme étant $H$ pour rester cohérent. Nous noterons le processus filtré $A(t) = \mathcal{G}X(t)$ qui admet donc $Z(t) = (\mathcal{L}_H{}^{-1}A)(t)$ comme correspondant dans le monde de la stationnarité. $g$ continue à désigner le noyau intégral de $\mathcal{G}$, donc $g(\cdot) = (\mathcal{L}_H h)(\cdot)$. On obtient l'égalité suivante pour les représentations harmoniques des processus et des filtres :

$$\underline{f}_A(\beta) = \underline{f_g}(\beta)\underline{f}_X(\beta) \tag{II.167}$$

$$\text{avec} \quad \underline{f_g}(\beta) = \int_0^\infty t^{-H-i2\pi\beta}g(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathbf{G}(H+i2\pi\beta). \tag{II.168}$$

En se penchant maintenant sur le cas seul des processus $H$-ss, on en déduit la relation de filtrage pour les densité spectrales :

$$\Xi_A(\beta) = |\underline{f_g}(\beta)|^2\, \Xi_X(\beta) = |\mathbf{G}(H+i2\pi\beta)|^2\, \Xi_X(\beta). \tag{II.169}$$

**Représentation en sortie de filtre.** Une conséquence forte du théorème de Bochner pour les processus stationnaires est qu'ils admettent généralement[11] une représentation intégrale comme sortie d'un filtre attaqué par un bruit blanc de Wiener $W(t)$. À nouveau la transformation de Lamperti construit un équivalent de cette propriété.

Il faut avant cela caractériser la transformée de Lamperti du bruit de Wiener par sa corrélation.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{(\mathcal{L}_H W)(t)(\mathcal{L}_H W)(s)\} &= \mathbb{E}t^H W(\ln t)s^H W(\ln s) && \text{(II.170)}\\
&= (ts)^H\sigma^2\delta(\ln t - \ln s) && \text{(II.171)}\\
&= \sigma^2 t^{2H+1}\delta(t-s). && \text{(II.172)}
\end{aligned}$$

[11] Il faut ajouter dans certains cas une partie déterministe au processus linéaire général que nous utilisons. C'est l'équivalent du résultat de Wold pour les processus à temps continus [Pri81].

Proposition II.11: *Tout processus $H$-ss $\{X(t), t > 0\}$ au second ordre peut être représenté comme la sortie d'un filtre covariant en échelle de fonction de réponse $g$ attaqué par le bruit de Wiener multiplicatif $V(t)$ tel que :*

$$X(t) = \int_0^{+\infty} g(t/s) V(s) \frac{\mathrm{d}s}{s}, \tag{II.173}$$

*avec*

$$\mathbb{E}\left\{V(t)\overline{V(s)}\right\} = \sigma^2 t^{2H+1} \delta(t-s). \tag{II.174}$$

En fait le processus multiplicatif de Wiener est un bruit Gaussien, Markovien et non stationnaire. On peut considérer qu'il découle directement du bruit blanc stationnaire par : $V(t) \overset{d}{=} t^{H+1/2} W(t)$. Son spectre de Mellin étant identique au spectre de Fourier de $W(t)$, il est blanc (constant et égal à $\sigma^2$) comme on s'y attend.

*Démonstration* — $V(t)$ est initialement introduit comme $V(t) = (\mathcal{L}_H W)(t)$ et nous avons montré que sa corrélation est alors $R_V(t,s) = \sigma^2 t^{2H+1} \delta(t-s)$.

Le processus $t^{H+1/2} W(t)$ est quant à lui Gaussien et sa corrélation s'obtient par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{t^{H+1/2} W(t) s^{H+1/2} W(s)\} &= (ts)^{H+1/2} \sigma^2 \delta(t-s) & \text{(II.175)} \\ &= \sigma^2 t^{2H+1} \delta(t-s). & \text{(II.176)} \end{aligned}$$

Puisque $V(t)$ est lui aussi un processus Gaussien, de même fonction de corrélation donc que $t^{H+1/2} W(t)$, ils sont égaux en loi. Ensuite, partant de $V(t) = (\mathcal{L}_H W)(t)$, la relation (II.119) dit que $\Xi_V(\beta) = \Gamma_W(\beta) = \sigma^2$ pour le bruit blanc de Wiener $W(t)$.

□

La fonction de réponse de cette représentation n'est pas quelconque. Les quelques corollaires suivants s'attachent à tisser les liens entre $g$ et les attributs des représentations harmoniques des processus $H$-ss : spectre et corrélation multiplicative.

Corollaire II.5: *La fonction de corrélation d'un processus $H$-ss $\{X(t), t > 0\}$ représenté sous la forme (II.173) s'exprime comme la corrélation de Mellin avec l'indice $H$ de $g$ :*

$$c_X(k) = \sigma^2 k^{-H} \int g(k\theta) \overline{g(\theta)} \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{2H+1}}. \tag{II.177}$$

Corollaire II.6: *La densité spectrale multiplicative d'un processus $H$-ss $\{X(t), t > 0\}$ représenté sous la forme (II.173) s'exprime comme :*

$$\Xi_X(\beta) = \sigma^2 |\underline{f_g}(\beta)|^2 = \sigma^2 \left| \int_0^\infty t^{-H-i2\pi\beta} g(t) \frac{\mathrm{d}t}{t} \right|^2. \tag{II.178}$$

Corollaire II.7: *Le puissance multiplicative $\mathcal{P}_H X$ d'un processus $H$-ss $\{X(t), t > 0\}$ représenté sous la forme (II.173) reste finie si :*

$$c_X(1) = \sigma^2 \int |g(\theta)|^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{2H+1}} < +\infty. \tag{II.179}$$

### Stabilité.

Définition II.22: *Un système linéaire covariant en échelle est* ***stable en énergie*** *si à tout signal d'entrée d'énergie multiplicative finie il associe une sortie d'énergie identiquement finie.*

Proposition II.12: *Un système linéaire covariant en échelle est stable en énergie si*

$$\int_0^\infty |g(\theta)|\theta^{-H-1}\mathrm{d}\theta < +\infty. \tag{II.180}$$

*Démonstration* — Soit $\{X(t), t > 0)$ et $W(t) = (\mathcal{G}X)(t)$ son image par le filtre covariant en échelle $\mathcal{G}$ caractérisé par son noyau $g(\cdot)$. Supposons que la relation (II.180) tienne et que $X$ est d'énergie finie donc que :

$$\int_0^\infty \mathbb{E}|X(t)|^2 t^{-2H-1}\mathrm{d}t < +\infty. \tag{II.181}$$

Le calcul direct de l'énergie de $W$ est le suivant (en utilisant la définition de l'énergie (II.132) et l'équation (II.173)).

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_H W &= \int_0^\infty \mathbb{E}|W(t)|^2 t^{-2H-1}\mathrm{d}t & \text{(II.182)}\\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left\{\left(\int_0^\infty g(u)X(t/u)\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)\left(\int_0^\infty \overline{g}(v)\overline{X}(t/v)\frac{\mathrm{d}v}{v}\right)\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2H+1}} & \text{(II.183)}\\
&= \iint u^{-H}g(u)v^{-H}\overline{g}(v)\left(\int_0^\infty \mathbb{E}\left\{u^H X(\frac{t}{u})v^H\overline{X}(\frac{t}{v})\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2H+1}}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\frac{\mathrm{d}v}{v}. & \text{(II.184)}
\end{aligned}$$

La dernière égalité découle du théorème de Fubini. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\left\{(t/u)^{-H}X(t/u)(t/v)^{-H}\overline{X}(t/v)\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_0^\infty \mathbb{E}|X(t)|^2 t^{-2H-1}\mathrm{d}t < +\infty, \tag{II.185}$$

puisque le processus d'entrée est supposé d'énergie multiplicative finie.

L'égalité suivante :

$$\iint u^{-H}g(u)v^{-H}\overline{g}(v)\mathrm{d}u/u\mathrm{d}v/v \leq \left(\int u^{-H}|g(u)|\mathrm{d}u/u\right)^2 < +\infty, \tag{II.186}$$

vient de ce que le filtre est de réponse finie et alors l'inégalité qui prouve que la sortie est d'énergie finie tient :

$$\int_0^\infty \mathbb{E}|W(t)|^2 t^{-2H-1}\mathrm{d}t < +\infty. \tag{II.187}$$

□

Remarquons que cette propriété est une caractérisation sur la fonction de réponse de $\mathcal{G}$ qui doit rester finie. C'est l'équivalent exact de la propriété de stabilité en énergie pour les filtres linéaires stationnaires puisque (II.180) s'écrit pour la fonction de réponse $h(t) = (\mathcal{L}_H{}^{-1}g)(t)$ du filtre stationnaire délampertisé :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|\mathrm{d}u < +\infty. \tag{II.188}$$

Définition II.23: *Un système linéaire est **stable** si à tout signal d'entrée de puissance finie il associe une sortie de puissance finie.*

L'étude de cette stabilité se conduit plutôt, d'après ce que l'on sait des filtres linéaires usuels, à l'aide des pôles de l'équation différentielle associée au filtre et non avec la fonction de réponse. Nous en redirons deux mots au 4.5.

**Autres filtres invariants en forme.** Les résultats que nous avons établis sont une généralisation de ceux de [GZ88] qui n'envisage que $H = 0$. Dans [YK97] il est proposé de choisir une notion modifiée de covariance en échelle attachée à un $H$ précis :

$$(\forall \lambda > 0),\ \mathcal{G}\mathcal{D}_{0,\lambda} = \mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G} \tag{II.189}$$

Leur théorie se déduit directement de notre approche qui n'impose pas $H$. En effet, on peut écrire sur un tel système $\mathcal{G}$, à l'aide du lemme sur l'opérateur de Lamperti (II.65) :

$$\begin{aligned}(\forall \lambda > 0),\ \mathcal{G}\mathcal{L}_0\mathcal{S}_{\ln\lambda}\mathcal{L}_0{}^{-1} &= \mathcal{L}_H\mathcal{S}_{\ln\lambda}\mathcal{L}_H{}^{-1}\mathcal{G} \\ (\forall \lambda > 0),\ (\mathcal{L}_H{}^{-1}\mathcal{G}\mathcal{L}_0)\mathcal{S}_{\ln\lambda} &= \mathcal{S}_{\ln\lambda}(\mathcal{L}_H{}^{-1}\mathcal{G}\mathcal{L}_0),\end{aligned} \tag{II.190}$$

donc $(\mathcal{L}_H{}^{-1}\mathcal{G}\mathcal{L}_0)$ est un filtre stationnaire $\mathcal{H}$ qui agit par une convolution normale de noyau $h(t)$. Par conséquent, les systèmes décrits dans [YK97] s'écrivent :

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}X)(t) = (\mathcal{L}_H\mathcal{H}\mathcal{L}_0{}^{-1}X)(t) &= \mathcal{L}_H\int_{\infty}^{+\infty} h(t-s)X(e^s)\mathrm{d}s \\ &= t^H\int_{\infty}^{+\infty} h(\ln t - s)X(e^s)\mathrm{d}s \\ &= t^H\int_{0}^{+\infty} h(\ln t/u)X(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}.\end{aligned} \tag{II.191}$$

Cette forme n'est rien d'autre qu'un système covariant en échelle (II.148) multiplié en sortie de filtre par $t^H$. Ainsi que nous le remarquions en (II.104), cette multiplication transforme un processus $H'$-ss en un processus $(H+H')$-ss. Les résultats de [YK97], en particulier ceux sur les systèmes linéaires, se retrouvent alors.

Dans un contexte d'analyse d'images [BG86], une forme plus large de covariance des filtres avec les dilatations est proposée. Un système linéaire $\mathcal{G}$ obéit à leur invariance de forme si il vérifie qu'il existe des fonctions $\alpha(a)$ et $\beta(a)$ telles que pour tout $a > 0$ :

$$\alpha(\mathcal{G}X)(\beta t) = (\mathcal{G}\mathcal{D}_{0,a}X)(t). \tag{II.192}$$

Le terme de gauche est *a priori* une forme plus générale de dilatation. Cependant sous hypothèse de continuité du noyau linéaire qui caractérise $\mathcal{G}$, on établit les formes nécessaires de $\alpha$ et $\beta$ :

$$\beta(a) = a^{\sigma} \qquad \text{et} \qquad \alpha(a) = a^{\delta\sigma-1} = (a^{\sigma})^{\delta-1/\sigma}. \tag{II.193}$$

L'opération s'écrit alors exactement comme une dilatation

$$\alpha(a)Z(\beta(a)t) = (a^{\sigma})^{\delta-1/\sigma}Z(a^{\sigma}t) = (\mathcal{D}_{-\delta+1/\sigma,a^{\sigma}}Z)(t). \tag{II.194}$$

Les systèmes invariants de forme unidimensionnels de [BG86] se ramènent à obéir au principe de covariance :

$$\mathcal{G}\mathcal{D}_{0,a} = \mathcal{D}_{-\delta+1/\sigma,a^{\sigma}}\mathcal{G} \tag{II.195}$$

très proche de (II.189). Leur forme est identique aux systèmes linéaires invariants en échelle que nous avons étudiés avant, quand $\sigma = 1$ (cas principalement regardé dans [BG86]). Quand $\sigma \neq 1$ il faut rajouter un changement de variable dans le noyau pour passer de $g(t/s)$ à $g(t/s^{\sigma})$ :

$$(\mathcal{G}X)(t) = \int_0^{\infty} g\left(\frac{t}{s^{\sigma}}\right) X(s)\frac{\mathrm{d}s}{s} = \int_0^{\infty} \sigma g\left(\frac{t}{v}\right) X(v^{1/\sigma})\frac{\mathrm{d}v}{v}. \tag{II.196}$$

Comme la transformation de Mellin a un comportement simple par le changement de variable qui à $f(t)$ associe $f(t^{1/\sigma})$, les propriétés de ces systèmes invariants de forme se déduisent sans peine de ce que nous avons établi. Il suffit d'accepter de mélanger des fonctions de transfert pour des variables différentes.

**Les résultats de Nuzman et Poor : prédiction, blanchiment, interpolation.** La représentation en sortie de filtre covariant en échelle des processus $H$-ss a été proposée par Nuzman et Poor comme outil général d'étude des propriétés linéaires de telles fonctions aléatoires. On se reportera à une série d'articles [NP99, NP00a, NP00c, NP00b] qui exposent les résultats généraux en ce sens et leur application au mouvement Brownien fractionnaire.

Le principe fondateur est que le spectre multiplicatif, noté jusqu'ici $\Xi_X(\beta)$, étant identique au spectre usuel du processus générateur stationnaire, les solutions aux problèmes de prédiction et d'interpolation qui font appel à ce spectre stationnaire admettent un équivalent pour $X$. En premier c'est la prédiction optimale au sens de Wiener qui se réexprime ainsi ; puis la prédiction causale donne des formules de prédiction sur un intervalle fini d'un processus $H$-ss. Il faut qu'il vérifie la condition de Paley-Wiener [Pri88] :

$$\int \frac{|\ln \Xi_{Xp}(\beta)|}{1+\beta^2}\mathrm{d}\beta < +\infty, \tag{II.197}$$

où $\Xi_{Xp}(\beta)$ est le spectre multiplicatif du processus $X(s)$ sur le passé $s \in ]0\ t[$. On peut alors factoriser la densité spectrale en une partie causale $\Xi_{X+}$ et une partie non causale $\Xi_{X-}$ telles que :

$$\Xi_{Xp}(\beta) = \Xi_{X+}(\beta)\Xi_{X-}(\beta) \qquad \text{et} \qquad \Xi_{Xp}(\beta) = |\Xi_{X+}(\beta)|^2. \tag{II.198}$$

La prédiction causale devient ainsi une prédiction sur un intervalle fini qui doit contenir l'origine. Il est en effet équivalent de connaître un processus $H$-ss sur une demi-droite infinie ou sur un voisinage de zéro.

Si la factorisation est possible, le filtre adapté de fonction de réponse $1/\Xi_{X+}(\beta)(1/2+i2\pi\beta)$ est ensuite un filtre causal qui blanchit le processus auto-similaire. On peut en déduire à nouveau une représentation en sortie de filtre analogue à la Proposition II.11 des processus $H$-ss, explicitement causale cette fois.

L'étape suivante, de laquelle nous ne dirons rien, est de trouver la structure de l'espace de Hilbert à noyau reproduisant associé à un processus $H$-ss. Elle se déduit par la transformation de Lamperti de celle du générateur stationnaire ; différents problèmes ont alors été reformulés dans ce langage [NP00c, NP00b].

## 4.3 Exemple 1 : processus d'Ornstein-Uhlenbeck

### 4.3.1 Processus Gaussiens

Nous avons défini le processus d'Ornstein-Uhlenbek $\{U_a(t), t \in \mathbb{R}\}$, définition II.15, comme la solution de l'équation de Langevin linéaire d'ordre un, dont l'entrée est un bruit blanc Gaussien :

$$\mathrm{d}U_a(t) + aU_a(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}B(t). \tag{II.199}$$

Passant cette équation par la transformation de Lamperti d'ordre $H$, on peut en utilisant les règles de dérivation établies dans [NP00a] obtenir :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_H \mathrm{d}U_a)(t) &= t^H \mathrm{d}U_a(\ln t) && \text{(II.200)}\\
&= t^{H+1}\mathrm{d}(U_a(\ln t)) && \text{(II.201)}\\
&= t^{H+1}\mathrm{d}(t^{-H}X(t)) && \text{(II.202)}\\
&= t^{H+1}(t^{-H}\mathrm{d}X(t) - Ht^{-H-1}X(t)\mathrm{d}t) && \text{(II.203)}\\
&= t\,\mathrm{d}X(t) - HX(t)\mathrm{d}t, && \text{(II.204)}
\end{aligned}$$

où $X(t) = (\mathcal{L}_H U_a)(t)$. Le processus $\{X(t), t > 0\}$ est alors solution d'une équation stochastique. On rappelle que le bruit blanc multiplicatif $\{V(t), t > 0\}$, tranformé de Lamperti du bruit de Wiener, est Gaussien et de corrélation $\mathbb{E}V(t)V(s) = \sigma^2 t^{2H+1}\delta(t-s)$, donc s'écrit aussi à $V(t) \overset{d}{=} t^{H+1/2}W(t)$. L'équation stochastique pour $X(t)$ est :

$$t\mathrm{d}X(t) + (a-H)X(t)\mathrm{d}t = V(t)\mathrm{d}t. \tag{II.205}$$

Pour un $a$ donné on notera $\{X_{H,a}(t), t > 0\}$ la solution de cette équation. De même que le processus OU admet une représentation intégrale (II.99), $X_{H,a}$ s'écrit en appliquant simplement la transformée de Lamperti à cette représentation :

$$\begin{aligned}
X_{H,a}(t) = (\mathcal{L}_H U_a)(t) &= t^{H-a}\int_0^t s^a \mathrm{d}B(\ln s) && \text{(II.206)}\\
&= t^{H-a}\int_0^t s^{a-1/2}\mathrm{d}B(s) && \text{(II.207)}\\
&= t^{H-a}\int_0^t s^{a-H}V(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}. && \text{(II.208)}\\
& && \text{(II.209)}
\end{aligned}$$

Les deux dernières égalités sont conséquences de ce que $\mathrm{d}B(\ln s)$, $s^{-1/2}\mathrm{d}B(s)$ et $s^{-H-1}V(s)\mathrm{d}s$ ont tous trois la même structure de covariance et que les processus étudiés sont Gaussiens ; ils sont donc égaux.

On retrouve la représentation en sortie de filtre covariant en échelle attaqué par un bruit blanc multiplicatif pour $X_{H,a}$ :

$$X_{H,a}(t) = \int_0^\infty [(t/s)^{H-a}\mathbb{H}(t/s-1)]V(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}. \tag{II.210}$$

On a noté $\mathbb{H}$ pour la fonction de Heaviside. Le noyau de la représentation intégrale est $g(\theta) = \theta^{H-a}\mathbb{H}(\theta-1)$. Ce filtre est causal et stable en énergie si $a > 0$ ; il engendre ainsi un processus auto-similaire de paramètre $H$.

On reconnaît dans cette forme le modèle auto-similaire proposé et étudié par Noret [Nor99]. On y trouvera aussi la représentation sur un intervalle borné de ce processus et l'étude des propriétés d'invariance d'échelle, de corrélation, de mémoire longue, etc, du processus. Nous utiliserons ses travaux pour le problème de discrétisation du modèle au 5.3.2. Donnons certains résultats qui découlent de notre formalisme général.

**Propriétés du modèle de Noret $X_{H,a}$.** La fonction de corrélation du processus OU est donnée selon la Définition II.15 par :

$$R_{U_a}(t,s) = \sigma^2 \exp(-a|t-s|). \tag{II.211}$$

Sa transformée de Lamperti a donc pour fonction de corrélation :

$$\begin{aligned} R_{X_{H,a}}(t,s) &= \sigma^2(ts)^H e^{-a|\ln(t/s)|} && \text{(II.212)}\\ &= \sigma^2(\min(t,s))^{H+a}(\max(t,s))^{H-a}. && \text{(II.213)} \end{aligned}$$

Il est plus explicite de dire que, si $s = \lambda t$ avec $\lambda > 1$, cette corrélation se scinde en deux parties : $R_{X_{a,H}}(t,s) = \sigma^2(st)^H\lambda^{-a}$ ; la croissance générale en $(st)^H$ de la corrélation multipliée une décroissance algébrique particulière au modèle de celle-ci quand on regarde des temps séparés. Ainsi $H$ contrôle l'auto-similarité du processus tandis que $a$ est le paramètre qui pilote la mémoire, longue ou courte du processus. Selon (II.142), le procesus $X_{H,a}$ est à mémoire longue au sens de la définition II.20 quand $a < 1$.

La généralisation $\mathcal{L}_{H,a}$ de Burnecki et coll. [BMW97] conduit d'une manière un peu différente au même modèle. Si on applique en effet cette transformation de Lamperti à axe des temps modifié au processus OU de paramètre $\lambda = 1$, on a les égalités qui suivent.

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{L}_{H,a}U_1}(t,s) &= \mathbb{E}\left\{t^H U_1(a\ln t)s^H\overline{U}_1(a\ln s)\right\} && \text{(II.214)}\\ &= (ts)^H e^{-|a\ln t - a\ln s|} && \text{(II.215)}\\ &= (ts)^H e^{-a|\ln t/s|} && \text{(II.216)}\\ &= (ts)^H\left(\frac{s}{t}\right)^{-a} \qquad \text{si} \qquad s > t. && \text{(II.217)} \end{aligned}$$

Comme les fonctions aléatoires $(\mathcal{L}_{H,a}U_1)(t)$ et $X_{a,H}(t)$ sont Gaussiennes et que, ainsi que nous venons de le prouver, leurs fonctions de corrélations sont identiques, nous avons égalité en loi : $X_{a,H}(t) \stackrel{d}{=} (\mathcal{L}_{H,a}U_1)(t)$.

**Solution sur un intervalle fini.** Ayant pour objectif au 5.3.2 de discrétiser entre deux instants le système de Noret, on intègre l'équation différentielle entre deux temps. Pour cela on peut introduire un propagateur (ou fonction de Green) $G(t,u)$ de l'équation différentielle, tel que pour $u$ fixé :

$$t\mathrm{d}G(t,u) + (a-H)G(t,u)\mathrm{d}t = \delta(t-u)\mathrm{d}t, \tag{II.218}$$

avec la condition initiale $G(u,u) = 1$. Le propagateur est immédiatement obtenu comme $G(t,u) = (t/u)^{H-a}$, et la solution entre deux instants $t_0$ et $t_1$ de l'équation stochastique (II.205) sera :

$$X(t_1) = G(t_1,t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} G(t_1,u)V(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}. \tag{II.219}$$

E. Noret use de cette représentation de la solution de l'équation stochastique du modèle pour mener une étude complète de celui-ci [Nor99]. Ensuite il discrétise en temps le modèle en partant de ce même point. Nous utiliserons cette méthode dans la partie III.5 comme une approche possible pour générer des séquences aléatoires à invariance d'échelle discrète.

### 4.3.2 Cas $\alpha$-stable

**Définition de l'$\alpha$-stabilité.** Pour s'aventurer une fois dans une situation où les signaux étudiés ne restent pas Gaussiens, l'exemple du processus d'OU $\alpha$-stable est intéressant. Une loi $\alpha$-stable est fixée par sa fonction caractéristique. Étant donnés $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et $\mu$ un réel, la fonction caractéristique de $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ $\alpha$-stable est :

$$M_X^\alpha(\theta/2\pi) = \exp\left(-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha\left(1 - i\beta\mathrm{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu\theta\right). \tag{II.220}$$

$\sigma$ est un paramètre d'échelle qui fixe l'amplitude typique des variations. $\beta$ contrôle la dissymétrie de la variable aléatoire. Quand $\beta = 0$, elle est symétrique ; si $\beta$ est positif, la distribution est plutôt concentrée vers la droite, et de l'autre côté si $\beta < 0$. Le paramètre $\alpha$ enfin est caractéristique de la stabilité par addition de la variable aléatoire. On peut en effet définir autrement les processus $\alpha$-stables. Ce sont ceux qui vérifient que pour tout nombre $n$ de copies indépendantes d'un variable aléatoire $X$ $\alpha$-stable $(X_1,\ldots,X_n)$, on doit avoir un nombre $D_n$ et l'égalité suivante :

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha}X + D_n. \tag{II.221}$$

Quand $\alpha = 2$, la fontion caractéristique se trouve être celle d'une loi normale et on obtient donc des processus Gaussiens ; $\beta$ est dans ce cas un paramètre superflu. Lorsque $\alpha < 2$, la variance de n'est plus définie tandis que pour $\alpha < 1$ c'est même la moyenne qui ne l'est plus. Ces lois ont un comportement suffisamment riche pour qu'elles ouvrent vers des classes importantes et nombreuses de processus non Gaussiens. Nous allons en regarder un exemple.

**Processus d'Ornstein-Uhlenbeck $\alpha$-stable.** Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck symétrique $\alpha$-stable ($S\alpha S$), noté ici $\{U_\lambda^\alpha(t), t \in \mathbb{R}\}$ est défini comme :

$$U_\lambda^\alpha(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-x)}Z_\alpha(\mathrm{d}x), \tag{II.222}$$

où $Z_\alpha(\cdot)$ est le mouvement de Lévy $S\alpha S$. Pour mémoire, la marche de Lévy vérifie $Z_\alpha(0) = 0$ presque sûrement et ses accroissements sont une variable aléatoire $S\alpha S$ avec $\sigma = (t-s)^{1/\alpha}$. C'est la généralisation $S\alpha S$ du mouvement Brownien puisqu'il est $H$-ss d'indice $H = 1/\alpha$ et à **a.s.**. Si $\alpha = 2$ on a exactement le mouvement Brownien. Le mouvement de Lévy est tel que :

$$\mathbb{E} e^{i\theta Z_\alpha(t)} = e^{-|\theta|^\alpha t} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E} e^{i\theta(Z_\alpha(t)-Z_\alpha(s))} = e^{-|\theta|^\alpha |t-s|}. \tag{II.223}$$

Proposition II.13: *Le transformé par Lamperti d'indice $H = 1/\alpha$ du processus OU $S\alpha S$ de paramètre $\lambda = 1/\alpha$ est le mouvement de Lévy d'indice $\alpha$.*

$$(\mathcal{L}_{1/\alpha} U^\alpha_{1/\alpha})(t) \stackrel{d}{=} Z_\alpha(t). \tag{II.224}$$

Proposition II.14: *Le processus $\{X^\alpha_{H,\lambda}(t), t > 0\}$ image par $\mathcal{L}_H$ du OU $S\alpha S$ est $H$-ss, a pour représentation intégrale :*

$$X^\alpha_{H,\lambda}(at) = t^{H-a\lambda} \int_{-\infty}^{a \ln t} e^{\lambda x} Z_\alpha(dx), \tag{II.225}$$

*et admet pour fonction caractéristique à deux points $0 \leq s \leq t$ :*

$$\mathbb{E}\left\{ e^{i\theta_1 X^\alpha_{H,\lambda}(s) + i\theta_2 X^\alpha_{H,\lambda}(t)} \right\} = \exp\left[ -\left|\theta_1 + \theta_2 (t/s)^{H-a\lambda}\right|^\alpha \frac{s^{\alpha H}}{\alpha\lambda} - |\theta_2|^\alpha \frac{t^{\alpha H}}{\alpha\lambda}(1-(s/t)^{\alpha a\lambda}) \right]. \tag{II.226}$$

*Démonstration* — Nous allons mener le calcul de la fonction caractéristique du processus image. On prendra d'abord $\lambda$ et $H$ quelconques pour la fonction caractéristique de $(\mathcal{L}_{1/\alpha} U^\alpha_\lambda)$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{ e^{i\theta t^H U^\alpha_\lambda(a \ln t)} \right\} &= \mathbb{E}\left\{ \exp\left[ i\theta t^H \int_{-\infty}^{a \ln t} e^{-\lambda(a \ln t - x)} Z_\alpha(\mathrm{d}x) \right] \right\} && \text{(II.227)} \\
&= \exp\left[ -|\theta t^H|^\alpha \int_{-\infty}^{a \ln t} e^{-\alpha\lambda(a \ln t - x)} \mathrm{d}x \right] && \text{(II.228)} \\
&= \exp\left[ -|\theta t^H|^\alpha t^{-\alpha\lambda a} \frac{e^{\alpha\lambda a \ln t}}{\lambda\alpha} \right] && \text{(II.229)} \\
&= \exp\left[ -\frac{1}{\lambda\alpha} |\theta|^\alpha t^{H\alpha} \right]. && \text{(II.230)}
\end{aligned}$$

Le choix maintenant de $H = 1/\alpha$ et de $\lambda = 1/\alpha$ fait que cette fonction caractéristique est simplement $\exp(-|\theta|^\alpha t)$. On reconnaît là la fonction caractéristique du mouvement de Lévy.

L'égalité semble valable pour tout $a$. Cependant, comme nous en faisions le commentaire, la transformation par $\mathcal{L}_{H,a}$ n'affecte pas la loi marginale en un temps mais affecte les lois conjointes de dimension finie. C'est seulement pour $a$=1 qu'on retrouve exactement $Z_\alpha$ et on doit faire le calcul complet à deux temps. Soient donc $0 < s \leq t$. La remarque initiale est que pour tout $t > s$ :

$$U^\alpha_\lambda(t) = U^\alpha_\lambda(s) e^{-\lambda(t-s)} + \int_s^t e^{-\lambda(t-x)} Z_\alpha(\mathrm{d}x). \tag{II.231}$$

On peut appliquer la transformation de Lamperti à cette équation afin d'obtenir :

$$t^{-H} X_{H,\lambda}^{\alpha}(at) = s^{-H} X_{H,\lambda}^{\alpha}(as)\,(t/s)^{-a\lambda} + \int_{a\ln s}^{a\ln t} e^{-\lambda(a\ln t - x)} Z_\alpha(\mathrm{d}x). \tag{II.232}$$

La fonction caractéristique à deux temps (dont on pourrait déduire la mesure spectrale) se calcule ensuite directement. On notera $X$ pour $X_{H,\lambda}^{\alpha}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{e^{i\theta_1 X(s)+i\theta_2 X(t)}\right\} &= \mathbb{E}\left\{\exp\left[i\theta_1 X(s) + i\theta_2\left(X(s)(t/s)^{H-a\lambda} + t^{H-a\lambda}\int_{a\ln s}^{a\ln t} e^{\lambda x} Z_\alpha(\mathrm{d}x)\right)\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[iX(s)(\theta_1 + \theta_2(t/s)^{H-a\lambda}) + i\theta_2(t^{H-a\lambda}\int_{a\ln s}^{a\ln t} e^{\lambda x} Z_\alpha(\mathrm{d}x))\right]\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[iX(s)(\theta_1 + \theta_2(t/s)^{H-a\lambda})\right]\right\}\mathbb{E}\left\{\exp\left[i\theta_2(t^{H-a\lambda}\int_{a\ln s}^{a\ln t} e^{\lambda x} Z_\alpha(\mathrm{d}x)\right]\right\}\\
&= \exp\left[-|\theta_1 + \theta_2(t/s)^{H-a\lambda}|^\alpha \int_{-\infty}^{a\ln s} |s|^{\alpha H - \alpha a\lambda} e^{\alpha\lambda x)}\mathrm{d}x\right.\\
&\qquad\left. -|\theta_2|^\alpha |t|^{\alpha H-\alpha a\lambda}\int_{a\ln s}^{a\ln t} e^{\alpha\lambda x}\mathrm{d}x\right]\\
&= \exp\left[-|\theta_1 + \theta_2(t/s)^{H-a\lambda}|^\alpha \frac{s^{\alpha H}}{\alpha\lambda} - |\theta_2|^\alpha \frac{t^{\alpha H-\alpha\lambda}}{\alpha\lambda}(t^{\alpha a\lambda} - s^{\alpha a\lambda})\right]\\
&= \exp\left[-\left|\theta_1 + \theta_2(t/s)^{H-a\lambda}\right|^\alpha \frac{s^{\alpha H}}{\alpha\lambda} - |\theta_2|^\alpha \frac{t^{\alpha H}}{\alpha\lambda}(1-(s/t)^{\alpha a\lambda})\right].
\end{aligned} \tag{II.233}$$

La fonction caractéristique du processus accroissement $X(t) - X(s)$ est ensuite obtenue en posant $\theta_1 = -\theta_2$.

$$\mathbb{E}\left\{e^{i\theta(X(t)-X(s))}\right\} = \exp\left\{-|\theta|^\alpha\left[\frac{s^{\alpha H}}{\alpha\lambda}\left|1-(t/s)^{H-a\lambda}\right|^\alpha + \frac{t^{\alpha H}}{\alpha\lambda}(1-(t/s)^{\alpha a\lambda})\right]\right\}. \tag{II.234}$$

Elle s'identifie à celle attendue pour le mouvement de Lévy quand $H = 1/\alpha$, $\lambda = 1/\alpha$, et $a = 1$ ce qui finit de prouver la Proposition II.13.

La Proposition II.14 vient d'abord de ce que le processus $\{X_{H,\lambda}^{\alpha}(t), t > 0\}$ image par $\mathcal{L}_H$ de OU $S\alpha S$, signal stationnaire, est alors $H$-ss. Ensuite nous venons de calculer sa fonction caractéristique à deux temps (elle suffit puisque le processus est Markovien).

□

Il faut noter que le OU $S\alpha S$ se comporte comme le OU Gaussien de manière spécifique par dilatation des unités :

$$U_\lambda^\alpha(at) \stackrel{d}{=} U_{a\lambda}^\alpha(t). \tag{II.235}$$

En combinant cette propriété et la propriété II.13, on est en droit de remarquer que l'entière classe des OU $S\alpha S$ dérive alors du mouvement de Lévy à l'aide des transformations de Lamperti. Cela fait écho à la particularité de l'équation (II.234), où seul le produit $a\lambda$ intervient (à part dans la constante multiplicative globale). Pour obtenir le processus $X_{H,\lambda}^{\alpha}$ on peut donc jouer sur $\lambda$ ou $a$.

Nous rappellons aussi qu'il existe plusieurs processus $S\alpha S$ et stationnaires ayant cette covariance quand $\alpha \neq 2$ et que cette remarque reste donc de portée limitée (en fait les processus construit avec $a$ et $-a$ sont différents quand on ne suppose pas la Gaussianité, $\alpha = 2$) [ST94].

Enfin la vérification du cas $\alpha = 2$ dans l'équation II.234 conduit exactement à une fonction de corrélation en $(ts)^H (t/s)^{-\lambda a}$ et n'est rien d'autre que le cas Gaussien que nous avons déjà étudié.

## 4.4 Exemple 2 : le mouvement Brownien fractionnaire

**Définition.** Nous prendrons le mouvement Brownien fractionnaire comme exemple privilégié, à la suite de la majorité de la littérature sur les processus auto-similaires. En rappelant ici sa définition, nous reportons quelques propriétés usuelles ainsi que celles que la transformation de Lamperti permet d'établir.

Proposition II.15: *La fonction de covariance d'un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ auto-similaire d'indice $H \in ]0\ 1[$ et à accroissements stationnaires s'écrit :*

$$R_X(t,s) = \frac{\sigma^2}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) \tag{II.236}$$

*Démonstration* — Le développement de $|X(t) - X(s)|^2$ conduit à

$$\mathbb{E}\{X(t)X(s)\} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left\{X(t)^2\right\} + \mathbb{E}\left\{X(s)^2\right\} - \mathbb{E}\left\{(X(t) - X(s))^2\right\}\right). \tag{II.237}$$

L'autosimilarité implique, en notant $\sigma^2 = \mathbb{E}X(1)^2$, que $\mathbb{E}X(t)^2 = |t|^{2H}\sigma^2$ et également $\mathbb{E}X(s)^2 = |s|^{2H}\sigma^2$. Le point en $t = 0$ est particulier car $X(0) = X(k0) \stackrel{d}{=} k^H X(0)$ et doit alors être presque sûrement nul.

La stationnarité des accroissements permet ensuite d'exprimer le dernier terme de (II.237), puis d'obtenir (II.236).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{(X(t) - X(s))^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{(X(t-s) - X(0))^2\right\} = \mathbb{E}\left\{X(t-s)^2\right\} && \text{(II.238)}\\ &= |t-s|^{2H}\mathbb{E}X(1)^2 = |t-s|^{2H}\sigma^2. && \text{(II.239)}\end{aligned}$$

□

Il s'en suit que si on se restreint aux indices $0 < H < 1$ et qu'on regarde un processus Gaussien, défini par sa fonction de covariance, il n'existe qu'une seule famille : le mouvement Brownien fractionnaire $B_H$, dont seule la variance au temps unité change ($\mathbb{E}B_H(1)^2 = \sigma^2$). Quand $H = 1/2$, ce processus n'est rien d'autre que le mouvement Brownien usuel $B(t) = B_{1/2}(t)$ introduit au 2.1.

Définition II.24: *Le mouvement Brownien fractionnaire (fBm) $B_H(t)$ est l'unique processus Gaussien, $H$-ss, à* ***a.s.****, de variance en $t = 1$ égale à $\sigma^2$.*

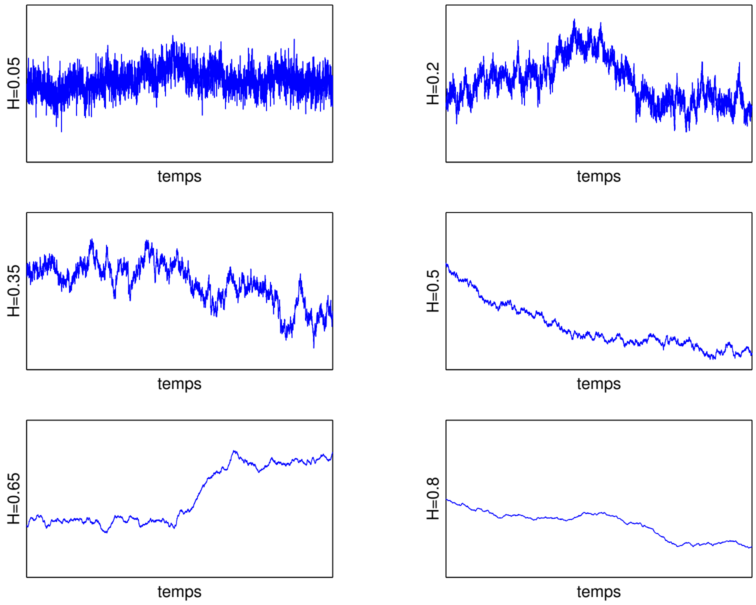



Fig. II.7: Exemples de traces de mouvements Browniens fractionnaires pour des exposants de Hurst $H$ variables ; quand $H$ augmente le graphe devient de plus en plus régulier.

Définition II.25: *Le bruit Gaussien fractionnaire (fGn) est le processus accroissement du mouvement Brownien fractionnaire,* $G_{H,\tau}(t) = B_H(t+\tau) - B_H(t)$.

Pour les applications usuelles, dans le cas des séquences aléatoires, on regarde le cas où $\tau = 1$ pour les temps $t$ discrétisés dans $\mathbb{Z}$.

Proposition II.16: *Le fGn est stationnaire par définition pour tout* $\tau$ *et sa fonction de corrélation est*

$$\gamma_{G_{H,\tau}}(k) = \frac{\sigma^2}{2}\left(|k+\tau|^{2H} + |k-\tau|^{2H} - 2|k|^{2H}\right). \tag{II.240}$$

*Démonstration* — Le calcul direct de la fonction de corrélation est permis par (II.236) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{G_{H,\tau}(t)G_{H,\tau}(s)\} &= \mathbb{E}\{(B_H(t+\tau)-B_H(t))(B_H(s+\tau)-B_H(s))\} \\
&= \mathbb{E}\{B_H(t+\tau)B_H(s+\tau)\} + \mathbb{E}\{B_H(t)B_H(s)\} \\
&\quad -\mathbb{E}\{B_H(t+\tau)B_H(s)\} - \mathbb{E}\{B_H(t)B_H(s+\tau)\} \\
&= \frac{\sigma^2}{2}\left(-|t+\tau-s-\tau|^{2H} - |t-s|^{2H} + |t+\tau-s|^{2H} + |t-s-\tau|^{2H}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2}\left(-2|k|^{2H} + |k+\tau|^{2H} + |k-\tau|^{2H}\right),
\end{aligned} \tag{II.241}$$

en posant $k = |t-s|$ (puisque la corrélation du fGn, stationnaire, dépend seulement de ce retard) et en ayant directement simplifié les termes en $|t|^{2H}$ (ou un autre temps) à la troisième ligne.

□

La figure II.8 montre l'allure des covariances du fBm et du fGn, en fonction de $H$ et du retard. Ces processus bien connus et utiles comme premiers exemples auto-similaires sont malheureusement bien particuliers. Comme ils sont strictement invariants par la dilatation renormalisée avec l'indice $H$, nous verrons que les propriétés locales des fBm et leurs propriétés globales sont commandées par le même exposant de Hurst $H$. Il ne faut pas perdre de vue que ce n'est en général plus le cas dès qu'on s'écarte de cet exemple. Nous rappelons les propriétés classiques usuelles des fBm et fGn.

*Remarque sur les cas limites :* la situation où $H = 1$ conduit à des processus dégénérés qui vérifient presque sûrement $X(t) = tX(1)$ à tout instant. La situation $H = 0$ n'est pas très intéressante puisque (II.31) impose que le processus reste égal à $X(1)$ à tout instant en loi [Ver87].

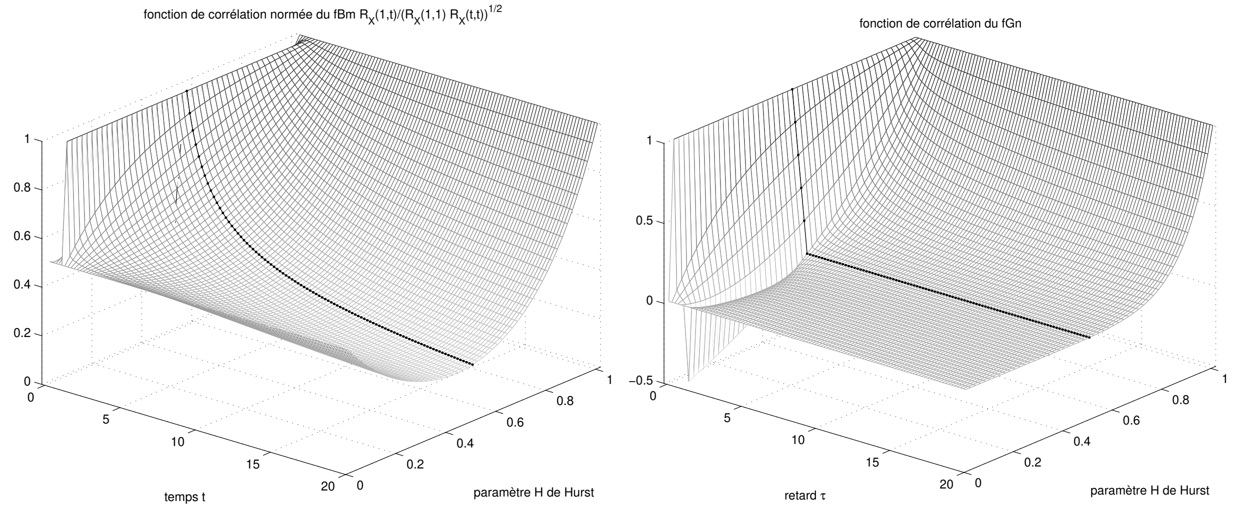



Fig. II.8: Représentations des fonctions de corrélation pour $H \in [0\ 1]$ des fBm (à gauche) et fGn (à droite). Pour le fBm on montre $\tilde{R}_{B_H}(1,t)$ défini selon (II.139). Les courbes en trait appuyé sont le cas $H = 0.5$ du mouvement Brownien ordinaire. La mémoire longue du fGn pour $H > 0.5$ est visible dans la décroissance lente de la corrélation.

**Générateur stationnaire du fBm.** Le fBm étant $H$-ss, sa fonction de corrélation admet une factorisation en $(st)^H c(t/s)$. En identifiant cette écriture dans (II.236), on a :

$$c_{B_H}(k) = \frac{\sigma^2}{2}\left[k^H + k^{-H} - |\sqrt{k} - 1/\sqrt{k}|^{2H}\right]. \tag{II.242}$$

Selon le résultat de Lamperti, le fBm admet un générateur stationnaire $\{Y_H(t), t \in \mathbb{R}\}$ déduit par la transformée inverse $Y_H = \mathcal{L}_H B_H$. La fonction de corrélation est obtenu par le lien qu'impose la transformation de Lamperti.

$$R_{Y_H}(t,s) = e^{-H(t+s)}\left(e^{2Ht} + e^{2Hs} - |e^t - e^s|^{2H}\right). \tag{II.243}$$

On sait, du fait de la stationnarité de $Y_H$, qu'elle s'exprime comme une fonction de retard $t - s = \tau$ seulement, et on la note $\gamma_{Y_H}(\tau)$.

$$\gamma_{Y_H}(\tau) = \sigma^2\left[\cosh(H|\tau|) - 2^{2H-1}\left(\sinh(|\tau|/2)\right)^{2H}\right]. \tag{II.244}$$

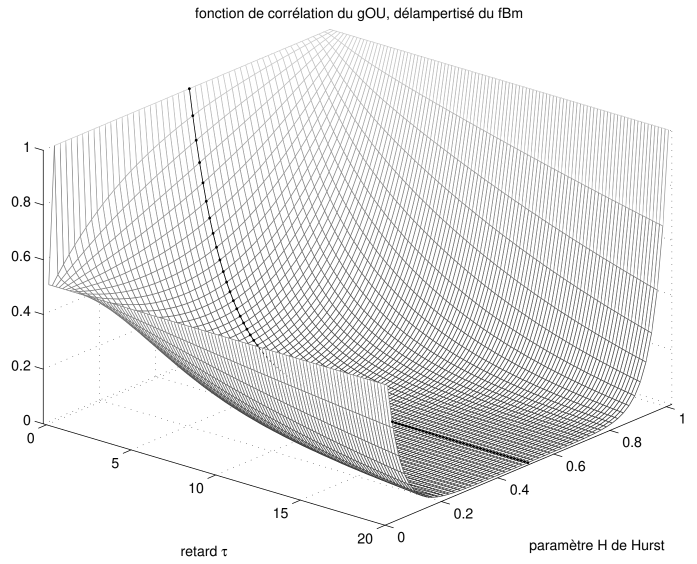



Fig. II.9: Fonction de corrélation (II.244) de l'Ornstein-Uhlenbeck généralisé - gOU -, délampertisé du fBm d'indice $H$. Pour $H \in ]0\ 1[$ cette corrélation décroît rapidement et le gOU n'est pas à mémoire longue. La courbe en trait appuyé est la corrélation exponentielle de l'OU obtenu si $H = 0.5$.

L'allure de la corrélation est représentée sur la figure II.9. Nous avons déjà étudié la situation où $H = 1/2$ : le processus $H - ss$ est le mouvement Brownien ordinaire qui admet le processus OU Gaussien comme générateur stationnaire. Le générateur $\{Y_H(t), t \in \mathbb{R}\}$ du fBm est donc une sorte de généralisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et nous le désignerons comme tel (en abrégé gOU).

Un premier intérêt du générateur par rapport au fGn, qui récupère lui-aussi une stationnarité sous-jacente au fBm, réside dans son comportement aux temps longs. Le fGn est connu pour avoir une longue mémoire en temps pour $1/2 < H < 1$ ce qui diminue l'intérêt de sa stationnarité pour l'analyse de signal. Le gOU vérifie au contraire :

$$\gamma_{Y_H}(\tau) = \frac{\sigma^2}{2}\left(e^{-H\tau} + 2He^{-(1-H)\tau}\right) + O\left(e^{(H-2)\tau}\right) \propto e^{-\min(H,1-H)\tau}, \qquad \text{(II.245)}$$

quand $\tau \to +\infty$. La décroissance de sa fonction de corrélation étant alors exponentielle, le gOU a une mémoire courte pour tout $H$ dans $]0\ 1[$. L'analyse de l'équation (II.143) est celle qui permet finalement d'avoir la compatibilité entre la mémoire longue du fBm (au sens de la définition II.20) et la mémoire courte du gOU.

**Représentation linéaire du fBm.** Nous pouvons donner une représentation explicite comme sortie d'un filtre linéaire covariant en échelle du fBm. La densité spectrale associée au fBm est celle de son générateur stationnaire, déduite de (II.244).

$$\Gamma_{Y_H}(\nu) = \frac{\sigma^2}{H^2 + 4\pi^2\nu^2}\left|\frac{\mathbf{\Gamma}(1/2 + i2\pi\nu)}{\mathbf{\Gamma}(H + i2\pi\nu)}\right|^2. \qquad \text{(II.246)}$$

Les idées développées par Nuzman et Poor dans ce contexte conduisent à considérer la factorisation $\Gamma_{Y_H}(\nu) = |\Phi_+(\nu)|^2$ avec une fonction de transfert causale. La factorisation est

$$\Phi_+(\nu) = \sigma \frac{\mathbf{\Gamma}(1/2 + i2\pi\nu)}{(H + i2\pi\nu)\mathbf{\Gamma}(H + i2\pi\nu)}. \tag{II.247}$$

Le calcul explicite de la forme temporelle de ce filtre n'est pas rapporté ici. Il suffit de faire usage de résultats de calculs classiques. On trouvera dans [NP00a] la démarche à suivre. Par exemple, quand $H > 1/2$, on retrouve alors la représentation sur un intervalle fini du fBm que nous donnons ici à titre d'illustration. On vérifiera que la représentation (II.248) obéit à la forme générale issue de l'analyse de Lamperti (II.173).

$$B_H(t) = \frac{t^H}{\mathbf{\Gamma}(H - 1/2)} \int_0^t (s/t)^H B_{1-s/t}(H - 1/2, 1 - 2H) s^{-1/2} \mathrm{d}B(s), \tag{II.248}$$

où $B_t(a, b)$ est la fonction beta incomplète.

**Représentation harmonique du fBm et en moyenne mobile.** Nous rappelons ici qu'il a été établi deux formes classiques du fBm qui ne viennent pas de l'analyse défendue ici. On consultera [ST94, Coh99] pour les démonstrations et le commentaire de ces écritures.

Proposition II.17: *Soit $0 < H < 1$, le fBm admet la représentation intégrale qui suit :*

$$B_H(t) = \frac{1}{\mathbf{\Gamma}(H + 1/2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\nu} - 1}{i\nu\, |\nu|^{H-1/2}} d\tilde{B}(\nu). \tag{II.249}$$

La mesure à valeurs complexes $\mathrm{d}\tilde{B}(\nu)$ définie sur l'espace harmonique a les même propriété que le bruit blanc $W$ défini en temps. Elle a des incréments spectraux décorrélés et partage les propriétés de décorrélation, mais en fréquence, que le bruit de Wiener vérifie en temps. On a $\mathbb{E}\left\{\mathrm{d}\tilde{B}(\nu_1)\overline{\mathrm{d}\tilde{B}(\nu_2)}\right\} = \delta(\nu_1 - \nu_2)\mathrm{d}\nu_1\mathrm{d}\nu_2$.

Proposition II.18: *Soit $0 < H < 1$, le fBm admet pour $t > 0$ la représentation en moyenne mobile[12] qui suit :*

$$B_H(t) = \frac{1}{\mathbf{\Gamma}(H + 1/2)} \left[ \int_{-\infty}^t |t - s|^{H-1/2} \mathrm{d}B(s) - \int_{-\infty}^0 |-s|^{H-1/2} \mathrm{d}B(s) \right]. \tag{II.250}$$

Quand $H = 1/2$ on retrouve l'expression du mouvement Brownien comme intégrale du bruit blanc. Les deux écritures intégrales du fBm conduisent bien au même processus, à une constante déterministe près. Nous avons adopté ces normalisations des processus pour se rapprocher du modèle de Barnes-Allan [BA66].

Ces représentations sont orthogonales à ce que peut obtenir la transformation de Lamperti car elles mettent en avant une propriété dont nous ne savons que faire à travers $\mathcal{L}_H$ : celle des accroissements stationnaires. La forme en moyenne mobile est en effet directement issue d'une forme générale de processus à **a.s.**, spécifiée ensuite pour être $H$-ss et Gaussien. La

[12] Nous introduisons ici uniquement la représentation en moyenne mobile sans anticipation, voir [ST94].

représentation harmonique vient alors d'un calcul heuristique de la fonction de transfert associée aux accroissements stationnaires, intégrée alors (avec le terme en $(e^{it\nu}-1)/i\nu$) pour représenter le processus et non ses accroissements [Yag87]. Ainsi l'analyse issue des propriétés de $\mathcal{L}_H$ sera en général plus utile dans les cas où on ne suppose pas cette stationnarité des accroissements.

Nous verrons au III.3.2 comment ces représentations permettent de construire des processus qui dévient de l'auto-similarité en ne gardant que localement la propriété et comment nous modifions $\mathcal{L}_H$ pour étudier ces situations.

**Le modèle de Barnes-Allan.** Une approximation plus physique de (II.250) a été proposée [BA66]. Elle privilégie une origine fixée à $B_{A,H}(0)=0$ de manière déterministe et néglige les contributions venant du passé à $t<0$.

$$B_{A,H}(t)=\frac{1}{\mathbf{\Gamma}(H+1/2)}\int_0^t (t-s)^{H-1/2}\mathrm{d}B(s). \tag{II.251}$$

On consultera [Mag96] qui compare ce modèle au mouvement Brownien fractionnaire. Il faut en retenir en particulier que ce modèle est un processus $H$-ss et que les accroissements du processus de Barnes-Allan ne sont pas stationnaires. Cependant leur fonction de corrélation reste proche de (II.240), surtout si $H<1/2$.

La modèle de Barnes-Allan est directement donné par une représentation en sortie de filtre covariant en échelle de type (II.173). La fonction de transfert est :

$$g(\theta)=\frac{1}{\mathbf{\Gamma}(H+1/2)}(\theta-1)^{H+1/2}\mathbb{H}(\theta-1). \tag{II.252}$$

Passant cette fonction par $\mathbf{M}$, on arrive au spectre multiplicatif du modèle de Barnes-Allan. Il est égal au spectre usuel de son générateur stationnaire ainsi qu'au spectre du fBm, qui a été prouvé dans [Fla90] comme étant :

$$\Xi_{B_{A,H}}(\beta)=\Gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}B_{A,H}}(\beta)=\frac{\sigma^2}{H^2+4\pi^2\beta^2}\left|\frac{\mathbf{\Gamma}(1/2+i2\pi\beta)}{\mathbf{\Gamma}(H+i2\pi\beta)}\right|^2 \tag{II.253}$$

**Régularité locale et dimension du graphe.** Une dernière propriété du fBm échappe en grande partie à l'étude par $\mathcal{L}_H$. Les réalisations du fBm sont toutes presque sûrement continues et non différentiables en chaque point. La régularité locale peut être précisée grâce à (II.239) et à la définition qui suit.

$$\mathbb{E}\left\{(B_H(t+\tau)-B_H(t))^2\right\}=\sigma^2\tau^{2H}. \tag{II.254}$$

Définition II.26: *Un processus continu $X(t)$ est de* ***régularité locale de Hölder*** *$h(t)$ en $t$ si*

$$h(t)=\sup\{h'/X\in C_t^{h'}\}, \tag{II.255}$$

*où on définit $C_t^{h'}$ comme l'ensemble des processus tels qu'il existe un polynôme $P_t$ et un voisinage de $t$ de manière à ce que pour tout $s$ proche de $t$ on ait ($A$ est une constante) :*

$$|X(s)-P_t(s)|\leq A|t-s|^{h'} \tag{II.256}$$

Le polynôme $P_t$ est en général le développement de Taylor de la fonction en $t$, quand il existe. L'exposant $h(t)$ qualifie la rugosité locale, les accidents, d'un processus car la trajectoire est d'autant plus irrégulière et singulière au voisinage de $t$ que $h(t)$ est petit. Si il est entre 0 et 1, la trajectoire est continue mais non différentiable en $t$. Cette propriété est intrinséquement locale en sa définition. Examinée au second ordre quand $P_t$ est une constante, cette régularité demande que

$$\mathbb{E}\left\{(X(t+\tau)-X(t))^2\right\} \sim |\tau|^{2h(t)}. \tag{II.257}$$

Le fBm admet alors son exposant de Hurst $H$ comme paramètre de Hölder local en tout point. L'auto-similarité, stricte dans ce cas, est le lien fort qui associe comportement global et comportement local du fBm. Quand l'exposant local ne varie pas d'un point à l'autre, et qu'à tout instant $h(t) = H$ et est entre 0 et 1, l'exposant de régularité du processus en son entier donne la dimension fractale de son graphe : $D = 2 - H$.

Cette propriété est la contrainte forte que suppose le fBm : alors que le paramètre de Hurst $H$ est au départ introduit comme un paramètre de comportement global (invariance sous l'action de dilatations de n'importe quel facteur), il trouve ici une influence dominante sur les propriétés locales du processus. Il faut se souvenir que c'est plus une exception qu'une règle.

La transformation de Lamperti échoue ici car elle n'admet que l'interprétation globale du paramètre $H$. Une tentative de généralisation naturelle du fBm serait de construire un processus avec $h(t)$ [Coh99]. Sans adaptation de $\mathcal{L}_H$, on ne pourra construire alors de générateur stationnarisé, voir le III.3.2.

## 4.5 Modèles paramétriques auto-similaires

Nous savons que le problème de la modélisation de signaux stationnaires bénéficie, audelà de la représentation linéaire générale comme sortie d'un filtre stationnaire, de la possibilité de trouver des modèles paramétriques aux signaux. C'est la modélisation en processus auto-régressif à moyenne ajustée, en raccourci ARMA. Nous allons ici donner les bases de la représentation analogue pour les processus auto-similaires que permet de construire la transformation de Lamperti.

Les résultats de cette partie ont été auparavant esquissés ou obtenus sous une forme partielle par d'autres auteurs. On consultera [YK97] qui les nomme *self-similar autoregressive process* ; [Wor96], [GZ88] ou [Zem87] présentent aussi cette modélisation par le système d'Euler-Cauchy. Enfin Koyama propose dans [KH93] de regarder ces modèles sous la forme d'un système à étages en parallèle, chaque étage étant donné par une équation de Langevin du premier ordre. Noret [Nor99] les discute en montrant le lien fort entre l'approche où les systèmes du 1er ordre sont en série (conduisant au système d'Euler-Cauchy) et ceux où ils sont mis en parallèle (comme dans [KH93]).

**Système d'Euler-Cauchy.** Le processus d'Euler-Cauchy est solution de l'équation différentielle qui généralise à un ordre quelconque le modèle regardé dans [Nor99] et que nous avons déjà rencontré en (II.205). C'est l'image par la transformation de Lamperti de l'équation générale des modèles ARMA. Nous allons établir cela.

Lemme II.2: *Soit* $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ *un processus avec* $\{X(t) = (\mathcal{L}_H Y)(t), t > 0\}$ *son image par* $\mathcal{L}_H$. *Soit un ensemble de coefficients* $\{\alpha_n \in \mathbb{C}, n = 0 \dots N\}$. *Il existe alors des coefficients* $\{\alpha'_n \in \mathbb{C}, n = 0 \dots N\}$ *tels que si*

$$Z(t) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} Y(t) \tag{II.258}$$

*alors on a :*

$$(\mathcal{L}_H Z)(t) = \sum_{n=0}^{N} \alpha'_n t^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} X(t). \tag{II.259}$$

*Démonstration* — Nous noterons dans la suite les dérivations par un exposant entre parenthèse : $Y^{(n)}(t) = \mathrm{d}^n Y(t)/\mathrm{d}t^n$. La linéarité de la transformation de Lamperti implique :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_H Z)(t) &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (\mathcal{L}_H Y^{(n)})(t) && \text{(II.260)} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^H Y^{(n)}(\ln t). && \text{(II.261)} \end{aligned}$$

La règle de différenciation principale reliant les sytèmes vient des deux égalités :

$$\begin{aligned} Y^{(1)}(\ln t) = \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)(\ln t) &= t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Y(\ln t)\right) && \text{(II.262)} \\ &= t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^{-H}X(t)\right). && \text{(II.263)} \end{aligned}$$

Il suffit alors d'itérer les calculs suivants pour exprimer $Y^{(n)}(\ln t)$ en fonction du processus image par Lamperti :

$$\begin{aligned} (t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^2 &= t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + t^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} && \text{(II.264)} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-H}X(t) &= t^H\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) - HX(t)\right) && \text{(II.265)} \end{aligned}$$

et de réorganiser les termes qui sont grâce à ces deux règles tous de la forme $t^{H+n}X^{(n)}(t)$, de simplifier les $t^H$ qui apparaissent alors avec les $t^{-H}$, pour obtenir l'expression proposée en (II.259). Une façon intermédiaire d'écrire le système s'appuyerait sur des coefficients $\{\alpha''_n, n = 0 \dots N\}$ devant l'opérateur $t(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)$ :

$$(\mathcal{L}_H Z)(t) = \sum_{n=0}^{N} \alpha''_n \left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n X(t). \tag{II.266}$$

□

Proposition II.19: *Le processus stationnaire* ARMA$(p,q)$ *qui s'écrit à l'aide du bruit blanc de Wiener* $W(t)$ *:*

$$\sum_{n=0}^{p} \alpha_n Y^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{q} \beta_n W^{(n)}(t), \tag{II.267}$$

*admet pour transformée de Lamperti d'indice* $H$ *le processus d'Euler-Cauchy (noté* EC$(p,q)$*) qui est* $H$*-ss et est solution de l'équation stochastique qui suit pour* $t > 0$*, dont l'entrée est un bruit multiplicatif de Wiener de variance unité,* $V(t) \stackrel{d}{=} t^{H+1/2} W(t)$ *:*

$$\sum_{n=0}^{p} \alpha'_n t^n X^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{q} \beta'_n t^n V^{(n)}(t). \tag{II.268}$$

*Démonstration* — Le lemme précédent appliqué à (II.267) donne directement

$$\sum_{n=0}^{p} \alpha'_n t^n (\mathcal{L}_H Y)^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{q} \beta'_n t^n (\mathcal{L}_H W)^{(n)}(t). \tag{II.269}$$

Nous avons déjà caractérisé le bruit blanc multiplicatif $V(t) = (\mathcal{L}_H W)(t)$ par sa fonction de corrélation (voir l'équation (II.174)). Il vérifie justement $\mathbb{E} V(t)V(s) = \sigma^2 t^{1+2H} \delta(t-s)$.

La propriété d'auto-similarité des solutions de ce système d'Euler-Cauchy est évidente par le théorème de Lamperti et la stationnarité des processus ARMA.

□

**Fonction de transfert ; analyse spectrale paramétrique.** Il est possible de représenter de manière presque équivalente un processus $H$-ss par un processus d'EC ou par un filtre covariant en échelle. Les résultats que nous allons annoncer précisent cela.

Proposition II.20: *Le système* EC *d'ordre* $(p,q)$ *qui s'écrit comme*

$$\sum_{n=0}^{p} \alpha'_n t^n A^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{q} \beta'_n t^n X^{(n)}(t), \tag{II.270}$$

*est un filtre covariant en échelle qui associe le processus* $\{A(t), t > 0\}$ *au processus* $\{X(t), t > 0\}$ *et a pour fonction de transfert en Mellin :*

$$\mathbf{G}_{EC}(s) = \frac{\sum_{n=0}^{p} \beta'_n (s+1-n)_n}{\sum_{n=0}^{q} \alpha'_n (s+1-n)_n}, \tag{II.271}$$

*où on note* $(s+1-n)_n = (s+1-n)(s+2-n)\dots(s-1)s$.

*Démonstration* — Nous noterons l'opération de filtrage, à l'évidence linéaire, réalisée par le système d'EC par l'opérateur $\mathcal{G}_{EC}$ et on a : $A(t) = (\mathcal{G}_{EC} X)(t)$. Le système (II.271) peut être globalement passé par la transformation de Mellin de variable $s \in \mathbb{C}$. Les propriétés de $\mathbf{M}$ assurent alors :

$$\sum_{n=0}^{p} \alpha'_n (s+1-n)_n (\mathbf{M}A)(s) = \sum_{n=0}^{q} \beta'_n (s+1-n)_n (\mathbf{M}X)(s). \tag{II.272}$$

Ici $(\mathbf{M}A)(s)$ et $(\mathbf{M}X)(s)$ sont les fonctions de représentation harmonique des deux processus, que nous supposerons exister pour la démonstration. On a alors les relations suivantes pour le rapport des transformées de Mellin que nous noterons $\mathbf{G}_{EC}(s)$ :

$$\mathbf{G}_{EC}(s) = \frac{(\mathbf{M}A)(s)}{(\mathbf{M}X)(s)} = \frac{\sum_{n=0}^{p} \beta'_n (s+1-n)_n}{\sum_{n=0}^{q} \alpha'_n (s+1-n)_n}. \tag{II.273}$$

On sait que les dilatations se comportent agréablement pour la transformation de Mellin puisque $(\mathbf{M}\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(s) = \lambda^{s-H}(\mathbf{M}X)(s)$. En faisant apparaître $\lambda^{s-H}$ au numérateur et au dénominateur de (II.273),on arrive à :

$$\mathbf{G}_{EC}(s) = \frac{\lambda^{s-H}(\mathbf{M}A)(s)}{\lambda^{s-H}(\mathbf{M}X)(s)} = \frac{(\mathbf{M}\mathcal{D}_{H,\lambda}A)(s)}{(\mathbf{M}\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(s)}. \tag{II.274}$$

Il suffit alors de prendre la transformation inverse pour établir que

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}A)(t) = (\mathcal{G}_{EC}\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t), \tag{II.275}$$

ce qui est exactement la relation constitutive d'un filtre covariant en échelle : $\mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G}_{EC} = \mathcal{G}_{EC}\mathcal{D}_{H,\lambda}$ pour toute dilatation $\mathcal{D}_{H,\lambda}$. Notons que cette propriété peut aussi être démontrée directement par changement de variable dans l'équation différentielle et ne nécessite finalement pas l'existence d'une décomposition sur la base de Mellin des processus.

Le calcul nous a donné directement la fonction de transfert en Mellin du filtre réalisé par le système EC qui est $\mathbf{G}_{EC}(s)$.

□

Corollaire II.8: *Soit un modèle d'*EC *d'ordre $(p, q)$ écrit comme dans (II.268) et dont l'entrée est un bruit multiplicatif de Wiener. Le spectre multiplicatif est alors ;*

$$\Xi_{EC}(\beta) = |\mathbf{G}_{EC}(H + i2\pi\beta)|^2 = \left| \frac{\sum_{n=0}^{p} (-1)^n \beta'_n (s+1-n)_n}{\sum_{n=0}^{q} (-1)^n \alpha'_n (s+1-n)_n} \right|^2, \tag{II.276}$$

*où on a $s = H + i2\pi\beta$ et on note $(s+1-n)_n = (s+1-n)(s+2-n)\ldots(s-1)s$.*

*Démonstration* — Le bruit multiplicatif est un bruit blanc pour le spectre de Mellin et vérifie alors que $|(\mathbf{M}V)(H + i2\pi\beta)|^2 = \sigma^2$. On suppose que $\sigma^2 = 1$ pour avoir un processus normé. Il est de plus $H$-ss donc sa sortie l'est aussi (ce qui nous était déjà assuré par la Proposition II.19).

La relation de filtrage spectral (II.169) pour les processus $H$-ss donne le spectre multiplicatif $\Xi_{EC}(\beta)$ du processus d'Euler-Cauchy, quand on la prend en $s = H + i2\pi\beta$ :

$$\Xi_{EC}(\beta) = |\mathbf{G}_{EC}(H + i2\pi\beta)|^2 \, |(\mathbf{M}V)(H + i2\pi\beta)|^2 = |\mathbf{G}_{EC}(H + i2\pi\beta)|^2 . \tag{II.277}$$

□

Corollaire II.9: *Soit un système d'EC d'ordre* $(p,q)$ *écrit comme dans (II.271), son noyau de filtrage par convolution multiplicative* $g_{EC}(\theta)$ *est :*

$$g_{EC}(\theta) = \sum_{l=0}^{N'} \sum_{j=0}^{\alpha_l} C_{lj} (\ln \theta)^j \theta^{-\mu_l}, \tag{II.278}$$

*où les* $\mu_l$ *sont les* $N'$ *pôles de* $\mathbf{G}_{EC}(s)$, $\alpha_l$ *est l'ordre de multiplicité de ces pôles et les* $C_{lj}$ *viennent des résidus en ces pôles.*

*Démonstration* — Cette forme vient de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\mathbf{G}_{EC}(s)$ qui est la fonction de transfert du filtre EC et comme telle est la transformée de Mellin du noyau intégral du système. L'application directe de la transformation inverse à cette décomposition résulte en la forme donnée. Le calcul nécessite de regarder les résidus en $\mu_l$ de la décomposition et ils s'obtiennent par :

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{\sigma+i\mathbb{R}} \frac{t^{-s}}{(s-\mu_l)^k} \mathrm{d}s = \frac{1}{(k-1)!} (-\ln t)^{k-1} t^{-\mu_l}. \tag{II.279}$$

Les $C_{lj}$ sont des constantes qui peuvent ainsi être exprimées à l'aide des résidus au pôle $\mu_l$ des éléments simples de la fonction de transfert.

□

Corollaire II.10: *Soit* $\epsilon > 0$*. Pour tout processus* $\{X(t), t > 0\}$*,* $H$*-ss au sens large, de carré sommable, et de spectre multiplicatif continu, il existe un processus d'EC d'ordre fini tel que :*

$$|\Xi_{EC}(\beta) - \Xi_X(\beta)| < \epsilon \qquad \textit{pour tout} \quad -\infty < \beta < \infty. \tag{II.280}$$

*Démonstration* — On a vu que tout processus $H$-ss raisonnable peut être représenté par un filtre covariant en échelle dont l'entrée est le bruit $V(t)$ d'indice $H$. Ce filtre a donc une certaine fonction de transfert $\mathbf{G}(s)$

Le problème est maintenant une question d'approximation d'une fonction, définie sur un domaine du plan complexe, par une fraction rationnelle. Cette question est donc la même que celle envisagée dans la modélisation paramétrique de processus stationnaire en modèle ARMA et trouve une solution comme corrolaire du théorème de Bochner. Nous renvoyons donc à la littérature classique sur ce sujet, par exemple [Pri81].

□

**Stabilité de filtres covariants en échelle.** Le problème de stabilité de puissance est résolu par le critère de Cauchy de la même manière que pour les filtres stationnaires [Pri81]. Il revient à avoir une réponse impulsionnelle qui décroit suffisamment vite vers zéro. Pour être précis on veut que les parties réelles des pôles $\mu_j$ soient toutes positives. Le critère de stabilité en puissance est donc que les pôles de la fonction de transfert $\mathbf{G}(s)$ du filtre covariant en échelle sont tous dans le demi-plan de partie réelle positive.

**Exemple : retour sur le modèle de Noret.** Ce modèle a été défini comme le transformé de Lamperti du processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètre $a$. Il vérifie l'équation différentielle (II.205) :

$$t \frac{\mathrm{d}X_{H,a}(t)}{\mathrm{d}t} + (a - H)X_{H,a}(t) = V(t). \tag{II.281}$$

Par conséquent sa fonction de transfert est $\mathbf{G}_{H,a}(s) = 1/[(a - H) + s]$ pour $s \in \mathbb{C}$ et son spectre multiplicatif est : $\Xi_{H,a} = \sigma^2/|a + i2\pi\beta|^2$, où $\sigma^2$ est la variance du bruit blanc multiplicatif $V$. Le modèle est ainsi le filtre invariant en échelle passe-bas le plus simple. Nous utiliserons cette forme comme une manière de synthétiser des séquences aléatoires obéissants au modèle.

# 5 Transformation de Lamperti et séquences aléatoires

La théorie développée jusqu'ici concerne les signaux définis à tout instant, pour un temps continu. Ce paragraphe montre comment adapter les concepts développés ici à l'utilisation pratique sur des signaux échantillonnés d'une manière ou d'une autre. Nous montrons en 5.1 comment la décomposition de Mellin peut être efficacement calculée numériquement, ensuite comment la transformation de Lamperti (et l'opération de dilatation qui lui est fondamentalement associée) s'accommodent de l'échantillonnage. Nous illustrons enfin au 5.3, sur quelques exemples, le traitement numérique de signaux auto-similaires par les outils proposés, ainsi que les synthèses de processus $H$-ss que permettent cette approche.

## 5.1 Transformation de Mellin discrète

La transformation de Mellin s'adapte aux calculs numériques pratiques sans plus de difficultés que le transformation de Fourier. Une manière est de discrétiser le calcul de l'intégrale définissant $\mathbf{M}$ selon (II.52) et parfois cette solution sera la plus simple.

Une étude mathématique et algorithmique plus avancée a permis à Ovarlez, Bertrand et Bertrand de construire une transformation de Mellin proprement définie pour des signaux à temps discret. Elle est proposée dans [BBO90], [Ova92] et exposée avec un souci pédagogique dans [BBO96]. Nous ne ferons que donner les grandes lignes de cette adaptation à $\mathbf{M}$ aux signaux échantillonnés, et ajoutons ensuite des remarques sur l'utilisation pratique.

### 5.1.1 Échantillonnages conjoints en temps et en échelle de Mellin

Le principe de la transformation de Fourier à temps discret est qu'on sait trouver des conditions d'échantillonnage du signal en temps et du spectre numérique en fréquence qui sont conjoitement admissibles si le signal de départ respecte la limite du théorème d'échantillonnage de Shannon (voir par exemple [ML96]). Il en est de même pour la transformation de Mellin, en prenant la précaution nécessaire de modifier la base de discrétisation qui ne peut plus être simplement linéaire en temps.

Nous avons argumenté en effet que les opérateurs reliés à la transformation de Mellin sont les transformés unitaires par Lamperti des opérateurs en temps. Ainsi la base de décomposition en temps covariante est donnée par les impulsions de Dirac $e^{(H+1)t}\delta(u - t_0 e^t)$ de l'équation (II.90). L'échantillonnage dans la variable de Mellin peut lui être régulier (puisque la transformation $\mathbf{M}$ admet les translations en $\beta$ comme une de ses propriétés de covariance principale). Pour ces raisons, Ovarlez introduit les échantillonnages suivants.

• La discrétisation en temps par le peigne de Dirac géométrique $Ш_q^g$ de raison $q$ et le signal échantillonné géométriquement en temps $X^{(g)}(t)$ sont donnés par :

$$Ш^g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^n \delta(t-q^n) \qquad \text{et} \qquad X^{(g)}(t) = X(t)Ш^g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(q^n) q^n \delta(t-q^n). \tag{II.282}$$

La décomposition de Mellin associée à $X^{(g)}(t)$ est alors une version périodique de celle associée à $X(t)$ de période $1/\ln q$. La condition, équivalente au théorème de Shannon, pour éviter le repliement spectral est que $1/\ln q \geq (\beta_2 - \beta_1)$ où $[\beta_1 \ \beta_2]$ est le support en échelle de Mellin de la décomposition $(\mathbf{M}_H X)(\beta)$.

• La discrétisation arithmétique $Ш_{1/\ln Q}$ en échelle de Mellin de raison $1/\ln Q$ et la décomposition de Mellin échantillonnée $(\mathbf{M}_H^e X)$ sont donnés par :

$$Ш_{1/\ln Q}(\beta) = \frac{1}{\ln Q} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\beta - \frac{n}{\ln Q}\right) \tag{II.283}$$

$$(\mathbf{M}_H^e X)(\beta) = \frac{1}{\ln Q} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mathbf{M}_H X)(\beta) \delta\left(\beta - \frac{n}{\ln Q}\right). \tag{II.284}$$

Le signal temporel associé à $(\mathbf{M}_H^e X)(\beta)$ est une version périodisée par dilatations du signal de départ $X(t)$ (voir figure II.10), de raison géométrique $Q$. La condition pour que les composantes périodiques ne se superposent pas (et que la reconstruction du signal initial soit possible) est que $Q \geq T_2/T_1$ où le support temporel de $X(t)$ est inclu dans $[T_1 \ T_2]$.

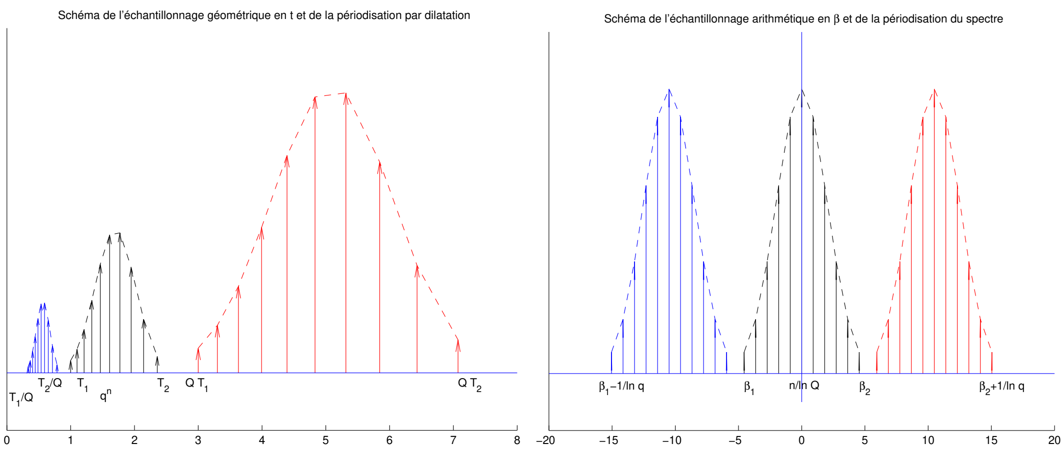



Fig. II.10: Schématisation de l'échantillonnage conjoint en temps (à gauche) et en échelle de Mellin (à droite) qui indique les périodisations induites.

• L'échantillonnage conjoint en temps et en échelle est ensuite du type $t_n = q^n$ et $\beta_n = n/\ln Q$ pour $N$ points dans chaque domaine avec la relation $Q = q^N$.

La contrainte de Shannon est que $N \geq (\beta_2 - \beta_1)\ln(T_2/T1)$ pour que la restriction des signaux échantillonnés, que ce soit en temps ou en fréquence, donne le signal de départ sans repliement.

**Notations :** nous utiliserons les notations suivantes pour les séquences à temps discret en fonction du type d'échantillonnage. Les raisons d'échantillonnage seront parfois implicites.

$$\begin{array}{ll} \text{Arithmétique :} & X_\tau[n] = X(n\tau) \\ \text{Géométrique :} & X_q^{(g)}[n] = X(q^n) \\ \text{Logarithmique :} & Y_\tau^{(l)}[n] = Y\left(\ln(n\tau)\right). \end{array} \tag{II.285}$$

### 5.1.2 Formules de la transformation de Mellin discrète

**Transformée de Mellin rapide.** Étant supposés réalisés les deux échantillonnages ci-dessus, en $X_q^{(g)}[n] = X(q^n)$ et $(\mathbf{M}_H^e X)(\beta_n) = (\mathbf{M}_H^e X)_{1/\ln Q}[n]$, nous trouvons directement les formules directes et inverses de la transformation de Mellin discrète (TMD) qui relie ces deux formes. Nous utilisons ci-dessous les entiers $K \leq \beta_1 \ln Q$ et $M \leq (\ln T_1)/(\ln q)$.

$$(\mathbf{M}_H^e X)_{1/\ln Q}[m] = \sum_{n=M}^{M+N-1} q^{-nH} X_q^{(g)}[n] e^{-i2\pi nm/N}, \tag{II.286}$$

$$X_q^{(g)}[n] = \frac{q^{nH}}{N} \sum_{n=M}^{M+N-1} (\mathbf{M}_H^e X)_{1/\ln Q}[k] e^{+i2\pi nk/N} \tag{II.287}$$

On reconnaît que les deux séquences de $N$ points : $q^{-nH}X_q^{(g)}[n]$ et $(\mathbf{M}_H^e X)_{1/\ln Q}[m]$, sont obtenues l'une de l'autre par la transformation de Fourier discrète directe ou inverse. Nous disposons ainsi d'un algorithme rapide, celui de la FFT[13], pour calculer les décomposition de Mellin. Nous remarquons aussi que la séquence $q^{-nH}X_q^{(g)}[n]$ est le signal délampertisé regardé sur un échantillonnage arithmétique de raison $\ln q$.

**Formule de reconstruction à temps continu.** À l'image du résultat de reconstruction connu pour la FFT, la transformation de Mellin rapide admet une reconstruction à tout instant qui se fonde sur la sommation du noyau de Poisson. Elle est exacte sous la condition de type Shannon que nous avons indiquée.

$$X(t) = t^H \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{-nH} X_q^{(g)}[n] \frac{\sin \pi \left[(\ln t/\ln q) - n\right]}{\pi \left[(\ln t/\ln q) - n\right]}. \tag{II.288}$$

**Estimation de la condition de Shannon.** Il est rare de savoir a priori borner le contenu en échelle au sens de Mellin d'un signal analysé. L'interprétation de cette échelle comme étant le taux de modulation des chirps hyperboliques qui décomposent le signal permet de proposer une estimation de la borne [BBO96]. Elle repose sur le diagramme de la figure II.11,

[13] FFT pour *Fast Fourier Transform* ou transformée de Fourier rapide.

où est représenté l'extension en temps et fréquence du signal[14] et les hyperboles limites qui sont les fréquences instantanées des chirps extrêmes à considérer. Nous adaptons l'étude de [BBO96] qui s'applique à la décomposition par $\mathbf{M}$ sur la représentation en fréquence tandis que nous l'utilisons sur les fonctions du temps.

Nous notons $B$ la demi-largeur du support en fréquence (dans $[-B\ B]$). $T_1$ et $T_2$ sont les limites de la définition du signal en temps. Le support en échelle entre $[-\beta_0\ \beta_0]$ correspond dans le cas le plus défavorable à avoir une contribution en fréquence $\pm B$ au temps $t = T_2$. Il faut donc que $\beta_0 \geq BT_2$. Comme le pas d'échantillonnage en $\beta$ est $1/\ln Q = 1/\ln(T_2/T_1)$ qu'on a $\beta_0 = N/2\ln Q$, la condition de Shannon semi-empirique est la suivante :

$$\text{Shannon semi-empirique :} \quad N \geq 2BT_2 \ln \frac{T_2}{T_1} \tag{II.289}$$

Notons que cette condition reste inchangée quel que soit le pas d'échantillonnage réel de départ puisqu'alors $T_2/T_1$ est invariant et $BT_2$ aussi. On peut travailler alors comme si l'échantillonnage était de pas unité. Si il est expérimentalement bien échantillonné, nous avons $B \leq 1/2$ et un critère suffisant (et large) est que $N \geq T_2 \ln T_2/T_1$.

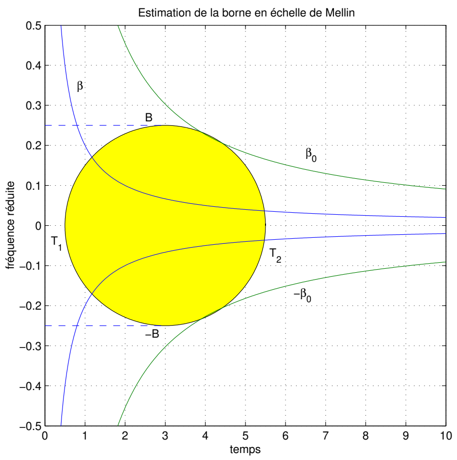



Fig. II.11: Estimation dans le plan temps-fréquence de l'extension en échelle de Mellin d'un signal.

**Transformation bilatérale.** La décomposition dont nous venons de donner la formule pour des séquences discrètes est une recherche de la contibution des différents chirps hyperboliques *descendants* dans le signal, c'est-à-dire dont la fréquence diminue en s'éloignant de l'origine des temps en $t = 0$. Les signaux regardés, en plus de devoir être à support borné dans $[T_1\ T_2]$ pour admettre un double échantillonnage sans repliement, ne sont testés que sur leur partie causale de toute façon, dans $\mathbb{R}_*^+$.

Nous pouvons envisager cependant une transformation de Fourier bilatérale, où l'on regarde parallèlement la décomposition du signal défini sur $\mathbb{R}_*^-$ en ses chirps *montants* vers

[14] Le signal considéré n'a pas de raison d'être stationnaire, ni même invariant en échelle et les calculs pratiques regardés ici tiendront au chapitre suivant pour les méthodes abordant les signaux non invariants.

l'origine des temps. Les formules de transformation rapide sont semblables à celles que nous avons données, au changement de variable $t \to -t$ près.

Cette double décomposition des signaux bilatéraux (non causaux) est utile pour les études non stationnaires, en particulier quand nous cherchons à faire glisser l'origine du temps.

**Le cas des signaux à valeur dans $\mathbb{R}$.** Les signaux à valeurs réelles vérifient la condition de symétrie hermitienne : $(\overline{\mathbf{M}_H X})(\beta) = (\mathbf{M}_H X)(-\beta)$. Le spectre est ainsi redondant en information entre les parties positives et négatives. On sait que le signal complexe analytique associé $(1 + i\mathbf{H})X(t)$ reporte l'ensemble du spectre sur les échelles positive (comme pour la transformation de Fourier).

Nous avons ainsi avantage à travailler dès que possible sur le signal analytique. La représentation du spectre de Mellin est plus condensée. De plus nous pouvons alors représenter sur un même graphe les transformations bilatérales (la contribution en chirp montant d'un côté et celle en chirp descendant de l'autre). Enfin, pour l'extension de méthodes non stationnaires, l'avantage des signaux analytiques est de réduire les auto-interférences possibles des représentations quadratiques, en supprimant celles entre les fréquences positives et négatives.

**Remarque sur la norme des signaux.** Nous savons que la transformation de Mellin d'indice $H$ est intéressante pour la mesure $t^{-2H-1}\mathrm{d}t$. La norme (ou énergie) des signaux doit alors être calculée comme égale à :

$$||X||_H^2 = \int_0^{+\infty} |X(t)|^2 t^{-2H-1}\mathrm{d}t. \tag{II.290}$$

Nous normalisons les signaux par la norme convenable dans le paragraphe suivant car il s'agit de comparer des simulations faites avec un $H_a$ d'analyse qui peut varier et donc qui donneraient (sans la normalisation convenable) des amplitudes de spectre très différentes.

### 5.1.3 Étude de difficultés pratiques

**Indice de normalisation incertain.** Quand on ne dispose pas d'argument théorique pour choisir un indice $H_a$ d'analyse précis, correspondant par exemple à celui d'auto-similarité, il faut étudier l'erreur commise en adoptant un $H_a \neq H$. Elle est en fait faible. Nous représentons en figure II.12 des éléments de cette étude. La transformation de Mellin discrète (TMD) a été appliquée à un chirp de Mellin d'indice $H$ mais avec des $H_a$ pour l'analyse variables. On constate que pour une très large gamme de $H_a$ le pic reste centré en $\beta_0 = 225.4$ vrai du chirp. La seule influence est que plus $H_a$ s'éloigne de $H$, plus le pic s'élargit et sa hauteur maximale diminue.

On peut comprendre l'élargissement de cette hauteur en calculant la transformation $(\mathbf{M}_{H_a} E_{\beta_0}^H)(\beta)$, qui ne conduit à une distribution $\delta(\beta - \beta_0)$ qui si $H = H_a$. Sinon, des intégrales classiques donnent :

$$\text{Si } H < H_a, \int_{T_1}^{+\infty} t^{H+i2\pi\beta_0} t^{-H_a-1-i2\pi\beta}\mathrm{d}t = \frac{-T_1^{H-H_a+i2\pi(\beta_0-\beta)}}{(H-H_a)+i2\pi(\beta_0-\beta)}, \tag{II.291}$$

$$\text{Si } H > H_a, \int_0^{T_2} t^{H+i2\pi\beta_0} t^{-H_a-1-i2\pi\beta}\mathrm{d}t = \frac{-T_2^{H-H_a+i2\pi(\beta_0-\beta)}}{(H-H_a)+i2\pi(\beta_0-\beta)}. \tag{II.292}$$

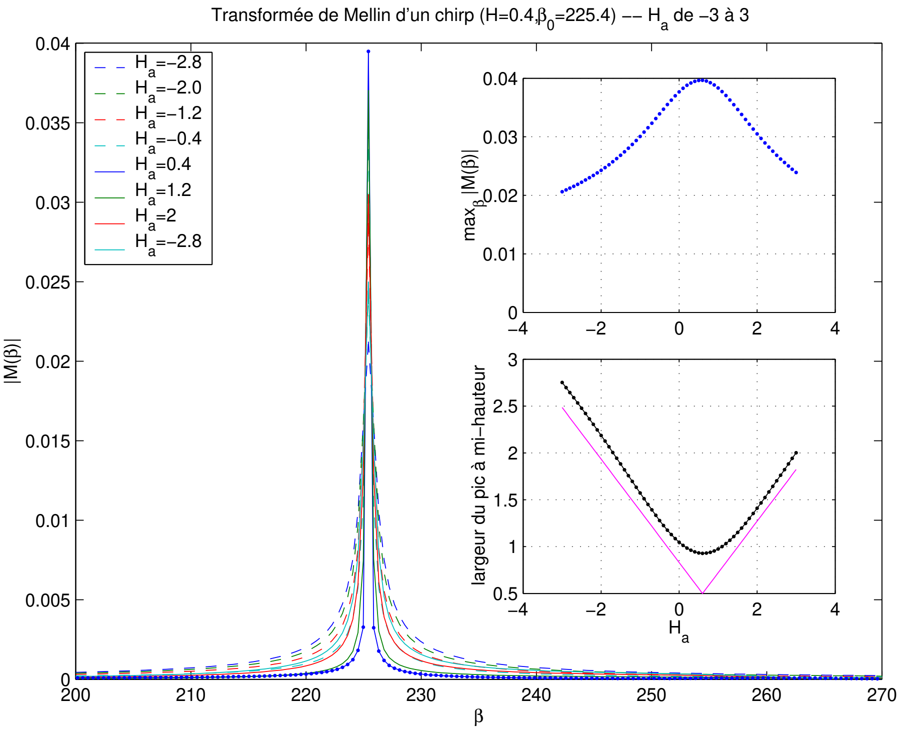



Fig. II.12: Transformation de Mellin discrète d'un chirp $E_\beta^H(t)$ ; l'indice d'amplitude $H_a$ pour la TMD varie de -3 à 3. On a tracé en encart la hauteur des pics et en-dessous leur largeur à mi-hauteur (les points sont le calcul numérique comparé à la variation en – que prévoit le calcul analytique du texte). Remarquons que le pic s'élargit et diminue quand on s'éloigne du $H_a = H + 0.2$.

Dans les deux cas la largeur est principalement celle d'une lorentzienne et le pic de la valeur absolue de la transformée de Mellin est de largeur à mi-hauteur évoluant comme $\sqrt{3}|H - H_a|/\pi$. C'est ce qui est représenté (par un trait –) dans l'encart du bas de la figure II.12. Une largeur d'origine numérique (échantillonnage du chirp tronqué dans $[T_1\ T_2]$ qui conduit à un profil en sinc même si $H_a = H$) se rajoute à cet effet.

Cependant, la conclusion principale est surtout que la TMD est peu sensible en pratique à une mauvaise connaissance de l'indice d'analyse. De plus il est impossible d'utiliser l'évolution de ces pics pour estimer le $H$ du signal. L'évolution de la largeur du pic est finalement lente et dans un spectre de Mellin plus compliqué que celui d'un seul chirp hyperbolique, elle ne se séparerait sûrement pas dans l'ensemble du spectre. Comme le pic n'est pas en fait maximum quand $H = H_a$ numériquement mais pour un indice biaisé $H + 0.2$ (voir figure II.13) avec un biais dû à l'échantillonnage (et surtout aux troncatures), nous abandonnons toute idée d'estimation de $H$ ainsi.

Retenons donc qu'une mauvaise estimation, ou un mauvais choix a priori, de $H_a$ pour calculer le spectre de Mellin ne sont pas rédhibitoires ni génants en fait et que les études du spectre de Mellin n'aident pas pour estimer $H$. Ce n'est pas étonnant : le formalisme pour les processus $H$-ss aide à décrire les propriétés *autres que celles liées à $H$* principalement ; il est alors plutôt rassurant qu'elles puissent être étudiées numériquement avec une tolérance

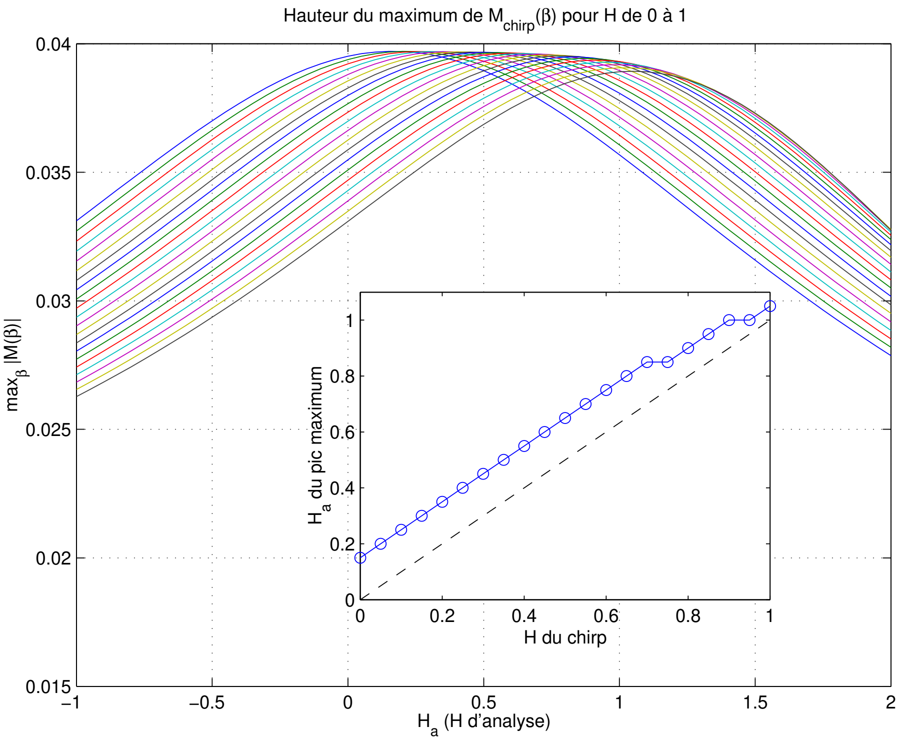



Fig. II.13: Étude de la hauteur du pic maximal pour un chirp $H$ en fonction de $H_a$ d'analyse. Les courbes sont pour $H$ de 0 à 1, se décalant régulièrement vers la droite. L'écart montre la position du maximum pour $H$ en fonction de $H_a$ ; bien que la relation reste globalement linéaire, un biais systématique de 0.2 environ existe.

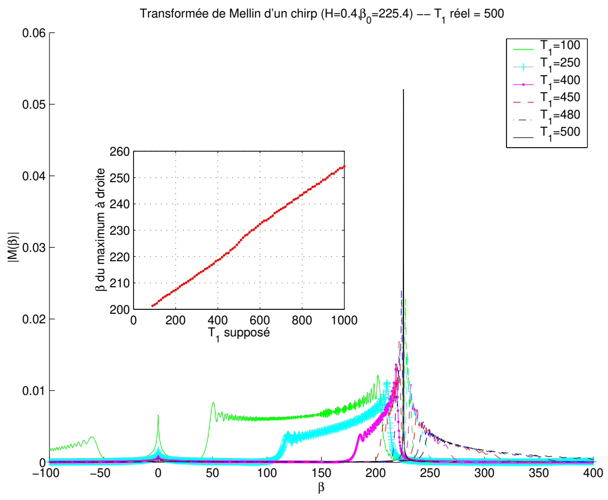
suffisante sur l'estimation de $H$.

**Origine des temps incertaine.** Si c'est l'origine des temps qui est inconnue ou incertaine, le calcul d'une décomposition de Mellin est beaucoup plus délicat. La figure II.14 indique des résultats d'analyse en paramètre de Mellin en supposant que les données obtenues sont avec un certain $T_1$ (indiqué en légende) alors que le $T_1$ réel n'est pas celui-là. On remarque que dès que ce temps d'origine supposé est faux, le chirp de Mellin se décompose sur un spectre qui devient rapidement large – ainsi les contributions à un $\beta$ donné vont se mélanger très vite.

La structure obtenue est une répartition à bande large en $\beta$. Le pic maximum n'est pas à la bonne valeur, la largeur est rapidement grande et même le spectre de Mellin est de valeur très petite au $\beta_0$ du chirp.

**Interprétation tomographique des erreurs possibles.** La figure II.15 illustre l'erreur commise en se trompant sur l'origine du signal. La transformée de Mellin discrète d'un chirp hyperbolique, représenté ici en temps et fréquence[15], est indiquée sur les dessins du bas alors que dessus une interprétation tomographique de la TMD est figurée.

[15] Les études des représentations temps-fréquence seront présentées au chapitre III.



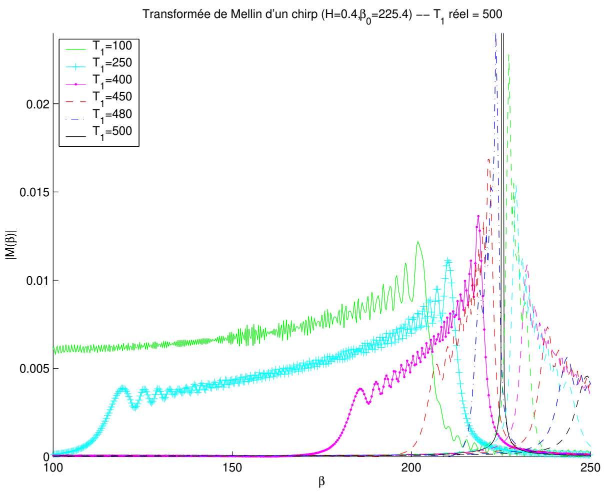




Fig. II.14: Étude de la décomposition d'un chirp ($H = 0.4$ et $\beta_0 = 225.4$) en fonction du temps d'origine $T_1$ supposé. À gauche on montre les pics pour différents $T_1$ (de 100 à 1000 ; les courbes avec $T_1 > 500$ sont en pointillés et donnent les pics à droite). En encart on montre la position du pic maximum en fonction du $T_1$ supposé. Seul $T_1 = 500$ (vraie position) localise le pic au bon endroit. À côté on a zoomé sur le pic pour montrer la structure à bande large obtenue dès que $T_1$ est faux, et qui va en s'élargissant.

Considérant que la décomposition de Mellin est la projection sur la base de chirps hyperboliques, l'interprétation tomographique dans le plan temps-fréquence[16] dit que nous sommes en train de corréler une image temps-fréquence à des trajectoires hyperboliques – tracée en pointillés sur l'image temps-fréquence du chirp.

Quand l'origine est correcte, on voit bien qu'une seule hyperbole se superpose significativement avec le signal et la TMD montre un pic localisé. Si l'origine est mal connue, un ensemble d'hyperboles va croiser la trace du signal dans le plan $(t, f)$ et cela explique l'extension spectrale de la mesure en échelle de Mellin.

L'existence de coupures numériques en $t$ et $f$ dans le signal analysé, permet de préciser que ce specte étendu est à bande limitée (le résultat est 0 dès que l'hyperbole d'analyse d'origine décalée ne croise pas celle du signal). Si on s'autorisait à regarder sur un temps infini le signal (et avec une précision infinie pour l'échantillonnage, donc du temps continu), la contribution avec $\beta = \beta_0$ deviendrait alors toujours dominante sur toutes les autres (car intégrée sur une portion semi-infinie de la trajectoire en temps-fréquence pour $t \to +\infty$) ; un pic centré sur $\beta_0$ serait retrouvé. En cela le résultat est en accord avec celui de Gray et Zhang [GZ88] qui prouvent que la corrélation $R_X(t, t\tau)$ peut être estimée[17] même si on ne connait pas avec précision l'origine, mais en autorisant à regarder jusqu'à un horizon temporel rejetté à l'infini. En pratique le temps d'observation est limité et le résultat peu exploitable.

En conséquence, le choix de l'origine des chirps que l'on veut analyser est crucial. Il nous faut garder cette remarque à l'esprit. C'est une motivation pour obtenir les façons de

[16] Nous verrons au chapitre III pourquoi cette interprétation est justifiée mais, pour la commodité de l'explication, nous faisons dès maintenant appel dans ce paragraphe à cette lecture des outils de Mellin.

[17] L'estimation de $R_X(t, t\tau)$ revient justement à obtenir la représentation de Mellin du signal.

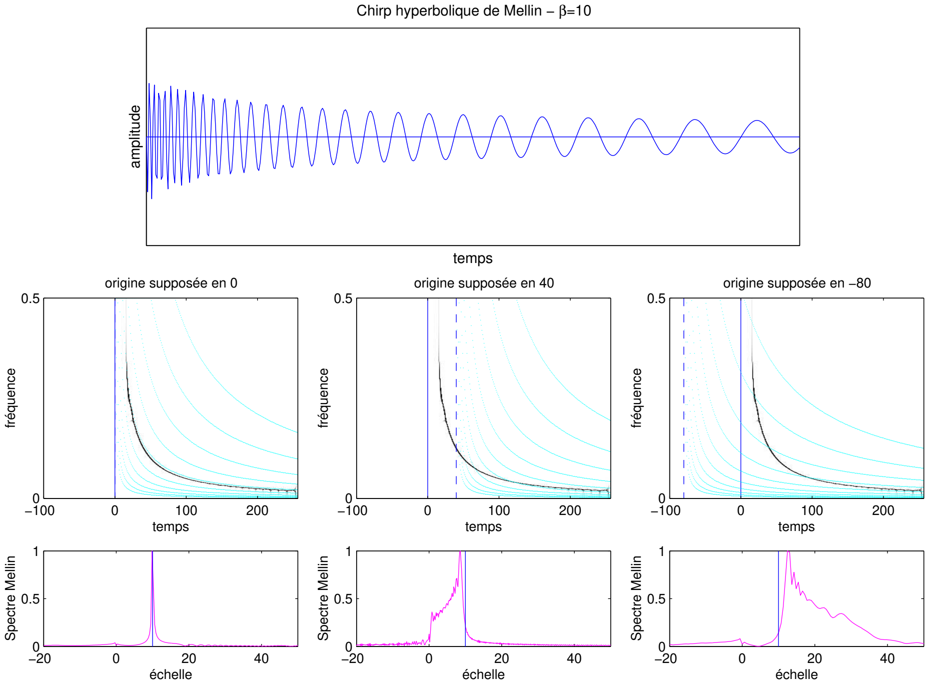



Fig. II.15: Interprétation tomographique de la transformation de Mellin et de l'erreur due à une origine incertaine. Le signal est représenté en haut, et sa décomposition en temps $t$ et fréquence $f$ (spectrogamme réassigné) est indiquée en dessous. De gauche à droite on montre les cas où l'origne supposées pour l'analyse est correcte (trait plein), trop à droite ($t_0 = 40$) ou trop à gauche ($t_0 = -80$) (l'origine pour l'analyse est le trait pointillés). En pointillés et en gris sont tracées les hyperboles d'analyse qui croisent plus ou moins l'hyperbole en noir qui est la trace en $(t, f)$ du signal. Le fait que la signature est tronquée (ici par exemple vers $f \simeq 0.25$ près de l'origine des temps) explique que la bande spectrale de la TMD estimée est aussi limitée quand l'origine est fausse. Sur les transformée de Mellin du bas, on a indiqué d'un trait la position de l'échelle de Mellin réelle du chirp.

calculer en pratique des quantités reflétant le spectre de Mellin (donc le contenu en chirp hyperbolique d'un signal) moins sensibles à l'origine des temps.

**Bruit autour du chirp d'oscillation nulle.** La figure II.14 révèle aussi la présence d'un bruit autour du paramètre d'oscillation nulle. C'est un parasite du calcul très fréquent. L'interprétation simple est à nouveau tomographique. Les $\beta$ proches de zéro correspondent à des hyperboles très basses, proches de l'axe du temps dans la zone $[T_1\ T_2]$ sur laquelle porte la TMD et par conséquent détectent toute oscillation de très basse fréquence ou toute constante dans le signal.

La décomposition près de $\beta = 0$ est ainsi de façon générale peu fiable. Il est alors parfois intéressant de s'affranchir des basses fréquences par un filtrage passe-bas. Notons que, outre les difficultés qui viennent d'être exposées, la TMD partage les propriétés de la FFT pour ce qui est de la robustesse générale vis-à-vis de bruits. Jusqu'à un RSB $\geq 0$ des pics dans la transformée sont aisément discernables.

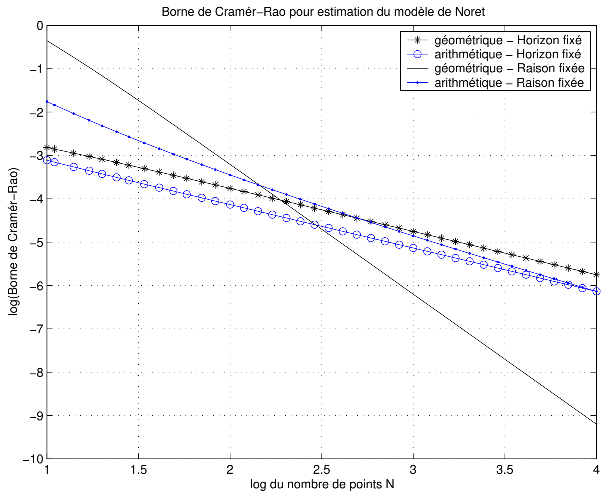



Fig. II.16: Évolution de la borne de Cramér-Rao pour l'estimation de $H$ du modèle $X_{H,a}$ de Noret [NG99]. Les échantillonnages géométriques et arithmétiques sont comparés. Si l'horizon d'observation est imposé, le deuxième est meilleur ; si c'est la raison de la série, le premier est plus efficace en général (quand l'horizon d'observation devient suffisamment plus grand que celui que donne l'échantillonnage arithmétique). L'horizon d'observation fixé est $L = 10^4$.

### 5.1.4 Échantillonnage régulier ou logarithmique ?

Le point le plus délicat pour effectuer l'analyse en Mellin numériquement réside dans le problème de l'échantillonnage : il doit être géométrique pour l'algorithme de TMD rapide alors que l'habitude est d'employer des séquences échantillonnées de manière arithmétique.

Les relations entre les deux échantillonnages ne sont pas innocentes. Si l'on suppose que le signal est observé entre 0 et un temps $T$, le nombre de points en échantillonnage usuel est proportionnel à $T$ alors qu'en échantillonnage géométrique il va comme $\ln T$ ; à l'inverse l'horizon d'observation $T$ augmente beaucoup plus vite pour une série géométrique, en $e^N$, au lieu d'être proportionnel à $N$ pour un même nombre de points. L'astuce est en fait qu'il y a deux paramètres à fixer indépendamment sur les trois : $N$, la raison, et l'horizon d'observation $T$. Selon la situation envisagée, différents commentaires sont possibles.

• Dans un contexte d'analyse (décomposition sur la base de Mellin), il a été montré par différents auteurs que l'échantillonnage géométrique est plus efficace pour l'estimation de processus auto-similaires que l'échantillonnage régulier. Dans [VV99] il est explicitement montré que des méthodes d'estimation au maximum de vraisemblance de $H$ convergent plus vite *à nombre de point identique* pour une série géométrique. De même, E. Noret a établi la borne de Cramér-Rao pour l'estimation de $H$ du modèle $H$-ss qu'il propose [NG99]. Il montre ainsi qu'elle est plus faible à même nombre de points $N$ pour la série géométrique que pour des instants régulièrement espacés. En fait ces études comparent série géométrique et arithmétique à *raison d'échantillonnage fixée* ; l'horizon d'observation n'est alors pas du tout le même et, étant plus grand avec $q^n$, la série géométrique est plus efficace pour l'estimation.

• Le cas géométrique donne en fait une estimée et une variance comparable mais un peu moins bonne que ce permet la série arithmétique ayant *le même horizon d'observation.* Ainsi si l'on mesure le signal jusqu'à un certain temps, on perd un peu d'information en prenant la série géométrique à $H$ fixé. En revanche si le critère est $N$ (pour des raisons algorithmiques) et un pas d'échantillonnage fixé, la série géométrique permet d'aller beaucoup plus loin en temps et est donc bien préférable à l'échantillonnage usuel qui sonde un horizon court.

Ceci est illustré en calculant les bornes de Cramér-Rao pour le modèle $X_{H,a}(t)$ du 4.3.1 (en reprenant le calcul théorique de [NG99]) dont nous donnons l'évolution en figure II.16 en fonction du nombre $N$ de points, soit à $T$ identique, soit à raison fixée.

• La solution naturelle et en quelque sorte optimale d'une synthèse à l'aide du spectre de Mellin est d'obtenir une séquence échantillonnée géométriquement. Nous allons examiner comment on peut repasser à l'échantillonnage usuel.

## 5.2 Processus à temps discret et transformation de Lamperti

### 5.2.1 La solution « exacte » : jouer avec les échantillonnages

**Définir $\mathcal{L}_H$ pour les séquences numériques.** La transformation de Lamperti demande de jongler entre des échantillonnages a priori différents pour la séquence initiale et celle transformée. Nous faisons le choix de nous concentrer sur les manières de revenir à des méthodes de traitement numérique usuelles, c'est-à-dire avec des échantillonnages réguliers.

La définition la plus simple de $\mathcal{L}_H$ pour des séquences numériques est de passer par un changement du type d'échantillonnage. Ce n'est que le reflet de ce qu'on pourrait définir $\mathcal{L}_H$ comme $\mathcal{L}_H = \mathbf{M}_H{}^{-1}\mathbf{F}$ selon (II.78) ; ainsi la construction de la TMD que nous venons de voir prouve que $\mathcal{L}_H$ envoie une série en temps arithmétique sur une géométrique et inversement $\mathcal{L}_H{}^{-1}$ envoie une série arithmétique sur une série logarithmique.

$$(\mathcal{L}_H Y)_q^{(g)}[n] = X(q^n) = q^{nH} Y_{\ln q}[n], \tag{II.293}$$

$$(\mathcal{L}_H{}^{-1} X)_\tau^{(l)}[n] = Y(\ln n\tau) = (n\tau)^{-H} X_\tau[n]. \tag{II.294}$$

**Obtenir des séquences arithmétiques.** Alors que l'échantillonnage géométrique sur $N$ points $X_q^{(g)}[n]$, produit par $\mathcal{L}_H$, se révèle pratique pour calculer numériquement $\mathbf{M}$, nous devons regarder comment réaliser l'interpolation qui permet de revenir à une séquence en temps discrets linéaires pour relier ces méthodes à celles qui existent par ailleurs. Le problème inverse sera aussi regardé pour le processus délampertisé $Y_\tau^{(l)}[n]$.

• *Passer de $X_q^{(g)}[n]$ à $X_\tau[m]$.* La solution qui ne laisse de côté aucune information est d'utiliser la formule de sommation de Poisson pour avoir $M$ points de $X_\tau[m]$ et on a :

$$\begin{aligned} X_\tau[m] = X(m\tau) &= (m\tau)^H \sum_{n\in\mathbb{N}} q^{-nH} X_q^{(g)}[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\ln m\tau}{\ln q} - n\right) && \text{(II.295)} \\ &= (m\tau)^H \sum_{n\in\mathbb{N}} Y_{\ln q}[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\ln m\tau}{\ln q} - n\right). && \text{(II.296)} \end{aligned}$$

Le pas d'échantillonnage $\tau$ peut être choisi a priori quelconque. Cependant la limite de Shannon $F_S$ de la série géométrique originelle évolue au cours du temps comme $F_S(t) =$

$1/(2t(q-1))$. Les deux choix extrêmes sont alors : $\tau = q^{N-1}(q-1)$ est le pas le plus grossier tel que à tout instant $m\tau$ le signal reconstruit $X_\tau[m]$ est exact, et son spectre juste jusqu'à la limite de Shannon – cependant la finesse de détails accessibles aux petits temps est perdue ; $\tau = q-1$ est le pas le plus fin mais au fil du temps le signal est mal défini car seules les premiers intants de l'échantillonnage géométrique décrivent bien les fréquences que ce pas faible admet exister.

Il faudra trouver dans chaque situation un compromis entre l'abondon de détails aux courts temps et ce filtrage en fréquence aux temps longs dû à l'échantillonnage géométrique. Notons enfin que sans être exacte pour le comportement fréquentiel, une interpolation simple au lieu de la sommation de Poisson est algorithmiquement beaucoup plus rapide et, quand on est dans une zone où le pas $\tau$ est plus grand ou comparable au pas entre points géométriques, n'induit qu'une erreur faible.

• *Passer de $Y_\tau^{(l)}[n]$ à $Y_\tau[m]$.* La solution optimale est donnée par la reconstruction de à partir de $X_\rho[n]$.

$$Y_\tau[m] = e^{-Hm\tau} \sum_{n\in\mathbb{N}} X_\rho[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{e^{m\tau}}{\rho} - n\right) \tag{II.297}$$

$$= e^{-Hm\tau} \sum_{n\in\mathbb{N}} (n\tau)^H Y_\rho^{(l)}[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{e^{m\tau}}{\rho} - n\right). \tag{II.298}$$

Le problème de changement de la fréquence maximale représentée dans $Y_\tau^{(l)}[n]$ est analogue, mais inverse : c'est aux temps longs que le processus est de plus en plus détaillé. La fréquence limite de Shannon imposée par l'échantillonnage logarithmique est alors en fonction du temps $F_S(t) = 1/(2\ln(1+\rho/t))$, qui est en fait rapidement quasi-linéaire comme $t/2\rho$ pour $t$ plus grand que le pas d'échantillonnage $\rho$ de la séquence $X$. C'est à nouveau un problème de compromis à résoudre dans chaque situation.

**Les dilatations à temps discret** Les subilités liées au changement d'échantillonnage ont une origine profonde évidente : définir des dilatations d'un facteur non entier pour une séquence numérique n'est pas immédiat... Peu de chance que l'instant $t = \lambda m\tau$ retombe pour $\lambda$ quelconque sur un instant de l'échantillonnage. Une solution pour utiliser numériquement les dilatations qui sont derrière $\mathcal{L}_H$ est d'accepter les changements d'échantillonnage et d'utiliser des reconstructions interpolatives (c'est le paragraphe précédent).

À l'aide de la formule de reconstruction de Poisson, nous pouvons réaliser des dilatations « exactes » de séquences numériques en réinterpolant les points cherchés. La dilatation n'est en fait exacte que si le pas d'échantillonnage de la séquence dilatée par $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ est $\tau \leq 1/2\lambda B$, où $B$ est la borne supérieure du support fréquentiel du signal. Cela peut nécessiter alors de sur-échantillonner le signal de départ pour éviter le problème. Cette version des dilatations numériques assure que les transformations $\mathcal{L}_H$ et ${\mathcal{L}_H}^{-1}$ pour les séquences discrètes que nous venons de proposer vérifient bien la propriété d'équivalence (II.65), tant que les reconstructions restent exactes.

Le défaut majeur de cette approche réside dans toutes les précautions que nous devons prendre sur les fréquences d'échantillonnage avant et après les transformations ou les dilatations. Nous avons cependant fait ici le tour des difficultés qui existent et comment les prendre en compte.

### 5.2.2 Approche de R. Rao des systèmes à temps discret

En partant de la théorie des filtres à temps discret et à temps continu, on sait qu'il existe une autre manière de mettre en relation des signaux échantillonnés et des signaux à temps continu : ce sont les approches par « transformation » des systèmes. Après une très brève revue de celles-là, nous rappellerons comment R. Rao et coauteurs [ZR98] proposent de définir les systèmes numériques invariants en échelle en faisant appel à ces transformations. Nous utiliserons par la suite ces travaux pour proposer une autre version des transformations de Lamperti à temps discret, ainsi que pour synthétiser des processus $H$-ss.

**Transformations entre temps continu et temps discret.** Alternativement à l'interpolation, on peut faire correspondre un signal continu à une séquence discrète et inversement, en établissant l'équivalence pour des systèmes comme des filtres ou des modèles paramétriques. Les approches classiques que nous rappelons sont traitées plus en détail dans [OWY83], [Jac89] ou [Aug99]. Nous notons $\mathcal{G}$ un système linéaire quelconque et $g(t)$ sa réponse impulsionnelle.

- **Imposer la conservation de la réponse impulsionnelle :** cette solution consiste à choisir $g_\tau[n] = g(n\tau)$, c'est-à-dire un échantillonnage simple du système. Ceci induit une déformation du comportement spectral du système linéaire (avec seulement conservation des pôles, pas des zéros) et est en fait la solution par échantillonnage direct précédente.
- **Correspondance par l'opérateur différence :** le passage est fondé ici sur l'équivalence entre la dérivation à temps continu et l'opérateur de différence discrète $(1-\mathbf{B})/\tau$, où $\mathbf{B}$ est l'opération « un pas en arrière » tel que $(\mathbf{B}X)_\tau[n] = X_\tau[n-1]$. Spectralement l'équivalence se lit $s = (1 - z^{-1})/\tau$ où $s$ est la variable de Laplace et $z$ de la transformée en $z$. L'avantage, malheureusement unique, de cette règle est qu'elle interdit tout repliement spectral ; malheureusement elle modifie les pôles et les zéros de $\mathcal{G}$ et n'est applicable que pour des systèmes de bande passante faible par rapport à la fréquence de Shannon.
- **Correspondance par transformation des fréquences :** la dernière solution est de trouver une fontion $f$ qui envoie les fréquences des séquences discrètes $\omega$, limitée à $[-0.5\ 0.5]$ en fréquence réduite, sur les fréquences continues, dans $\mathbb{R}$. Il faut que $f$ soit une fonction inversible, dérivable, anti-symétrique autour de 0 (donc $f(0) = 0$) et telle que $f([-0.5\ 0.5]) = \mathbb{R}$. C'est à l'aide d'une telle transformation, appelée *transformation en fréquence*, que R. Rao et collaborateurs définissent une dilatation à temps discret et des systèmes invariants en échelle.

**Transformation bilinéaire.** Une transformation en fréquence particulière est privilégiée : la transformation bilinéaire. Elle répond aux propriétés demandées mais obéit en fait à une autre contrainte : c'est la transformation qui associe l'intégration à temps continu à l'approximation par la méthode des trapèzes. On en déduit les règles suivantes entre l'opérateur de Laplace $p$ (qui représente la dérivation) et l'opérateur $\mathbf{B}$ représenté par $z^{-1}$ :

$$p \longleftrightarrow \frac{2}{\tau}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad \text{et} \qquad z^{-1} \longleftrightarrow \frac{1-p\tau/2}{1+p\tau/2}. \tag{II.299}$$

Ces correspondances vont permettent de synthétiser des séquences $H$-ss au 5.3.2. Pour les fréquences, on a la relation :

$$\Omega = f(\omega) = \frac{2}{\tau}\tan(\pi\omega\tau), \quad \text{avec} \quad z = e^{i2\pi\tau\omega},\ \omega \in [-0.5\ 0.5]. \tag{II.300}$$

**Systèmes invariants en échelle à temps discret.** On peut utiliser ces transformations de fréquence, en particulier la bilinéaire, pour définir les propriétés en échelle des séquences aléatoires.

• *Opérateur de dilatation à temps discret.* Il est obtenu par passage au signal continu équivalent, dilatation de celui-ci par $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ puis retour à une séquence échantillonnée. Le passage est naturel dans le domaine des fréquences à l'aide de $f$ et le schéma bloc de la figure II.17 est alors proposé comme dilatation à temps discret $\mathcal{D}^{(d)}_{H,k}$ d'un facteur $k$ quelconque. Le spectre du signal dilaté est obtenu par le changement de $\omega$ en $\Lambda_k(\omega) = f^{-1}(f(\omega)/k))$. On note $\mathcal{R}$ le passage discret-continu et $\mathcal{R}^{-1}$ l'inverse.

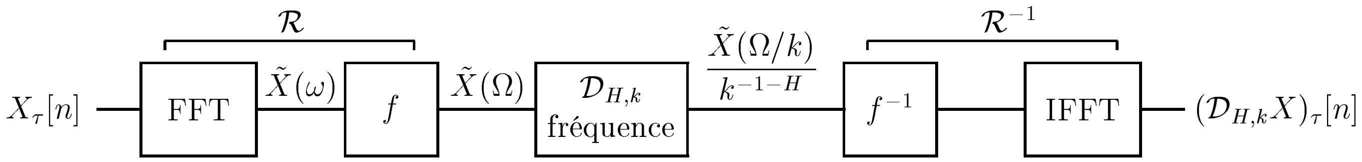



Fig. II.17: Schéma bloc de l'opérateur de dilatation noté $\mathcal{D}^{(d)}_{H,k}$ à temps discret construit sur la transformation bilinéaire [ZR98].

• *Processus auto-similaires de Rao.* Ils sont définis comme des séquences invariantes par dilatation : $(\mathcal{D}^{(d)}_{H,\lambda}X)_\tau[n] \stackrel{d}{=} X_\tau[n]$. Sous condition que l'on peut définir une densité spectrale pour un tel processus, elle vérifie que $\Gamma_X(\omega) = k^{2H+1}\Gamma_X(\Lambda_k(\omega))$. Le processus admet alors une densité spectrale de puissance en $\Gamma_X(\omega) \propto |f(\omega)|^{-2H-1}$ qui est caractéristique d'une longue mémoire temporelle. La fonction de corrélation a les mêmes propriétés (équation d'invariance par dilatation à temps discret et comportement en loi de puissance).

• *Systèmes et opérateurs à temps discret.* D'un point de vue plus général, n'importe quelle opération $\mathcal{W}$ définie pour des processus à temps continu admet un équivalent à temps discret par une transformation en fréquence, bilinéaire ou autre. Il suffit de remplacer le bloc central de la figure II.17 par l'effet de l'opérateur sur la représentation en fréquence du signal : $\mathcal{W}^{(d)} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{W}\mathcal{R}$.

Ensuite les systèmes linéaires avec une propriété de covariance particulière pour une opération $\mathcal{W}^{(d)}$ sont définis comme dans le cas continu à l'aide de la propriété $\mathcal{W}^{(d)}\mathcal{G}^{(d)} = \mathcal{G}^{(d)}\mathcal{W}^{(d)}$. L'opération de passage discret-continu étant inversible, un tel système est en fait obtenu comme $\mathcal{G}^{(d)} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{G}\mathcal{R}$ où $\mathcal{G}$ est défini à temps continu et a la covariance recherchée par rapport à $\mathcal{W}$ (à temps continu). Rao construit ainsi des systèmes linéaires à temps discret

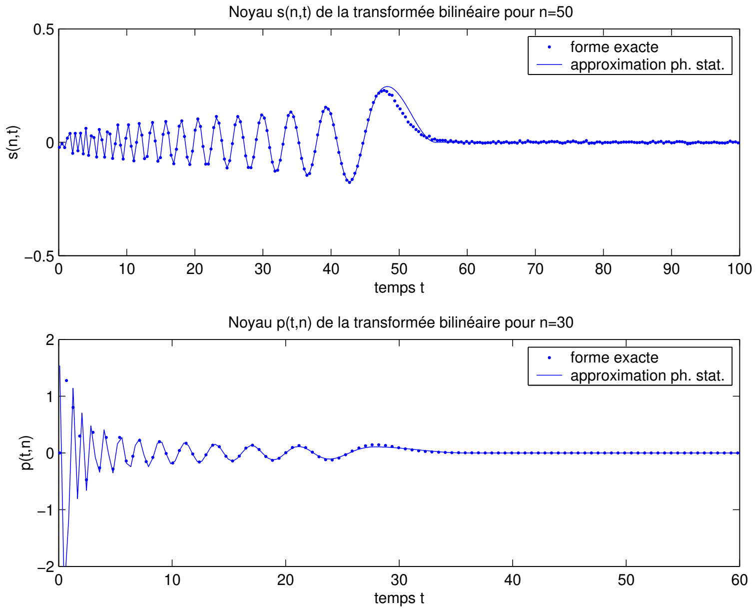



Fig. II.18: Comparaison des calculs exacts et approchés par les approximations de phase stationnaire (II.305) et (II.306) pour les noyaux de passage temps discret - temps continu.

covariants en échelle : ils sont les images strictes par la transformation bilinéaire de nos filtres covariants en échelle du 4.2.

• *Formulation par des noyaux.* Comme on connait les reconstructions des signaux à partir des spectres tant à temps continu que à temps discret, Lee et Rao proposent d'expliciter la reconstruction à temps continu, notée $\mathcal{R}$, à l'aide de noyaux [LR01] :

$$X(t) = (\mathcal{R}X_\tau[n])(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t,n)X_\tau[n] \tag{II.301}$$

$$\text{et} \quad p(t,n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i(\Omega t - f^{-1}(\Omega)n\tau)\right\} \mathrm{d}\Omega, \tag{II.302}$$

$$X_\tau[n] = (\mathcal{R}^{-1}X(t))_\tau[n] = \int_{-\infty}^{\infty} s(n,t)X(t)\mathrm{d}t \tag{II.303}$$

$$\text{et} \quad s(n,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/2}^{+1/2} \exp\left\{i(\omega n\tau - f(\omega)t)\right\} \mathrm{d}\omega. \tag{II.304}$$

Les résultats qu'ils en déduisent sont essentiellement inclus dans notre étude des filtres invariants en échelle à l'aide de la correspondance indiquée. En partculier ils retrouvent le fait que les fonctions $\int s(n,t)t^\alpha \mathrm{d}t$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, équivalents à temps discret des chirps de Mellin, sont les fonctions propres des systèmes obtenus. La relation de filtrage (37 de [LR01]) obtenue n'est autre que notre relation de filtrage (II.165) pour les décompositions harmoniques sur les fonctions de Mellin.

**Calcul du noyau de la transformation.** Pour utiliser en pratique ce formalisme, nous proposons une approximation des noyaux dans le cas de la transformation bilinéaire. Le calcul numérique de $s(n,t)$ et $p(t,n)$ serait à chaque utilisation un peu long et délicat (intégration numérique d'un terme oscillant) alors que le calcul par la méthode de la phase stationnaire donne les approximations suivantes :

$$p(t,n) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^{1/2}}{t^{3/2}(n-t)^{1/4}} \cos\left(\Omega_0 t - 2n\mathrm{atan}\frac{\Omega_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \text{ si } t < n \text{ et } \Omega_0 = 2\sqrt{\frac{n}{t} - 1}. \tag{II.305}$$

$$s(n,t) \simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{t^{1/4}}{n^{1/2}(n-t)^{1/4}} \cos\left(\omega_0 t - 2t\sqrt{\frac{n}{t} - 1} - \frac{\pi}{4}\right), \text{ si } t < n \text{ et } \omega_0 = 2\,\mathrm{acos}\sqrt{\frac{t}{n}}. \tag{II.306}$$

Dans les deux cas le noyau est en fait un chirp, par exemple $p(t,n)$ a une fréquence instantanée $f_p(t) = \sqrt{(n/t-1)}/\pi$. Nous pouvons comparer en II.18 le résultat du calcul numérique direct et de celui de la phase stationnaire (beaucoup plus rapide).

Tout opérateur admet alors une expression que l'on peut calculer numériquement de façon efficace à l'aide des ces formes approchées. L'opérateur de dilatation est par exemple :

$$(\mathcal{D}^{(d)}_{H,k} X)[n] = \sum_m \mathcal{D}^{(d)}_{H,k}[n,m] X[m] = \sum_m \left(k^{-H} \int s(n,t)p(kt,m)\mathrm{d}t\right) X[m]. \tag{II.307}$$

### 5.2.3 Une transformation de Lamperti à temps discret ?

**Approche 1 : échantillonnage.** Malgré toutes les limitations qu'imposent les problèmes de choix de la base et du pas d'échantillonnage, la possibilité de réinterpoler et le fait que les erreurs que l'on commet sont connues permettent d'utiliser sans ambage cette solution dès que l'on dispose de sufisamment de points pour se permettre de travailler avec un horizon d'observation grand (de nombreuses périodes logarithmiques).

**Approche 2 : discrétisation en** $(1-\mathbf{B})$. Nous avons essayé de formuler directement la transformation de Lamperti en discrétisant non le signal mais l'opérateur. $\mathcal{L}_H$ a une représentation comme combinaison des opérateurs temps et fréquence comme :

$$\mathcal{L}_H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i2\pi)^k}{k!} (\mathcal{T} - \ln \mathcal{T})^k \mathcal{F}^k. \tag{II.308}$$

Cette représentation est exacte et assure l'équivalence du Lemme II.1. Si on adopte la correspondance avec les opérateurs sur les séquences discrètes telle que $1 - \mathbf{B}$ représente $i2\pi\mathcal{F} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$, nous pouvons réorganiser les termes et obtenir un équivalent de $\mathcal{L}_H$ à temps discret comme :

$$(\mathcal{L}_H Y[k])[m] = \sum_{k=0}^{\infty} l_H[m;k]\mathbf{B}^k Y[m] \quad \text{où} \quad l_H[m;k] = m^{H+1} e^{-m} \frac{(m - \ln m)^k}{k!} \tag{II.309}$$

Le problème est qu'on obtient en fait une mauvaise approximation à temps discret du comportement à temps continu de $\mathcal{L}_H$ qui est celui d'un filtrage par une impulsion de Dirac

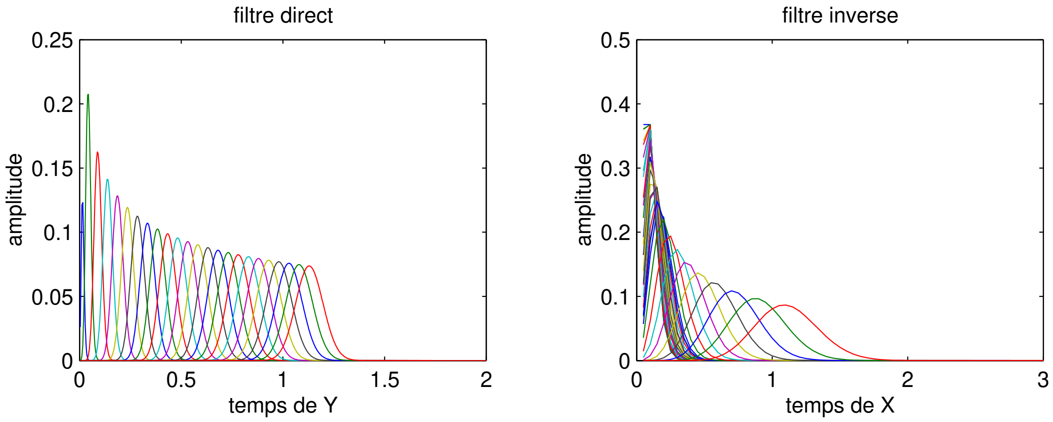



Fig. II.19: Filtres de Lamperti direct et inverse calculés par l'équivalence imposée entre $1 - \mathbf{B}$ et $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ selon (II.309). Ces deux filtres sont de mauvaises approximations de pics de Dirac qui se décalent en temps comme $t - \ln t$ et $e^t - t$.

ramenant les valeurs de Y du temps $t$ au temps $\ln t$, ainsi que la figure II.19 le montre. Ici l'approximation de l'impulsion est bien trop large pour être utilisable et cette discrétisation échoue à préserver l'équivalence (II.65). Il n'est pas possible de l'amender convenablement en changeant les pas d'échantillonnage entre $Y$ et $X$. Nous donnons le résultat du filtre (direct et inverse) sur les fonctions de Fourier et Mellin en figure II.20 ; le résultat n'est pas satisfaisant ni cette formulation à temps discret utilisable.

**Approche 3 : par transformation bilinéaire.** La faillite précédente est une motivation pour utiliser le formalisme des transformations en fréquence pour construire un analogue de $\mathcal{L}_H$ à temps discret pour les dilatations $\mathcal{D}^{(d)}_{H,\lambda}$ du schéma II.17. En remplaçant dans ce même schéma l'opération centrale par $\mathcal{L}_H$ et en autorisant un pas d'échantillonnage $a$ pour $Y_a[n]$ et $b$ pour la séquence transformée $X_b[n]$, on a :

$$X_a[n] = (\mathcal{L}_H Y_b[k])_a[n] = \sum_{k=0}^{\infty} l_H^{(d)}[n;k] Y_b[k] \quad \text{où} \quad l_H^{(d)}[n;k] = \int_0^{\infty} u^H s(bn,u) p(\ln u, ak)\, b\mathrm{d}u. \tag{II.310}$$

Comme $s(n,t)$ et $p(t,k)$ ont tous les deux une allure de chirp, le calcul exact de $l_H^{(d)}[n;k]$ n'apparaît pas possible, ni en fait celui d'une approximation par méthode de la phase stationnaire (elle n'a pas d'expression analytique). Le calcul numérique à l'aide de (II.305) et (II.306) est lui-même assez délicat (intégrale de fonctions infiniment oscillantes). Bien que la démarche de R. Rao soit exacte pour toutes les transformations de séquences numériques, nous sommes au final bloqués dans son utilisation par les problèmes numériques. Des développements restent nécessaires pour rendre ce formalisme utilisable en pratique. Un exemple en va être la synthèse de signaux auto-similaires dans le paragraphe qui vient.

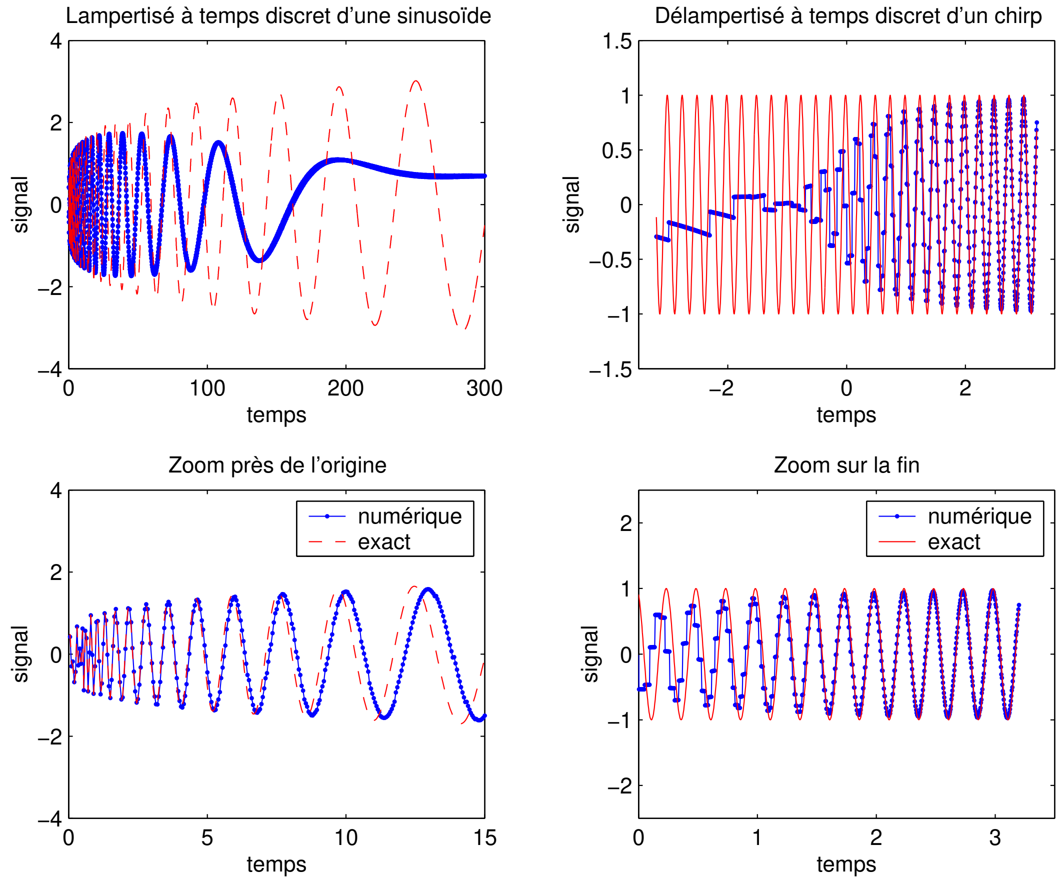



Fig. II.20: Utilisation de la discrétisation de $\mathcal{L}_H$ selon (II.309) sur une sinusoïde (à gauche) et de ${\mathcal{L}_H}^{-1}$ sur un chirp (a droite). Bien que la forme est convenable à certains moments (les zooms du bas), le fait que le filtre est une impulsion de Dirac trop large pour être une approximation numérique satisfaisante, amène des mélanges entre les oscillations qui détruisent le résultat petit à petit.

## 5.3 Traitement numérique des signaux auto-similaires

### 5.3.1 Les méthodes habituelles de synthèse auto-similaire

**Les diverses méthodes de synthèses $H$-ss.** De multiples manières de synthétiser des séquences échantillonnées $H$-ss, en particulier les fBm, ont été proposées dans les études de ces processus. Une revue et comparaison des méthodes les plus courantes pour les fBm ont été entreprises dans [JHJ96] et [Cœu00] : représentation par moyenne mobile [MV68], décomposition sur une base d'ondelettes [AS96], méthode géométrique du point milieu ou de similitude interne [Tri93, Mag96], synthèse par la fonction de corrélation (algorithme de Choleski) ou à partir d'accroissements stationnaires : algorithme de Levinson ou de la matrice circulante de Wood et Chan [WC94, DN97, PHJI01], que nous utiliserons de préférence aux autres puisque c'est celle qui réalise une bonne approximation (comparable à l'exactitude de la méthode de Choleski) tout en restant bien plus rapide.

D'autres synthèses s'appuient sur des modèles précis de processus $H$-ss. Nous parlerons plus loin des constructions sur la fonction de Weierstrass (car elle conduit en fait à de l'invariance en échelle discrète, voir IV.2.5) ; des systèmes paramétriques ont été adaptés aussi à la synthèse de quasi $H$-ss : ARMA avec pôles espacés géométriquement, cellules $RC$ en cascade pour les synthèse spectrales de processus en « $1/f$ », systèmes d'équations stochastiques couplées, etc. On trouvera dans [Ber94a], [Wor96] ou [Mag96, Nor99] de nombreux détails sur celles-ci et nous ne voulons pas être exhaustifs.

**Systèmes définis par différence fractionnaire.** Une autre voie de modélisation auto-similaire à l'aide d'approches paramétriques de processus $H$-ss est issue des différences fractionnaires. L'idée initiale est de savoir comment construire l'équivalent à temps discret des modèles fondés sur la calcul différentiel fractionnaire [GM97]. Un modèle $H$-ss est en effet celui de Barnes-Allan, équation (II.251) :

$$B_{A,H}(t) = \frac{1}{\mathbf{\Gamma}(H+1/2)} \int_0^t (t-s)^{H-1/2} W(s) \mathrm{d}s, \tag{II.311}$$

qui est en fait une solution de l'équation aux dérivées fractionnaires suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}^{H+1/2} X_{BA}(t)}{\mathrm{d}t^{H+1/2}} = \frac{1}{\mathbf{\Gamma}(H+1/2)} W(t). \tag{II.312}$$

Ce modèle est une approximation convenable d'un fBm ainsi qu'étudié dans [Mag96] et, bien qu'il ne soit pas à **a.s.**, il partage le spectre de puissance (défini en temps-fréquence) du fBm. Il admet de plus une écriture à temps discret comme un modèle d'état de dimension infini [Mag96], ou alors se développe en un modèle MA d'ordre infini tel que :

$$X_{BA}(t) = \frac{1}{\mathbf{\Gamma}(H+1/2)} \frac{\mathrm{d}^{-H-1/2} W(t)}{\mathrm{d}t^{-H-1/2}}. \tag{II.313}$$

La forme à temps discret passe par le remplacement de la dérivation en temps par $1-\mathbf{B}$ et on retrouve les FARIMA, *Fractional auto-regressive integrated mean-adjusted*, qui s'écrivent de manière générale pour un FARIMA $(p,d,q)$ [GJ80, Hos81, Ber94a] :

$$(1-\mathbf{B})^d A_p(\mathbf{B}) X_\tau[n] = B_q(\mathbf{B}) Z_\tau[n]. \tag{II.314}$$

où $A_p$ et $B_q$ sont des polynômes d'ordre $p$ et $q$, $\mathbf{B}$ l'opérateur de retard, $Z_\tau[n]$ la séquence d'entrée et $X_\tau[n]$ la séquence en sortie du FARIMA. Quand $d = H+1/2$ est fractionnaire, on calcule le terme $(1-\mathbf{B})^d$, ou alors $(1-\mathbf{B})^{-d}$ en le passant de l'autre côté de l'équation pour privilégier une écriture en MA d'ordre infini, à l'aide du développement binomial généralisé [GJ80, Hos81] :

$$(1-\mathbf{B})^d = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{\Gamma}(k-d)}{\mathbf{\Gamma}(-d)\mathbf{\Gamma}(k+1)} \mathbf{B}^k. \tag{II.315}$$

Les FARIMA partagent de nombreuses propriétés des processus $H$-ss, étant à mémoire longue comme eux et leurs réalisations ont des graphes chahutés. Bien que modèles commodes de l'auto-similarité, celle-ci n'est obtenue que de manière approchée puisque le filtre (II.315) est rigoureusement stationnaire. La corrélation d'un FARIMA(0,$d$,0) dont l'entrée est un bruit blanc est :

$$\gamma(k) = \frac{\mathbf{\Gamma}(1-d)\mathbf{\Gamma}(k+d)}{\mathbf{\Gamma}(d)\mathbf{\Gamma}(k+1-d)} \qquad \text{(II.316)}$$

et à partir d'un instant donné cette corrélation se comporte asymptotiquement aux temps $k$ longs comme $\gamma(k) \sim |k|^{2d-1}\mathbf{\Gamma}(1-d)/\mathbf{\Gamma}(d)$. C'est-à-dire que la croissance de $R(t, t+k)$ en $k^{2H}$ d'un fBm d'indice $H$ est par exemple obtenue et en ce sens un FARIMA est proche des processus $H$-ss. Puisque nous avons vu que l'équivalence en $1-\mathbf{B}$ n'est pas convenable pour $\mathcal{L}_H$, nous allons étudier la forme prise par les FARIMA avec l'équivalence de la transformée bilinéaire.

### 5.3.2 Contributions aux synthèses des séquences $H$-ss

Nous détaillons trois méthodes différentes pour synthétiser des séquences auto-similaires que nous avons spécifiquement étudiées car elles sont en relation avec la démarche théorique d'analyse des $H$-ss proposée ici.

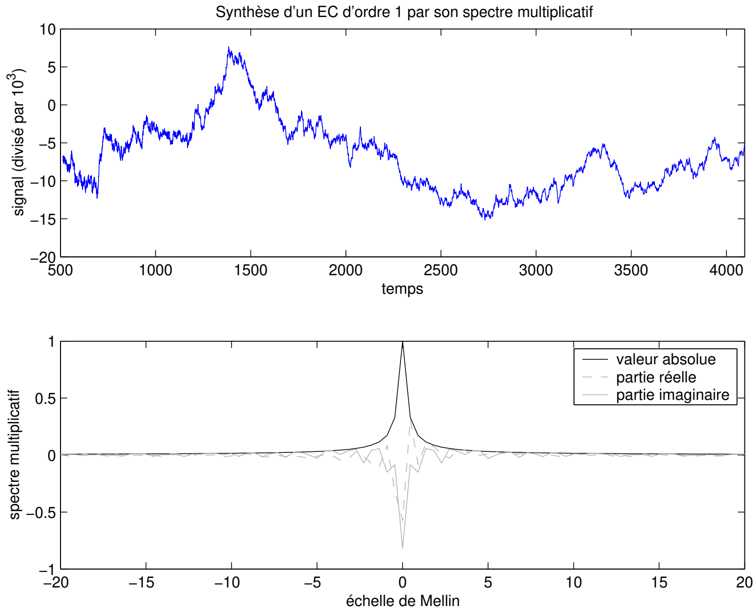



Fig. II.21: Exemple de synthèse d'un EC d'ordre 1 (en haut) à partir de son spectre multiplicatif (en bas on montre $\mathbf{G}_{H,a}(H + i2\pi\beta)$ déduit de (II.281)) qui est du type passe-bas pour le modèle étudié par Noret. La phase du spectre a été choisie i.i.d. dans $[0; 2\pi[$, $H = 0.2$ et $a = 1$. L'échantillonnage résultant de la synthèse est géométrique.

**Synthèse par filtre invariant en échelle.** La théorie développée en 4.2 pour les filtres invariants en échelle et prolongée en 4.5 pour les modèles paramétriques trouve une application pratique à l'aide de l'algorithme de transformée de Mellin discrète. En définissant un filtre par une fonction de transfert $g$ et surtout son équivalent spectral $\mathbf{G}(s)$ ou $\underline{f_g}(\beta)$ qui peuvent être choisis dans l'ensemble des fonctions spectrales des filtres stationnaires usuels

[Jac89], la représentation harmonique multiplicative est directement donnée par le produit de $\underline{f_g}(\beta)$ avec la décomposition harmonique du bruit blanc multiplicatif.

Il y a deux manières de contrôler cette dernière. Sa forme générale est $\underline{f}_V(\beta) = a(\beta)e^{i\varphi(\beta)}$ où les phases $\varphi(\beta)$ sont décorrélées, et l'amplitude $a(\beta)$ suit une loi choisie de variance $\sigma^2$. L'autre façon est de voir que son générateur stationnaire est un bruit blanc stationnaire habituel et que $\underline{f}_V(\beta) = f_W(\beta)$ si $W$ est ce bruit de Wiener. Il n'y a donc qu'à tirer une réalisation de bruit blanc avec la loi de probabilité voulue et d'en prendre la FFT pour avoir la discrétisation nécessaire $\underline{f}_V[\beta_n]$. La multiplication par $\underline{f_g}[\beta_n]$ et la TMD inverse génèrent ensuite une séquence $H$-ss. Nous en montrons l'illustration pour le processus $X_{H,a}(t)$ en figure II.21.

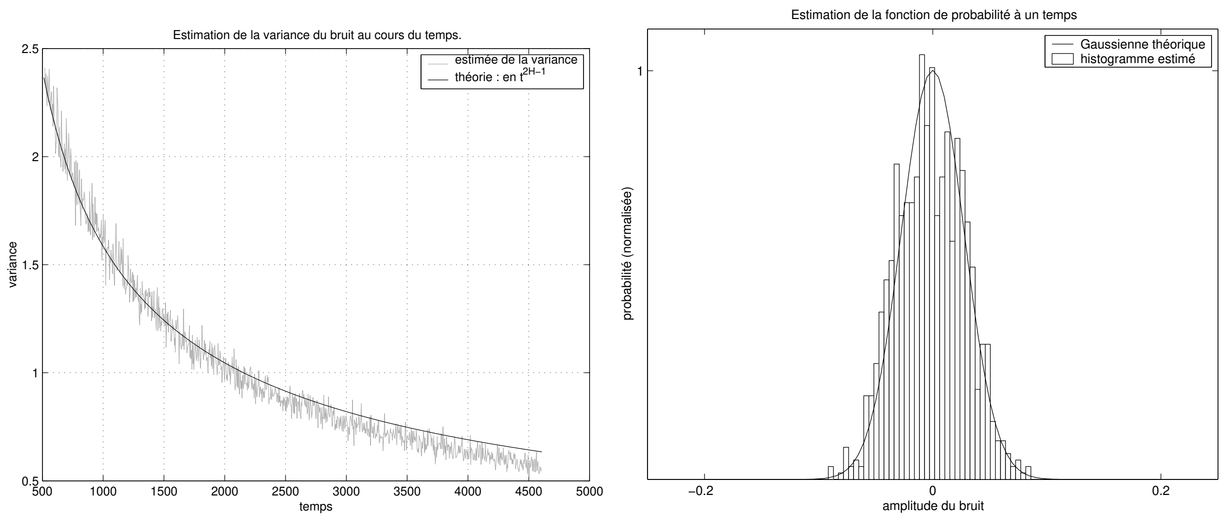



Fig. II.22: Analyse de l'EC d'ordre 1 synthétisé par sa fonction de transfert multiplicative (comme en figure II.21). Nous estimons le bruit du modèle après rééchantillonnage arithmétique comme $e_k = X_\tau[k] - a_k X_\tau[k-1]$ ; les estimations sont faites sur 1000 réalisations. À gauche on montre l'estimation de la variance de ce bruit superposée au modèle (II.318) ; à droite c'est la fonction de probabilité à un temps du bruit représenté comme un histogramme qui est comparée a la loi normale attendue. Nous n'avons pas représenté la corrélation du bruit qui est bien trouvée très courte (bruit quasi blanc). Cette étude valide la synthèse par filtre multiplicatif comme comparable à la discrétisation du modèle par Noret [Nor99].

**Système d'Euler-Cauchy à temps discret.** Cette version de la synthèse est une relecture des travaux exposés dans [Nor99] et [NG99] : le modèle paramétrique $X_{H,a}(t)$ de (II.210) qui est solution d'un système d'Euler-Cauchy d'ordre 1 peut être discrétisé en faisant usage de son expression sur un intervalle fini (II.219). Le modèle à temps discret recherché doit être un AR(1) :

$$X_\tau[k] = a_k X_\tau[k-1] + e_k. \qquad \text{(II.317)}$$

Les coefficients viennent de (II.219) avec $a_k = G(k\tau, (k-1)\tau)$ et l'entrée est un bruit Gaussien $e_k = \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} G(k\tau, u)V(u)\frac{du}{u}$ dont on calcule la moyenne et la corrélation. Rappelons que $V(u)$ est le bruit blanc multiplicatif, transformé de Lamperti du bruit de Wiener. Il vient :

$$a_k = \left(\frac{k}{k-1}\right)^{H-a} \;;\; \mathbb{E}\, e_k = 0 \;;\; \mathbb{E}\{e_k \bar{e}_k\} = \frac{\sigma^2 (k\tau)^{2H}}{2(H+a)} \left(1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^{2a+2H}\right). \quad \text{(II.318)}$$

Cette forme est pour un échantillonnage linéaire et dans ce cas le coefficient $a_k$ est rapidement équivalent à $1-(a-H)/k$ qui ne varie que très lentement à grand temps. Finalement c'est le bruit d'entrée Gaussien qui pilote l'essentiel du comportement auto-similaire puisque sa variance a pour forme asymptotique quand $k$ est grand : $\mathbb{E}\{e_k \bar{e}_k\} \sim \sigma^2 \tau^{2H} k^{2H-1}$. Le filtre appliqué (d'ordre 1) est toutefois non stationnaire. La figure II.22 permet de comparer la synthèse de l'EC discrétisé en échantillonnage linéaire et la synthèse par utilisation de $\mathbf{M}^{-1}$ sur le spectre multiplicatif. La structure du bruit $e_k$, ici estimée, est bien trouvée conforme à ce qu'implique le modèle : bruit blanc gaussien de variance en $k^{2H-1}$. Une étude des propriétés du système à temps discret est mise en figure II.23.

La fonction de corrélation de la séquence est donnée par le calcul comme :

$$R_X(t,s) = G(\min(t,s), k_0\tau)\mathbb{E}\left\{X_\tau[k_0]^2\right\} + \int_{k_0\tau}^{\min(t,s)} \left(\frac{t\,s}{u^2}\right)^{H-a} |\sigma(u)|^2 u^{2H-1} \mathrm{d}u, \quad \text{(II.319)}$$

et on s'affranchit de la condition initiale $X_\tau[k_0]$ soit en la forçant à avoir la loi de distribution d'équilibre du système (ici une loi normale de variance en $t^{2H}$ puisque l'entrée est supposée Gaussienne), soit quand le système est stable ($G(t, k_0\tau) \longrightarrow 0$ si $(t-k_0\tau) \longrightarrow +\infty$), en réalisant qu'à temps long la condition initiale à $k_0\tau$ est oubliée. Dans l'une ou l'autre situation, on a alors $R_X(\lambda t, \lambda s) = \lambda^{2H} R_X(t,s)$ pour tout facteur de dilatation $\lambda$ (avec les restrictions nécessaires pour l'effet des dilatations sur des séquences à temps discret) et la séquence du modèle de Noret discrétisé est auto-similaire.

Ainsi que l'on peut s'y attendre après l'étude sur l'échantillonnage, c'est sur une série géométrique que ce modèle est généré efficacement. On trouvera dans [Nor99] des remarques sur le cas spécifique de cet EC d'ordre 1. Au lieu de reformuler le modèle sous une forme analogue à (II.317) pour un échantillonnage géométrique [Nor99], la simulation numérique est possible en générant l'AR(1) à temps discret uniformément échantillonné $Y_{\ln q}[n]$ avant d'utiliser $\mathcal{L}_H$ pour calculer $X_q^{(g)}[n]$.

La discrétisation des systèmes EC d'ordre $N$ peut être obtenue de la même façon en trouvant le propagateur de l'équation différentielle qui permet de donner l'expression de la solution sur un intervalle fini. La calcul est formellement possible et a une expression générale de la forme $(1-\mathbf{B})^N X_\tau[n] + c_1/n(1-\mathbf{B})^{N-1} X_\tau[k-1] + \cdots = e_k$. Une meilleure approche est fournie par le calcul symbolique des fonctions de transfert des filtres non stationnaires développé dans [Gug92] et qui, appliqué à ce problème [Nor99], montre qu'un EC d'ordre $N$ dans la partie auto-régressive (à temps continue ou discret) peut être représenté par $N$ EC d'ordre 1, de solutions $Y_j(t)$ pour $j = 1, \ldots, N$, mis en parallèle et $X(t) = \sum_j X_j(t)$.

**Synthèse des processus $H$-ss de Rao.** La dernière méthode de simulation de processus $H$-ss que nous avons regardée avec attention est de passer par l'approximation de l'opérateur de dérivation fractionnaire qui entre en compte dans un FARIMA par la méthode de discrétisation de R. Rao [ZR98]. La dérivation fractionnaire $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)^d$ correspond à l'opérateur de Laplace $p^d$ qui a pour équivalent par la transformation bilinéaire et grâce à (II.300) :

$$p^d \longleftrightarrow \left(\frac{2}{\tau}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^d \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\mathbf{\Gamma}(k-d-l)\mathbf{\Gamma}(l+d)}{\mathbf{\Gamma}(d)\mathbf{\Gamma}(-d)\mathbf{\Gamma}(l+1)\mathbf{\Gamma}(k-l+1)}\right\}\mathbf{B}^k. \tag{II.320}$$

La forme temporelle est une expression différente de (II.315) pour un opérateur de différence fractionnaire qui a l'avantage de rester calculable pour $d$ entre $-1$ et 1 et de générer alors des séquences aléatoires stationnaires. Nous utilisons plutôt cet opérateur comme filtre sur la partie d'entrée, en MA (puisque le calcul en temps est plus rapide qu'avec un opérateur AR). Les séquences obtenues pour un FARIMA(0,d,1) avec cet opérateur ont une densité spectrale en $(f(\omega))^{-2H-1}$ pour $d = H + 1/2$ et sont auto-similaires au sens développé par R. Rao et coauteurs, pour les dilatations $\mathcal{D}^{(d)}_{H,k}$. Elles sont en fait stationnaires (puisque données par des filtres stationnaires) et contrairement à l'EC d'ordre 1 discrétisé, c'est le filtre qui pilote à tout temps l'auto-similarité de la séquence. Un exemple est montré en figure II.24 et l'on montre que le processus est bien stationnaire (variance et fonction de corrélation ne changent pas) alors que le processus est approximativement $H$-ss au sens où les outils de mesure par ondelettes lui attribuent l'exposant $H$ mis dans le modèle.

### 5.3.3 Des exemples illustratifs d'analyse

Nous montrons les propriétés générales des processus auto-similaires sur les deux classes de signaux $H$-ss synthétisés ici : ceux par utilisation de leur écriture sur la base de Mellin – ici appliqué au système d'EC d'ordre 1 qui se discrétise aussi directement dans les travaux de E. Noret ; et ceux $H$-ss approchés qui émergent des constructions par les différences stationnaires.

Les figures II.23 et II.24 en montrent les comportements différents. L'EC est exactement $H$-ss dans le comportement de sa variance et de sa corrélation et le spectre de Mellin est un outil valide pour étudier ses propriétés au-delà de la propriété $H$-ss. La figure II.25 montre sur un autre exemple synthétisé par TMD tel que son spectre multiplicatif est un filtre de Butterworth d'ordre 8 et d'échelle de coupure $\beta_c = 300$. À nouveau il est strictement $H$-ss (et l'évolution de la variance le prouve), ici à corrélation courte en temps et les outils à ondelette échouent à estimer le $H$.

Composé par addition avec signal ici d'un EC d'ordre 1, un chirp de Mellin déterministe dont $\beta_0 = 500$ et du bruit à $-80$ dB, nous illustrons par la figure suivante, II.26, comment l'analyse par transformation de Mellin permet de retrouver les différentes composantes du signal auto-similaire. La robustesse de la TMD vis-à-vis de $H$ permet ces opérations même si l'exposant d'auto-similarité n'est pas bien connu (et les outils d'estimation de celui-ci posent encore des problèmes). En revanche nous montrons à nouveau comment une erreur sur l'origine des temps conduit à des erreurs importantes sur le calcul des densités spectrales.

## 6 Conclusion : les processus auto-similaires étudiés par $\mathcal{L}_H$

Nous pouvons résumer ici les contributions que nous avons présentées dans cette partie. Après des rappels généraux sur les processus aléatoires, en particulier stationnaires, nous avons montré comment la transformation de Lamperti forme une équivalence unitaire entre les opérations de translation dans le temps et celles de dilatations et ainsi permet de mettre en bijection les processus stationnaires et les processus auto-similaires.

Cette vision de l'étude des processus auto-similaires s'appuit sur la décomposition en échelle de Mellin et nous avons retrouvé de nombreuses propriétés des processus $H$-ss par ce biais, ainsi que proposé de nouveaux résultats. Nous insistons en particulier sur la théorie spectrale adaptée aux processus $H$-ss et les représentations en sortie de filtre covariant en échelle ou, pendant paramétrique, par les systèmes d'Euler-Cauchy. En plus de proposer des exemples, il nous semble essentiel de voir que cette approche n'est pas uniquement théorique mais offre des possibilités pratiques (et numériques) pour l'étude des signaux auto-similaires. Les méthodes de synthèses sont convenablement maîtrisées et celles d'analyse reposent principalement sur la mise en œuvre de la transformation de Mellin discrète qui demande de bien étudier les problèmes d'échantillonnage non arithmétique.

En conclusion de cette partie, un prolongement possible du travail est intéressant à envisager. Nous n'avons pas étudié spécifiquement les possibilités d'estimation des paramètres d'un modèle étant connue une réalisation d'un processus auto-similaire. Cette question serait à étudier en déterminant précisément ce que l'on gagne à estimer un modèle auto-similaire par rapport à estimer un modèle stationnaire classique pour une réalisation donnée, quand on n'est ni sûr de la stationnarité ni de l'auto-similarité. Ce développement offre peut-être une possibilité de construire un test statistique pour détecter une invariance en échelle. Un autre développement serait d'élargir l'utilisation de l'approche de R. Rao pour les propriétés en échelle à temps discret et de faire un usage plus extensif qu'il n'a été fait ici (où nous nous sommes arrêtés à la construction des représentations) pour l'étude des processus et systèmes invariants en échelle.

Le prolongement naturel de ce chapitre, qui fait l'objet de la partie suivante, est d'adapter l'équivalence unitaire entre translations et dilatations que forme la transformation de Lamperti pour s'intéresser aux processus qui ne sont pas invariants en échelle, mais ont plutôt une auto-similarité incomplète ou brisée.

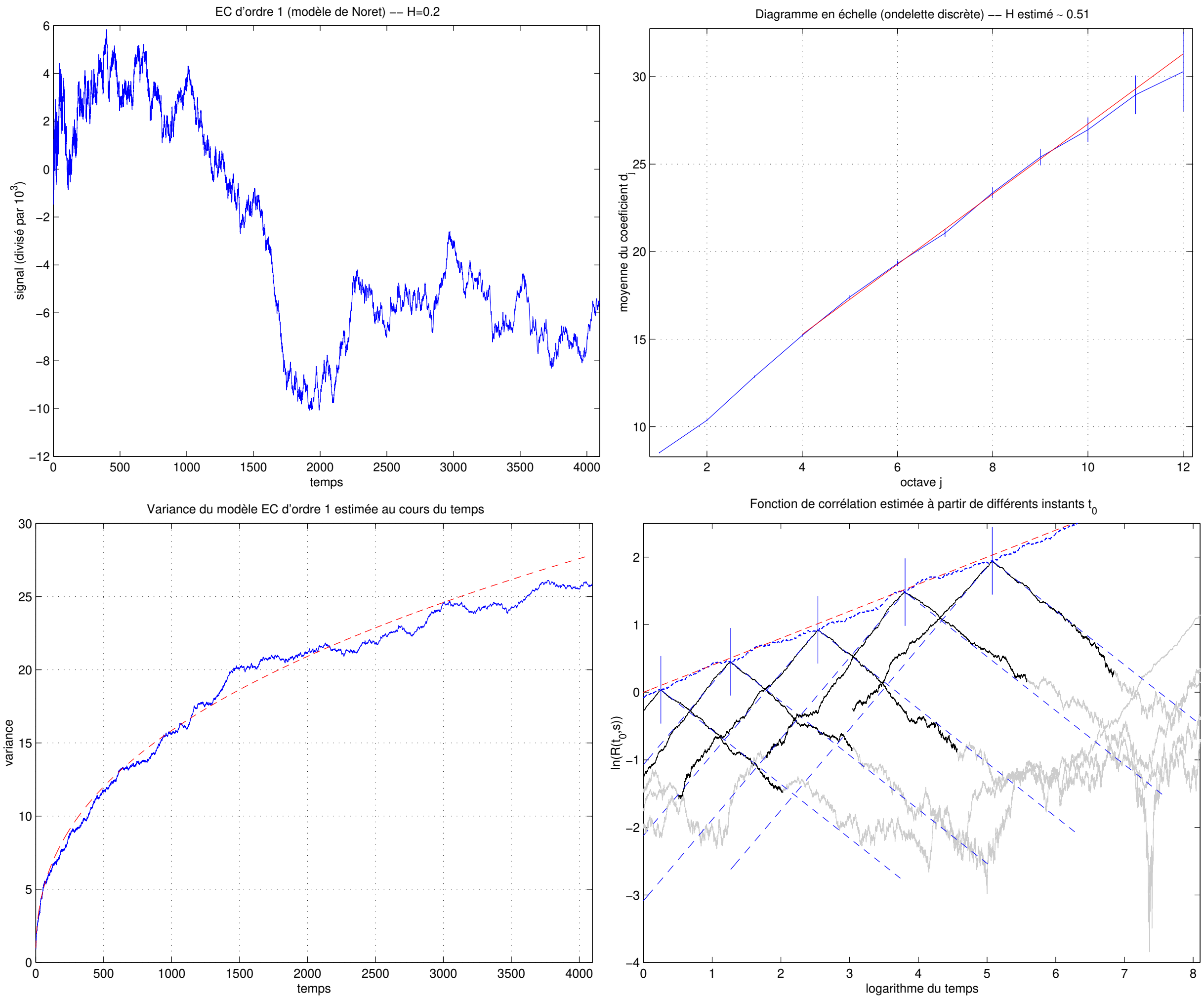



Fig. II.23: Exemple de réalisation du modèle d'EC d'ordre 1 (en haut à gauche), pour $H = 0.2$. Nous montrons, estimée sur 1000 réalisations, la variance du processus (en bas à gauche) et la corrélation (où $a$ contrôle les décroissances en diagramme log-log) (en bas à droite) sur lesquelles les comportements théoriques sont surimprimés en traits pointillés. En haut à droite nous illustrons la non stationnarité importante du modèle : les coefficients d'une décomposition en ondelettes ne sont pas stationnaires (ils croissent en fait tous en $t^H$) et l'analyse par diagramme en échelle [AFTV00] conduirait à une mauvaise estimation de $H$, ici $H \simeq 0.51 \pm 0.02$.

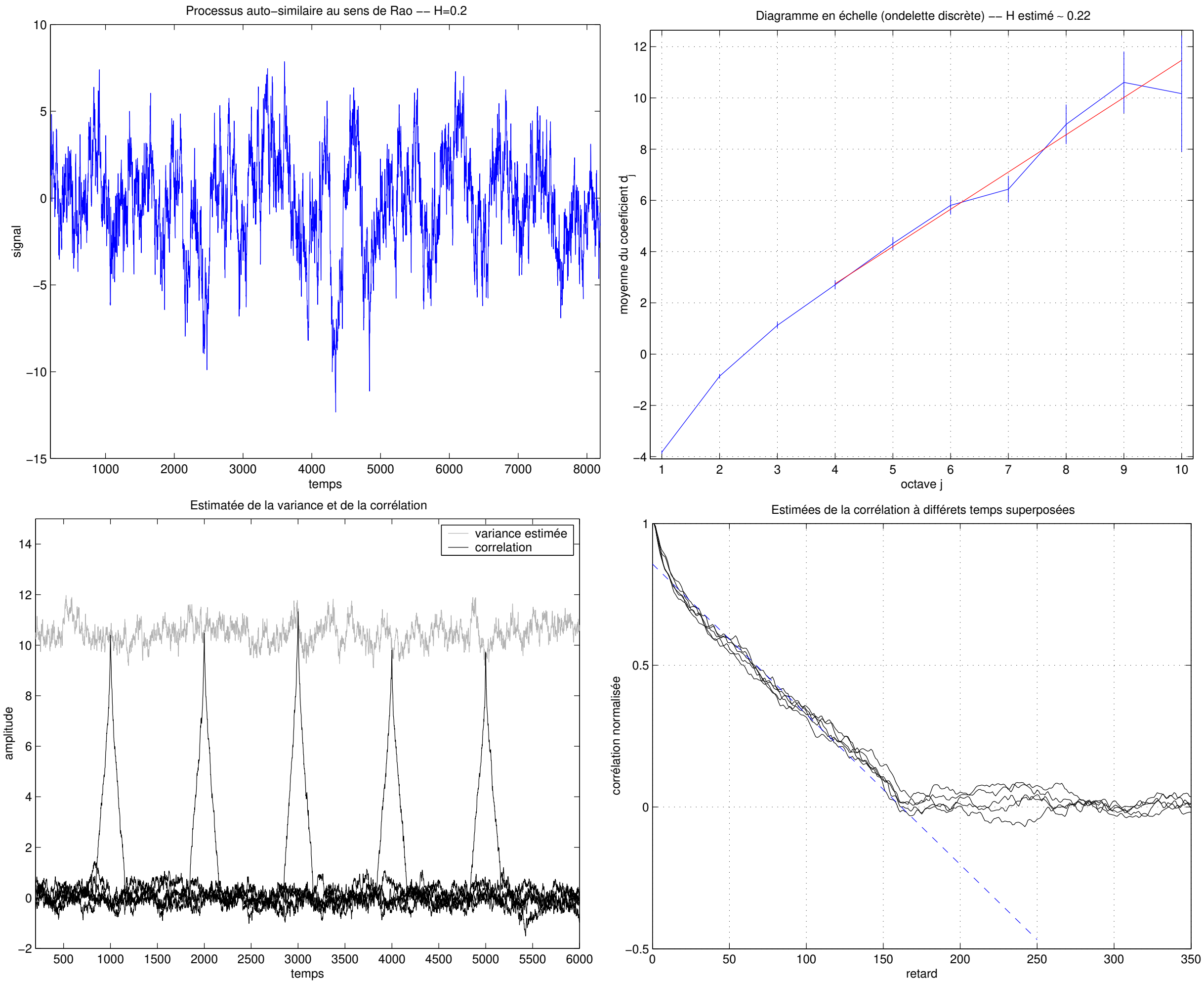



Fig. II.24: Exemple de réalisation du modèle $H$-ss de Rao (en haut à gauche), pour $H = 0.2$. Nous montrons, estimée sur 1000 réalisations, la variance au cours du temps et la fonction de corrélation à certains instants (en bas à gauche). La variance reste constante et les fonctions de corrélations, superposées sur le graphe adjacent, sont identiques à tout instant : le processus est stationnaire. Cependant il est approximativement $H$-ss par ses propriétés de régularité locale en temps et l'analyse par une décomposition en ondelettes (en haut à droite) conduit à estimer correctement l'exposant $H$ de la séquence synthétisée, ici $H \simeq 0.22 \pm 0.05$.

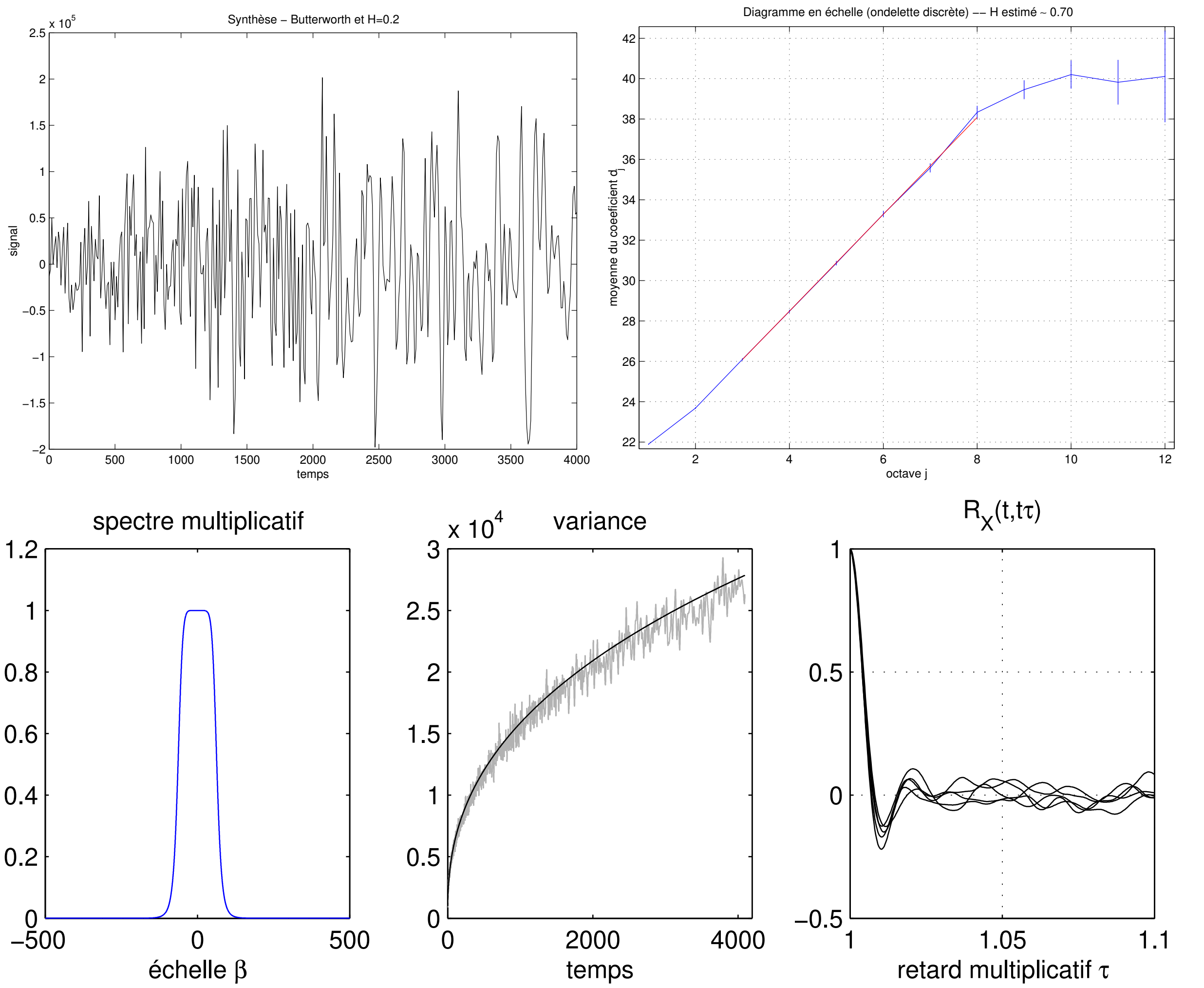



Fig. II.25: Signal $H$-ss avec $H = 0.2$ synthétisé en prescrivant son spectre multiplicatif comme un filtre de Butterworth d'ordre $N = 8$ et d'échelle de coupure $\beta_c = 300$ : $\mathbf{G}(H + i2\pi\beta) = 1/(1 + |\beta/\beta_c|^N)$, représenté en bas à gauche. Une réalisation est montrée en haut à gauche. La variance du modèle estimée sur 1000 réalisations (en bas au centre) obéit à a croissance en $t^{2H}$ et la fonction de corrélation obtenue est représentée en bas à droite comme $R_X(t, t\tau)/t^{2H}$ et ne dépend que de $\tau$ comme attendu. L'estimation de $H$ par une décomposition en ondelettes discrètes donne $H \simeq 0.70 \pm 0.04$ non correct.

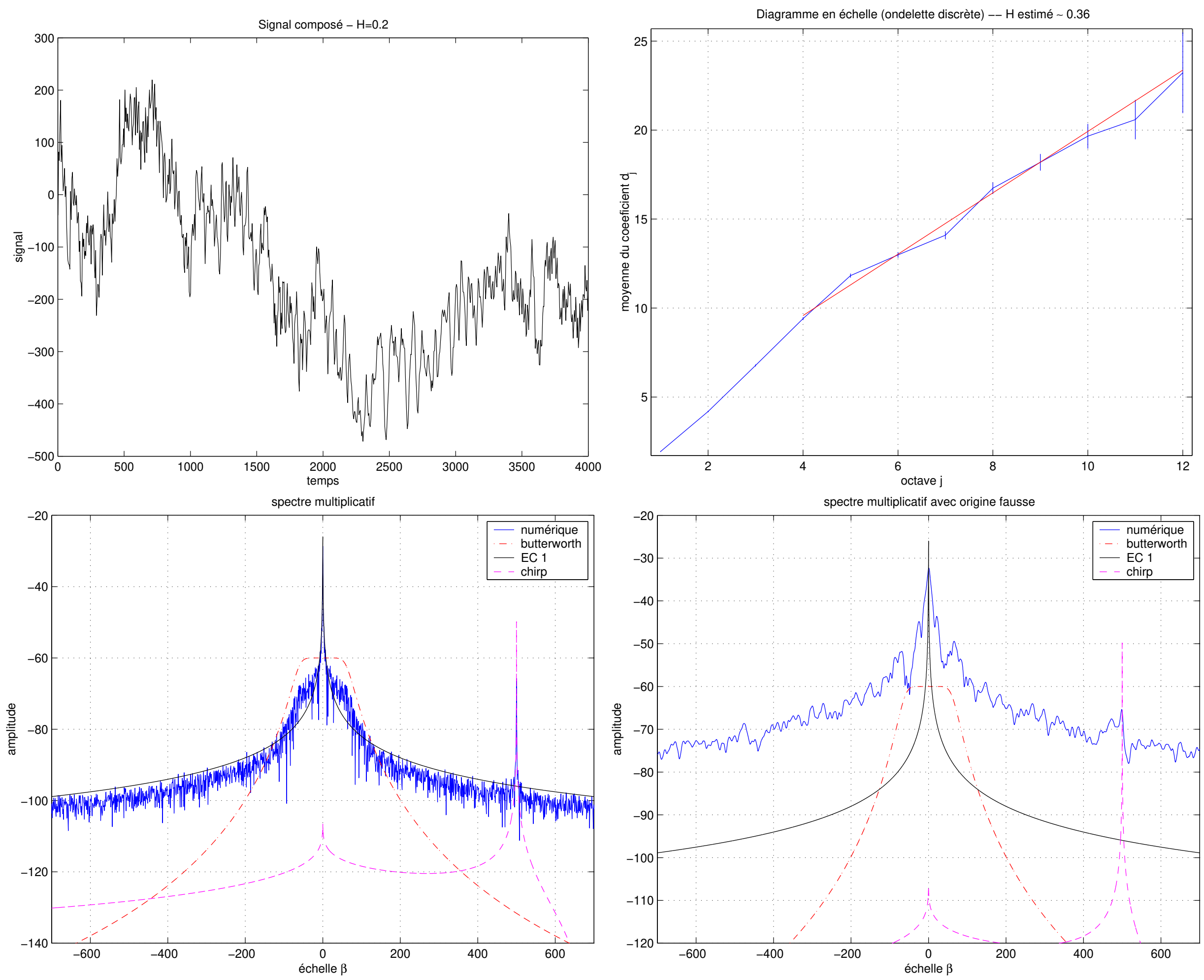



Fig. II.26: Signal formé par l'addition de la sortie d'un EC d'ordre 1, du signal de spectre type Butterworth de la figure II.25, d'un chirp de Mellin $H = 0.2$ et $\beta_0 = 500$ et de bruit blanc Gaussien à -80 dB. À l'exception du bruit le processus est exactement $H$-ss (théoriquement et propriété obtenue aussi numériquement). Cependant la struture auto-similaire complexe pertube l'estimation de l'exposant (en haut à droite) qui par décomposition en ondelettes discrètes se voit attribué l'estimation $H \simeq 0.36 \pm 0.04$. En bas on montre comment le spectre de Mellin d'une réalisation, sans moyenne (en bas à gauche) rend compte des propriétés du signal synthétisé, mais aussi que la connaissance de l'origine est cruciale pour cette analyse (en bas à droite, TMD avec une erreur de 1% sur la détermination de l'origine).

# III. Les processus à invariance d'échelle brisée

*Nous débordons dans ce chapitre de l'emploi classique de la transformation de Lamperti pour s'intéresser à des problèmes ayant une propriété d'invariance d'échelle incomplète, voire brisée.*

*La première partie esquisse les raisons de s'intéresser à ces situations et propose une lecture large de travaux en relation avec cette étude : ils nous permettent en particulier de fonder des méthodes d'analyse et de représentations non stationnaires, ou bien non auto-similaires. Un guide des principes généraux de construction des représentations mixtes (type temps-fréquence ou temps-échelle) est ainsi proposé. La deuxième section est l'utilisation directe de $\mathcal{L}_H$ pour les processus non invariants en échelle. Quatre points sont mis en avant : l'analyse spectrale en échelle construite par harmonisabilité multiplicative (2.1) ; les représentations non paramétriques mixtes temps - échelle de Mellin (2.2) ; une brève excursion dans l'analyse des statistiques d'ordre supérieur (2.3) et enfin le calcul pratique des décompositions, soit directement, soit par transformation de Hough (2.4).*

*La troisième et dernière section du chapitre aborde des situations où la transformation de Lamperti $\mathcal{L}_H$ ne suffit pas et où il faut proposer des généralisations de la transformation* ad hoc, *adaptées à la brisure de l'invariance en échelle envisagée. Deux cas sont détaillés : quand des effets de taille finie contraignent l'invariance (3.1) où nous faisons ample usage des approches de Dubrulle et co-auteurs [GD97, Dub00] ; quand l'invariance d'échelle n'est que locale (3.2) selon les approches de Benassi et al. [BCIJ97]. Nous exhibons les formes de transformées de Lamperti qui sont utiles dans ces problèmes.*

## 1 Dépasser l'invariance d'échelle exacte

### 1.1 Les déviations à l'auto-similarité

La propriété d'invariance en échelle est une affirmation forte. En survolant dans l'introduction les applications qu'elle trouve en physique ou dans des contextes plus mathématiques, on remarque que l'on s'accomoderait souvent de définitions moins rigides.

**Des brisures de symétrie.** Une constante en physique est de regarder le problème de brisure de symétries car, même si les principes fondamentaux gouvernant un système autorisent telle ou telle symétrie, elle est souvent rompue par des mécanismes d'instabilité ou de dégénerescence de symétrie. L'invariance d'échelle n'échappe pas à cette règle et de nombreuses déviations ont été étudiées (voir par exemple [DGS97]).

**Multiscaling ou multifractal.** L'auto-similarité implique directement des lois de puissance. Expérimentalement les lois de puissance ne sont généralement que des approximations, même si de temps à autre on trouve des comportements qui y obéissent sur une grande gamme d'échelle de manière presque surprenante [Van01].

En turbulence, ces limites sont vite atteintes : aux grandes échelles la géométrie extérieure au flot devient essentielle et à petite échelle la dissipation visqueuse achève tout comportement auto-similaire. Nous dirons en quelques mots dans la partie V comment on peut élargir les modèles de description statistique pour permettre, dans un contexte d'analyse en fonction de l'échelle, de modéliser des lois qui ne sont pas des puissances [Cas97, Cha01].

**Des brisures partielles de l'auto-similarité.** D'autres manières de dévier de l'auto-similarité existent et en général il s'agit d'introduire une échelle privilégiée. Dès lors l'auto-similarité stricte qui refuse qu'une échelle soit plus significative qu'une autre ne peut tenir. La brisure est partielle si une certaine forme de symétrie est retenue : le signal est toujours invariant sous un groupe de transformation plus restreint ou modifié [Han65]. Par exemple si une grande ou une petite échelle s'impose, l'invariance par les dilatations doit être reformulées et incorporer des effets de taille finie (voir le 3.1). Une autre situation est de proposer un rapport d'échelles préféré pour l'invariance sous dilatation ; ce sera l'objet de la partie IV. Enfin l'auto-similarité est une contrainte globale sur tout le signal et nous verrons une manière de la relâcher partiellement en la transformant en une contrainte locale (voir le 3.2).

## 1.2 Transformation de Lamperti au-delà de l'invariance d'échelle

Le chapitre précédent était centré autour de cette propriété forte d'invariance en échelle et de la propriété conjointe de stationnarité que la transformation de Lamperti lui associe. La partie qui s'ouvre est l'extension directe de ce passage possible entre le monde stationnaire et un monde auto-similaire.

Le passage est bien plus large que le théorème initial de J. Lamperti semble indiquer car, à la lumière du lemme II.1 ou de l'équation d'équivalence unitaire (II.84) qu'il décrit, nous sommes à même de ramener toutes les propriétés et les particularités d'un processus vis-à-vis des dilatations, aux propriétés qui font appel aux translations temporelles. Au-delà même, toutes les constructions élaborées pour rendre compte de situations non stationnaires trouvent une construction correspondante qui permet de qualifier des non-stationnarités par rapport aux changements d'échelle que sont les dilatations.

La nouvelle lecture que nous proposons du résultat est alors de rechercher certaines variations que permettent cette équivalence pour des processus et des situations physiques où l'invariance en échelle stricte n'est plus de mise.

Le schéma de réflexion que nous proposions dans le chapitre II en (II.6) comme cadre d'analyse des processus auto-similaire trouve ici une généralisation assez évidente, figure III.1. Nous adoptons la même démarche double que permet l'utilisation de la correspondance de Lamperti : utiliser des outils (non) stationnaires conjointement avec une délampertisation du signal pour étudier les (non) invariances en échelle ; ou directement reformuler des méthodes connues en les transposant dans le monde qui entoure les systèmes auto-similaires et décrit les invariances en échelle brisées ou incomplètes.

$$
\begin{tikzcd}
X(t) \text{ non } H\text{-ss} \arrow[rrr, "\text{Analyse au-delà de}", "\text{l'invariance en échelle}"'] \arrow[dddd, Rightarrow, "\mathcal{L}_H{}^{-1}"'] & & & (\mathbf{S}X) = (\mathcal{L}_H \tilde{\mathbf{S}} \mathcal{L}_H{}^{-1} X) \\
& \begin{array}{c} X(t) \\ H\text{-ss} \end{array} \arrow[ul] \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\mathcal{L}_H{}^{-1}"] & (\mathbf{T}X) = (\mathcal{L}_H \tilde{\mathbf{T}} \mathcal{L}_H{}^{-1} X) & \\
& \begin{array}{c} Y(t) = (\mathcal{L}_H{}^{-1} X)(t) \\ \text{stationnaire} \end{array} \arrow[r] \arrow[ddl] & (\tilde{\mathbf{T}}Y) \arrow[u, Rightarrow, "\mathcal{L}_H"'] & \\
& & & \\
\text{Non stationnaire } Y(t) \arrow[rrr, "\text{Méthode non-stationnaire}"'] & & & (\tilde{\mathbf{S}}Y) \arrow[uuuu, Rightarrow, "\mathcal{L}_H"']
\end{tikzcd}
$$

Fig. III.1: Généralisation du cadre de réflexion avec $\mathcal{L}_H$ pour les études des systèmes non invariants.

La fin de cette partie 1 est consacrée à une revue de différentes méthodes existantes pour construire des outils adaptés aux situations non stationnaires usuelles, ou à des invariances affaiblies par rapport à la stationnarité. La partie 2 sera une exploration plus détaillée de l'application aux représentations en échelle harmonisables, ou bien mixtes de type temps-échelle de Mellin. Nous montrerons aussi comment il est possible de passer de ces réflexions théoriques à une implémentation pratique des outils obtenus.

La partie 3 s'éloignera de ce formalisme en s'intéressant à des cas où le groupe de symétrie et même l'opérateur de changement d'échelle est directement modifié pour décrire une symétrie différente de l'auto-similarité usuelle. La méthodologie sera généralisée en proposant une modification de $\mathcal{L}_H$ adaptée à ces nouveaux groupes de symétrie.

## 1.3 Une notion de stationnarité en un sens générique

Alors que dans toute la partie II nous avons restreint notre étude aux propriétés de processus qui sont invariants par les translations temporelles ou invariants par les dilatations, il existe une approche générale qui permet de travailler sous l'hypothèse d'invariance d'un processus aléatoire par des transformations de n'importe quelle nature. La langage utilisé est celui des groupes et des représentations de ces groupes sur l'espace des signaux étudiés. En cela il est très proche du langage de la mécanique quantique.

La monographie de Hannan [Han65] est un des premiers traités qui rassemble les premières idées quant à l'utilisation des la notion de stationnarité sous un ensemble quelconque de transformations pour l'étude de signaux aléatoires. Pour l'auto-similarité, on se reportera à la remarque de Vervatt [Ver87] qui propose explicitement de regrouper sous une même terme, nous citons, « Self-similar processes and other processes invariant under group transformations. »

Nous ne ferons ici que des rappels généraux et un bref éclairage sur certains résultats découlant de la représentation des groupes en indiquant leur utilité à l'étude du monde stationnaire (ou non). Le livre de Vilenkin [Vil69] ou tout autre ouvrage de mathématique sur la théorie des groupes et de leurs représentations détaillent amplement les résultats mathématiques en ce domaine.

### 1.3.1 Fonder les invariances sur la notion de groupe

**Rappels sur les groupes et leurs représentations.** Un groupe $(G, *)$ est un couple constitué d'un ensemble $G$ muni d'une loi de composition $*$ et ayant les propriétés suivantes : il existe un élément neutre $b_0$ ; tout élément admet un inverse $b^{-1}$ tel que $b * b^{-1} = b_0$ ; la loi est associative. Si de plus la loi est commutative (on a $b' * b = b * b'$ pour tout couple $(b, b') \in G^2$), le groupe est dit abélien ou commutatif.

Des exemples triviaux de groupes sont $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}_*^+, \times)$ ou encore le groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ qui sont des groupes topologiques. Nous devinons après avoir rencontré des opérateurs particuliers au fil du chapitre II que les groupes formés par les opérateurs (qui représentent les transformations sur un espace de Hilbert précisé) vont être ceux qui nous importent le plus.

C'est en fait la notion de *représentation d'un groupe* topologique qui est au centre de leur utilisation en physique. Soit l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ dans lequel les signaux prennent leur valeur. Une fonction $\mathcal{V}(b)$ continue[1] sur $G$ ayant pour valeur des opérateurs linéaires continus et non dégénérés sur $\mathfrak{H}$ est appelée **représentation continue du groupe** $(G, *)$ si il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (b_1, b_2) \in G^2, \quad \mathcal{V}(b_1 * b_2) = \mathcal{V}(b_1) \circ \mathcal{V}(b_2), \tag{III.1}$$

où $\circ$ indique explicitement la loi de composition sur $\mathfrak{H}$ des deux opérateurs linéaires. Elle ne sera pas toujours notée mais parfois supposée implicitement. Il est à noter alors que l'ensemble des $\{\mathcal{V}(b), b \in G\}$ est lui aussi un groupe une fois muni de la loi $\circ$. Parmi les premières propriétés immédiates, la fonction de représentation doit faire correspondre les éléments neutres des groupes : $\mathcal{V}(b_0) = \mathbf{I}$, identité sur $\mathfrak{H}$. Les inverses sont aussi mis en correspondance. La représentation de groupe est une forme particulière de morphisme entre groupes, ici entre $(G, *)$ et $(\{\mathcal{V}(b), b \in G\}, \circ)$.

On dit que la représentation est *unitaire* si les opérateurs $\mathcal{V}(b)$ sont unitaires dans $\mathfrak{H}$, donc que pour tout couple d'éléments $(x, y)$ de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, on doit avoir $< \mathcal{V}(b)x | \mathcal{V}(b)y > = < x|y >$ . L'unitarité est demandée pour représenter des transformations qui sont supposées être des isométries de l'espace.

Au nombre des groupes de transformations qui nous occupent, nous pouvons nous souvenir que les translations, celles en temps ainsi que celles en fréquence, et les dilatations constituent des groupes continus et sont évidemment des représentations de groupe. On a en effet trivialement $\mathcal{S}_{\tau_2}\mathcal{S}_{\tau_1} = \mathcal{S}_{\tau_2+\tau_1}$ et les translations représentent le groupe des réels ; la modulation par un chirp $\mathcal{H}_\beta$ en est une autre. Comme $\mathcal{D}_{H,\lambda_2}\mathcal{D}_{H,\lambda_1} = \mathcal{D}_{H,\lambda_2\lambda_1}$, les dilatations sont une représentation du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_*^+, \times)$. Ces transformations sont toutes unitaires en choisissant le bon espace de Hilbert (qui est $L^2(\mathbb{R}_*^+, t^{-2H-1}\mathrm{d}t)$ pour $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et $\mathcal{H}_\beta$).

[1] Nous nous restreindrons aux représentations continues.

**Stationnarité sous un groupe de transformation.** Ainsi que nous l'avons fait pour les dilatations en introduisant l'auto-similarité, Hannan propose dans [Han65] d'étudier de manière générale la stationnarité d'un processus sous l'action d'un groupe de transformation $(\{\mathcal{V}(b), b \in G\}, \circ)$.

Définition III.1: *Un processus* $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ *(avec* $X(t) \in \mathfrak{H}$*) est* ***invariant*** *sous l'action groupe* $(\{\mathcal{V}(b), b \in G\}, \circ)$ *si :*

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ (\forall b \in \mathcal{G}) \quad (\mathcal{V}(b)X)\,(t) \stackrel{d}{=} X(t). \tag{III.2}$$

Cette définition admet bien sûr un équivalent affaibli au second ordre seulement.

Différents résultats peuvent alors être glanés dans la littérature sur les groupes, leurs représentations, ou les opérateurs unitaires, qui seraient d'utilité pour le traitement du signal. Nous ne ferons pas d'étude exhaustive de la question – nous ne saurions en fait faire mieux que [Han65] pour les problèmes classiques comme l'analyse de Fourier généralisée, l'existence de densités spectrales (redécouverte dans [Coh98]), les problèmes de filtrage, aliasing, etc. Pour des développements plus récents nous renvoyons par exemple à [Twa99].

Cependant nous allons détailler juste ci-dessous puis en 1.5 certains résultats que nous utilisons : d'abord les particularités des opérateurs unitaires et hermitiens pour la physique, ensuite comment les méthodes d'analyse non stationnaires de représentation d'un signal sous deux variables sont étendues par des approches issues, ou liées, à la théorie des groupes et nous en donnerons le principe.

### 1.3.2 Opérateurs et grandeurs physiques

**Propriétés des représentations unitaires.** Un intérêt fondamental des opérateurs unitaires est qu'ils sont associés à un opérateur hermitien qui trouve une interprétation physique précise. Soit $\mathcal{V}(b)$ une représentation continue unitaire sur $\mathfrak{H}$. Il existe un opérateur hermitien associé $\mathcal{A}$, appelé générateur infinitésimal des transformations $\mathcal{V}(b)$ (avec $b \in G$), tel que (en notant $\mathbf{I}$ pour l'opérateur identité) :

$$\mathcal{V}(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i2\pi b\mathcal{A})^n}{n!} = e^{i2\pi b\mathcal{A}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{i2\pi} \lim_{b\to 0^+} \frac{\mathcal{V}(b) - \mathbf{I}}{b}. \tag{III.3}$$

On dénomme analyse de Fourier généralisée $\mathbf{F}_{\mathcal{A}}$ sur le groupe dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, la décomposition spectrale sur les vecteurs propres de $\mathcal{A}$. Ils sont à l'évidence aussi les vecteurs propres de $\mathcal{V}(b)$. Nous les notons $\underline{e}_a$, de telle sorte que $\mathcal{A}\underline{e}_a = a\underline{e}_a$ et alors $a \in \mathbb{R}$ puisque $\mathcal{A}$ est hermitien. Ces vecteurs $\underline{e}_a$ sont dans le cas déjà étudié des translations simplement la base de Fourier $e_\nu$. Les valeurs propres des $\underline{e}_a$ pour les transformations unitaires sont elles de module unité. La décomposition suivante d'un signal $x \in \mathfrak{H}$ est l'analyse de Fourier généralisée cherchée :

$$x = \int f_x(a)\underline{e}_a \mathrm{d}a \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{F}_{\mathcal{A}}x)(a) = f_x(a) = <\underline{e}_a|x> = \int \overline{\underline{e}_a}(u)x(u)\mathrm{d}u. \tag{III.4}$$

**Les opérateurs hermitiens comme observables.** L'analogie avec la mécanique quantique suggère de considérer les quantités physiques pertinentes (ou observables) sont associées à des opérateurs hermitiens. La propriété mathématique qui assure que les valeurs propres d'un $\mathcal{A}$ restent réelles facilite cette assimilation et l'interprétation.

Dans le contexte de traitement du signal, nous avons déjà rencontré cette démarche qui nous a fait introduire les opérateurs de temps, de fréquence et d'échelles, respectivement les observables dérivant des translations temporelles, fréquentielles et des dilatations. La correspondance est en fait générale. L'analyse de signal stationnaire peut se construire en grande partie à l'aide des opérateurs en temps et fréquence et des représentations induites.

Il est alors de coutume de regarder les valeurs globales (ou moyennes), pour un signal donné, de la quantité $\mathcal{A}$, que nous pouvons aussi noter $a$ pour faire référence au résultat d'une mesure. Elle est donnée par $< a >=< \mathcal{A} >_x =< x|\mathcal{A}\ x >$. Le parallèle étroit avec le langage de la mécanique quantique permet ensuite de donner des interprétations plus fines des résultats obtenus avec les opérateurs. Nous en donnons la trame en 1.5.2. Une autre approche, surtout constructive et moins interprétative, est fondée sur les équivalences unitaires entre opérateurs, voir 1.5.3.

### 1.3.3 Brisures de symétrie ou invariance sous un groupe restreint ?

Comme toute négation de propriété, l'inexistence d'une certaine symétrie comme l'invariance en échelle n'est pas suffisante pour décrire le système. La liste serait trop longue des propriétés que ne vérifie pas un signal donné !

La lecture des invariances en traitement du signal comme étant celles sous l'effet d'un groupe quelconque de transformations nous incite à étudier certaines brisures d'invariances comme des symétries sous l'action de nouvelles transformations. Un exemple est le passage à l'invariance sous le groupe discret des dilatations de facteur d'échelle $\lambda^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ : c'est ce qu'on appelle l'invariance en échelle discrète [Sor98a]. Nous renvoyons le lecteur au chapitre IV pour nos contributions à ce sujet. Un autre exemple est proposé en III.3.1 où on suppose l'auto-similarité brisée par l'existence de limites (*cut-offs*) hautes et/ou basses, pour être remplacée en fait par une invariance sous une nouvelle forme de dilatations incorporant ces limites.

Cependant l'étude d'un signal ne se prête pas toujours à revenir dans le giron d'un groupe de symétrie identifié. L'ensemble des méthodes que nous allons étudier en 2 adoptent le point de vue général que les études temps-fréquence supposent vis-à-vis des situations non stationnaires en temps : la déviation à l'auto-similarité sera inconnue et c'est elle que l'on cherche à mettre en évidence et décrire, ensuite à qualifier.

## 1.4 Stationnariser un processus

L'idée que nous développons dans ce rapport est qu'il est bénéfique de trouver comment transformer un processus ayant une propriété d'invariance quelconque (et nous regardons surtout les cas $H$-ss ou d'invariance en échelle brisée) pour lui associer une image stationnaire, ou au minimum ayant une symétrie classique, que l'on sait analyser par des méthodes usuelles de traitement du signal.

Cette méthodologie a été utilisée différemment pour des situations spécifiques et nous en commentons certaines qui nous apparaissent importantes.

### 1.4.1 Réduction stationnaire par déformation temporelle

Un questionnement général est de savoir quelle condition doit vérifier un processus stochastique pour qu'il admette une image stationnaire obtenue par déformation en temps. L'étude a été initiée par Sampson et Guttorp [SG92], puis développée par Meiring et Perrin [Mei95, Per97, PS99, PM99, PS00]. Partant d'un processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ défini en dimension $d$, on cherche à modéliser le processus par :

$$X(t) = Y(\Phi(t)) \quad \text{avec} \quad R_X(t,s) = \Gamma_Y(\Phi(t) - \Phi(s)), \tag{III.5}$$

où $\{Y(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ un processus stationnaire et $\Phi(\cdot)$ une déformation bijective de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Les cas de la déformation temporelle ($d = 1$) [PS99] et de déformation spatiale ($d = 2$) [PS00] ont été les objets principaux des études.

Des résultats sur l'existence et l'unicité d'une telle réduction ont été obtenus [Mei95, Per97, PS99, PS00], sous hypothèses de continuité et différentiabilité de $\Phi$ et $R_X$. Des méthodes statistiques d'identification [PM99] du processus réduit ont alors été proposées puis étudiées en en démontrant des propriétés de convergence. Elles fonctionnent dans certaines situations.

Notons qu'on trouve mention explicitement[2] dans [Per97] de la transformation passant d'un fBm à son générateur stationnaire (que nous apelions gOU) par le changement d'horloge de $t$ en $\ln t$. Cependant le cadre est alors un peu différent car on change d'espace de définition naturelle du processus (passant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}_*^+$ comme support) et d'espace de Hilbert. De plus il ne nécessite pas les hypothèses de dérivabilité pour être établi puisque, nous l'avons vu, cette transformation de Lamperti émerge d'un cadre général d'analyse des groupes de déplacements en leurs relations avec des groupes de transformations.

### 1.4.2 Les changements d'horloge : approche par les groupes

**Le principe de stationnarisation.** L'appellation « changement d'horloge » fut introduite par Berthon [Ber94b]. L'idée est qu'étant donnés des groupes de transformation, on peut parfois construire des groupes dits de déformation (terme de [Per97]), de changement d'horloge (pour [Ber94b]) ou de modulation [HTT02] (que nous introduirons ci-dessous en 1.5.4) qui simplifient l'effet des transformations de départ.

Le schéma examiné est proche de l'équation (III.5) mais s'exprime plutôt en langage de théorie des groupes. Le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est remplacé par son image par un opérateur changement d'horloge $\mathcal{V}(b)$ (fonction d'un certain $b$ à préciser) :

$$Y(t) = (\mathcal{V}(b)X)(t). \tag{III.6}$$

En soi cette forme n'est pas très intéressante. Elle va le devenir quand on demande à $\mathcal{V}(b)$ d'être une représentation de groupes et qu'on sait interpréter l'élément du groupe représenté

[2] Le résultat est présenté sans référence à celui de Lamperti [Lam62].

$b$ ; ce fut l'objet des rappels du 1.3.2. Elle l'est encore plus quand ce groupe a des propriétés specifiques vis-à-vis de certaines transformations : translations, dilatations, rotations (si à deux dimensions au moins), etc. Ceci sera l'objet de notre présentation du 1.5.

En lien avec ce que nous savons de la transformation de Lamperti (qui est justement la manière de modifier un processus pour passer des translations en temps aux dilatations) et à l'aide des idées de stationnarisation qui en découlent, l'objectif principal devient à ramener l'effet d'une certaine transformation sur $X(t)$ à une transformation plus simple sur $Y(t)$. On tentera en général de ramener l'effet à une *translation* ce qui opère la stationnarisation si la variable touchée est assimilable à un temps (et donc le résultat est équivalent à (III.5)).

**Les apports de la théorie des groupes.** Le fait de formuler le problème par la théorie des groupes permet de traiter de la même manière deux problèmes que l'on aurait pu voir comme séparés : celui de la réduction stationnaire d'un processus ayant une invariance sous un groupe de symétrie particulier et celui de la représentation d'un signal ou processus en fonction de deux (ou plusieurs) grandeurs physiques. Cette question trouve sa réponse dans les études sur les représentations conjointes (comme celles temps-fréquence ou échelle) à deux paramètres, en particulier dans les développements de R. Baraniuk [Bar98], L. Cohen [Coh95] puis F. Hlawatsch [HTT02], et fera l'objet du paragraphe 1.5.

Dans les deux problèmes on se pose la question de savoir quelle combinaison d'observables ou de transformations (qui définissent éventuellement une invariance ou symétrie spécifique) admet une structure de groupe utilisable. Les réponses s'appuient sur les travaux d'analyse des groupes. Pour les transformations qui portent sur les signaux à variable unidimensionnelle, la réponse est connue (nous renvoyons à nouveau aux principes discutés dans 1.5).

### 1.4.3 Le cas des champs à deux dimensions.

Les extensions de l'étude de stationnarisation à deux dimensions ont été initiées dans la thèse de I. Donescu [Don97]. Elle étudie, dans un formalisme un peu différent du nôtre (mais toujours fondé sur les groupes de transformations), l'invariance d'images définies sur un plan (ou une partie).

Ainsi que le mentionnaient Lovejoy et Schertzer [SL87] pour les nuages, les transformations du plan (et donc les symétries) que l'on peut étudier sont alors plus nombreuses qu'à 1D : translations dans l'espace (selon un axe ou plusieurs), rotations, homothéties, dilatations, projections ou des combinaisons comme les similitudes planes.

I. Donescu donne des éléments pour construire les opérations de stationnarisation d'un champ à 2D ayant une symétrie donnée en montrant que les transformations pour lesquelles il y a invariance doivent nécessairement être isomorphes à $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition. On y trouve aussi des résultats sur la caractérisation de la covariance des champs (qui se simplifie à l'aide des symétries) et une étude des méthodes de synthèse et d'analyse de champs 2D que l'on construit à partir de l'étude des symétries sous certains groupes.

Nous n'avons pas travaillé sur les analyses de signaux définis à deux dimensions. Cependant, les travaux décrits dans [Don97] et [Per97] montrent que l'étude de l'invariance en échelle exacte ou sous des formes brisées, en combinaison éventuellement avec d'autres symétries, peut s'aborder avec le même point de vue que nous défendons ici : trouver un transformé du champ stationnaire pour fonder une analyse du signal sous une autre symétrie à partir des méthodes usuelles, puis ouvrir aux symétries brisées en utilisant les méthodes d'analyse non stationnaire (sous-entendu non stationnaire en temps, ou en espace).

Spécifiquement, les dilatations dans le plan ont leur transformation de Lamperti à 2D directement construite comme associant $(\ln \rho, \theta)$ au point de coordonnée polaire $(\rho, \theta)$. Son usage demande cependant d'autres études car $\ln \rho \in \mathbb{R}$, peut être négatif et l'image inverse déborde alors du plan usuel. Cette forme est adaptées à une invariance par rotation autour de l'origine mais pas à la combinaison des dilatations avec d'autres transformations du plan. L'idée défendue dans [BG86] est tout de même d'utiliser cette forme de lampertisation à 2D et les décompositions de Mellin radiales qui en découlent comme outil de l'analyse des images.

## 1.5 Formalisme des opérateurs en traitement du signal non stationnaire

Ce paragraphe ne contient pas vraiment de nouveautés mais offre une présentation générale des possibilités de construire des représentations non paramétriques pour des problèmes non stationnaires. Nous partons des premières formulations des analyses temps-fréquence pour aboutir aux tout derniers résultats sur la construction des décompositions à deux paramètres quelconques, en les reliant aux propositions exposées dans la thèse.

Le propos devient de plus en plus formel au fil des paragraphes 1.5.1 à 1.5.4 ; nous n'utiliserons que peu les dernières formalisations pour construire au 2 les représentations temps-échelle de Mellin. Cependant la démarche générale dont nous présentons l'aboutisssement en 1.5.4 permet de les introduire, de manière assez abstraite peut-être alors que l'utilisation de la transformation de Lamperti le permet avec une approche plus intuitive.

### 1.5.1 Introduction à l'univers non-stationnaire

**Décompositions à deux paramètres.** Alors que les premiers efforts en traitement du signal ont porté sur l'analyse fine des signaux stationnaires, le monde est rarement aussi sage que les hypothèses le voudraient, et dans beaucoup d'applications, que l'on s'intéresse au comportement de systèmes physiques réels, de modèles plus éloignés ou même aux signaux purement artificels, on s'attend à déborder de l'hypothèse de stationnarité.

Bien que séduisante, la description sur la base de Fourier (ou harmonique) est alors insuffisante comme l'illustre la figure III.2. Une première solution pour sortir du cadre du monde stationnaire est fournie par les approches temps-fréquence. Plusieurs ouvrages généraux existent sur l'analyse temps-fréquence avec un accent mis sur les signaux non stationnaires. Nous renvoyons par exemple à [Fla99, Coh95, CHT98, Boa02] pour des présentations modernes.

Ces méthodes proposent des représentations non paramétriques du contenu d'un signal, en fonction du temps $u$ et de la fréquence $f$, dans un premier temps par une décomposition notée $r_x(u, f)$, dite atomique, telle que :

$$x(t) = \iint r_x(u, f)\ b_{uf}(t) \mathrm{d}u \mathrm{d}f. \tag{III.7}$$

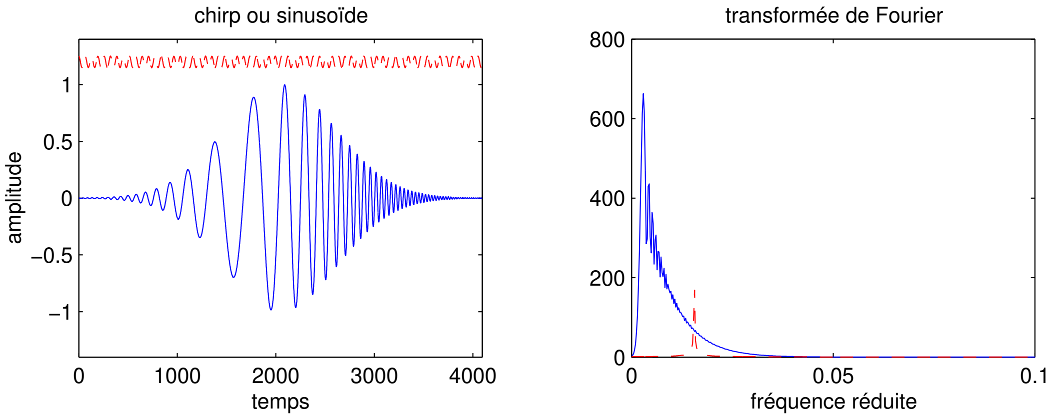



Fig. III.2: Alors que pour une sinusoïde (en - -) la transformée de Fourier est un description suffisante, pour un chirp (en –) elle ne délivre pas toute l'évolution non stationnaire du signal.

Un choix possible pour construire les atomes de localisation est de s'appuyer sur des symétries que l'on souhaite privilégier dans la lecture des informations du signal. On peut en effet prendre comme atome de base n'importe quelle fonction engendrée par l'application de transformations spécifiques du plan à deux paramètres (et ces transformations définissent leur notion propre de stationnarité et sont en général des représentations de groupes dont on peut interpréter l'élément du groupe représenté comme une observable). L'enjeu est ici de préciser la relation précédente et les possibilités d'inversion pour savoir comment calculer la décomposition $r_x(u,f)$ à partir d'un signal $x(t)$ expérimental.

Le signal décomposé en fonction du temps et d'une fréquence obéit à ce principe général. Une solution est de partir du groupe à deux paramètres $(\mathbb{R}^2,+)$, représenté conjointement par les translations en temps et en fréquence et elle conduit à des atomes de la forme :

$$b_{uf}(t) = b_0(t-u)e^{-i2\pi ft} \tag{III.8}$$

La décomposition en $(u,f)$ sur ces atomes est la transformée de Fourier à court terme[3]. Nous montrons un exemple de son utilité pour représenter de manière intuitive les évolutions non stationnaires d'un signal en figure III.3. Notons que les représentations usuelles des signaux stationnaires peuvent être vues comme venant de groupes à un seul paramètre : $b_{uf}(t) = \delta(t-u)$ qui est la base de représentation en temps est obtenue par les transtations $\mathcal{S}_{-u}$ et l'analyse de Fourier sur $b_{uf}(t) = e_f(t)$ vient des décalages en fréquence. Les groupes à deux paramètres sont l'extension naturelle des décompositions stationnaires.

**En fréquence ou en échelle ?** Les transformations choisies conduisent à des décompositions à un temps et à une fréquence. Cependant il existe d'autres groupes à deux paramètres et infiniment plus encore de représentations unitaires de ces groupes.

[3] Remarquons qu'en général la relation (III.7) n'est pas valide et que la transformée de Fourier à court terme est définie par la relation inverse, ici $r_x(u,f) = < b_{uf}|x >$.

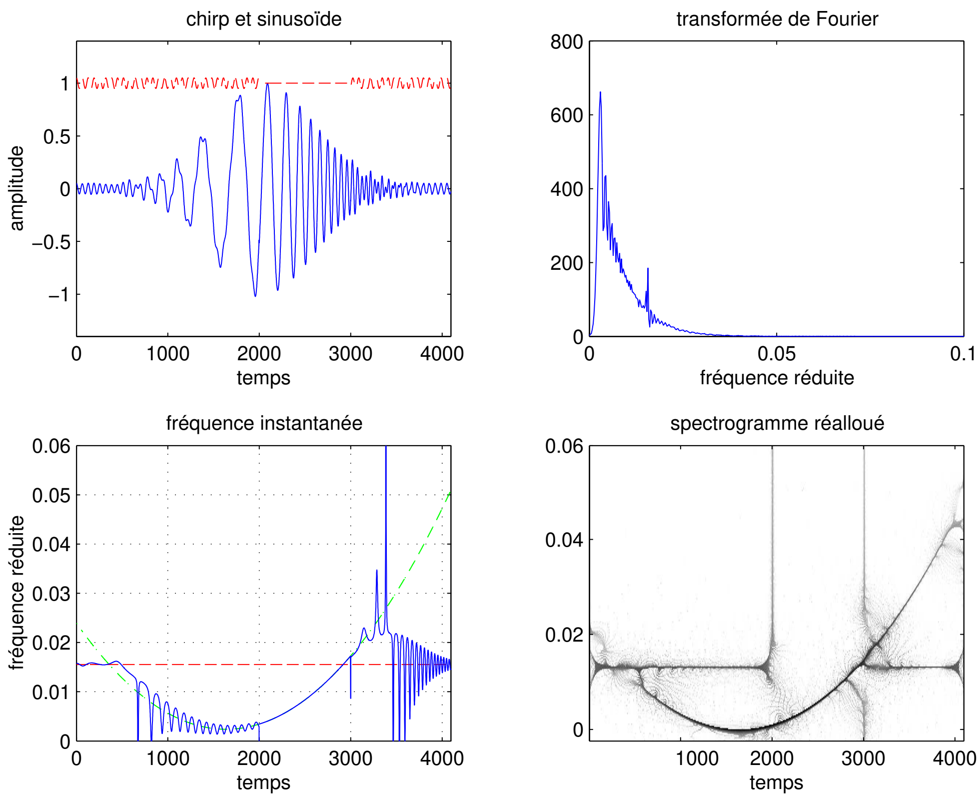



Fig. III.3: Étude d'un signal non stationnaire composé d'un chirp (fréquence instantanée quadratique) superposé à une fréquence pure de faible amplitude qui s'interrompt au milieu. Nous montrons la transformée de Fourier ainsi que la fréquence instantanée qui ne sont pas des descriptions suffisantes pour suivre intuitivement les diverses fréquences du signal. En bas à gauche, la fréquence instantanée donnée par (II.25) est tracée avec celles théoriques des deux composantes du signal : sinusoïde (fréquence constante) et chirp dont la fréquence évolue en temps (ici en parabole). Une représentation temps fréquence, en bas à droite, permet de représenter puis mesurer l'évolution dans le temps du contenu fréquentiel du signal (ici un spectrogramme réalloué - voir [CM98] par exemple).

Une autre solution souvent retenue fait la part belle à la notion d'échelle. Le groupe représenté est alors le groupe affine[4] et les transformations sont des dilatations associées à des translations dans le temps. Ces motifs forment une base du type :

$$b_{u\ \nu_0/a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, b_0\left(\frac{t-u}{a}\right). \tag{III.9}$$

Ce choix de l'échelle $a$ est en fait associé à des fréquences $f$ telles que $a = \nu_0/f$ où $\nu_0$ est la fréquence centrale du motif initial $b_0$. Il n'y a pas équivalence cependant avec la représentation directe en $(u, f)$ précédente : cela se reflète dans les localisations (pavage du plan temps-fréquence) bien différentes. La popularité de cette approche vient de ce que, ainsi définis, les motifs de base ne sont plus très éloignés des ondelettes (voir [Mey90] ou [Abr97]).

[4] Le groupe affine est le groupe non abélien $(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \cdot)$ tel que $(a,b)\cdot(a',b') = (aa', ab'+b)$.

Il ne manque plus que quelques propriétés (admissibilité, régularité, nombre de moments nuls) pour obtenir toute la souplesse d'analyse qu'octroie la transformation en ondelettes. Renforcée par la possibilité de construire des représentations exactes non redondantes des signaux (transformée en ondelette discrète) et des algorithmes efficaces (algorithme pyramidal), la majorité des études portant sur des comportements en échelle ont été menées avec cet outil.

La notion d'échelle qui émerge ici n'est pas celle que nous avons rencontrée jusqu'à présent. Cette échelle est explicitement covariante et non invariante vis-à-vis des dilatations. Comme ce formalisme et l'échelle de Mellin semblaient naturels à nos études sur les propriétés d'invariance en échelle, nous continuerons les extensions aux auto-similarités brisées avec l'échelle de Mellin.

**Linéaire ou bilinéaire ?** Les décompositions dont nous venons de parler sont linéaires par rapport au signal. Les contraintes posées à la représentation sont alors très fortes, même si par exemple dans le cas du temps-échelle, les analyses en ondelettes se révèlent des outils puissants. Il est intéressant de regarder directement la construction de représentations bilinéaires qui sont des généralisations non-stationnaires des densités de puissance. C'est alors que les densités de Wigner-Ville, de la classe de Cohen, etc, entrent en jeu. Les livres cités ci-dessus sont principalement focalisés sur les représentations bilinéaires. On pourra consulter aussi [MH97] centré sur la distribution de Wigner-Ville qui est un élément central dans ces études.

Nous allons dans la suite (au 2.2.2) montrer comment l'application de la transformation de Lamperti conduit à des classes bilinéaires particulières. Avant cela, penchons-nous sur les trois méthodes unificatrices pour la construction de ces représentations.

### 1.5.2 Méthode de la fonction caractéristique

Premier auteur a avoir introduit une classe générale de représentations de type énergie en temps et fréquence [Coh66], L. Cohen a depuis continué à développer sa méthode issue de la mécanique quantique. Un exposé général peut être consulté dans [Coh95]. Nous en livrons les éléments majeurs.

**Un langage quantique.** Le point de départ est l'interprétation des quantités observables comme opérateurs hermitiens. La lecture probabiliste du langage quantique sert de guide pour associer au signal $x$ une densité de la grandeur $a$ (ou en $\mathcal{A}$) – il faut songer par exemple à ce que $a$ peut être la fréquence pour laquelle la densité spectrale est une quantité classique. On établit en effet pour n'importe quelle fonction $g$ le calcul suivant pour spécifier le contenu en $g(a)$ d'un signal :

$$< g(a) >_x = < x|g(\mathcal{A})|x > \;=\; < x|g(\mathcal{A})| \int f_x(a)\underline{e}_a \mathrm{d}a > \tag{III.10}$$

$$= \; < x| \int g(a) f_x(a)\underline{e}_a \mathrm{d}a > \tag{III.11}$$

$$= \; \iint g(a)\overline{f_x(a')} f_x(a) < \underline{e}_{a'}|\underline{e}_a > \mathrm{d}a\mathrm{d}a' \tag{III.12}$$

$$= \; \int g(a)|f_x(a)|^2 \mathrm{d}a. \tag{III.13}$$

Nous pouvons alors dire que $g(\mathcal{A})$ (ou $g(a)$) a pour contenu global l'intégration des valeurs possibles $g(a)$ avec la densité de contenu en $a$ du signal $|f_x(a)|^2 = p_x(a)$. Elle est identique à ce qu'une description en signal aléatoire donnerait :

$$\mathbb{E}\{g(a)\} = \int g(a) p_x(a) \mathrm{d}a, \tag{III.14}$$

où $p_x(a)\mathrm{d}a$ est la mesure de probabilité du processus $x$ pour la quantité $a$.

**La fonction caractéristique de Cohen.** Poursuivant le lien avec la description probabiliste, l'introduction de la fonction caractéristique de l'opérateur

$$M_{\mathcal{A},x}(\theta) = < e^{i2\pi\theta a} >_x = \int e^{i2\pi\theta a} p_x(a)\mathrm{d}a = (\mathbf{F}^{-1}p_a)(\theta), \tag{III.15}$$

permet de revenir à cette densité en $a$ à l'aide de la mesure des différents moments $< a^n >_x$ du signal. Ces moments se calculent avec (III.13). Nous retrouvons ici les liens bien connus entre fonction caractéristique et moments puisque le développement de $e^{i\theta a}$ en série de Taylor donne

$$M_{\mathcal{A},x}(\theta) = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i2\pi\theta)^n}{n!} a^n p_x(a)\mathrm{d}a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i2\pi\theta)^n}{n!} < a^n >_x, \tag{III.16}$$

que l'on peut inverser pour trouver la relation

$$< a^n >_x = \frac{1}{(i2\pi)^n} \left. \frac{\partial^n M_{\mathcal{A},x}(\theta)}{\partial\theta^n} \right|_{\theta=0}. \tag{III.17}$$

Par la suite, puisque la densité $p_a(x)$ est la transformée de Fourier de la fonction caractéristique, elle est déterminée complètement par les moments.

$$p_x(a) = \int M_{\mathcal{A},x}(\theta) e^{-i2\pi\theta a}\mathrm{d}\theta = \int e^{-i2\pi\theta a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i2\pi\theta)^n}{n!} < a^n >_x \mathrm{d}\theta. \tag{III.18}$$

Nous pouvons noter aussi que, puisque $\mathcal{A}$ hermitien engendre un opérateur de déplacement unitaire $e^{i2\pi g\mathcal{A}} = \mathcal{V}(g)$, sa fonction caractéristique est alors la moyenne pour le signal $x$ de $\mathcal{V}(g)$ :

$$< \mathcal{V}(g) >_x = < e^{i2\pi g\mathcal{A}} >_x = M_{\mathcal{A},x}(g). \tag{III.19}$$

Ainsi une observable donnée pourrait être examinée directement par l'effet de $\mathcal{A}$ mais aussi par son comportement moyen sous l'action de la classe d'isométries associées, $\mathcal{V}(g)$. Dans le cas du comportement temporel, cela s'énonce comme le fait que le spectre fréquentiel est caractéristique du comportement du signal sous les translations dans le temps. Ce serait d'ailleurs une méthode juste en son concept (bien que souvent inefficace) de chercher des périodicités.

**Quantités instantanées.** Une première conséquence qui se raccroche à l'analyse des signaux usuels est la possibilité de construire un contenu $a_x(t)$ local au point $t$, instantané, de la grandeur décrite par l'observable $\mathcal{A}$ dans le signal $x$. Il est proposé de choisir la définition suivante

$$a_x(t) = \mathrm{Re}\frac{\mathcal{A}x(t)}{x(t)}. \tag{III.20}$$

Le symbole Re désigne la partie réelle. L'interprétation tient convenablement si tant est que l'on peut définir des grandeurs locales. En effet cette définition repose en fait sur deux observables : $\mathcal{A}$ et le temps qui intervient explicitement dans $x(t)$, projection du signal sur les impulsions de Dirac $\delta_t(u)$, voir (II.5). La quantité instantanée définie livre, dans le cas particulier de l'étude en fréquence des signaux, la forme (II.25). Nous avons déjà commenté l'impossibilité de définir sans ambiguité une grandeur, la fréquence, qui ne peut en fait être instantanée...

L'inégalité de Gabor-Heisenberg (II.23) interdit une localisation conjointe parfaite en temps et fréquence. Ce défaut est plus général puisque fondamentalement issu de la non-commutativité des observables temps et fréquence. Nous avons la même inégalité entres toutes quantités qui ne peuvent être échangées par commutation. Ici c'est le temps et l'autre grandeur $\mathcal{A}$ qui imposent une borne inférieure à $\Delta t \Delta a$ si ces opérateurs ne commutent pas.

**La décomposition en échelle.** L'emploi du formalisme des opérateurs à la notion d'échelle conduit à l'étude des dilatations, de l'opérateur d'échelle $\mathcal{C}$ et la décomposition en échelle associée n'est autre qu'une transformation de Mellin [Coh93]. L. Cohen étudie ensuite une représentation de Mellin à court terme en introduisant une fenêtre dans la définition, formant alors une transposition directe, voire brutale, de la transformée de Fourier à court terme à l'analyse de Mellin.

$$L_f^C(\beta, t_0) = \int_0^\infty f(t)h(t-t_0)t^{-H-i2\pi\beta}\frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{III.21}$$

**Distribution jointe en deux observables.** L'outil fonction caractéristique est surtout enrichissant quand on s'intéresse à l'écriture d'un signal en fonction de deux grandeurs. Faisant un pas au-delà des constructions par application de groupes à des motifs de base, L. Cohen montre que les densités quadratiques peuvent être introduites comme associées à une fonction caractéristique à deux variables :

$$M_x(\alpha, \beta) = \phi(\alpha, \beta) < e^{i2\pi\alpha\mathcal{A}+i2\pi\beta\mathcal{B}} >_x \tag{III.22}$$

où $\phi(\alpha, \beta)$ est la fonction qui définit le choix de la règle de correspondance, puis en prenant la double transformée de Fourier inverse pour calculer la densité.

$$p_x(a,b) = \iint M_x(\alpha,\beta)e^{-i2\pi a\alpha - i2\pi b\beta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{III.23}$$

$$= \iint \phi(\alpha,\beta)\overline{x(t)}e^{i2\pi\alpha\mathcal{A}+i2\pi\beta\mathcal{B}}x(t)e^{-i2\pi a\alpha - i2\pi b\beta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \tag{III.24}$$

Ces distributions ont comme contrainte première le respect des marginales, c'est-à-dire que :

$$\int p_x(a,b)\mathrm{d}a = |(\mathbf{F}_{\mathcal{B}}x)(b)|^2 \qquad \text{et} \qquad \int p_x(a,b)\mathrm{d}b = |(\mathbf{F}_{\mathcal{A}}x)(a)|^2. \tag{III.25}$$

Toute la difficulté, mais aussi la souplesse qui autorise plusieurs distributions, vient de ce que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne commutant pas a priori, il y a plusieurs calculs possibles pour choisir au départ l'exponentiation qui définit la fonction caractéristique. Cette liberté est mise dans le noyau de lissage $\phi(\alpha, \beta)$. Comme remarqué par Baraniuk dans [Bar95] et [Bar96a], ce noyau devrait avoir la dépendance générale $\phi(\alpha, \beta; a, b)$ si on veut être certain de retrouver les propriétés de covariance que les autres constructions de représentations jointes imposent. Sinon, dans le cas où $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ n'engendre pas un groupe de transformations unitaires, les covariances voulues ne sont pas toujours obtenues [Bar96a]. C'est la différence entre l'approche qui assure les marginales (celle de Cohen [Coh95]) et l'approche assurant les covariances (parfois au prix des marginales) [Bar98].

### 1.5.3 Principe d'équivalence unitaire

R. Baraniuk et D. Jones développent une autre lecture de la représentation d'une quantité par un opérateur en traitement du signal, par exemple dans [BJ93] et [BC95]. Elle part de la notion d'équivalence unitaires d'opérateurs, disons $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, définie comme l'existence d'un opérateur unitaire $\mathcal{U}$ tel que :

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{U}. \tag{III.26}$$

Cette lecture met en avant les opérateurs unitaires et l'analyse de Fourier généralisée associée à chaque opérateur. Nos rappels sur les représentations de groupe et les propriétés des opérateurs suffisent à convaincre que partir de l'unitarité des transformations ou partir des observables hermitiennes comme Cohen, doit permettre les mêmes constructions. Les auteurs de ces deux approches ont ainsi prouvé dans [CB94] et [BC95] cette équivalence.

**Les opérateurs de temps et de fréquence : le paradigme originel.** L'équivalence unitaire montre que la majorité des décompositions à deux paramètres souhaitées sont des généralisations des travaux (menés avec plus de désordre mais qui donnèrent les solutions efficaces) sur les représentations temps-fréquence. La situation de base est en effet de partir d'une grandeur $\mathcal{A}$ que l'on veut privilégier. Si on trouve une relation d'équivalence avec un certain $\mathcal{U}$ unitaire entre $\mathcal{A}$ et l'opérateur temps $\mathcal{T}$, alors toute la batterie des analyses temps-fréquence est ouverte à l'analyse non stationnaire en $\mathcal{A}$. On introduit la variable conjuguée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ comme la transformée unitaire de $\mathcal{F}$ et les analyses conjointes en $t$ et $\nu$ deviennent des analyses conjoints en $a$ et $b$. On dit alors que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des opérateurs *conjugués* ou *duaux* et on a : $\mathcal{A} = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{U}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{F}\mathcal{U}$. Un tableau résume cela.

| Grandeur | Transformation unitaire | Observable hermitienne | Analyse associée | Base d'analyse de Fourier | Fonctions covariante |
|---|---|---|---|---|---|
| temps | $\{\tilde{\mathcal{S}}_f, f \in \mathbb{R}\}$ | $\mathcal{T}$ | $\mathbf{I}_t$ | $\delta_t(u)$ | $e_\nu(u)$ |
| fréquence | $\{\mathcal{S}_\tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ | $\mathcal{F}$ | $\mathbf{F}$ | $e_\nu(u)$ | $\delta_t(u)$ |
| « $a$ » | $\{\mathcal{V}(b), b \in \mathcal{G}\}$ | $\mathcal{A}$ | $\mathbf{F}_A$ | $e_a(u)$ | $e_b(u)$ |
| « $b$ » | $\{\mathcal{W}(a), a \in \mathcal{G}'\}$ | $\mathcal{B}$ | $\mathbf{F}_B$ | $e_b(u)$ | $e_a(u)$ |

Ainsi que nous l'avons dit au II.3.3.2, les termes covariants et invariants renvoient au comportement de la représentations sous les transformations $\mathcal{V}(b)$ où le groupe $\mathcal{G}$ représenté prend le sens physique des valeurs possibles pour la grandeur $\mathcal{B}$.

Nous avons en fait déjà vu l'utilisation de ce principe dans un cas précis, celui des dilatations. Nous renvoyons le lecteur au II.3.3.2 qui y trouvera le même tableau que ci-dessus, spécifié pour le problème de l'échelle. La grandeur physique conjuguée y est le logarithme du temps et l'opérateur d'équivalence unitaire est la transformation de Lamperti.

**Le post-traitement : une souplesse générale de la méthode.** Presque identique jusqu'ici à l'approche par la fonction caractéristique, les travaux de Baraniuk et Jones trouvent un rententissement plus fort quand ils montrent que cette théorie permettant de regarder le signal en fonction de variables conjuguées $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, peut de manière générale revenir à des variables habituelles (disons le temps et la fréquence) en utilisant, après avoir calculé la représentation en fonction de $a$ et $b$, deux transformations qui changent $(a, b)$ en $(t, f)$ [BJ95].

Les nouvelles opérations, qui n'imposent plus que le commutateur de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ reste proportionnel à l'identité, trouvent une expression récente générale dans la notion de *warping*, ou déformation de l'axe des temps sous des opérateurs de déplacement [Bar98].

### 1.5.4 L'analyse covariante par les opérateurs de déplacement

Reprise là où elle avait été amenée, l'idée des warpings a été explorée et specifiée mathématiquement par Hlawatsch et coll. dans une série d'articles [HB95], [HT96], [HTB96], [HB96], [HT97], [TH98]. Le récent exposé [HTT02] pose de manière formelle la construction de représentations conjointes à partir des opérateurs de déplacement.

**Résultats généraux sur les déformation et les modulations.** La théorie repose sur les représentations unitaires de groupe et sur deux types de représentations particulières.

- Les opérateurs de modulation sont définis comme :

$$(\mathbf{N}_h x)(t) = e^{i2\pi\psi_H(h)\psi_G(m(t))} x(t), \tag{III.27}$$

où $H$ est un ensemble muni d'une structure de groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ par $\psi_H$, $G$ est un ensemble muni d'une structure de groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ par $\psi_G$, et $m(t)$ est une *fonction de modulation* de $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$ sur $G$, *i.e.* inversible. Cette définition généralise les modulations en fréquence et, pour ce qui nous intéresse, les modulations par un chirp de Mellin.

• Les opérateurs de déformation (*warpings*) en temps sont définis sur un intervalle $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$ comme :

$$(\mathbf{W}_g x)(t) = \sqrt{|w_g'(t)|}\, x\,(w_g(t))\,, \tag{III.28}$$

où $w_g(t)$ est une fonction de dérivée continue, inversible, qui envoie $\mathbb{J}$ dans $\mathbb{J}$, et tel que $g \to w_g(t)$ est une représentation continue du groupe des $(\{g \in G\},\ *)$. Nous reconnaissons ici tant les translations que les dilatations ou la transformation de Lamperti[5] comme warping possibles.

Les opérateurs de déformation en temps permettent de transformer les propriétés de covariance. En effet, si $\mathbf{W}_g$ est l'opérateur étudié, le théorème suivant [TH98] explicite sa relation avec une fonction de modulation qui permet une représentation covariante du signal.

Théorème III.1: *Soient $\mathbb{J} \in \mathbb{R}$ et $(G, *)$ un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ avec $\psi_G$ comme isomorphisme. Si $m(t)$ est une fonction de modulation de $\mathbb{J}$ (c'est-à-dire inversible) et surjective sur $G$ (donc $m(\mathbb{J}) = G$), alors $w_g(t)$ définie pour $t \subseteq \mathbb{J}$ comme*

$$w_g(t) = m^{-1}(m(t) * g^{-1}) = \hat{m}^{-1}(\hat{m}(t) - \psi_G(g)), \quad t \in \mathbb{J},\ g \in G, \tag{III.29}$$

*où $\hat{m}(t) = \psi_G(m(t))$, est inversible et est une représentation continue du groupe $G$, en fait un warping.*

*Inversement, soient un groupe $(G, *)$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ avec $\psi_G$ comme isomorphisme et une représentation de groupe $w_g(t)$ définie pour $t \in \mathbb{J}$. Alors si $f(g) = w_{g^{-1}}(t_0)$ (pour $t_0$ arbitraire dans $\mathbb{J}$) est inversible avec $f(G) = \mathbb{S} \subseteq \mathbb{J}$ comme ensemble d'arrivée, alors*

$$w_g(t) = f\left(f^{-1}(t) * g^{-1}\right) = m^{-1}(m(t) * g^{-1}), \quad t \in \mathbb{J},\ g \in G, \tag{III.30}$$

*où $m(t) = f^{-1}(t)$. La fonction de modulation $m : \mathbb{S} \to G$ est unique à une translation du groupe $G$ près et $w_g(\mathbb{J}) = \mathbb{J}$.*

Pour ce qui nous intéresse, l'interprétation en est que si on cherche à « changer l'horloge » (selon le terme de [Ber94b] qui le premier montre le résultat sur des cas particuliers) d'un processus en vue de ramener ses propriétés à des propriétés de covariance pour un groupe isomorphe différent, alors la déformation $\mathbf{W}_g$ regardée induit une fonction de modulation $m(t)$ telle que le warping apparaît comme une translation $m(t) * g^{-1}$ sur la variable transformée $m(t)$. La translation est patente sur la représentation temporelle $\hat{m}(t) = \psi_G(m(t))$ plutôt que celle sur le groupe $G$ puisqu'on a :

$$\hat{m}(w_g(t)) = \hat{m}(t) - \psi_G(g). \tag{III.31}$$

Ainsi tous les opérateurs (et la classe est large) qui sont des déformations au sens précédent admettent une représentation covariante et, par extension, une représentation covariante pour n'importe quelle autre transformation qu'une translation.

Les exemples basiques d'application du théorème incluent le cas trivial des translations en temps où la modulation est simplement $\hat{m}(t) = t$ à une translation de l'origine près, et le cas des dilatations où la fonction de modulation est nécessairement $\hat{m}(t) = \ln t$ à une translation près (donc $\ln t/t_0$ en est la généralisation). Ce deuxième exemple conduit ainsi à la transformation de Lamperti de manière unique.

[5] Les dilatations ainsi que la transformation de Lamperti entrent exactement dans ce cadre pour $H = -1/2$ et il faut généraliser l'espace de représentation à $L^2(\mathbb{R}_*^+, t^{-2H-1}\mathrm{d}t)$ pour les considérer comme des warping.

**L'analyse covariante générale.** Alors que le langage quantique donne une approche générale de la construction de représentations jointes avec marginales imposées, le théorème précédent permet de construire les représentations jointes avec propriétés de covariance imposées.

En effet, une fois obtenue la fonction de modulation associée par le théorème III.1 à une déformation $\mathbf{W}_g$ donnée, l'opérateur de modulation $\mathbf{N}_h$ est fixé à une phase près (Corollaire 7.4 de [HTT02]) et représente un groupe $H$ isomorphe au groupe topologique $(\mathbb{R}, +)$. Deux classes générales existent alors pour construire les représentations générales à deux paramètres. En s'appuyant sans les citer sur les théorèmes 7.7, 7.10 et 7.18 de [HTT02], il n'y a que deux cas généraux à regarder pour décrire deux observables conjoitement, dépendant du groupe à deux paramètres qu'elles engendrent :

- le groupe est isomorphe à $(\mathbb{R}^2, +)$ et conduit à un équivalent de la classe de Cohen pour des opérateurs duaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ;
- le groupe est isomorphe au groupe affine et conduit à l'équivalent de la classe affine pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Alors que la première classe fondée sur des opérateurs duaux ($\mathbf{N}_h$ et $\mathbf{W}_g$ unitairement équivalents à $\tilde{\mathcal{S}}_{\psi_H(h)}$ et $\mathcal{S}_{\psi_G(g)}$ respectivement) est celle directement construite par les premiers résultats sur l'équivalence unitaire, la deuxième classe affine repose sur une équivalence unitaire avec $\mathcal{S}_{\psi_G(g)}$ et $\mathcal{D}_{H,\exp\psi_G(g)}$. L'équivalence proposée par $\mathcal{L}_H$ est du premier type car elle trace l'équivalence entre un warping, ici la dilatation, et la translation dans le temps. Nous envisagerons en 2.2.4 la classe affine associée à $\mathcal{L}_H$.

**Construire les représentations à deux paramètres.** L'opérateur déplacement associé à ces groupes, et donc aux grandeurs physiques décrites par ces transformations, est donné comme $\mathbf{D}_{(h,g)} = \mathbf{N}_h \mathbf{W}_g$ et (selon 7.13 et 7.15 de [HTT02]) les représentations covariantes pour ces opérateurs sont en toute généralité :

$$\text{Décomposition linéaire :} \qquad (LX)(h,g) = < \mathbf{D}_{(h,g)} f | X > \qquad \text{(III.32)}$$

$$\text{Représentation quadratique :} \qquad Q_X(h,g) = \mathbb{E} < X | \mathbf{D}_{(h,g)} \mathbf{K} {\mathbf{D}_{(h,g)}}^{-1} | X >, \qquad \text{(III.33)}$$

où $f$ est une fonction arbitraire de paramétrisation et $\mathbf{K}$ est un opérateur linéaire qui forme une fonction de noyau $K(h,g)$, analogue à la fonction caractéristique de l'approche de Cohen. La solution générale est ainsi connue et construite finalement sur les deux classes générales, celle affine et celle de Cohen.

L'opérateur d'équivalence unitaire est alors $(\mathcal{U}x)(t) = \sqrt{|\hat{m}'(t)|}\, x\,(\hat{m}(t))$ ; c'est la transformation de Lamperti (pour $H = -1/2$) si le warping est une dilatation... Rien de neuf pour nous, si ce n'est finalement les contraintes qui existent en fait sur les représentations que peut induire cette transformation. Elles vérifieront naturellement les propriétés de covariance vis-à-vis des dilatations et des modulations par un chirp de Mellin.

L'introduction ensuite de fonctions de déplacement permettant de revenir à des variables temps et fréquence (ou finalement toute autre variable ayant un interprétation physique acceptable) de la théorie de [HTT02] correspond à l'étape de post-traitement des approches de [BJ95].

**Le point de rupture.** La limite de la construction, et c'est à ce point que « l'art » intervient selon Baraniuk [Bar95], est le moment où les opérateurs de déplacements « physiques » (ceux associés aux deux grandeurs observables que l'on privilégie) ne peuvent pas former la représentation d'un groupe à deux éléments.

Partant de $\mathcal{W}_h$ et $\mathcal{V}_g$, il faut construire un déplacement fonction des deux variables $h$ et $g$ que nous avons noté $\mathbf{D}_{(\mathbf{h},\mathbf{g})}$ de manière générale. Alors que pour des opérateurs duaux (liés par les relations warping-modulation) forment facilement un groupe, en combinant des opérateurs qui ne commutent pas sous la forme $\mathbf{D}_{(h,g)} = \mathcal{W}_h \mathcal{V}_g$, on n'obtient pas de groupe.

Les théories générales tombent alors et il faut choisir une représentation *ad hoc* (sans unicité) des déplacements en vérifiant à la main que les propriétés voulues sur les marginales sont obtenues finalement. Les méthodes (équivalentes) basées sur les covariances n'assurent plus que les marginales sont correctes.

La méthode de la fonction caractéristique n'assure pas dans ces conditions la construction de la classe générale des représentations à deux paramètres. Le résultat de Sayeed [Say97] prouve en effet que pour cela, il est nécessaire que les opérateurs regardés soit duaux (unitairement équivalents à $\tilde{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{S}$ avec le même $\mathcal{U}$). La méthode de la fonction caractéristique doit être autrement étendue en utilisant un noyau de lissage en $\phi(\alpha, \beta; a, b)$. Elles ne peuvent être alors caractérisées qu'en trouvant toutes les règles de correspondance possibles entre opérateurs et fonction caractéristique, tâche que l'on ne sait pas mener systématiquement.

### 1.5.5 Que retenir des approches théoriques non stationnaires ?

La présentation générale que nous venons de faire se voulait être un point du vue global sur la manière de construire en toute généralité les représentations à deux paramètres. Pourquoi cet exposé ? D'abord pour comprendre comment les représentations induites par $\mathcal{L}_H$ entrent dans le moule de ces théories. Nous avons ainsi vu que les trois approches (formalisme quantique, équivalences unitaires et opérateurs de déformation) englobent les dilatations et $\mathcal{L}_H$, soit pour construire une observable « échelle » particulière, soit comme opérateur unitaire d'équivalence, soit associé à la modulation $\mathcal{H}_\beta$ et au warping $\mathcal{D}_{H,\lambda}$. Ensuite parce que l'extension par $\mathcal{L}_H$ des outils non stationnaires aux situations d'invariance en échelle incomplète demande de regarder avec précision les représentations mixtes, du type temps-échelle de Mellin.

Nous savons maintenant comment elles se construisent sous une approche théorique mais les redétaillerons en soi avec un regard plus concret. Enfin, comme les théories générales des représentations non paramétriques non stationnaires sont réunies sous un chapeau mathématique de théorie des groupes, nous comprendrons avec elles mieux comment nous proposons des généralisations de la transformation de Lamperti à des situations où il faut examiner des dilatations autres que $\mathcal{D}_{H,\lambda}$. Ce sera l'objet de la partie 3.

Cependant la théorie ne permet pas toujours de saisir la pratique de construction des représentations mixtes. Nous allons donc parler du cas qui nous motive à partir des échelles de Mellin et pour cela une familiarité avec la situation de départ (l'analyse temps-fréquence non stationnaire) est indispensable. Nous avons déjà cité une sélection d'ouvrages en faisant une présentation générale. Les bibliographies abondantes qui s'y trouvent nous dispensera de systématiquement citer les articles originaux où telle ou telle propriété fut établie quand nous utiliserons ces travaux dans le paragraphe 2.

Notons que parfois, pour un résultat précis et moins couramment connu, une référence explicite est faite. Ces livres ne sont pas tous équivalents et portent des points d'attaque du problème propres. Par exemple [Coh95] est plus orienté vers le formalisme des opérateurs en traitement du signal et comment les fonctions caractéristiques permettent de construire les représentations en temps et fréquence. L'ouvrage [MH97] centré sur la distribution de Wigner-Ville serait un complément utile au paragraphe qui suit, qui présente les bases de l'analyse temps-fréquence plus concrète.

### 1.5.6 L'élément de base : le spectre de Wigner et la classe de Cohen

**Le spectre de Wigner pour l'analyse non-stationnaire.** Le spectre de Wigner qui trouve une place centrale dans la construction des distributions quadratiques temps-fréquence est donné comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation autour d'un temps $t$, avec la variable de retard convenablement symétrisée. On part de $R_Y(t+\tau/2, t-\tau/2) = \mathbb{E}Y(t+\tau/2)Y(t-\tau/2)$ et on définit la transformée de Wigner $W_Y(t,f)$ comme :

$$W_Y(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(t+\tau/2, t-\tau/2) e^{-i2\pi f\tau} \mathrm{d}\tau. \tag{III.34}$$

L'étude générale de la distribution de Wigner pour des processus non stationnaires conduit à l'existence de nombreuses propriétés pour celle-ci et nous renvoyons à [Fla99] ou [MH97] pour une approche complète du sujet. Un exemple est montré en figure III.4 qui nous incite, pour les applications, à utiliser plutôt les distributions régularisées aux interférences réduites (ou inexistantes). Plusieurs propriétés sont particulièrement agréables à l'interprétation de $W_Y(t,f)$. Nous citons celle sur la marginale en temps et le moment local d'ordre un de la distribution. Ces propriétés sont valables quel que soit signal.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_Y(t,f)\mathrm{d}f = R_Y(t,t) \tag{III.35}$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f\, W_Y(t,f)\mathrm{d}f}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_Y(t,f)\mathrm{d}f} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}(\arg Y(t))}{\mathrm{d}t} = f_Y^i(t), \tag{III.36}$$

où la dernière ligne est la fréquence instantanée, défini en (II.25) si $Y(t)$ est un signal analytique selon (II.24).

**La classe de Cohen.** La classe de Cohen peut être construite par les théories générales que nous avons données pour les représentations à deux variables, ici temps et fréquence, ou encore par un raisonnement déductif où l'on recherche la forme générale quadratique covariante sous l'action des translations temporelles et fréquentielles [Fla01]. Le résultat est à chaque fois ce qui est appelé la classe de Cohen. Sa paramétrisation naturelle dépend d'un noyau de lissage $\Pi(u,\nu)$ à deux variables tel qu'un élément de la classe de Cohen s'écrit :

$$C_X(t,f) = \iint \Pi(u-t, \nu-f) W_X(u,\nu)\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu. \tag{III.37}$$

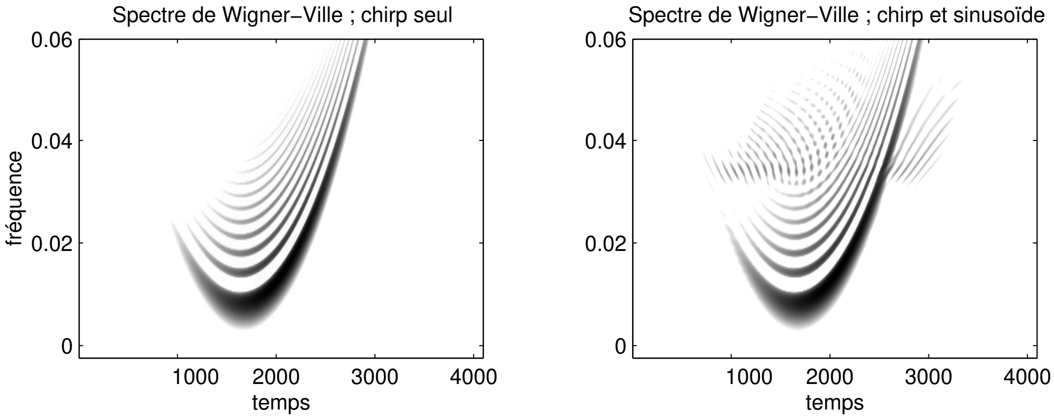



Fig. III.4: Distribution de Wigner-Ville du même chirp que pour la figure III.3 à gauche, et de l'addition de ce chirp et de la sinusoïde (interrompue au centre) à droite. On note combien les oscillations que causent les interférences internes au signal compliquent la lecture pratique de la distribution temps-fréquence. En particulier la composante de fréquence constante (figure de droite) est cachée dans les oscillations.

Le spectre de Wigner est donc essentiel car c'est un élement central de cette classe. Nous rappellons aussi que nous avons là toutes les représentations quadratiques analogues à des puissances, qui sont bien sûr construites sur $R_X(t, s)$ et ne testent donc que les propriétés statistiques d'ordre deux.

**Les extensions.** Bien que nous venons de donner les méthodes générales d'extension des représentations non-stationnaires à d'autres variables que le temps et la fréquence, nous ne nous dispensons pas de citer quelques travaux notables qui ont proposé des représentations débordant de la classe de Cohen. Il faut remarquer qu'elles ne furent pas établies sur les arguments exposés dessus, qui sont des visions unificatrices récentes.

On peut mentionner [RF92] qui généralise les covariances des ondelettes, construites sur la classe affine, à une classe quadratique tandis que [BB84, BB88] s'appuient sur des principes de tomographie avant de se fonder sur des représentations de groupes particuliers dans [BB92]. Ces recherches ont généré respectivement la classe affine ou la représentation de Bertrand et ses extensions, elle-même plus tard étendue par la classe hyperbolique introduite dans [PHBB92].

Nous écrirons certains détails sur la classe générale mixte construite sur la transformation de Lamperti, en ayant à l'esprit que beaucoup de propriétés sont des conséquences d'une des théories générales de constrution de représentations à deux paramètres. Nous nous attacherons à en donner des interprétations et des applications concrètes pour les processus ayant des propriétés en échelle non stationnaires (voir le III.2.4).

## 2 Généraliser des outils aux instationnarités en échelles par $\mathcal{L}_H$

Il est possible de construire de plusieurs façons les représentations adaptées aux processus dont on cherche à qualifier les déviations par rapport à l'auto-similarité. Dans le cadre de ce travail, nous explorons les potentialités de la correspondance définie par la transformation de Lamperti et la transposition des méthodes pour les non-stationnarités en temps aux études des invariances brisées en échelle.

On introduit ainsi, dans l'ordre du plan, les nouveaux éléments suivants : le concept d'harmonisabilité multiplicative au 2.1 (décomposition à deux échelles), les représentations mixtes temps - échelle de Mellin au 2.2 (qui pourraient autrement être l'application des études exposées au 1.5), des extensions aux statistiques d'ordre supérieur (2.3) et des considérations sur les calculs numériques (2.4).

### 2.1 Harmonisabilité multiplicative

Nous proposons ici l'adaptation des concepts d'harmonisabilité de Loève [Loè62] (voir aussi [BLF53]), que la transformation de Lamperti autorise sur le monde (non) auto-similaire.

**Harmonisabilité de Loève.** Alors que nous avons rappelé que la représentation de Cramér de la forme

$$Y(t) = \int e^{i2\pi\nu t} \mathrm{d}\tilde{Y}(\nu). \tag{III.38}$$

existe toujours pour les processus stationnaires, la question d'une telle écriture pour les processus non stationnaires (et en particulier les processus $H$-ss ou déviant de l'auto-similarité stricte) a été jusqu'ici écartée.

L'étude classique du problème a été proposée par Loève [Loè62] sous le nom d'**harmonisabilité**. Elle prouve qu'une catégorie assez large de fonctions aléatoires s'écrivent avec une représentation de Cramér, si et seulement si elles satisfont la condition suivante :

$$\iint \left| \mathbb{E}\left\{ \mathrm{d}\tilde{Y}(\nu_1)\overline{\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu_2)} \right\} \right| < +\infty. \tag{III.39}$$

On montre que les processus vérifiant (III.39) admettent tous une écriture (III.38) en interprétant l'intégrale comme une intégration en moyenne quadratique. La grande différence avec le cas stationnaire est que l'hypothèse d'harmonisabilité introduit une mesure (ou densité) spectrale à deux fréquences

$$\mathrm{d}^2\Phi_Y(\nu_1, \nu_2) = \mathbb{E}\left\{ \mathrm{d}\tilde{Y}(\nu_1)\overline{\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu_2)} \right\} \tag{III.40}$$

où les incréments spectraux $\mathrm{d}\tilde{Y}(\nu)$ ne sont pas décorrélés entre eux. La mesure spectrale caractérise des interactions entre les contenus fréquentiels du signal et en fait l'évolution non stationnaire du processus. En effet, cette mesure est directement donnée grâce à la fonction de corrélation du processus puisqu'on établit :

$$R_Y(t, s) = \iint e^{i2\pi t\nu_1 - i2\pi s\nu_2} \mathrm{d}^2\Phi_Y(\nu_1, \nu_2) = \iint e^{i2\pi(t\nu_1 - s\nu_2)} \phi_Y(\nu_1, \nu_2) \mathrm{d}\nu_1 \mathrm{d}\nu_2. \tag{III.41}$$

La deuxième écriture est valable sous condition de continuité par rapport à d$\nu$. Il faut remarquer que la condition d'harmonisabilité n'impose pas bien sûr la stationnarité mais est cependant un début de comportement stationnaire du procesus : sa densité spectrale doit être à variation bornée, ce qui est une condition qui porte sur l'ensemble du processus en temps. En revanche (III.39) n'impose rien sur l'évolution de la moyenne et des autres statistiques de la fonction aléatoire qui peuvent sans limitation fluctuer au cours du temps. Inversement, la fonctions spectrale est calculée à partir de la covariance selon :

$$\phi_Y(\nu_1, \nu_2) = \iint e^{-i2\pi t\nu_1 + i2\pi s\nu_2} R_Y(t, s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s. \tag{III.42}$$

**Harmonisablité multiplicative.** Introduisons maintenant la notion correspondante après transformation de Lamperti, donc sur la base de Mellin.

Définition III.2: *Un processus stochastique $\{X(t), t > 0\}$ sera dit admettre une représentation* ***harmonique multiplicative*** *s'il se décompose sur la base de Mellin de la manière suivante :*

$$X(t) = \int_0^\infty t^{H+i2\pi\beta}\mathrm{d}\underline{X}(\beta). \tag{III.43}$$

Nous continuons à utiliser le soulignement $\underline{\ldots}$ pour noter les propriétés multiplicatives. Cette représentation est directement la transformée de Lamperti de la représentation harmonique usuelle, au sens de Loève, de $Y = {\mathcal{L}_H}^{-1}X$. Les égalités suivantes s'établissent directement :

$$\mathrm{d}(\underline{\mathcal{L}_H Y})(\beta) = \mathrm{d}\tilde{Y}(\beta) \tag{III.44}$$

La condition d'existence de l'écriture harmonisable multiplicative et ses relations à la corrélation du processus découlent en fait de l'application de $\mathcal{L}_H$. La condition nécessaire et suffisante pour que cette représentation existe est ainsi qu'il existe une densité spectrale $\mathbb{E}\left\{\mathrm{d}\underline{X}(\beta_1)\overline{\mathrm{d}\underline{X}(\beta_2)}\right\} = \mathrm{d}^2\underline{\Phi}_X(\beta_1, \beta_2)$ absolument sommable :

$$\iint \left|\mathrm{d}^2\underline{\Phi}_X(\beta_1, \beta_2)\right| < +\infty. \tag{III.45}$$

La fonction de corrélation (non stationnaire) du processus est alors la double transformée de Mellin de la densité spectrale. Nous notons aussi $\mathrm{d}^2\underline{\Phi}_X(\beta_1, \beta_2) = \underline{\phi}_X(\beta_1, \beta_2)\mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\beta_2$ en introduisant la densité spectrale $\underline{\phi}_X$ de la mesure $\underline{\Phi}_X$.

$$\begin{aligned}
R_X(t, s) &= \iint t^{H+i2\pi\beta_1} s^{H-i2\pi\beta_2}\mathrm{d}^2\underline{\Phi}_X(\beta_1, \beta_2) && \text{(III.46)}\\
&= \iint t^{H+i2\pi\beta_1} s^{H-i2\pi\beta_2}\underline{\phi}_X(\beta_1, \beta_2)\mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\beta_2, && \text{(III.47)}\\
\underline{\phi}_X(\beta_1, \beta_2) &= \iint t^{-H-i2\pi\beta_1} s^{-H+i2\pi\beta_2} R_X(t, s)\frac{\mathrm{d}t}{t}\frac{\mathrm{d}s}{s}. && \text{(III.48)}
\end{aligned}$$

Nous avons brièvement introduit cette représentation pour les processus auto-similaires. Les incréments spectraux $\mathrm{d}\underline{X}(\beta)$ ne sont pas corrélés et la densité spectrale est alors localisée aux échelles $\beta_1 = \beta_2$, voir (II.125). L'interprétation en est que les composantes associées à des échelles différentes (en fait des chirps d'un taux de modulation donné) sont en quelque sorte indépendantes : les échelles (de Mellin) des processus auto-similaires ne se mélangent pas au fil du temps.

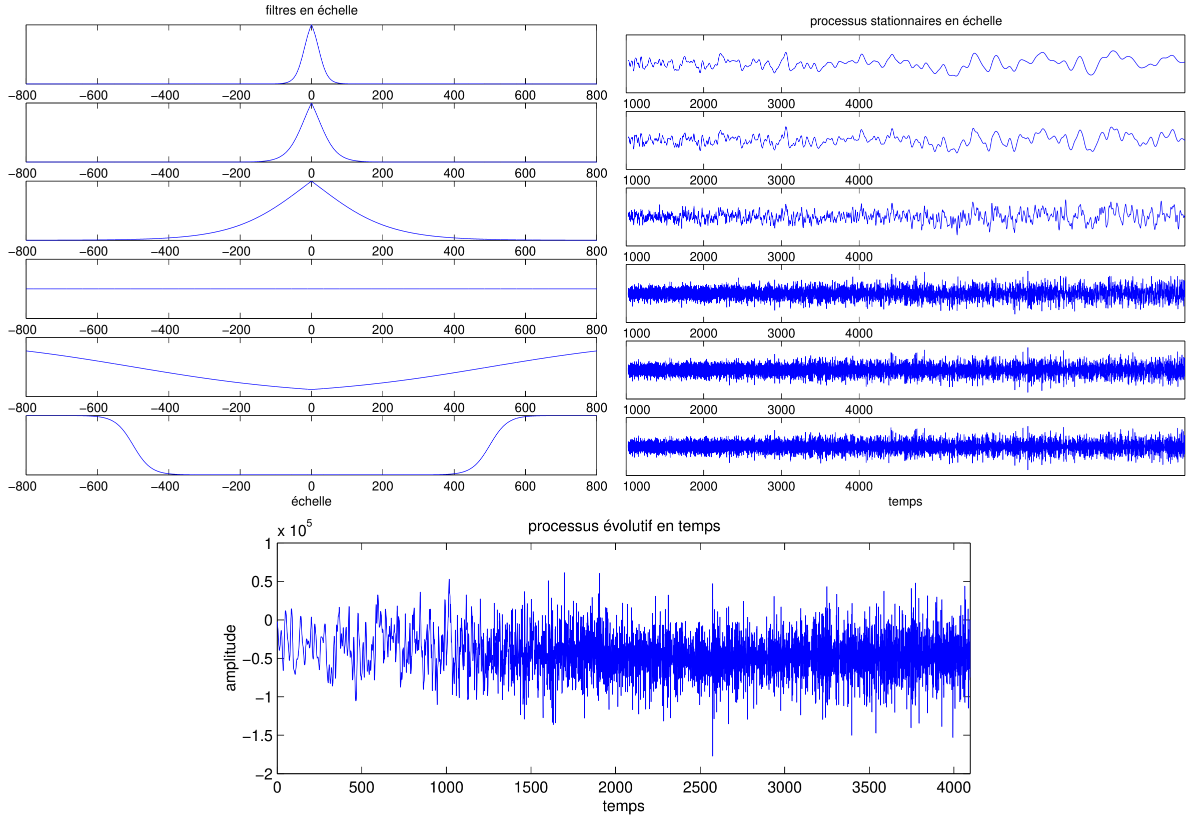



Fig. III.5: Synthèse d'un processus qui n'est pas auto-similaire mais a des propriétés qui évoluent continuement en échelle au cours du temps (voir le texte). La batterie de filtres utilisés et des exemples de leur comportement auto-similaire sont donnés au-dessus. En faisant glisser le comportement du filtre multiplicatif instationnaire depuis les filtres passe-bas jusqu'aux passe-haut (en $\beta$), nous synthétisons un processus dont le contenu en échelle est de plus en plus riche. Il n'est pas auto-similaire mais sa déviation au $H$-ss n'est pas une variation de l'exposant en temps, mais de son spectre instantané de Mellin.

**Des difficultés pour l'interprétation.** Soit un processus quelconque qui n'a pas de stationnarité le long des échelles, les incréments peuvent être corrélés, et donc la densité spectrale $\underline{\phi}_X(\beta_1, \beta_2)$ est répartie dans tout le plan, ailleurs que sur la diagonale. Les contributions hors de la diagonale sont une caractéristique d'interactions non-stationnaires entre échelles dans le signal.

Nous construisons en figure III.5 un processus qui n'est pas auto-similaire exactement mais voit ses propriétés en échelle changer au cours du temps. Partant de la famille de signaux définis par des filtres multiplicatifs représentés en haut à gauche de cette figure, on montre à droite les processus qui y correspondent (synthétisés par les méthodes discutées au

II.5.3). L'exemple choisi est généré à l'aide d'un filtre multiplicatif instationnaire en temps qui parcoure de manière continue la famille de filtres indiquée. Il passe d'un comportement de passe-bas en échelle de Mellin à un comportement de passe-haut. Son instationnarité en échelle conserve une sorte d'auto-similarité locale, avec toujours le même $H$ (au contraire des études que nous ferons au III.3.2) mais la richesse du contenu en échelle évolue.

La fonction spectrale estimée est tracée sur la figure III.6. Le processus a un support spectral qui déborde clairement de la droite où réside l'énergie dans le cas $H-ss$ et pourtant l'interprétation n'est pas aisée pour savoir quelle type d'instationnarité en échelle existe. C'est pour interpréter ces situations que les représentations mixtes en temps et échelle de Mellin sont utiles ; nous avons tracé celle correspondant à l'exemple sur la figure III.6. La suite s'occupe de définir ces représentations.

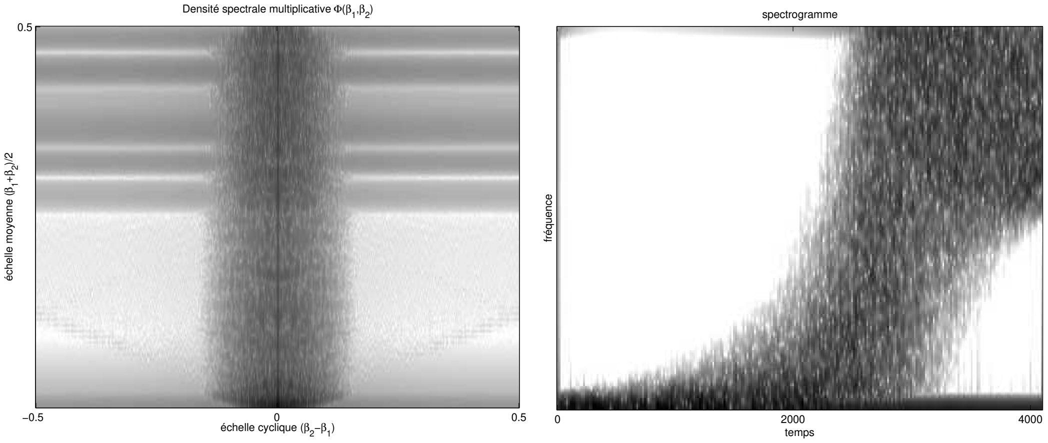



Fig. III.6: Densité spectrale harmonisable $\underline{\phi}_X(\beta_1, \beta_2)$ à gauche, estimée pour le processus du bas de la figure III.5, représentée ici en fonction de $\beta_2 - \beta_1$ et $(\beta_2 + \beta_1)/2$. La diagonale centrale (où se concentre l'énergie pour un processus $H$-ss) est ici la droite centrale à $\beta_2 - \beta_1 = 0$. À droite, représentation temps-échelle (ici de type hyperbologramme à court terme, selon l'équation (III.81), calculé par délampertisation et rééchantillonnage, voir le III.2.4).

## 2.2 Représentations mixtes temps-échelle de Mellin

### 2.2.1 Étendre le domaine temps-fréquence

**La démarche générale des représentations mixtes.** Nous venons de montrer que l'on peut rendre compte de l'existence d'une évolution de propriétés d'un processus à travers les échelles, ce que nous nommons une instationnarité en échelle qui est l'absence d'invariance stricte sous l'effet des dilatations, par deux points de vue complémentaires. Le premier, purement temporel, regarde les lois de probabilité à différents temps et nous privilégions la fonction de corrélation pour tester la structure de second ordre d'un processus aléatoire. Le deuxième est d'adopter la représentation entièrement liée aux échelles que propose la représentation harmonique multiplicative qui décompose sur la base de Mellin la fonction de corrélation du processus. Cette décomposition sur deux variables d'échelle demande interprétation.

Poursuivant un parallèle avec les travaux rapportés sur l'étude des signaux non-stationnaires en temps par les approches temps-fréquence, nous savons qu'il y a avantage à regarder aussi des *représentations mixtes*, en variables temps-échelle de Mellin. Elles peuvent être interprétées comme des sortes de spectres instantanés et donnent un contenu plus lisible de la manière dont les propriétés en échelle ne sont pas invariantes. Avant de les introduire, non pas par les constructions générales que nous avons résumées, mais par les arguments de (non) stationnarisation des processus, rappellons le lien entre spectre de Wigner et harmonisabilité de Loève.

**Spectre de Wigner et harmonisabilité.** L'harmonisabilité de Loève permet de réécrire la fonction de corrélation qui sert à définir $W_Y(t,f)$ dans (III.34), en la décomposant sur les composantes fréquentielles à l'aide d'une fonction spectrale $\mathrm{d}^2\Phi_Y(\nu_1,\nu_2)$ selon (III.41). Plongeant cette écriture dans l'équation précédente, nous obtenons une forme analogue de la transformée de Wigner en termes purement spectraux :

$$W_Y(t,f) = \iint e^{i2\pi t\nu}\delta(f-f')\mathrm{d}^2\Phi_Y(f'+\nu/2, f'-\nu/2). \tag{III.49}$$

Si le spectre de l'harmonisabilité est continu pour ses deux variables par rapport à la mesure de Lebesgue, il est d'habitude d'introduire une fonction $\phi_Y(\nu_1,\nu_2)$ telle que $\mathrm{d}^2\Phi_Y(\nu_1,\nu_2) = \phi_Y(\nu_1,\nu_2)\mathrm{d}\nu_1\mathrm{d}\nu_2$. L'intégration sur $f'$ peut être poussée un cran plus loin pour avoir la paramétrisation usuelle :

$$W_Y(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi t\nu}\phi_Y(f+\nu/2, f-\nu/2)\mathrm{d}\nu. \tag{III.50}$$

Le spectre de Wigner apparaît bien comme une extension directe à des processus non stationnaires de la densité spectrale de puissance. Si jamais $Y(t)$ était stationnaire, nous savons que la fonction spectrale n'autorise pas de corrélation entre des fréquences distinctes et prend la forme $\phi_Y(\nu_1,\nu_2) = \delta(\nu_1-\nu_2)\Gamma_Y(\nu_1)$. La distribution de Wigner est alors égale à tout instant au spectre stationnaire $\Gamma_Y(f)$ :

$$W_Y(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi t\nu}\delta(\nu)\Gamma_Y(f+\nu/2)\mathrm{d}\nu = \Gamma_Y(f). \tag{III.51}$$

Nous pouvons rajouter aux propriétés (III.35) et (III.36) pour n'importe quel processus une propriété de marginale en fréquence du spectre de Wigner :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_Y(t,f)\mathrm{d}t = \phi_Y(f,f) \tag{III.52}$$

L'ensemble de ces propriétés permet de conforter l'interprétation de la distribution de Wigner-Ville comme déployant l'énergie véhiculée par le signal en fonction du temps et de la fréquence. La fréquence locale est obtenue comme centre de gravité de la distribution au temps analysé tandis que l'histoire complète regardée seulement en temps (respectivement en fréquence) est simplement l'intégrale sur toutes les fréquences (respectivement les temps) de la distribution.

### 2.2.2 La classe quadratique de Mellin

La classe quadratique que nous obtenons et détaillons ici a été envisagée par le passé déjà dans [Fla90] comme analogue naturel, pour le comportement vis-à-vis des échelles, de la classe de Cohen en généralisant les distributions d'Altes [Alt90] et de Marinovic [Mar86]. Avec une méthode différente, et uniquement pour les signaux déterministes, Cohen [Coh93] donne la construction de cette classe de Mellin en tant que représentation jointe temps-échelle obtenue par la fonction caractéristique du formalisme des opérateurs du 1.5.2. Enfin [BJ95] la nomme classe pré-hyperbolique en montrant comment la classe hyperbolique [PHBB92, PHBB93, HPSBB97] est construite par post-traitement sur elle.

Nous utiliserons le nom « classe de Mellin » pour continuer à rendre hommage à la transformation qui est finalement une sorte d'épine dorsale de la thèse.

**Spectre de Wigner invariant en échelle.** Des différentes manières d'introduire un équivalent du spectre de Wigner pour l'étude des instationnarités en fonction des échelles de Mellin, nous adoptons ici celle passant par l'utilisation de $\mathcal{L}_H$ [FBA02]. Notant ici la fonction de corrélation symétrisée autour de $t$ comme $R_{Y,t}(\tau) = R_Y(t+\tau/2, t-\tau/2)$ on a :

$$\begin{aligned} W_Y(t,f) &= \left(\mathbf{F}R_{Y,t}(\tau)\right)(f) && \text{(III.53)}\\ &= (\mathbf{M}_H\mathcal{L}_H R_{Y,t}(\tau))(f) && \text{(III.54)}\\ &= \int_0^\infty \left(\tau^H R_Y\left(t+\frac{\ln\tau}{2}, t-\frac{\ln\tau}{2}\right)\right)\tau^{-H-i2\pi f-1}\mathrm{d}\tau, && \text{(III.55)}\end{aligned}$$

où l'équivalence (II.78) a été employée. Si on regarde maintenant la distribution de Wigner en un temps $\ln u$, on a :

$$\begin{aligned} W_Y(\ln u, f) &= \int_0^\infty R_Y\left(\ln(u\sqrt{\tau}), \ln(u/\sqrt{\tau})\right)\tau^{-i2\pi f-1}\mathrm{d}\tau && \text{(III.56)}\\ &= u^{-2H}\int_0^\infty \mathbb{E}\left\{(u\sqrt{\tau})^H Y\left(\ln[u\sqrt{\tau}]\right)(u/\sqrt{\tau})^H Y\left(\ln[u/\sqrt{\tau}]\right)\right\}\tau^{-i2\pi f-1}\mathrm{d}\tau \\ &= u^{-2H}\underline{W}_{\mathcal{L}_H Y}(u,f), && \text{(III.57)}\end{aligned}$$

avec la définition suivante du spectre de Wigner invariant en échelle [Fla90] :

Définition III.3: *Le **spectre de Wigner invariant en échelle** $\underline{W}_X(t,\beta)$ d'un processus aléatoire est défini comme il suit :*

$$\underline{W}_X(t,\beta) = \int_0^\infty R_X\left(t\sqrt{\tau}, t/\sqrt{\tau}\right)\tau^{-i2\pi\beta-1}\mathrm{d}\tau. \tag{III.58}$$

Nous avons obtenu ici ce spectre de Wigner invariant en échelle comme la transformée de Lamperti (portant sur la seule variable temporelle et d'indice $2H$ pour tenir compte du caractère quadratique de la distribution) du spectre de Wigner usuel.

$$\underline{W}_{\mathcal{L}_H Y}(t,\beta) = \mathcal{L}_{2H}W_Y(t,\beta) = t^{2H}W_Y(\ln t,\beta). \tag{III.59}$$

La démarche originelle dans [Fla90] fut de construire cette densité spectrale en remplaçant les étapes de la construction de Wigner fondées sur une analyse des propriétés en fonction des translations temporelles (translations du signal de $\tau/2$ et $-\tau/2$, avant d'appliquer la transformation de Fourier au produit) par les opérations équivalentes concernant les dilatations (dilatations des signaux par $\sqrt{\tau}$ et $1/\sqrt{\tau}$ puis analyse de Mellin du produit). Cette analyse qui donne (III.58), conduit à la représentation d'Altes-Marinovic [Alt90, Mar86] directement appliquée au signal temporel. Une troisième approche menant à ce spectre sera commentée au paragraphe suivant puis dans la partie III.2.2.3.

**Propriétés générales du spectre de Wigner invariant en échelle.** Le spectre obtenu est toujours réel mais son interprétation en tant que densité d'énergie est compliquée puisque les distributions de Wigner ne sont pas toujours positives et présentent des effets d'interférence entre fréquences, ici entre les échelles. Cependant souvent on peut se contenter de cette description, ou alors on réduit ces problèmes d'interférence par un lissage du spectre. Nous verrons cette possibilité avec la classe générale de description temps-échelle de Mellin plus loin.

La première propriété à mentionner est que le support du spectre en temps ne déborde pas du support du signal en temps. Si on a $R_X(t,s) = 0$ pour tout $s$ et un certain $t$ (ce qui correspond à avoir $X(t) = 0$ presque sûrement), alors $\underline{W}_X(t,\beta) = 0$. La même propriété de support existe vis-à-vis de l'échelle. D'autres propriétés de cette distribution sont particulièrement intéressantes pour leur effet sur les dilations, les fonctions de la base de Mellin, les particularités des marginales et les liens de la représentation avec l'harmonisabilité multiplicative.

Proposition III.1: *La distribution de Wigner invariante en échelle d'un processus* $\{X(t), t > 0\}$ *vérifie les propriétés qui suivent :*

$$\textit{Dilatations :}\quad \underline{W}_{\mathcal{D}_{H,\lambda}X}(t,\beta) = \lambda^{-2H}\underline{W}_X(\lambda t,\beta) \tag{III.60}$$

$$\tag{III.61}$$

$$\textit{Chirp de Mellin :}\quad \underline{W}_{t^{-i2\pi\gamma}X(t)}(t,\beta) = \underline{W}_X(t,\beta+\gamma) \tag{III.62}$$

$$\textit{Harmonisabilité :}\quad \underline{W}_X(t,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2H+i2\pi\gamma}\underline{\phi}_X(\beta+\gamma/2,\beta-\gamma/2)\mathrm{d}\gamma \tag{III.63}$$

$$\underline{\phi}_X(\beta+\gamma/2,\beta-\gamma/2) = \int_0^{\infty} \underline{W}_X(t,\beta)t^{-i2\pi\gamma-2H-1}\mathrm{d}t \tag{III.64}$$

$$\textit{Marginales :}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{W}_X(t,\beta)\mathrm{d}\beta = R_X(t,t) \tag{III.65}$$

$$\int_0^{\infty} \underline{W}_X(t,\beta)t^{-2H-1}\mathrm{d}t = \underline{\phi}_X(\beta,\beta) \tag{III.66}$$

$$\textit{Localisation :}\quad \textit{sur}\ \ X(t) = t^{H+i2\pi(\gamma+m\ln t)}$$

$$\underline{W}_X(t,\beta) = t^{2H}\delta\left(\beta-(\gamma+2m\ln t)\right) \tag{III.67}$$

Nous pouvons reconnaître que de nombreuses propriétés sont les images, après lampertisation, de celles que vérifie le spectre de Wigner-Ville. Un signal invariant en échelle ($H$-ss au second ordre au moins) est analysé à l'aide de $\underline{W}_X(t,\beta)$, le spectre obtenu est le même à tout instant. On a en effet selon (II.125) des incréments spectraux décorrélés et ainsi :

$$\underline{W}_X(t,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2H+i2\pi\gamma}\delta(\gamma)\Xi_X(\beta+\gamma/2)\mathrm{d}\gamma = t^{2H}\Xi_X(\beta). \tag{III.68}$$

• L'équation (III.63) est une écriture de $\underline{W}(t,\beta)$ à partir d'une description en variables échelle-échelle $(\beta+\gamma/2, \beta-\gamma/2)$ du signal alors que la forme initiale (III.58) était donnée en temps-temps $(t,\tau)$. Une forme temps-échelle $(t,\beta)$ est directement le spectre de Wigner lui-même. Le diagramme suivant où les variables d'échelles sont obtenues par une transformation de Mellin du temps conjugué suggère une quatrième paramétrisation à partir des variables échelle-temps $(\gamma,\tau)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}\text{spectre de Wigner}\\ \text{invariant en échelle}\\ (t,\beta)\end{array} & \\
\text{Corrélation}\ \ (t,\tau) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (\beta+\gamma/2, \beta-\gamma/2)\ \begin{array}{l}\text{Harmonisablité}\\ \text{multiplicative}\end{array} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \begin{array}{c}(\gamma,\tau)\\ \text{Ambiguité}\\ \text{large-bande}\end{array} &
\end{tikzcd} \tag{III.69}$$

Cette dernière forme est obtenue par une transformation de Mellin sur $t$ de la corrélation et est appelée fonction d'ambiguité large-bande [Mar86, Fla90]. Elle s'interprète comme le degré de ressemblance, en terme de corrélation, entre le signal et sa dilatée (ici en ayant symétrisé l'expression). Elle s'écrit comme :

$$\underline{A}_X(\gamma,\tau) = \int_0^{+\infty} R_X(t\sqrt{\tau}, t/\sqrt{\tau})t^{-i2\pi\gamma-1}\mathrm{d}t. \tag{III.70}$$

Nous pouvons maintenant rappeler les quatre formes possibles du spectre de Wigner invariant en échelle à partir du signal exprimé en fonction de l'un ou l'autre des couples (III.69).

$$\begin{aligned}
\underline{W}_X(t,\beta) &= \int_0^{\infty} R_X\left(t\sqrt{\tau}, t/\sqrt{\tau}\right)\tau^{-i2\pi\beta-1}\mathrm{d}\tau && \text{(III.71)}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\phi}_X(\beta+\gamma/2, \beta-\gamma/2)t^{2H+i2\pi\gamma}\mathrm{d}\gamma && \text{(III.72)}\\
&= \iint \underline{A}_X(\gamma,\tau)\tau^{-i2\pi\beta-1}s^{i2\pi\gamma}\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\tau && \text{(III.73)}
\end{aligned}$$

• La dernière propriété que nous avons reportée, au sujet de la distribution de Wigner, en (III.36), concernait la fréquence instantanée (au sens de la représentation analytique) du processus analysé. Elle devient une propriété d'échelle instantanée analogue pour le spectre de Wigner invariant en échelle.

Nous avons dit en III.1.5.2 qu'une valeur instantanée de n'importe quelle grandeur pouvait être obtenue par le principe de représentation de la grandeur à l'aide d'un opérateur hermitien, en utilisant (III.20). L'opérateur d'échelle est $\mathcal{C} = (\mathcal{TF}+\mathcal{FT})/2-(H+1/2)\mathbf{I}/i2\pi$ et son application à un signal analytique $x(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$ donne :

$$\frac{\mathcal{C}x(t)}{x(t)} = \frac{t}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{i2\pi}\left(\frac{t}{A(t)}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t) - H\right). \tag{III.74}$$

La partie réelle de cette expression définit ce qu'on appelle l'échelle instantanée d'un signal analytique $X(t)$ :

$$\beta_X(t) = \frac{t}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t). \tag{III.75}$$

Les règles de correspondance associées à la transformation de Lamperti montrent d'abord que $\beta_X(t) = f^i_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(\ln t)$ et permettent de remplacer $W_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(t,f)$ dans (III.36) par $\underline{W}_X(\ln t, f)$. Ceci prouve que l'échelle instantanée d'un signal est décrite par le premier moment de son spectre de Wigner invariant en échelle.

$$\beta_X(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\beta\,\underline{W}_X(t,\beta)\mathrm{d}\beta}{\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{W}_X(t,\beta)\mathrm{d}\beta} \tag{III.76}$$

• Enfin il est utile de parler de la relation de cette représentation aux opérations de filtrage. La première relation porte sur le spectre d'un processus passé par un filtre invariant en échelle $\mathcal{G}$, tels que nous les avons définis en II.4.2. Elle facilite à nouveau l'interprétation en spectre de $\underline{W}$ puisque la relation entrée-sortie pour $\mathcal{G}$ est du même type (convolution multiplicative) écrite en temps, (II.148), sans qu'apparaissent des mélanges entre les échelles $\beta$ dans l'opération de filtrage représentée sur $\underline{W}_X$.

$$\underline{W}_{\mathcal{G}X}(t,\beta) = \int_0^{+\infty}\underline{W}_g(u,\beta)\,\underline{W}_X(\frac{t}{u},\beta)\frac{\mathrm{d}u}{u}. \tag{III.77}$$

La deuxième relation vient de l'unitarité du spectre $\underline{W}_X$ qui implique l'existence d'une relation analogue à la formule de Moyal comme établi par [Fla90]. Nous l'écrivons ici pour un processus aléatoire $X(t)$ multiplié par une fonction déterministe $g(t)$.

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{W}_g(t,\beta)\underline{W}_X(t,\beta)\frac{\mathrm{d}t}{t}\mathrm{d}\beta = \mathbb{E}\left|\int_0^{+\infty}\overline{g}(t)X(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|^2 \tag{III.78}$$

**La classe des représentations mixtes temps-échelle de Mellin.** La construction de $\underline{W}_X$ à partir de $W_{\mathcal{L}_H^{-1}X}$ nous permet d'introduire une classe générale de représentations quadratiques en ramenant dans l'espace lampertisé la classe de Cohen. Notons $X_Y(t,f)$ une distribution de la classe de Cohen. La paramétrisation de la classe équivalente de Mellin est obtenue en posant :

$$\underline{D}_X(t,\beta) = t^{2H}C_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(\ln t,\beta). \tag{III.79}$$

Cela incite à introduire des fonctions $\underline{\Pi}(u,f) = u^{-2H}\Pi(\ln u, f)$ pour écrire les éléments de cette classe quadratique de Mellin.

$$\underline{D}_X(t,\beta) = \iint \underline{\Pi}(s/t, \gamma-\beta)\underline{W}_X(s,\gamma)\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{d}\gamma. \tag{III.80}$$

Ainsi que nous l'avons montré pour le spectre de Wigner invariant en échelle, cette classe de densité spectrale peut être paramétrisée au choix avec n'importe quel couple des variables de (III.69). Nous n'en donnons pas les formes explicites qui émergent de l'injection des équations (III.71) à (III.73) dans (III.80).

La classe que nous venons de définir répond au problème des interférences qui compliquent le spectre de Wigner. En effet, l'expression (III.80) exprime une convolution du spectre de Wigner invariant en échelle, convolution normale en échelle, multiplicative en temps. En choisissant convenablement le noyau $\underline{\Pi}$, on s'attend alors à pouvoir réduire les interférences. La formule de Moyal (III.78) montre en effet qu'on peut aller jusqu'à supprimer tous les effets d'oscillation (dus à l'auto-interférence) et obtenir une distribution toujours positive [Fla90]. Ainsi la fonction déterministe $g(s) = h(s/t)s^{i2\pi\sigma}$ conduit (avec l'aide de la formule de Moyal (III.78)) à une représentation du signal du type :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\int_0^{+\infty} h(s/t)s^{-i2\pi\sigma}X(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}\right|^2 &= \iint \underline{W}_g(s,\gamma)\underline{W}_X(s,\gamma)\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{d}\gamma && \text{(III.81)}\\
&= \iint \underline{W}_h(s/t,\gamma-\sigma)\underline{W}_X(s,\gamma)\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{d}\gamma && \text{(III.82)}
\end{aligned}$$

qui est une représentation membre de la classe (III.80) avec comme noyau de paramétrisation $\underline{\Pi}(s,\beta) = \underline{W}_h(u,\beta)$.

Cette manière de regarder le signal en fonction d'un temps et d'une échelle ne nous est pas inconnue. On retrouve ici une représentation à court terme en échelle. Elle est proche de celle proposée par Cohen et que nous rapportions en (III.21). Cependant nous montrerons ci-dessous au III.2.2.3 en étudiant le constructions des représentations linéaires que la solution de Cohen n'a pas les bonnes propriétés de covariance et n'est pas dans la classe de Mellin. De plus l'écriture en $h(s-t)$ qu'elle utilise donne une fausse impression de covariance par rapport aux translations qui n'existe pas.

**Relations et comparaisons avec d'autres représentations mixtes.** Puisque nous montrons ici le lien direct entre la classe de Cohen pour l'étude temps-fréquence et les densités $\underline{D}_X(t,\beta)$ que nous proposons, il n'est pas utile de détailler plus la géométrie des interférences, la possibilité de les réduire [Fla93] et de manière générale les différents choix possibles de fonction $\underline{\Pi}$. Les ouvrages généraux d'analyse temps-fréquence auxquels nous avons renvoyé le lecteur décrivent amplement ce sujet. Les différents $\underline{D}_X(t,\beta)$ héritent des propriétés de $\underline{W}_X(t,\beta)$ rapportées ci-dessus en fonction du noyau choisi.

La classe introduite repose en fait sur les covariances essentielles que sont la covariance par rapport aux chirps de Mellin et celle par rapport aux dilatations. On peut donc l'obtenir par la théorie générale des opérateurs de déplacement [HTT02]. Nous le démontrons explicitement ci-dessous au 2.2.3.

Cette classe de Mellin est proche de la classe hyperbolique[6], à la différence qu'ici la représentation est basée sur une analyse de Mellin du signal temporel et non du signal fréquentiel, et qu'elle n'a pas de post-traitement supplémentaire. Ainsi, alors que la classe hyperbolique reste covariante par les translations temporelles, la classe que nous proposons n'a pas cette propriété, comme tout ce que donne l'analyse par la transformation de Lamperti.

Parmi les éléments de cette classe de Mellin nous avons croisé la distribution de Wigner invariante en échelle qui nous a servi de modèle de base de la classe, et la représentation en échelle (III.81) qui est une transformation de Mellin à court terme et analogue en temps à l'hyperbologramme défini en fréquence [PHBB92]. Nous verrons plus loin un autre exemple : la distribution des Bertrand.

**Démonstration explicite du lien avec la classe hyperbolique.** Nous pouvons rapprocher bien plus en fait la classe hyperbolique et la classe de Mellin que nous venons de construire. Une paramétrisation possible de la classe hyperbolique proposée dans [PHBB93] est :

$$H_X^J(t,f) = \iint J(b-\ln f,\gamma) V_{\tilde{X}}(b,\gamma) e^{i2\pi t f \gamma} \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}b, \tag{III.83}$$

où $V_{\tilde{X}}(b,\beta) = \mathbb{E}\left\{ e^b \tilde{X}\left(e^{b+\beta/2}\right) \overline{\tilde{X}\left(e^{b+\beta/2}\right)} \right\}$ est la corrélation des composantes de Fourier du signal après warping logarithmique des fréquences.

Nous pouvons reformuler la représentation naturelle de la classe de Mellin, d'abord en utilisant son écriture à partir des variables temps-temps et une fonction $\underline{F}$ qui spécifie l'élément de la classe regardé.

$$\underline{D}_X^{F}(t,\beta) = \iint \underline{F}(\frac{s}{t},\tau) R_X(s\sqrt{\tau}, \frac{s}{\sqrt{\tau}}) \tau^{-i2\pi\beta} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{s}. \tag{III.84}$$

Cette fonction est en réalité $\underline{F}(u,\tau) = \int \underline{\Pi}(u,\sigma)\tau^{-i2\pi\sigma}\mathrm{d}\sigma$. En changeant les variables en $b = \ln s$ et $c = \ln \tau$, nous avons :

$$\underline{D}_X^{F}(t,\beta) = \iint e^{-b} \underline{F}(e^{\ln t - b}, e^c) e^b R_X(e^{b+c/2}, e^{b-c/2}) e^{-i2\pi\beta c} \mathrm{d}c\mathrm{d}b \tag{III.85}$$

Cette équation permet d'introduire une fonction $\underline{J}(u,\gamma) = e^{-u}\underline{F}(e^{-u}, e^{\gamma})$ telle que l'on ait :

$$\underline{D}_X^{F}(t,\beta) = \frac{1}{t}\iint \underline{J}(b-\ln t, c) V_X(b,c) e^{-i2\pi\beta c}\mathrm{d}c\mathrm{d}b. \tag{III.86}$$

Cette manière d'écrire la classe quadratique de Mellin est très proche de la paramétrisation que nous avons rappelée pour la classe hyperbolique à un important changement près : ce ne sont pas les composantes fréquentielles mais à nouveau les formes en temps du signal qui sont corrélées à travers la fonction $V$. En introduisant un signal annexe $Y(t)$ tel que sa représentation de Fourier soit égale au signal en temps, $(\mathbf{F}Y)(t) = X(t)$, nous avons l'équivalence suivante entre les classes $H$ et $\underline{D}$ :

$$\underline{D}_X^{F}(t,\beta) = \frac{1}{t} H_{\mathbf{F}Y}^{\underline{J}}\left(\frac{\beta}{t}, t\right) \qquad \text{et} \qquad H_{\mathbf{F}Y}^{\underline{J}}(t',f') = f' \underline{D}_X^{F}(f', t'f'). \tag{III.87}$$

[6] Elle a reçu le nom de pré-hyperbolique dans [BJ95].

Nous pouvons noter que l'équivalence est donc bien obtenu par un échange entre temps et fréquence (les propriétés sur le temps de la classe de Mellin sont celles sur la fréquence de la classe hyperbolique) et l'utilisation du paramètre de type échelle $\beta = t'f'$ comme variable de la classe de Mellin.

### 2.2.3 Les autres approches des classes Mellin.

**Opérateurs de déplacement.** La classe de Mellin a été ici construite comme adaptation par la transformée de Lamperti de la classe de Cohen aux processus non $H$-ss. La théorie générale covariante par les opérateurs de warping donnerait le même résultat en cherchant la classe à deux paramètres avec les dilatations comme warpings et les multiplications par un chirp de Mellin comme modulation.

Le groupe des opérateurs de déplacement est pour l'essentiel isomorphe à $(\mathbb{R}^2, +)$ et agit explicitement comme :

$$(\mathbf{D}_{(\sigma,t)}h)(s) = s^{H+i2\pi\sigma}t^H X(s/t) \tag{III.88}$$

On peut vérifier sans peine que la classe quadratique $\underline{D}_X(t,\beta)$ décrite est issue de l'utilisation de (III.33) pour cet opérateur de déplacement.

**Construction déductive de la classe quadratique.** L'autre construction classique de classes de représentations part des covariances fondamentales que l'on souhaite : ici celle par les dilatations (écrite en (III.60)) et celle pour l'opérateur de Mellin $\mathcal{H}_\beta$ qui était la multiplication du signal par un chirp de Mellin $t^{-i2\pi\beta}$ (voir (III.62)).

*Démonstration* — Nous pouvons retracer ce chemin directement en qualifiant le noyau $K(t,s;a,\beta)$ d'une représentation quadratique $\underline{D}'_X(a,\beta)$ vérifiant ces deux propriétés.

$$\underline{D}'_X(a,\beta) = \iint K(t,s;a,\beta)\mathbb{E}\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}\mathrm{d}t\mathrm{d}s \tag{III.89}$$

La covariance par rapport à toute dilation, $\underline{D}'_{\mathcal{D}_{H,\lambda}X}(a,\beta) = \lambda^{-2H}\underline{D}'_X(\lambda a,\beta)$ implique que pour tout $\lambda > 0$ :

$$\iint K(\frac{t}{\lambda},\frac{s}{\lambda};a,\beta)\lambda^{-2H-2}R_X(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \lambda^{-2H}\iint K(t,s;\lambda a,\beta)R_X(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s \tag{III.90}$$

$$\frac{1}{\lambda^2}K(\frac{t}{\lambda},\frac{s}{\lambda};a,\beta) = K(t,s;\lambda a,\beta). \tag{III.91}$$

La covariance par rapport à l'opérateur de Mellin $\mathcal{H}_\gamma$ s'écrit : $\underline{D}'_{\mathcal{H}_\gamma X}(a,\beta) = \underline{D}'_X(a,\beta+\gamma)$, ce qui se traduit sur $K$ par :

$$\iint K(t,s;a,\beta+\gamma)R_X(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \iint K(t,s;a,\beta)\left(\frac{t}{s}\right)^{-i2\pi\gamma}R_X(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s \tag{III.92}$$

$$K(t,s;a,\beta+\gamma) = \left(\frac{t}{s}\right)^{-i2\pi\gamma}K(t,s;a,\beta). \tag{III.93}$$

Nous pouvons alors réécrire (III.89), d'abord de manière générale en introduisant $\underline{W}_X$ afin de se rapprocher de la paramétrisation (III.80) (que l'on sait être la solution), puis en tenant compte des deux simplifications (III.91) et (III.93).

$$\begin{aligned}
\underline{D}'_X(a,\beta) &= \iint K(t,s;a,\beta)\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{W}_X(\sqrt{ts},\beta)\left(\frac{t}{s}\right)^{i2\pi\gamma}\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\mathrm{d}s && \text{(III.94)}\\
&= \iint\int_{-\infty}^{+\infty} K(t,s;a,\beta-\gamma)\underline{W}_X(\sqrt{ts},\beta)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}\gamma && \text{(III.95)}\\
&= \iint\int_{-\infty}^{+\infty} K(\frac{u}{\sqrt{\tau}},u\sqrt{\tau};a,\beta-\gamma)\underline{W}_X(u,\gamma)u\mathrm{d}u\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\mathrm{d}\gamma && \text{(III.96)}\\
&= \iint\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2}K(\frac{1}{\sqrt{\tau}},1\sqrt{\tau};\frac{a}{u},\beta-\gamma)\underline{W}_X(u,\gamma)u\mathrm{d}u\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\mathrm{d}\gamma && \text{(III.97)}\\
&= \iint\left[\int_0^{+\infty} K(\frac{1}{\sqrt{\tau}},1\sqrt{\tau};\frac{a}{u},\beta-\gamma)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\right]\underline{W}_X(u,\gamma)\frac{\mathrm{d}u}{u}\mathrm{d}\gamma. && \text{(III.98)}
\end{aligned}$$

On reconnaît ici la forme générale (III.80) en posant que $\underline{\Pi}(s,\sigma)=\int K(\frac{1}{\sqrt{\tau}},1\sqrt{\tau};s,\sigma)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$, et qui est donc l'unique classe des distributions quadratiques avec les deux covariances souhaitées. On a fait usage à la ligne (III.96) du changement de variable $(s,t)\longrightarrow(u=\sqrt{st},\tau=s/t)$ tel que $\mathrm{d}s\mathrm{d}t=u\mathrm{d}u\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$.

□

**Représentations linéaires.** Le même travail peut être accompli pour trouver les représentations linéaires d'un processus qui vérifieraient les deux mêmes propriétés de covariance. La forme générale des classes linéaires covariantes est donnée dans [HTT02] comme $< x|\mathbf{D}_{(t,\beta)}h >$ où $h$ est une fonction arbitraire de paramétrisation. Nous allons donner la démonstration constructive du résultat dans le cas qui nous intéresse.

Proposition III.2: *Les représentations linéaires $\underline{L}(t,\beta)$ d'un signal $\{X(t),t>0\}$ sont déterminées par une fonction $\underline{h}(s)$ et s'écrivent de manière générale :*

$$\underline{L}_X(t,\beta)=\int_0^{\infty}\underline{h}(s/t)s^{-1-i2\pi\beta}X(s)\mathrm{d}s. \tag{III.99}$$

Bien sûr cette écriture n'a un sens que si l'intégrale existe bien, soit parce que le signal est déterministe dans le bon espace fonctionnel [BBO96], soit par ce qu'il est harmonisable sur la base de Mellin selon (III.43). Pour une fonction aléatoire $X(s)$, cette représentation est aussi une fonction aléatoire et c'est l'étude de ses moments qui est pertinente.

*Démonstration* — Une représentation linéaire s'exprime par une intégration telle que

$$\underline{L}_X(t,\beta)=\int_0^{+\infty}k(s;t,\beta)X(s)\mathrm{d}s. \tag{III.100}$$

Partons des deux contraintes de covariance pour $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et $\mathcal{H}_\gamma$.

1. Dilatation – $\underline{L}_{\mathcal{D}_{H,\lambda}X}(t,\beta)=\lambda^{-H}\underline{L}_X(\lambda t,\beta)$, ce qui impose pour le noyau $k(s;t,\beta)=\lambda^{-1}k(s/\lambda;t/\lambda,\beta)$.
2. Multiplication par un chirp – il faut que $\underline{L}_{\mathcal{H}_\gamma X}(t,\beta)=\underline{L}_X(t,\beta+\gamma)$ donc on a nécessairement $k(s;\beta,t)=s^{i2\pi\gamma}k(s;\beta+\gamma,t)$.

Nous réécrivons alors la forme générale linéaire en utilisant la seconde propriété pour ramener le facteur d'échelle dans le noyau à 0, puis la première pour $\lambda = t$.

$$\begin{aligned} \underline{L}_X(t,\beta) &= \int_0^{+\infty} u^{-i2\pi\beta} h(s;t,0) X(s)\mathrm{d}s & \text{(III.101)} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{t}\right) h(\frac{s}{t};1,0) s^{-i2\pi\beta} X(s)\frac{\mathrm{d}s}{s} & \text{(III.102)} \end{aligned}$$

Si l'on pose comme nouvelle fonction $\underline{h}(u) = uh(u;1,0)$, la représentation linéaire générale satisfaisant aux deux principes de covariance a bien la forme (III.99) proposée.

□

Cette classe linéaire conduit aux densité d'énergie de la classe de Mellin en prenant l'espérance du module au carré de la représentation linéaire, c'est-à-dire le moment d'ordre 2 de la fonction aléatoire. Notons que cette densité est dans la classe quadratique de Mellin que nous avons étudiée, comme prouvé en (III.81). Ce « Mellinogramme » est semblable au scalogramme mais pour les échelles de Mellin. Les autres moments donneraient des informations sur les comportements d'ordre supérieur du signal.

Nous pouvons enfin remarquer que cette transformation est l'équivalent correct de la transformée de Fourier à court terme pour l'échelle de Mellin. Nous notons $\mathrm{ST}\mathbf{F}_h$ la transformée de Fourier à court terme avec une fenêtre de pondération $h$ :

$$(\mathrm{ST}\mathbf{F}_h Y)(t,\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u-t)Y(u)e^{-i2\pi\nu u}\mathrm{d}u. \tag{III.103}$$

Un calcul direct en posant $\underline{h}(u) = u^{-H}h(\ln u)$ implique :

$$\underline{L}_X(t,\beta) = (\mathcal{L}_H \mathrm{ST}\mathbf{F}_h {\mathcal{L}_H}^{-1} X)(t,\beta), \tag{III.104}$$

prouvant donc la correspondance entre $\underline{L}$ et $\mathrm{ST}\mathbf{F}_h$. Il faut pour la première privilégier les fonctions de fenêtre qui s'annulent en 0 et sont centrées autour d'un temps donné $t_0$.

**Comparaison : la représentation linéaire à court terme et la classe linéaire de Mellin.** L. Cohen introduisait une représentation en échelle de Mellin $L_X^C(t,\beta)$ que nous avons définie en (III.21). Nous notons une différence entre la représentation linéaire de Cohen et celle que nous avons construite. Alors qu'elle partage la même covariance pour $\mathcal{H}_\gamma$, la représentation linéaire de Cohen n'a pas de propriété simple vis-à-vis des dilatations. En effet on a l'identité :

$$L^C_{\mathcal{D}_{H,\lambda}X}(t,\beta) = \int_0^{\infty} h\left(\frac{s-\lambda t}{\lambda}\right) s^{-12\pi\beta} X(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}, \tag{III.105}$$

qui est différent de $(\mathcal{D}_{H,\lambda}L_X^C)(t,\beta)$ (covariance de la classe de Mellin) ainsi que de $L_X^C(\lambda t, \beta/\lambda)$ qui serait la covariance (issue du groupe affine) que vérifie les transformations en ondelettes.

Ceci a deux conséquences. La première est que la représentation de Cohen ne mène pas à une classe générale identifiable de représentations linéaires ou quadratiques car elle n'est pas construite sur des principes de covariances précis. L'introduction du fenêtrage en $h(s-t)$, bien qu'analogue à ce que propose la transformée de Fourier à court terme, n'est pas une solution satisfaisante dès que l'on a remarqué que la classe bâtie sur l'échelle de Mellin ne peut pas être (telle quelle) covariante par les translations en temps.

Au crédit de L. Cohen, nous pouvons toutefois remarquer que la représentation linéaire qu'il a introduit est suffisante pour estimer la grandeur échelle instantanée si la largeur de $h$ tend vers zéro. Il en est de même avec la transformation à court terme que nous proposons. Pour un signal analytique $X(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$, et en posant $\underline{h}(u) = A_h(u)e^{-\varphi_h(u)}$, la mesure instantanée de l'échelle donne :

$$
\begin{aligned}
<\beta>_t &= \frac{1}{|\underline{L}_X(t,\beta)|^2}\int \beta|\underline{L}_X(t,\beta)|^2\mathrm{d}\beta && \text{(III.106)}\\
&= \frac{1}{2\pi|\underline{L}_X(t,\beta)|^2}\int |A(s)|^2|A_h(s/t)|^2 s\left[\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(s) - \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_h}{\mathrm{d}t}(s/t)\right]\mathrm{d}s, && \text{(III.107)}
\end{aligned}
$$

et quand la largeur de $A_h$ tend vers 0, la distribution est localisée en $|\underline{L}_X(t,\beta)|^2 = |A(t)|^2$ et on obtient que $<\beta>_t \simeq t(\mathrm{d}\varphi(t)/\mathrm{d}t)/2\pi$. Bien que valable à la limite de la largeur de la fenêtre nulle, la distribution quadratique n'a pas pas la propriété de mesure d'échelle instantanée en dehors de cette limite que le spectre de Wigner invariant en échelle possède. Cette limitation est héritée de l'absence de localisation correcte autour de la fréquence instantanée pour le spectrogramme.

La deuxième conséquence est que nous pouvons songer à nous intéresser spécifiquement à des représentations qui regrouperaient les deux covariances antagonistes jusqu'à présent : réussir à développer une transformation représentant le signal en temps et échelle de Mellin qui serait compatible avec les dilatations et les translations temporelles. Nous explorons ceci en introduisant deux variantes.

### 2.2.4 Variation 1 : construction sur le groupe affine

**La classe affine usuelle.** Puisqu'il n'y a que deux sortes de classes quadratiques générales à deux variables, nous pouvons nous demander, maintenant que l'équivalent de la classe de Cohen à été envisagée, quel est l'équivalent de la classe affine. Celle-ci est paramétrisée de manière générale comme :

$$A_X(t,f) = \iint \Pi\left(\frac{s-t}{a}, a\zeta\right) W_X(s,\zeta)\mathrm{d}s\mathrm{d}\zeta \qquad \text{(III.108)}$$

Cette classe est déjà construite à l'aide des opérateurs de dilatation. Ainsi une première version de la classe affine pour des échelles de Mellin n'est rien d'autre que la classe usuelle, relocalisée dans les variables $(t, \beta = tf)$ : $\underline{A}_X(t,\beta) = t^{2H}A_X(t,\beta/t)$. Il n'est pas utile de détailler plus avant ses propriétés mais noter que la classe affine reste la solution pour traiter des propriétés liées aux dilatations avec une certaine invariance en temps.

**Une classe affine en loi de puissance.** Une autre classe affine peut être déduite à l'aide de la transformée de Lamperti. L'analyse covariante générale construit les classes affines par des équivalences unitaires entre $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et $\mathcal{S}_\tau$ et les opérateurs de déplacement privilégiés. Ici $\mathcal{L}_H$ met en relation la translation en temps et les dilatations ; il faut donc trouver l'équivalent unitaire des dilatations par $\mathcal{L}_H$ :

$$(\mathcal{W}_\theta X)(t) = (\mathcal{L}_H\mathcal{D}_{-1/2,\theta}{\mathcal{L}_H}^{-1}X)(t) = \sqrt{\theta}e^{H(1-\theta)}X(t^\theta). \qquad \text{(III.109)}$$

Ce nouvel opérateur de warping du temps en loi de puissance admet comme fonction de modulation affine $\mathcal{H}_\beta$ qui est bien dual des dilatations $\mathcal{D}_{H,\lambda}$. Les représentations affines associées sont alors construites sur le groupe des déplacements :

$$(\mathbf{D}_{\theta,\lambda}X) = \sqrt{\theta}e^{H(1-\theta)}\lambda^{-H}X(\lambda t^{\theta}). \tag{III.110}$$

Ces déplacements forment une représentation du groupe affine car on a : $\mathbf{D}_{\theta,\lambda}\mathbf{D}_{\theta',\lambda'} = \mathbf{D}_{\theta\theta',\lambda\lambda'^{\theta}}$ ainsi que la relation de commutation : $\mathbf{D}_{\theta,\lambda} = \mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{W}_\theta = \mathcal{W}_\theta\mathcal{D}_{H,\lambda^\theta}$. La classe affine associée est construite sur la relation de covariance fondamentale suivante :

$$Q_{\mathbf{D}_{\theta,\lambda}X}(a,\sigma) = Q_X\left(\frac{a}{\theta}, \sigma\lambda^{-a/\theta}\right). \tag{III.111}$$

Cependant l'interprétation des variables $(a,\sigma)$ reste floue. La deuxième doit être associée à l'opérateur d'échelle $\mathcal{C}$ puisque construite sur $\mathcal{D}_{H,\lambda}$. Nous avons rencontré la première en s'inquiétant de l'unicité de $\mathcal{L}_H$ en suivant les travaux de Burnecki et coll. (II.3.3.5). L'introduction de $\mathcal{L}_{H,a}$ donnait en effet la forme générale des transformations envoyant les processus stationnaires vers les processus $H$-ss. On peut remarquer que le changement de l'axe des temps du processus lampertisé en : $a \ln t = \ln t^a$, revient à passer par une déformation en loi de puissance, donc par $\mathcal{W}_\theta$. On a pour l'opérateur de déplacement :

$$\mathbf{D}_{\theta,\lambda} = \mathcal{L}_{H,\theta}\mathcal{S}_{\ln\lambda}\mathcal{L}_{H,\theta}^{-1}, \tag{III.112}$$

et les représentations que l'on peut tirer de celui-ci trouve des interprétations semblables à celle de la transformation de Lamperti usuelle, avec un paramètre $\theta$ (ou $a$) supplémentaire correspondant à une déformation en loi de puissance, c'est-à-dire un changement général des exposants des tendances en loi de puissance. Nous avons dans le chpitre II utilisé cette équivalence généralisée à l'aide de $\mathcal{L}_{H,a}$ pour interpréter certains exemples.

### 2.2.5 Principe tomographique : localisation sur les chirps de Mellin.

**La distribution des Bertrand.** Un membre incontournable de la classe de Mellin est la distribution de Bertrand, introduite d'abord sur la base d'arguments de représentation du groupe affine [BB84]. La distribution de Bertrand reparamétrée en temps est un élément de la classe de Mellin. En posant, dans l'écriture (III.84), $\underline{F}(u,e^\sigma) = u^2\delta\left(u - \frac{\sigma}{\operatorname{sh}\sigma/2}\right)$, on obtient la distribution :

$$\begin{aligned}
\underline{P}_X(t,\beta) &= \iint (s/t)^2 t\delta\left(s - \frac{\sigma t}{2\operatorname{sh}\sigma/2}\right) R_X(se^{\sigma/2}, se^{-\sigma/2})e^{-i2\pi\beta\sigma}\mathrm{d}\sigma\frac{\mathrm{d}s}{s} && \text{(III.113)}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma}{2\operatorname{sh}\sigma/2}R_X\left(t\frac{\sigma e^{\sigma/2}}{2\operatorname{sh}\sigma/2}, t\frac{\sigma e^{-\sigma/2}}{2\operatorname{sh}\sigma/2}\right)e^{-i2\pi\beta\sigma}\mathrm{d}\sigma, && \text{(III.114)}
\end{aligned}$$

qui est l'écriture usuelle de la distribution de Bertrand (voir [BB84, Coh93]), portant ici sur la représentation temporelle.

Il est attendu de retrouver cette distribution au nombre de celles de la classe quadratique de Mellin. Sa première construction reposait sur l'inversion du problème de Radon [BB84] que constitue la possibilité de localiser correctement les contributions du signal sur des courbes précises du plan temps-fréquence, ici des chirps. Il est montré [BB84] qu'imposer la propriété :

$$\iint P_X(t,f)\delta(f-\beta/t-f_0)t^{-2H-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}f = |(\mathbf{M}X)(\beta)|^2 \tag{III.115}$$

permet de construire la distribution $P_X(t,f) = \underline{P}_X(t,ft)$ comme solution. Cette propriété tomographique qui dit que $P$ a une marginale correcte quand on l'intègre sur les chirps de l'analyse de Mellin, se traduit simplement dans le contexte stochastique par la propriété de marginale sur $\underline{P}$ que partagent de nombreux éléments de la classe de Mellin : $\int \underline{D}_X(t,\beta)t^{-2H-1}\mathrm{d}t = \underline{\phi}_X(\beta,\beta)$.

La condition pour avoir cette propriété est donnée au paragraphe qui vient et la distribution des Bertrand la vérifie.

**Localisation et marginale sur les chirps de la classe de Mellin.** La condition pour qu'un membre de la classe de Mellin ait une marginale en échelle de Mellin correcte (comme (III.66) pour le spectre de Wigner invariant en échelle) :

$$\int_0^\infty \underline{D}_X(t,\beta)t^{-2H-1}\mathrm{d}t = \underline{\phi}_X(\beta,\beta) \tag{III.116}$$

est adaptée de celle pour la classe de Cohen et s'écrit :

$$\int \underline{\Pi}(u,\sigma)u^{2H-1}\mathrm{d}u = \delta(\sigma) \tag{III.117}$$

Elle est en fait une condition plus riche car, en utilisant alors la propriété (III.67) de localisation exacte de $\underline{W}$ sur les chirps de Mellin, nous avons comme représentation par la classe de Mellin de ces chirps : $X(t) = t^{H+i2\pi(\beta_0+m\ln t)}$ :

$$\underline{D}_X(t,\beta) = \iint \underline{\Pi}\left(\frac{t}{s},\beta-\gamma\right)s^{2H}\delta(\gamma-(\beta_0+m\ln s))\mathrm{d}\gamma\frac{\mathrm{d}s}{s} \tag{III.118}$$

$$= t^{2H}\int \underline{\Pi}\left(\frac{t}{s},\beta-(\beta_0+m\ln s)\right)(s/t)^{-2H}\frac{\mathrm{d}s}{s}, \tag{III.119}$$

qui se localise justement en $\delta(\beta-(\beta_0+m\ln s))$ pour ces chirps si et seulement si (III.117) est vérifiée.

La double propriété de tomographie sur les chirps de Mellin (équivalente à la propriété de marginale en $\beta$) et de localisation exacte sur ces mêmes chirps permet une interprétation générale des analyses en échelle de Mellin que nous avons déjà utilisées : ces distributions sont des projections du signal sur des trajectoires hyperboliques pour la fréquence instantanée.

Finalement, chercher à décrire les propriétés non invariantes au-delà de l'auto-similarité à l'aide des représentations en échelle de Mellin, revient en quelque sorte à rechercher les contributions sur des trajectoires spécifiques du plan $(t,f)$. C'est une interprétation essentielle à l'implémentation pratique des décompositions en échelle de Mellin : la projection pourra être envisagée géométriquement sous forme de transformation de Hough, voir le 2.4.2.

### 2.2.6 Variation 2 : échelle de Mellin et covariance en temps.

Cette interprétation tomographique nous incite à explorer la possibilité de conserver une description en échelle de Mellin, qui est adaptée à la fois à la description des propriétés au-delà de l'auto-similarité stricte mais aussi, comme nous venons de le voir, à la recherche de structures cohérentes (les chirps que nous interpréterons autant comme de possibles singularités oscillantes que comme briques de base des structures cohérentes dans un signal). Nous étudions comment une stationnarité en temps de l'analyse peut se concilier avec une décomposition sur une base de Mellin.

Proposition III.3: *La classe des représentations linéaires covariantes par translation temporelle et invariantes d'échelle par les dilatations est donnée généralement par :*

$$\underline{N}(t_0,\beta) = \int \left[C_d(\beta)(s-t_0)^{-H-i2\pi a_d(\beta)}\mathbb{H}(s-t_0) + C_u(\beta)(t-s)^{-H-i2\pi a_u(\beta,t_0-s)}\mathbb{H}(t_0-s)\right] X(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}. \tag{III.120}$$

*On rappelle que $\mathbb{H}$ est la fonction de Heaviside.*

*Démonstration* — Partons de la forme linéaire générale pour imposer les deux propriétés voulues.

$$\underline{N}_X(t_0,\beta) = \int_0^{+\infty} k(s;t_0,\beta)X(s)\mathrm{d}s. \tag{III.121}$$

1. Translation en temps – $\underline{N}_{\mathcal{S}_\tau X}(t_0,\beta) = \underline{N}_X(t_0+\tau,\beta)$ qui impose que $k(s;t_0,\beta) = k(s-t_0;0,\beta)$.
2. Invariance en échelle – $\underline{N}_{\mathcal{D}_{H,\lambda}X}(t_0,\beta) = |\underline{N}_X(\lambda t_0,\beta)|$. Nous relachons la contrainte en invariance pour le module seulement (comme pour $\mathbf{M}$ en fait) car elle implique : $k(\lambda s;\lambda t_0,\beta) = \lambda^{-H-1}|k(s;t_0,\beta)|$. En ajoutant la première covariance, il faut que $k(s-t_0;0,\beta)$ soit une fonction homogène pour la première variable. Une invariance exacte (et non en module) n'aurait ici pour solution que les lois de puissance avec exposant réel. L'invariance en module est plus riche puisqu'elle aurorise les exposants complexes :

$$k(\tau;0,\beta) = C_u(\beta)(-\tau)^{-H-1-i2\pi a_u(\beta,-\tau)}\mathbb{H}(-\tau) + C_d(\beta)\tau^{-H-1-i2\pi a_d(\beta,\tau)}\mathbb{H}(\tau). \tag{III.122}$$

La solution prend ainsi la forme (III.121) et doit être précisée ensuite par les quatre fonctions $C(\beta)$ et $a(\beta,\tau)$ pour les parties $s<t$ (indice $u$) et $s>t$ (indice $d$).

□

Cette solution est un peu déconcertante car laisse beaucoup de libertés dans le choix des fonctions $C(\beta)$ et $a(\beta,\tau)$. D'une part cette difficulté était attendue car, alors que la classe de Mellin obéit aux principes de contruction des représentations à deux paramètres par généralisation des classes temps-fréquence, la transformation cherchée ici ne se fonde pas sur des opérateurs duaux. Il n'existait pas a priori donc de résultats pour avancer la structure de la construction.

D'autre part la transformation admet une interprétation intéressante qui déborde de la théorie de construction des classes à 2 paramètres par covariance. Le noyau donné en (III.122) est composé de deux morceaux qui sont en fait des chirps. L'indice $u$ désigne un chirp « montant », allant vers le temps $t_0$ d'analyse et $d$ un chirp « descendant » à partir de ce temps $t_0$ et jusqu'aux temps infinis. La structure de ces chirps est :

$$f_{u/d}(\tau;\beta) = C_{u/d}(\beta)\ |\tau|^{-H-1+i2\pi a_{u/d}(|\tau|,\beta)}\ \mathbb{H}(\mp\tau), \tag{III.123}$$

et leur fréquence instantanée est $\dfrac{a_{u/d}(|\tau|,\beta)}{|\tau|} + \dfrac{\partial a_{u/d}}{\partial\tau}\ln|\tau|$. Les équations ont été regroupées pour les deux types de chirps $(u/d)$. La transformation (III.121) est alors une corrélation entre le signal $X(s)$ et les chirps définis ici. Nous retrouvons ici une version linéaire de la « chasse aux chirps » que plusieurs auteurs ont déjà mené. On pourra se reporter à [CHT98, CMF99] pour quelques exemples de cette grande affaire qui n'a pas encore de solution parfaite. Nous avons dans un contexte de turbulence tenté d'utiliser ces descriptions (voir au chapitre V).

Dans le contexte de notre étude sur les propriétés autour de l'invariance en échelle et de ses versions affaiblies, nous avons prouvé que le formalisme naturel de description s'appuyait sur la base de Mellin. On pourrait donc être amené à specifier les chirps en les restreignant aux fonctions de Mellin, donc aux chirps de fréquence instantanée hyperbolique comme il suit :

$$f_{u/d}(\tau;\beta) = C_{u/d}(\beta)\ |\tau|^{-H-1+i2\pi\beta}\ \mathbb{H}(\mp\tau), \tag{III.124}$$

où, pour garder directement l'interprétation de $\beta$ comme une variable d'échelle (de type « temps $\times$ fréquence » donc), on fixe les fonctions $a_{u/d}(\beta,t)$ égales à $\beta$.

Manquant d'arguments théoriques supplémentaires à ce point au sujet de cette transformation, nous renvoyons l'étude pratique et heuristique de ce que nous pouvons en faire aux paragraphes suivants (2.4.2 en particulier).

## 2.3 Développements aux statistiques d'ordre supérieur

Nous avons privilégié l'étude de processus qui restent Gaussiens ou, pour mieux préciser le propos, les représentations que nous avons construites ne testent pas plus que les propriétés statistiques d'ordre 1 et 2 des processus. C'est une limitation forte des représentations linéaires ou quadratiques de manière générale. Ce paragraphe est dédié à une excursion dans le monde des propriétés qui ne se limitent pas à l'ordre deux et dont on sait qu'elles décrivent souvent des caractéristiques non-linéaires dans la génération des signaux analysés.

Dans un contexte d'étude de signaux stationnaires, les multispectres et les multicorrélations sont les descriptions naturelles des statistiques d'ordre supérieur. Nous renvoyons par exemple à [LAC97] sur ce sujet.

**Tester les statistiques d'ordre supérieur à deux.** L'idée de départ est de regarder les moments autres que le deuxième de représentations du signal en temps et échelle de Mellin pour déceler les caractéristiques au-delà de la Gaussiannité du processus. L'outil de base est construit comme l'espérance de $N$ représentations d'ordre 1 :

$$\underline{T}^N_{X_1,\ldots,X_N}(t_1,\ldots,t_N;\beta_1,\ldots,\beta_N) = \prod_{n=1}^{N} \underline{L}_X(t_n,\beta_n). \tag{III.125}$$

On reconnaît ici que les moments du processus, de la forme $\mathbb{E}X(t_!)\dots X(t_2)$ sont effectivement testés par ces combinaisons et décomposés dans le formalisme de Mellin. Les difficultés commencent à surgir quand on veut utiliser ceci dans des situations générales.

**Interactions non-linéaires dans la base de Mellin.** Un avantage de passer par le formalisme sur la base de Mellin pour décrire des propriétés dépassant le cadre Gaussien est que la base de Mellin est simplement fermée par interaction multiplicative. Si deux systèmes interagissent non-linéairement, les échelles de Mellin se combinent de manière additive : par exemple l'interaction quadratique des échelles $\beta_1$ et $\beta_2$ conduit à $\beta_1 + \beta_2$.

C'est une grande différence par rapport à l'étude en échelle construite sur la classe affine. Dans ce cas les bases naturelles sont les ondelettes et on sort de la base en combinant non-linéairement deux ondelettes. On trouvera par exemple dans [AM99b] l'illustration que de deux signaux chacun à une échelle (affine) seulement interagissent en donnant des contributions à toute échelle, et de la difficulté subséquente à définir les représentations affines aux ordres supérieurs.

La lecture des interactions non-linéaires est plus aisée dans les décompositions de la classe de Mellin et partagent en fait les propriétés que l'on a pour les fréquences (où $\nu_1$ et $\nu_2$ engendrent quadratiquement $\nu_1 + \nu_2$).

**Multi-spectres multiplicatifs pour les processus auto-similaires.** L'étude à un temps conduit à regarder une généralisation pour les processus au-delà du $H$-ss et dépendant du temps. Plus précisemment, nous obtenons directement un bispectre multiplicatif pour l'ordre 3 en adoptant cette construction pour la représentation avec $H$ constante, regardée au même instant $t$ et pour des échelles $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$, caractérisant une interaction quadratique :

$$\underline{B}_X(t;\beta_1,\beta_2) = \iint t^{-3H}\mathbb{E}\left\{X(t\lambda^{1/3}\mu^{1/3})X(t\lambda^{-2/3}\mu^{1/3})\overline{X(t\lambda^{1/3}\mu^{-2/3})}\right\}\lambda^{-i2\pi\eta_1-1}\mu^{-i2\pi\beta_2-1}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu. \tag{III.126}$$

Le choix de fenêtres différentes d'une constante conduit à lisser cette représentation par un noyau particulier, comme nous avons fait pour l'ordre 2.

Cette solution fut proposée dans [AM99a] comme une extension du spectre de Wigner invariant en échelle à l'ordre 3, et dans [MPSBB98] comme extension aux ordres supérieurs à 2 de la distribution de Bertrand. Ici nous l'obtenons par la transformation de Lamperti du bispectre (et des multispectres pour un ordre quelconque). Quand le signal analysé est auto-similaire, il est évident que ce bispectre multiplicatif ne dépend pas du temps $t$ et qu'alors l'estimation de l'espérance est possible en découpant le signal en morceaux pour les moyenner entre eux.

**La difficulté des « non-propriétés.»** C'est quand le signal n'est plus $H$-ss qu'on peine à utiliser de manière pratique cette approche[7]. Les multispectres multiplicatifs dépendent alors de $t$ et l'estimation n'est pas directement possible.

[7] La même limitation existe à l'heure actuelle pour employer les analyses multispectres pour des signaux non stationnaires en temps.

Pour répondre à des question précises, nous savons parfois construire des solutions. Si on s'intéresse à définir un taux de transfert entre échelles de Mellin, on pourra l'estimer à l'aide de représentations quadratiques de la classe de Mellin comme une intercohérence à deux temps et deux échelles, moyennée au cours du temps (symbole $\langle\ \rangle_t$) :

$$I(\tau, \beta_1), \beta_2 = \langle \underline{D}(t, \beta_1) \underline{D}(t+\tau, \beta_2) \rangle_t \,. \tag{III.127}$$

Il est même envisageable de chercher des transferts inter-structures en corrélant des distributions calculées avec une origine glissante.

En somme on retrouve ici la même limitation qui rend la vie impossible quand on cherche à s'éloigner en même temps du cadre invariant en échelle (où l'ergodicité permet de résoudre le problème d'estimation par des moyennes) et du cadre Gaussien (où les représentations quadratiques sont suffisantes, sont calculables et souvent lisibles ou interprétables même sans prendre de moyenne). Notre approche ne conduit pas à de nouvelles solutions ici.

## 2.4 Calcul pratique des représentations en échelle

Ce paragraphe consacre quelques mots au calcul des représentations mixtes temps-échelle pour l'étude de processus qui ne restent pas exactement auto-similaires. Nous présentons trois manières de tester leurs propriétés en échelle en se basant sur le cadre théorique proposé.

### 2.4.1 Calcul direct

La première méthode est directe et consiste à calculer les représentations mixtes linéaires ou quadratiques de la classe de Mellin décrites dans les pages précédentes, qui sont fonctions de $(t, \beta)$. Comme dans le cas de l'implémentation pratique de la fin du chapitre II, il existe plusieurs façons de faire cela.

- On applique une délampertisation numérique de la séquence étudiée par réinterpolation directe. On calcule ensuite les représentations temps-fréquence qui sont alors les représentations cherchées du signal initial, du fait du lien entre classe de Cohen et classe de Mellin établi par (III.79).
- Une variante est de choisir la délampertisation au sens de l'opérateur $\mathcal{L}_H$ à temps discret pour la transformation bilinéaire avant de calculer une représentation de la classe de Cohen.
- On reformule directement les algorithmes pour les représentations temps-fréquence en changeant les FFT en transformées de Mellin discrète. En fait cela revient aussi à rééchantillonner les séquences sur une série géométrique.

La représentation mixte de la figure III.6 correspondant au processus de l'exemple III.5 a été calculée de la première manière.

### 2.4.2 Implémentations par détection en temps-fréquence

Mettant à profit les propriétés tomographiques des représentations mixtes qui vérifient (III.117), une autre approche a été proposée [CMF99] pour calculer des représentations à partir de leurs représentations temps-fréquence usuelles.

La méthode est de chercher la contribution du signal à une échelle $\beta$ et un temps $t$ par l'application d'un détecteur formulé dans le plan temps-fréquence [Fla88]. La contribution à une échelle de Mellin donnée se mesure en effet par la ressemblance entre le signal décomposé en temps et fréquence et les chirps hyperboliques d'échelle $\beta$ tandis que le temps $t$ auquel on regarde agit comme facteur de dilatation de l'axe des temps.

Telle quelle, cette approche caractérise convenablement surtout les comportements qui ne varient pas dans le temps (puisque la dilatation n'est pas la chose la plus simple à utiliser numériquement sur les distributions de la classe de Cohen). Son grand intérêt est qu'elle s'adapte sans difficulté à la variante 2 fondée sur l'échelle de Mellin et la covariance en temps puisque cette distribution donnée par (III.120) est exactement le résultat de la projection d'une représentation temps-fréquence sur un chirp de Mellin de paramètre $\beta$ et d'origine temporelle $t_0$.

**Chasse aux chirps par filtre adapté.** Suivant la procédure exacte proposée dans contexte différent dans [CMF99], les représentations mixtes temps-échelle d'un signal observé sur une durée $T$, peuvent être estimées par le détecteur portant sur une représentation $C_X(t, f)$ (par exemple de la classe de Cohen) dans le plan-fréquence :

$$\Lambda_X(t, \beta) = \int_0^T t^{2H-1} C_X\left(\frac{u}{t}, \frac{\beta}{ut}\right) \mathrm{d}u, \tag{III.128}$$

qui est la forme de base du détecteur pour les paramètres $(t, \beta)$ de la représentation cherchée.

On accroît la précision de la mesure quand on ne recherche qu'un nombre restreint de contributions sur les chirps hyperboliques, donc sur les trajectoires de fréquence instantanée en $f = \beta/u$, en localisant plus finement la représentation $C_X$ utilisée. La distribution de Bertrand est la seule solution de la classe de Cohen qui localise exactement sur ces chirps hyperboliques [BB84, CMF99] mais les procédures de réallocation dans le plan temps-fréquence fournissent une alternative efficace pour obtenir une localisation parfaite pour la détection [CM98, CMF99].

Algorithmiquement, le détecteur de l'équation (III.128) est implémenté par l'intégration de $C_X(u, f)$ le long des trajectoires voulues, définies au préalable par des gabarits dans le plan $(u, f)$.

**Échelle de Mellin et covariance en temps.** La variation 2 construite sur les contraintes de covariance pour l'opérateur de Mellin (multiplication par un chirp) et covariance en temps, fut montrée identique à la recherche des chirps de Mellin dans le signal. Cette recherche trouve une solution naturellement formulée dans le cadre de la détection temps-fréquence selon [CMF99]. L'estimation de la représentation de type (III.120) est la recherche des contributions sur les trajectoires de fréquence instantanée $f = \pm\beta/(t_0 - u)$ qui sont celles des chirps de paramètres $\beta$ et d'origine $t_0$.

Le détecteur se formule cette fois comme :

$$\Lambda_X^d(t, \beta) = \int_{t_0}^T (u - t_0)^{2H-1} C_X\left(u, \frac{\beta}{u - t_0}\right) \mathrm{d}u, \tag{III.129}$$

pour les chirps descendants après $t_0$ et une forme analogue pour les chirps montants en intégrant sur $u < t_0$. Une manière d'implémenter ceci est de générer les gabarits dans le plan $(u, f)$ des détecteurs ayant ces fréquences instantanées.

**Transformation de Hough pour les hyperboles.** Puisque une représentation temps-fréquence fournit une image à deux dimensions du signal, des méthodes d'analyse peuvent être importées du traitement d'image. En particulier on pense à la transformation géométrique introduite en analyse d'images pour rechercher les courbes appartenant à une famille spécifiée : la transformation de Hough. On consultera [Mai85] qui en donne une présentation générale ; cette transformation est aussi dite de Radon. La transformation de Hough originelle porte sur les familles de droite, définies par deux paramètres $a$ et $b$ comme $y = ax + b$. Elle fait alors correspondre à une image dans $\mathbb{R}^2$ une fonction $g(a, b)$ telle que $g(a, b)$ est égale au nombre de points caractéristiques de l'image (les points de valeur non nulle) par lesquels passe la droite de paramètres $(a, b)$.

Adaptée au traitement temps-fréquence pour la détection de chirps linéaires ou pour la construction de noyaux adaptatifs pour l'analyse ou la synthèse temps-fréquence, elle fournit un détecteur de chirps linéaires en pondérant la contribution de chaque point par la valeur de la représentation temps-fréquence $C$ étudiée : $g(a, b) = \sum_{(u_i, f_i)} C(u_i, f_i)$ si les $(u_i, f_i)$ sont sur la droite de paramètres $(a, b)$. Finalement la transformation réalise la détection sur les droites à l'identique des principes de chasse aux chirps linéaires avec des détecteurs temps-fréquence et seule la pratique algorithmique change : cette fois on fait correspondre à chaque point $(u, f)$ une contribution à tous les paramètres $(a, b)$ tels que $f = au + b$ à la précision de l'échantillonnage près[8].

La recherche d'hyperboles dans une image temps-fréquence est du même type avec la famille des hyperboles paramétrées comme $f = \beta(t_0 \pm u)$ comme dans (III.129). La transformation de Hough pour les hyperboles fait alors correspondre une représentation $C$ la fonction $g(t_0, \beta) = \sum_{(u_i, f_i)} C(u_i, f_i)$ où on a $f_i = \pm\beta(t_0 - u_i)$ à l'échantillonnage près. Sans entrer plus loin dans les détails sur la transformation de Hough, l'intérêt de cette formulation du détecteur est qu'il existe des travaux concernant la structure attendue de la transformation. Dans le cas utilisé ici de la recherche des chirps hyperboliques, la transformation de Hough calculée est un ensemble de droites dont la superposition en faisceau permet de localiser les contributions principales.

## 3 Des invariances d'échelle généralisées

Comme annoncé, ces derniers paragraphes sont un peu en marge du fil général d'utilisation de $\mathcal{L}_H$ mais constituent des illustrations essentielles de ce que nous avons avancé : étant donné une symétrie particulière (qui peut être une brisure de symétrie partielle), on peut généraliser la transformation de Lamperti en modifiant le détail de la transformation de sorte que la nouvelle stationnarise convenablement les processus ayant la symétrie regardée.

Ici nous analysons de cette façon deux invariances d'échelle affaiblies. La première incorpore l'existence de bornes en échelle et s'inspire des travaux de B. Dubrulle et F. Graner

[8] C'est la transformation de Hough de 1 à plusieurs points que nous privilégions pour sa facilité de programmation [Mai85]

prolongeant la relativité d'échelle de L. Nottale. La deuxième concerne l'auto-similarité requise seulement localement, introduite par Benassi et co-auteurs. Les deux cas nous obligent à détailler l'invariance, les processus stochastiques qui la vérifient et la transformation de Lamperti que l'on peut utiliser alors.

Le troisième exemple important d'invariance d'échelle brisée que nous étudions fait l'objet du chapitre IV au complet et la transformée de Lamperti usuelle suffira à son étude.

## 3.1 Invariance d'échelle avec taille finie

**Relativité d'échelle en physique.** Une critique parfois avancée contre les considérations sur les invariances d'échelle pour des systèmes physiques concerne les limites extrêmes où cette invariance pourrait tenir. Il est peu naturel en effet de supposer que le système se comporte exactement de la même manière sans aucune limite de taille supérieure (l'existence d'une grande échelle maximale) ou aucune limite de taille inférieure. Le problème se pose que l'on regarde l'auto-similarité d'un système en temps ou en fréquence. L'intuition serait de poser des bornes au comportement auto-similaire, souvent retranscrites par l'existence de certaines lois de puissance, avec deux échelles maximale et minimale délimitant la zone où la propriété est valable. C'est immédiatement cette situation que l'on constate en turbulence, par exemple en examimant le spectre isotrope d'énergie de la figure III.7 (voir le chapitre V pour les propriétés en échelle de la turbulence).

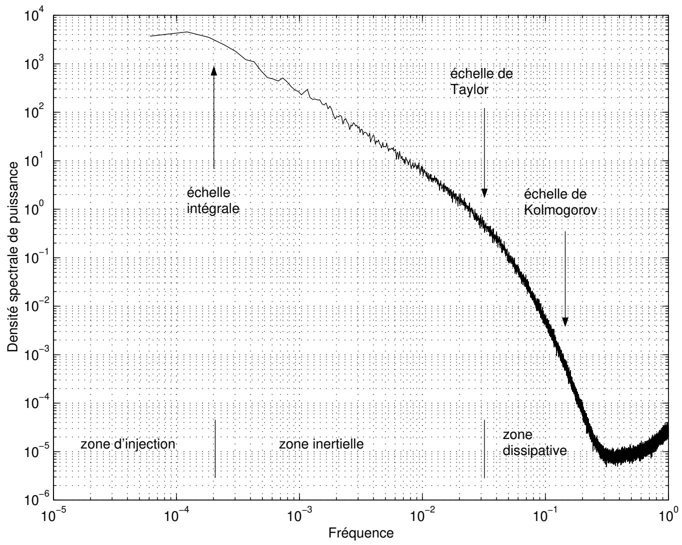



Fig. III.7: Spectre typique du signal de vitesse d'un jet turbulent. Données des expériences de C. Baudet et A. Naert (ÉNS Lyon) [BMW99]. L'existence d'une grade échelle (échelle intégrale) et d'une coupure à petite échelle (échelle visqueuse ou de Kolmogorov) est un ingrédient de base des propriétés en échelle de la turbulence (voir le chapitre V pour une présentation du problème).

Une lecture attentive des propriétés des systèmes et des signaux en fonction de l'échelle à laquelle ils sont regardés a permis à L. Nottale d'étendre la notion d'invariance en échelle pour prendre explicitement en compte l'existence d'éventuelles *coupures supérieure ou inférieure* [Not92, Not93]. Un parallèle des propriétés en échelle avec la relativité restreinte, introduit sous le nom de *principe de relativité d'échelle*, affirme que l'échelle n'est compréhensible que relativement aux rapport entre des échelles. Ainsi il faut décrire la manière dont le contenu en échelle d'un système change après une dilatation et L. Nottale montre que les transformations qui agissent sur l'échelle de représentation (ce sont les dilatations) obéissent à des lois analogues à celles de la relativité restreinte d'Einstein, de type groupe de Lorentz.

Nottale proposant de plus d'abandonner l'hypothèse de différentiabilité de l'espace-temps [Not89, Not02], il doit rechercher les nouveaux principes qui puissent guider une reformulation des équations de base de la physique dans ce cadre plus riche. Sans commenter la validité ou les espoirs que permettent cette ouverture théorique dans différents domaines de physique fondamentale (voir par exemple [Not96, Not98]), nous allons utiliser la possibilité d'incorporer des limites non dépassables (analogue à la vitesse de la lumière) dans les dilatations : des effets de taille finie.

**Des lois de dilatations relativistes.** Le propos de Nottale a été repris sous cet angle par Dubrulle et Graner [DG96a, DG96b] puis redéveloppé afin de construire à partir de ce calcul des opérateurs de dilatations qui connaissent l'existence des bornes supérieure et/ou inférieure. On pourra consulter la série d'articles [GD97, DG97, Dub97, DBGP98, Dub00] autour de ce sujet. Nous renvoyons en général à [Dub00] qui est plus accessible que les autres articles mais des développements ou applications sont traités dans les autres.

Les objets étudiés sont les représentations en fonction de l'échelle $s$ des champs $U$. Les bornes rendant compte de la taille finie peuvent être introduites sur les échelles accessibles : c'est l'image de la figure précédente où la zone auto-similaire usuelle est limitée ; ou alors sur les valeurs que peut prendre le champ $U$. Nous interpréterons ceci comme une déformation non-linéaire de l'espace des valeurs que peut prendre le signal, et donc de la loi de probabilité pour une fonction aléatoire. L'association des deux limites est possible, ainsi que [Dub00] l'a directement fait. Les auteurs y montrent quelles doivent être les nouvelles lois de changement d'échelle, les représentations des opérateurs de dilatation avec taille finie, quelles sont les fonctions qui vérifient une invariance pour ces opérateurs avant d'interpréter cette propriété dans différents exemples en montrant que l'on modélise des déviations pertinentes aux systèmes auto-similaires usuels.

Nous allons proposer une rédaction originale de l'invariance d'échelle finie en introduisant les différents éléments utiles à son traitement. Ensuite nous montrerons comment on peut étudier les propriétés d'échelle influencées par une taille bornée en construisant une transformation de Lamperti modifiée, adaptée à cette nouvelle situation. Enfin nous commenterons et illustrerons l'utilisation des principes d'invariance en échelle avec des effets de taille finie pour l'étude de processus stochastiques. Les résultats exposés ici sont des préliminaires à une étude initiée récemment, et que l'on espère se poursuivre pour les applications physiques possibles avec P. Abry et B. Lashermes [Las02].

### 3.1.1 Lois de groupes et représentations sur un intervalle

**Représentation additive du groupe des dilatations.** Il n'est pas difficile de trouver une représentation entièrement additive des dilatations non bornées usuelles puisqu'elle se construit au départ à l'aide de la transformation de Lamperti.

Soit une grandeur étudiée (aussi appelée champ) $\phi(t)$ en fonction d'un paramètre $t$. Les changements d'échelles sont les dilatations $(\mathcal{D}_{H,\lambda}\phi)(t) = \lambda^{-H}\phi(\lambda t)$. Une représentation additive a comme effet d'être une translation sur la variable de représentation : c'est ce que nous avons appelé une écriture covariante en II.3.3.2 et la représentation en échelle de Baraniuk [Bar93] est la solution : $(\mathbf{S}\phi)(s) = \phi(e^s t_0)$. $s$ est l'échelle et $t_0$ un temps de référence. Un nouveau changement logarithmique, cette fois sur le champ, donne l'équivalent additif de la multiplication par $\lambda^{-H}$. On pose à la suite de Dubrulle et coll. [Dub00] que $U_\phi = \ln \phi/\phi_0$ avec $\phi_0$ une valeur de référence du champ (arbitraire, par exemple le choix de l'unité physique) et on a alors :

$$U_{\mathcal{D}_{H,\lambda}\phi}(s) = \ln \frac{(\mathcal{D}_{H,\lambda}\phi(e^s t_0))}{\phi_0} = \frac{\ln \lambda^{-H}\phi(e^{s+\ln\lambda}t_0)}{\phi_0} = -H\ln\lambda + U_\phi(s+\ln\lambda). \qquad \text{(III.130)}$$

Cette représentation entièrement additive de $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ agit sur l'espace donné par :

$$U_\phi = \ln\frac{\phi}{\phi_0} \qquad \text{et} \qquad s = \ln\frac{t}{t_0}. \qquad \text{(III.131)}$$

Cette forme est valable pour n'importe quelle dilatation, quel que soit l'indice $H$ de renormalisation. C'est un avantage devant la formulation de Lamperti qui demande de connaître $H$. Le prix est qu'alors un processus auto-similaire $\phi(t)$ pour un certain $H$ est ici en correspondance avec $U(s)$ qui n'est pas stationnaire mais tel que :

$$(\forall\mu\in\mathbb{R}) \quad U_\phi(s) \stackrel{d}{=} U_\phi(s+\mu) - H\mu. \qquad \text{(III.132)}$$

Dans cette formulation, l'équivalent du théorème de Lamperti II.1 est de travailler avec le champ $U_\phi(s) - Hs$ qui est stationnaire si et seulement si le processus initial $\phi(t)$ est auto-similaire d'indice $H$. $U_\phi(s) - Hs$ est en fait le logarithme du transformé de Lamperti de $\phi(t)$.

Nous venons ici, sans l'annoncer, de restreindre l'étude aux champs $\phi$ positifs en en prenant le logarithme. Les champs de signe quelconque admettent en fait aussi une représentation entièrement additive et nous ferons cette étude en 3.1.3, en introduisant en même temps la dilatation entre des bornes finies qui leur correspond. Il suffit ici de dire que leur représentation doit être à deux états $U = (\ln|\phi|, \theta)$ où le deuxième paramètre décrit le signe du champ initial [DH00].

**Différents espaces de représentations.** Un signal $\phi(t)$ peut être représenté de différentes manières : forme initiale, forme additive mais aussi celle après transformation de Lamperti ou représentation en échelle $\mathbf{S}$. Ce paragraphe est une pause descriptive qui a pour but de clarifier leurs relations, résumées sur la figure III.8.

Partant de la représentation naturelle I du signal $\phi(t)$, les trois autres formes équivalentes sont construites en appliquant l'une ou l'autre des transformations logarithmique supposées dans [Dub00] : celle sur le champ et celle sur le paramètre qui est en fait la transformation en échelle [Bar93]. La combinaison des deux livre la représentation $U(s)$. En définitive, l'utilisation de $U$ comme celle de $s$ n'est justifiée que parce qu'on part du groupe multiplicatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\begin{array}{c}\text{I}\\ \text{Signal}\\ \text{de départ}\\ \phi(t)\end{array} \arrow[r, "\mathbf{S}"] \arrow[d, Rightarrow, "\text{Logarithme du champ}"] & \begin{array}{c}\text{II}\\ \text{Transformation}\\ \text{en échelle}\\ (\mathbf{S}\phi)(s)=\phi(t_0e^s)\end{array} \arrow[r, "\begin{array}{c}\text{renormalisation}\\ \text{par } H\end{array}"] \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{III}\\ \text{Délampertisée}\\ \text{usuelle}\\ \psi(s)=e^{-Hs}\phi(t_0e^s)\end{array} \arrow[d, Rightarrow] \\
\begin{array}{c}(\ln\phi)(t)=\ln\frac{\phi(t)}{\phi_0}\\ \text{Représentation}\\ \text{additive}\\ \text{I'}\end{array} \arrow[r, "\mathbf{S}"'] & \begin{array}{c}U(s)=\ln\frac{\phi(t_0e^s)}{\phi_0}\\ \text{Transformation en}\\ \text{échelle additive}\\ \text{II'}\end{array} \arrow[r, "\begin{array}{c}\text{renormalisation}\\ \text{par } H\end{array}"'] & \begin{array}{c}V(s)=U(s)-Hs\\ \text{Délampertisée}\\ \text{additive}\\ \text{IV}\end{array}
\end{tikzcd}$$

Fig. III.8: Les différents espaces de représentation de $\phi(t)$ soumis aux dilatations normales.

pour définir les dilatations et que la généralisation à des intervalles finis s'appuit sur les représentations additives qui seront de façon équivalente utilisées comme desciption canonique du signal $\phi(t)$.

Les deux dernières représentations (III et IV) de la figure ont un statut particulier : ce sont les signaux délampertisés (soit sous la forme usuelle en III, soit en écriture additive IV sur $U(s)$). Ils ont alors des propriétés d'invariance modifiées par rapport au champ originel et sont la solution au problème de stationnarisation des processus auto-similaires non bornés.

Ainsi donc, après avoir montré comment redéfinir des opérateurs de dilatation incorporant les effets de taille finie, nous redéfinirons en 3.1.4 les cases III et IV pour introduire une transformation de Lamperti généralisée à l'invariance en échelle avec taille finie.

**Lois additives sur un intervalle fini.** Des résultats d'algèbre célèbres en physique permettent de passer aux invariances d'échelle finie : l'introduction du groupe de Lorentz pour la relativité d'Einstein montre l'existence de lois de composition valables sur un intervalle $\mathbb{J}$ fini de $\mathbb{R}$ (ou semi-infini). Elles généralisent la loi $+$ car c'est la loi retrouvée si on étend l'intervalle à $\mathbb{R}$. Nous notons $\mathbb{J} = ]M\ P[$, chacune des deux bornes pouvant être éventuellement infinie. Soient deux éléments $A$ et $B$ de $\mathbb{J}$, on définit $\oplus$ par :

$$A \oplus B = \frac{A + B - AB\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{P}\right)}{1 - \frac{AB}{MP}}. \tag{III.133}$$

Le couple $(\mathbb{J}, \oplus)$ est un groupe commutatif. Son élément neutre est 0 donc il faut que $M < 0 < P$. Quand $\mathbb{J} = \mathbb{R}$, on retrouve $(\mathbb{R}, +)$. L'obligation d'avoir 0 entre les deux bornes pose une seule restriction aux dilatations avec taille finie : admettre que l'identité est contenue dans leur ensemble.

Cette loi de composition est introduite par Nottale [Not92] sous hypothèse que le groupe des dilatations avec taille finie qu'il recherche adopte une représentation linéaire, ayant une loi de composition interne et vérifiant une propriété d'invariance par réflexion[9]. Il propose

[9] L'invariance par réflexion est de supposer qu'on peut travailler indifféremment avec $U(s)$ ou $-U(-s)$

une démonstration de la forme du groupe de Lorentz et de la loi de groupe $\oplus$ n'utilisant que ces symétries en reprenant, et en prouvant qu'on peut en diminuer le nombre d'hypothèses, la démonstration classique de Lévy-Leblond [LL76].

La démarche que nous proposons est inverse et nous supposons seulement que les dilatations admettent une structure de groupe. En imposant des limites finies, l'unique loi [DBGP98] de groupe convenant alors prend la forme de $\oplus$. Nous préférons ici mettre en avant la structure de groupe et non la linéarité de la représentation car l'existence d'un inverse dans la description proposée est importante.

À l'inverse, la lecture des phénomènes d'invariances d'échelle partiellement brisées à l'aide des modèles de cascade statistique, lecture développée dans [Cas97, Cha01], suppose que la structure algébrique n'est alors qu'un semi-groupe. Il n'est pas possible en effet de revenir en arrière dans les échelles à contre-sens de la cascade [10]. Cependant les deux analyses ne portent pas exactement sur le même objet : ici nous regardons directement l'expression des dilatations alors que les cascades contraignent l'évolution des grandeurs statistiques d'une échelle à l'autre. Rien n'interdit d'incorporer un modèle de cascades (non réversible) dans un formalisme de dilatations respectant des bornes finies. Ceci a été initié dans [Dub00] et étudié en confrontation avec les signaux expérimentaux de turbulence dans [Las02] : l'accord n'est pas bien probant dans ce cas.

**Morphisme pour le groupe** $(\mathbb{J}, \oplus)$. Les propriétés basées sur ce groupe se déduisent du morphisme qui le relie à $(\mathbb{R}, +)$. Soit $S$ ce morphisme, supposé dérivable, allant de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{J}, \oplus)$. Il doit vérifier l'égalité :

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) \quad S(a + b) = S(a) \oplus S(b). \tag{III.134}$$

La première conséquence est que $S(0) = 0$ pour assurer l'égalité des éléments neutres. On dérive ensuite par rapport à $b$ l'expression précédente pour obtenir :

$$S'(a + b) = S'(b) \frac{1 - S(a)\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{P}\right)}{1 - S(a)S(b)/MP} + \frac{S'(b)S(a)}{MP - S(b)S(a)} S(a) \oplus S(b). \tag{III.135}$$

$S'$ est la dérivée de $S$. On pose $b = 0$ et on a :

$$S'(a) = S'(0) \left[1 - S(a)\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{P}\right) + \frac{S(a)^2}{MP}\right] = S'(0)\left(1 - \frac{S(a)}{M}\right)\left(1 - \frac{S(a)}{P}\right). \tag{III.136}$$

Cette équation différentielle s'intègre en séparant les variables à l'aide de la décomposition en éléments simples :

$$S'(0)\mathrm{d}a = \frac{P/(P - M)}{1 - S/M} - \frac{M/(P - M)}{1 - S/P}\mathrm{d}S \tag{III.137}$$

$$S'(0)a = \frac{MP}{P - M} \ln\left(\frac{1 - S/P}{1 - S/M}\right) + \text{Cte}. \tag{III.138}$$

pour représenter les champs étudiés. C'est possible car alors les propriétés d'invariance par dilatation, de forme (III.132), sont les mêmes.

[10] Cette impossibilité est à comprendre au sens de la description statistique et non en terme du comportement instantané de, par exemple, l'énergie pour les cascades en turbulence des fluides.

La propriété des élements neutres, $S(0) = 0$, impose l'annulation de la constante. Le morphisme vérifie que $S(-\infty) = M$ et $S(+\infty) = P$, envoyant ainsi les bornes d'un groupe sur les bornes de l'autre. On notera $\alpha = -S'(0)(P - M)/MP$ la constante qui intervient dans les expressions. Elle est positive quand $S'(0)$ l'est.

$$S : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{J}, \oplus) \quad \begin{cases} S(a) = PM \dfrac{1 - e^{\alpha a}}{P - Me^{\alpha a}} \\ S^{-1}(A) = \dfrac{1}{\alpha} \ln \left( \dfrac{1 - A/M}{1 - A/P} \right) \end{cases} \tag{III.139}$$

Puisque l'on sait que la fonction ln est le morphisme de groupe entre $(\mathbb{R}_*^+, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$, il suffit de prendre la composition $(S \circ \ln)$ pour passer directement de $(\mathbb{R}_*^+, \times)$ à $(\mathbb{J}, \oplus)$. Notons aussi que la forme (III.139) peut se construire par itération de la loi de morphisme comme dans [DG96a] et ne nécessite pas en toute rigueur l'hypothèse de différentiabilité.

### 3.1.2 Opérateur de dilatation avec taille finie

Nous introduisons la représentation additive des opérateurs de dilatation de taille finie $\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs}$ en faisant porter (III.130) sur les groupes bornés $(\mathbb{U}, \otimes)$ et $(\mathbb{S}, \odot)$. Nous supposons que $\mathbb{U} = ]U_- \ U_+[$ et $\mathbb{S} = ]s_- \ s_+[$.

$$(\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs} U)(s) = U(s \odot \mu) \otimes g(\mu) \tag{III.140}$$

Les champs $U$ et $g$ sont soumis à la loi $\otimes$ tandis que les variables d'échelles $s$ et $\mu$ obéissent à la loi $\odot$. Ces deux lois sont définies indépendamment jusqu'ici. La fonction $g(\mu)$ indique comment l'observation est renormalisée du fait de la dilatation et est analogue donc au terme $\lambda^{-H}$ des dilatations usuelles. Du fait que (III.140) représente un groupe, $g$ vérifie la loi de composition $g(A \odot B) = g(A) \otimes g(B)$ On peut trouver la forme nécessaire de $g(\cdot)$ en utilisant deux fois le morphisme de (III.139), $S_\odot$ pour la loi des variables $\odot$ et $S_\otimes$ pour $\otimes$. On note $\alpha_\odot$ et $\alpha_\otimes$ les constantes de chacun des deux morphimes. Soient deux nombres réels $a$ et $b$. On mène le calcul suivant :

$$gS_\odot(a + b) = g\left[S_\odot(a) \odot S_\odot(b)\right] = gS_\odot(a) \otimes gS_\odot(b) = S_\otimes \left[S_\otimes^{-1} gS_\odot(a) + S_\otimes^{-1} gS_\odot(b)\right]. \tag{III.141}$$

La transformation $S_\otimes^{-1} gS_\odot$ allant de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même est donc un automorphisme de ce groupe. Il est donc égal à l'identité multipliée par une constante que nous appelons $-H$ afin de retrouver (III.130) quand les bornes sont toutes rejetées à l'infini. La renormalisation $g(\mu)$ s'écrit alors comme[11] :

$$g(\mu) = S_\otimes \left(-HS_\odot^{-1}(\mu)\right). \tag{III.142}$$

Les équations (III.140), (III.139) et (III.142) caractérisent l'opérateur de dilatation de taille finie appliqué sur la représentation $U_{\phi(t)}(s) = \ln \phi(t_0 e^s)/\phi_0$ du signal $\phi(t)$. Remarquons que les paramètres $H$ et $\alpha_\odot$ interviennent seulement par leur rapport $(-H/\alpha_\odot)$ dans

[11] Afin de faciliter la comparaison avec les travaux exposés dans [Dub00], nous donnons la correspondance des notations de notre équation avec le tableau 1 de l'article cité : $g(m) = S_\otimes(m)$ ; $m(\mu) = S_\odot^{-1}(\mu)$ ; $\alpha = -H$ et la constante $\beta = \exp(\alpha_\otimes)$.

(III.142) ; nous posons arbitrairement $\alpha_\odot = 1$ pour ne conserver le facteur de renormalisation que dans $H$. Rien n'interdit de passer à une représentation portant directement sur $\phi(t)$. Ce champ est borné en valeurs dans $]\phi_0 e^{U_-}\ \phi_0 e^{U_+}[$ et le paramètre est à valeurs dans $\mathbb{T} = ]t_0 e^{s_-}\ t_0 e^{s_+}[$. Il suffit d'inverser la relation entre $U$ et $\phi$ pour obtenir :

$$(\mathcal{D}^{fs}_{g,\mu}\phi)(t) = \phi_0 \exp\left\{\ln\left(\phi(t_0 e^{\ln(t/t_0)\odot\mu}/\phi_0\right) \otimes g(\mu)\right\} \tag{III.143}$$

Cette écriture est un peu lourde et on préfère utiliser implicitement $U_\phi(s)$ comme grandeur de travail. Elle permet toutefois de s'assurer qu'on retrouve effectivement la dilatation normale quand les bornes sont à l'infini. Dans ce cas $S_\odot$ et $S_\otimes$ sont l'identité sur $\mathbb{R}$ et $g(\mu) = -H\mu$. Par la suite, $(\mathcal{D}^{fs}_{g,\mu}\phi)(t) = e^{-H\mu}\phi(e^\mu t)$ et on a bien $\mathcal{D}^{fs}_{g,\mu} = \mathcal{D}_{H,e^\mu}$.

Il n'existe au final que neuf cas généraux différents (parce que les lois ont un comportement symétrique pour $M$ et$P$), exposés dans [Dub00], d'opérateurs de dilatations. Ils sont le croisement des trois situations pour l'intervalle $\mathbb{S}$ : fini (deux bornes), semi-infini (une seule borne) ou égal à $\mathbb{R}$, avec les trois mêmes situations pour $\mathbb{U}$.

Notons enfin que $\mathcal{D}^{fs}_{g,\mu}$ est un warping au sens de [HTT02] et forme une groupe de transformations agissant dans $(\mathbb{U}, \oplus)$ qui représente $(\mathbb{S}, \otimes)$ puisqu'on a $\mathcal{D}^{fs}_{g\cdot\mu}\mathcal{D}^{fs}_{g,\mu'} = \mathcal{D}^{fs}_{g,\mu\otimes,\mu'}$.

**Invariance d'échelle avec effet de taille finie.** On sait que les lois de puissances, de la forme $\phi(t) = \phi_0(t/t_0)^H$ sont les fonctions déterministes invariantes en échelle. La question est alors posée de trouver les lois qui les généralisent aux effets de taille finie.

Les fonctions $U^{fsi}(s)$ sont dites invariantes en échelle pour des effets de taille finie si elles vérifient la généralisation de l'équation d'invariance par dilatations avec les opérateurs de taille finie :

$$(\mathcal{D}^{fs}_{g,\mu}U^{fsi})(s) = U^{fsi}(s) \tag{III.144}$$

pour tout $\mu$ et un certain $H$. Elles sont donc telles que $U^{fsi}(0) = U^{fsi}(0 \odot \mu) \otimes g(\mu)$ et en inversant l'équation $U^{fsi}(\mu) = U^{fsi}(0) \otimes^{-1} g(\mu)$. Le symbole $\otimes^{-1}$ est là pour l'opération d'inversion[12] de $\otimes$ et on exprime les champs $U^{fsi}$ à invariance d'échelle finie comme :

$$U^{fsi}(\mu) = U^{fsi}(0) \otimes \frac{-g(\mu)}{1 - g(\mu)(1/U_+ + 1/U_-)} \tag{III.145}$$

Un choix conventionnel est de prendre $U^{fsi}(0) = 0$, soit $\phi(t_0) = \phi_0$. Ce n'est pas plus qu'un choix possible parmi d'autres, qui précisent la jauge adoptée pour exprimer la représentation. un certain arbitraire porte même sur le choix des variables $\ln\phi$ et $\ln t$ comme éléments de description et on pourrait appliquer n'importe quelle fonction à ces éléments tant que la fonction choisie constitue un morphisme permettant de garder le lien avec $(\mathbb{R}, +)$ en dernière étape. Le choix général de cette jauge n'est pas entièrement compris [Dub00]. Nous avons cependant montré que pour la variable, les principes généraux pour représenter un signal en échelle nous conduisent à la solution de Baraniuk, donc à $\ln t$ comme description de l'échelle. L'arbitraire est en ce domaine partiellement justifié.

[12] L'inverse existe du fait de la structure de groupe.

**Invariance avec taille finie analysée dans les variables initiales.** En supposant donc que $U^{fsi}(0) = 0$, on peut analyser les lois invariantes par $\mathcal{D}^{fs}_{g,\mu}$. Comme $s_-$ et $s_+$ sont en correspondance avec $\pm\infty$ de $\mathbb{R}$, ces échelles limites vérifient que $s_\pm \odot \mu = s_\pm$ pour tout $\mu$. Comme $U^{fsi}(s_\pm) = U^{fsi}(s_\pm) \otimes g(\mu)$, les seules solutions cohérentes pour $U^{fsi}$ sont que $U^{fsi}(s_\pm)$ prennent par le morphisme $S_\otimes^{-1}$ des valeurs $\infty$. Nous montrons ainsi que $U^{fsi}(s_-) = U_-$ ou $U^{fsi}(s_-) = U_+$, l'autre borne sur le champ étant obtenue pour l'autre borne des échelles.

Regardés en fonction de l'échelle, ces fonctions $U^{fsi}(s)$ présentent une déviation nette par rapport aux lois de puissance. On calcule l'exposant de puissance local comme $\mathrm{d}\ln\phi/\mathrm{d}s$ donc comme :

$$\frac{\mathrm{d}U^{fsi}}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{\mathrm{d}g(s)/\mathrm{d}s}{(1 - g(s)(1/U_+ + 1/U_-))^2}. \tag{III.146}$$

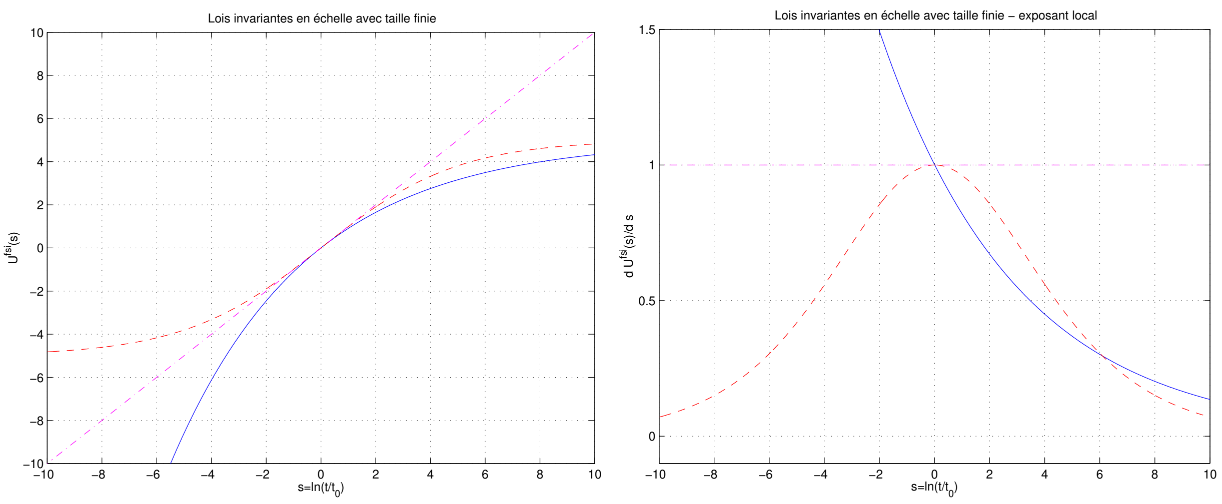



Fig. III.9: Représentation des lois détermistes $H$-ss avec effets de taille finie ; à gauche on a tracé les lois (en variables log-log), à droite les exposants locaux. Les bornes portent seulement sur le champ ; -- pour deux bornes, – pour une seule $P$ et ·– sans limitations.

Les déviations dont elles rendent comptent sont représentées graphiquement sur la figure III.9. Au centre de la figure se trouve le point[13] où la loi apparente se confond avec la loi de puissance qu'imposerait une auto-similarité sans coupures (une droite dans le graphique log-log que l'on montre, dont la pente, ici 1, donne l'exposant de la loi de puissance).

Dubrulle et coll. [Dub00] ont montré comment ces formes sont utiles à l'étude de diverses situations physiques, tandis que Nottale avait interprété ce changement d'exposant apparent comme une brisure en échelle pouvant caractériser le passage d'un comportement classique à un comportement quantique [Not93].

[13] La position de ce point est affaire de convention et de choix de $\phi_0$ et $t_0$. Il n'a pas de signification propre autre.

### 3.1.3 Les cas des champs de signe quelconque

**Le cas des champs de signe quelconque – Loi de groupe.** Le passage à une représentation en $\ln \phi$ oblige à se contenter de grandeurs qui ne changent pas de signe. On peut traiter de manière analogue un champ dont le signe peut être $+$ ou - mais il est nécessaire de compliquer l'approche [DH00] en introduisant une représentation à deux variables, du fait que $(\mathbb{J}, \times)$ ne peut être un groupe multiplicatif quand $0 \in \mathbb{J}$. La représentation à deux états $U_\phi = (A, \theta)$ où $A = \ln |\phi|/\phi_0$ et $\theta$ le signe de $\phi$ admet elle une structure de groupe.

Le signe a directement $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ comme représentation additive. C'est celle que nous prendrons : 0 code le signe $+$, 1 le signe -. La loi sur un intervalle fini pour les représentations à deux éléments est étudiée de manière générale dans [DH00] mais reste sur ce plan général. En particulier jamais n'est exhibée clairement les lois et les comportements utiles non pas au problème de deux éléments quelconques mais des champs définis par un module et un signe.

Nous faisons ici les calculs explicites pour le cas des champs signés afin qu'ils soient utilisables. Les éléments possibles de la représentation sont pour $\theta = 0$, $A \in ]-\infty\ P[$, et pour $\theta = 1$, $A \in ] - \infty\ M[$, avec $M > 0$ et $P > 0$. Nous notons $(\mathbb{J}, \{0, 1\})$ l'ensemble sur lequel nous allons travailler. La loi $\oplus$ pour $(A, \theta)$ tel que $\phi$ est compris entre $-\phi_0 e^M$ et $\phi_0 e^P$ doit vérifier :

$$(A, \theta) \oplus (A', \theta') = \left( \frac{A + A' - aAA' - b(A\theta' + A'\theta) - c\theta\theta'}{1 - dAA' - e\theta\theta'}, \theta + \theta' \right). \tag{III.147}$$

L'ensemble des contraintes suivantes doivent être respectées :

1. (0,0) est l'élément neutre du groupe ;
2. la représentation du zéro pour $\phi$ est $(-\infty, 0)$ ou $(-\infty, 1)$ et est absorbante pour $\oplus$ ; il est nécessaire alors que $d = 0$ ;
3. la loi pour $\theta$ est celle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sans changement ; il faut alors que $e = 0$ ;
4. la loi réduite à $(]\infty\ P[, 0)$ est du type (III.133) avec les bornes indiquées ;
5. propriétés sur les bornes : $(M, 1) \oplus (M, 1) = (P, 0)$ ; $(M, 1) \oplus (P, 0) = (M, 1)$ ; $(P, 0) \oplus (P, 0) = (P, 0)$.

Les dernières propriétés conduisent à un système de trois équations pour fixer $a, b, c$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 2M - aM^2 - 2bM - c \\ M = P + M - aMP - bP \\ P = 2P - aP^2 \end{array} \right. \tag{III.148}$$

La solution de ce système est que $a = 1/P$, $b = 1 - M/P$ et $c = M^2/P - P$ et nous livre la loi de composition recherchée :

$$(A, \theta) \oplus (A', \theta') = \left( A(1 - \theta' + \theta'\frac{M}{P}) + A'(1 - \theta + \theta\frac{M}{P}) - \frac{AA'}{P} + \theta\theta'(P - \frac{M^2}{P}), \theta + \theta' \right). \tag{III.149}$$

Il est immédiat de vérifier que les contraintes annoncées sont bien toutes respectées.

**Le cas des champs de signe quelconque – Morphisme.** Nous notons $S_\pm(a,\theta) = (A,\theta)$ le morphisme allant du groupe additif $(\mathbb{R},+) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$ qui est implicitement représenté ici, dans le groupe $(\mathbb{J} \times \{0,1\}, \otimes)$. Il est donné par :

$$\begin{array}{rcl} S_\pm : \ (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+) & \to & (\mathbb{J} \times \{0,1\}, \otimes) \\ (a,\theta) & \mapsto & S_\pm(a,\theta) = (A,\theta) \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} A = P(1-e^{-\alpha a}) = S_+(a) \text{ si } \theta = 0 \\ A = M - Pe^{-\alpha a} = S_-(a) \text{ si } \theta = 1 \end{array} \right. \end{array} \tag{III.150}$$

*Démonstration* — La restriction de $\oplus$ aux nombres positifs s'écrit $(A,0) \oplus (B,0) = A + B - AB/P$ et la démonstration qui conduisit à (III.139) s'applique telle quelle. Le morphisme restreint aux signes positifs est donc $S_+(a) = P(1-e^{-\alpha a})$. Considérons maintenant la composition d'un nombre positif et d'un négatif :

$$(S_+(a),0) \oplus (S_-(b),1) = \frac{M}{P} S_+(a) + S_-(b) - \frac{S_+(a)S_-(b)}{M} = (S_-(a+b),1) = S_\pm((a+b),1), \tag{III.151}$$

que nous dérivons par rapport à la variable $a$ avant de fixer celle-ci à 0 :

$$\frac{\mathrm{d}S_-(b)}{\mathrm{d}b} = S_+(0) \left( \frac{M}{P} - \frac{S_-(b)}{P} \right). \tag{III.152}$$

L'intégration par séparation des variables dans cette équation permet d'obtenir la forme de $S_-$ en fonction d'une constante $\lambda$. On rappelle que $S'_+(0) = \alpha P$.

$$S_-(b) = M - \lambda e^{-\alpha b}. \tag{III.153}$$

Cette dernière inconnue doit être fixée de façon à ce que la composition de deux nombres négatifs obéisse à la loi $\oplus$ :

$$(S_+(a+b),0) = S_\pm((a,1)+(b,1)) = (S_-(a),1) \oplus (S_-(b),1), \tag{III.154}$$

qui donne explicitement :

$$\begin{aligned} P - Pe^{-\alpha(a+b)} &= \frac{M}{P}(S_-(a)+S_-(b)) - \frac{S_-(a)S_-(b)}{P} + P - \frac{M^2}{P} \\ &= \frac{M}{P}(2M - \lambda(e^{-\alpha a} + e^{-\alpha b})) - 2\frac{M^2}{P} + \frac{M\lambda}{P}(e^{-\alpha a} + e^{-\alpha b}) - \frac{\lambda^2}{P} e^{-\alpha(a+b)} + P \\ &= P - \frac{\lambda^2}{P} e^{-\alpha(a+b)}. \end{aligned} \tag{III.155}$$

Il faut et il suffit de poser $\lambda = P$ pour obtenir la forme du morphisme recherché.

□

**Le cas des champs de signe quelconque – Fonctions invariantes.** L'utilisation de ces résultats permet d'étudier les signaux $\phi(t)$ qui peuvent prendre des valeurs de signe quelconque, sans supposer la même liberté pour le paramètre $t$. Nous nous satisfaisons, comme pour ce qui a trait à l'utilisation de la transformation de Lamperti, d'avoir des signaux définis sur $\mathbb{R}_*^+$. Les opérateurs de dilatation avec taille finie agissent alors à travers une fonction de renormalisation $g$ comme en (III.140) :

$$(\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs}U)(s) = (A(s \odot \mu), \theta) \oplus (g(\mu), \theta_g(\mu)), \tag{III.156}$$

et il faut introduire une fonction de signe $\theta_g(\mu)$ pour la renormalisation. Si on ne cherche pas des effets étranges, le signe restera constant comme il l'est pour le terme $\lambda^{-H}$ des dilatations normales, et on prendra $\theta_g = 0$ par exemple. Il reste :

$$(\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs}U)(s) = (A(s \odot \mu), \theta) \oplus (g(\mu), 0). \tag{III.157}$$

Un calcul identique à (III.141) impose la forme précise que peut adopter $g(\mu)$. La recherhe des champs signés dans $\mathbb{J}$ auto-similaires se conduit ensuite comme en (III.145). Il est à noter que leur signe est imposé par la valeur initiale en $s = 0$.

$$g(\mu) = S_\oplus(-HS_\odot^{-1}(\mu)) \qquad \text{et} \qquad U^{fsi}(\mu) = U^{fsi}(0) \oplus \left(\frac{-g(\mu)}{1 - g(\mu)/P}, 0\right) \tag{III.158}$$

L'étude que nous venons de faire en introduisant le signe du champ observé peut sembler de peu d'utilité puisque les fonctions auto-similaires avec effet de taille finie que nous obtenons ne changent pas de signe. Cependant nous poursuivons par l'étude de processus stochastiques, et ce n'est pas parce qu'un processus vérifie statistiquement l'égalité $(\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs}U)(s) \stackrel{d}{=} U(s)$ qu'il la vérifie pour chacune de ces réalisations, bien au contraire. Les processus de ce type peuvent ainsi passer sans contradiction d'un signe à l'autre et c'est même la situation la plus courante.

### 3.1.4 Dilatations de taille finie et processus stochastiques

**Processus stochastiques auto-similaires avec des effets de taille finie.** La définition naturelle de l'auto-similarité stochastique pour les processus de taille finie est de généraliser l'équation d'invariance en échelle (III.144) aux processus aléatoires en supposant une égalité en lois multi-dimensionnelles.

$$U^{fsi}(s) \stackrel{d}{=} (\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs}U^{fsi})(s) = U(s \odot \mu) \otimes g(\mu). \tag{III.159}$$

N'oublions pas que la fonction $g(\mu)$ est une renormalisation, analogue au $\lambda^{-H}$ des dilatations générales, et que les formes possibles pour $g$ sont contraintes par (III.142). Nous avons rappelé ici la représentation entièrement additive des dilatations de taille finie, qui s'appliquent à la case II', alors que l'on a l'habitude pour les dilatations usuelles de travailler avec le signal direct $\phi(t)$. Dans ce cas les dilatations obéissant aux coupures finies adoptent la représentation donnée en (III.143).

Il faut bien remarquer que les processus stochastiques soumis aux effets de taille finie sont bien particuliers. Leur ensemble de définition est borné par construction. Bien que rien n'empêche d'interpréter a priori le paramètre borné comme un temps dans $\mathbb{R}$ et de supposer que les bornes sont les limites qui entourent les instants où le processus est non nul (ainsi que nous l'avons fait pour l'analyse par $\mathcal{L}_H$ en plongent $\mathbb{R}_*^+$ dans la droite réelle), cette particularité implique quelques subtilités sur les outils d'analyse mathématique employés.

Une situation comme l'étude d'une marche Brownienne fractionnaire entre deux instants, ou pont Brownien, peut trouver une formulation intéressante ici.

L'autre subtilité réside dans l'espace dans lequel les fonctions aléatoires prennent leur valeur. Lui aussi est borné a priori entre $U_-$ et $U_+$ pour les variables logarithmiques. Nous montrons ci-après comment ceci peut être compris comme appliquer une déformation non-linéaire aux lois de probabilité d'un processus générateur à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**Transformation de Lamperti pour les effets de taille finie – Cheminement suivi.** Confrontés à un processus $\{X(t) = \phi(t), t \in \mathbb{T}\}$ qui vérifie l'invariance avec effets de taille finie, nous avons l'idée d'introduire une généralisation de la transformation de Lamperti $\mathcal{L}_H^{fs}$ qui transforme un certain $\{Y(u), u \in \mathbb{R}\}$ en $\phi(t) = X(t)$. La propriété centrale que nous voulons garder est la relation d'équivalence unitaire (II.65) entre la dilatation et la translation, dilatation au sens des bornes finies, $\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs}$. Le tableau III.8 nous guide alors pour construire ce qu'est la transformée de Lamperti pour cette dilatation. Il faut redéfinir les espaces III et IV de sorte que l'action d'une dilatation $\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs}$ sur $\phi(t)$ (ou de façon équivalente $U(s)$) soit une simple translation pour le processus délampertisé.

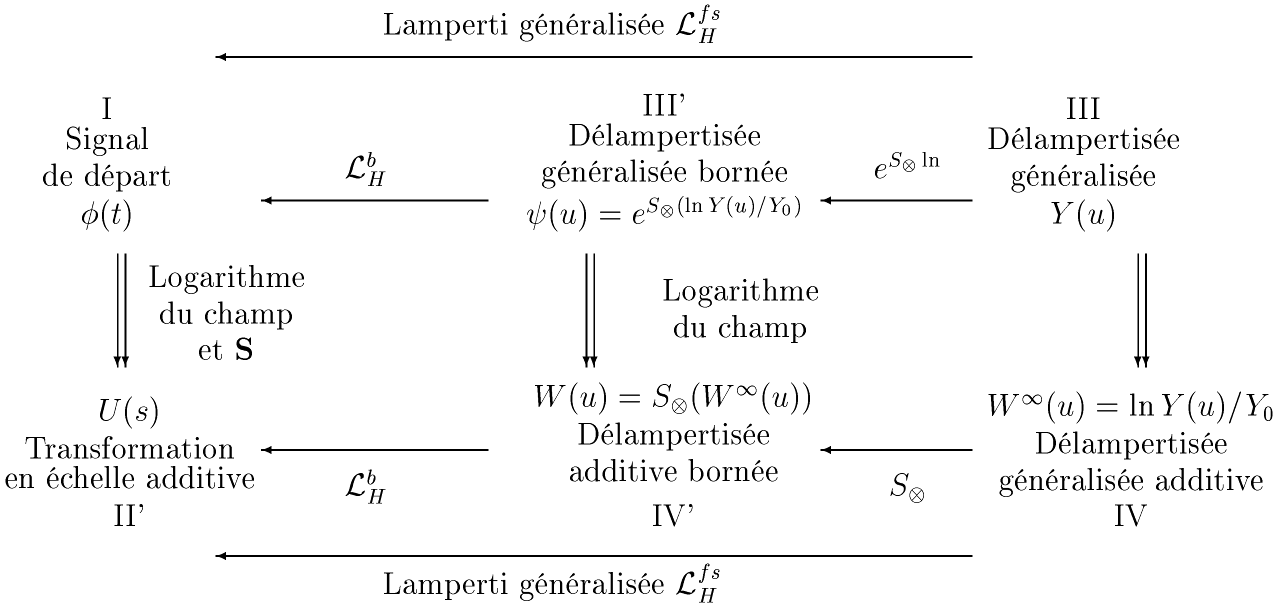



Fig. III.10: Les espaces de représentation de $\phi(t)$ et de sa délampertisée $Y(u)$ ou de sa délampertisée bornée $\phi(u)$ pour les dilatations de taille finie.

Nous nous aiderons des diverses représentations possibles pour le processus et son délampertisé et dessinons en figure III.10 le nouveau tableau qui les résume. À gauche, I et II' (on a masqué II et I') sont les deux façons principales de regarder un processus soumis aux effets de taille finis, donc qui est une fonction aléatoire de $\mathbb{S}$ (ou $\mathbb{T}$) dans $\mathbb{U}$ (ou $\exp \mathbb{U}$). Celles de droite sont les processus délampertisés.

Pour les construire, le raisonnement intuitif est en deux étapes. La première est de trouver la correspondance entre le paramètre $u$ dans $\mathbb{R}$ du champ délampertisé ($Y(u)$ ou $W^\infty(u)$) et la variable $t$ (ou $s$) après transformée de Lamperti qui doit être bornée. La solution est connue comme utilisant le morphisme $S_\odot$ qui va de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{S},\odot)$ et on posera que $s = S_\odot(u)$. La deuxième opération est d'introduire l'équivalent de la renormalisation en temps par $t^H$ qu'impose $\mathcal{L}_H$, obligatoire dès lors que l'on veut mettre en regard des signaux stationnaires et des processus auto-similaires pour un certain indice $H$, ici une loi $g$. La construction par analogie avec la représentation additive des $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ des dilatations de taille finie $\mathcal{D}^{fs}_{g,\mu}$ nous suggère qu'il suffit de rajouter le terme équivalent pour la loi $\otimes$ sur le champ une fois borné, en case III' ou IV'.

C'est à ce moment que se comprend pleinement que nous pouvons introduire deux sortes de transformation qui généralisent celle de Lamperti. Soit nous décidons de ne pas modifier l'espace dans lequel les fonctions aléatoires prennent leur valeur, en particulier les bornes, et la transformée de Lamperti pour des processus bornés sera notée $\mathcal{L}^b_H$ et envoie les processus bornés stationnaires vers les processus $H$-ss avec effet de taille finie : il suffit d'ajouter la renormalisation au changement de paramètre décrit. Soit nous voulons que la transformation généralisée envoie les fonctions aléatoires usuelles (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) vers les processus avec effets de taille finie. Nous appelons celle-ci $\mathcal{L}^{fs}_H$, transformation de Lamperti généralisée et elle ajoute à la précédente un appel à $S_\otimes$ pour envoyer les processus non bornés dans l'espace des processus bornés dans $\mathbb{U}$ (ou $\exp \mathbb{U}$).

**Transformation de Lamperti pour les effets de taille finie – Définition et propriétés.** Les réflexions que nous avons esquissées sont nos motivations pour introduire les définitions ci-dessous pour la transformation de Lamperti. Nous prouvons ensuite leurs propriétés.

Définition III.4: *La transformation de Lamperti généralisée $\mathcal{L}^{fs}_H$ pour les effets de taille finie est définie par son image en représentation I ou II' :*

$$\begin{cases} (\mathcal{L}^{fs}_H W^\infty)(s) = U(s) = S_\otimes\left(W^\infty\left(S_\odot^{-1}(s)\right)\right) \otimes^{-1} g(s) \\ (\mathcal{L}^{fs}_H W^\infty)(t) = \phi(t) = \phi_0 \exp\left[S_\otimes\left(W^\infty\left(S_\odot^{-1}(\ln t/t_0)\right)\right) \otimes^{-1} g(\ln t/t_0)\right]. \end{cases} \tag{III.160}$$

Définition III.5: *La transformation de Lamperti généralisée bornée $\mathcal{L}^b_H$ pour les effets de taille finie est définie par son image en représentation I ou II' :*

$$\begin{cases} (\mathcal{L}^b_H W)(s) = U(s) = W\left(S_\odot^{-1}(s)\right) \otimes^{-1} g(s) \\ (\mathcal{L}^b_H W)(t) = \phi(t) = \phi_0 \exp\left[W\left(S_\odot^{-1}(\ln t/t_0)\right) \otimes^{-1} g(\ln t/t_0)\right] \end{cases} \tag{III.161}$$

Pour la suite du raisonnement nous ferons l'économie des choix de normalisations $t_0$, $Y_0$, $\phi_0$ et $\psi_0$ pour les différentes variables dont on prend le logarithme. Nous savons qu'ils sont arbitraires et qu'un changement d'unité permet d'en disposer. Nous les supposons alors égaux à l'unité pour les calculs qui suivent. On aura en particulier $s = \ln t$.

L'écriture des transformées peut aussi être quelque peu simplifiée en rappelant que $g(s) = S_\otimes(-HS_\odot^{-1}(s))$ et donc que son inverse pour $\otimes$ est $S_\otimes(HS_\odot^{-1}(s))$ :

$$\begin{cases} (\mathcal{L}^b_H W)(s) = U(s) = W\left(S_\odot^{-1}(s)\right) \otimes S_\otimes(HS_\odot^{-1}(s)) \\ (\mathcal{L}^{fs}_H W^\infty)(s) = U(s) = S_\otimes\left[W^\infty\left(S_\odot^{-1}(s)\right) + HS_\odot^{-1}(s)\right]. \end{cases} \tag{III.162}$$

Proposition III.4: *Les deux transformations de Lamperti généralisée $\mathcal{L}_H^{fs}$ et $\mathcal{L}_H^b$ sont inversibles et leur inverse est donné par :*

$$\begin{cases} ({\mathcal{L}_H^b}^{-1}U)(u) = W(u) = U(S_\odot(u)) \otimes S_\otimes(-Hu) \\ ({\mathcal{L}_H^b}^{-1}U)(u) = \psi(u) = \exp\{U(S_\odot(u)) \otimes S_\otimes(-Hu)\} \end{cases} \tag{III.163}$$

$$\begin{cases} ({\mathcal{L}_H^{fs}}^{-1}U)(u) = W^\infty(u) = S_\otimes^{-1}[U(S_\odot(u))] - Hu \\ ({\mathcal{L}_H^{fs}}^{-1}U)(u) = Y(u) = e^{-Hu}\exp\left\{S_\otimes^{-1}[U(S_\odot(u))]\right\}. \end{cases} \tag{III.164}$$

*Démonstration* — La preuve découle directement des structures de groupe de $(\mathbb{U},\otimes)$ et $(\mathbb{S},\odot)$ : il existe un inverse pour ces deux opérations et le morphisme correspondant à chaque groupe est lui aussi inversible. Les transformées de Lamperti inverses sont donc obtenues par $s = S_\odot(u)$. Pour le champ borné, l'inversion de l'égalité implique que $W(u) = U(S_\odot(u)) \otimes g(S_\odot(u))$. L'expression exacte de $g(S_\odot(s)) = S_\otimes(-Hu)$ suffit à proposer les écritures ci-dessus. La transformation généralisée demande de passer en plus par $S_\otimes^{-1}$. Nous vérifions par exemple dans un cas par le calcul direct :

$$\begin{aligned} ({\mathcal{L}_H^b}^{-1}\mathcal{L}_H^b W)(u) &= \left({\mathcal{L}_H^b}^{-1} W(S_\odot^{-1}(s)) \otimes S_\otimes(HS_\odot^{-1}(s))\right)(u) && \text{(III.165)} \\ &= \left\{W(S_\odot^{-1}S_\odot(u)) \otimes S_\otimes(HS_\odot^{-1}S_\odot(u))\right\} \otimes S_\otimes(-Hu) && \text{(III.166)} \\ &= W(u) \otimes (S_\otimes(Hu) \otimes S_\otimes(-Hu)) = W(u). && \text{(III.167)} \end{aligned}$$

□

Il nous reste à prouver l'équivalence centrale entre dilatation avec effets de taille finie sur $U(s)$ (ou $\phi(t)$) et translation simple sur $W(\sigma)$.

Proposition III.5: *Les transformées de Lamperti généralisées garantissent pour tout $\mu$ que :*

$$\begin{cases} {\mathcal{L}_H^{fs}}^{-1}\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs}\mathcal{L}_H^{fs} = \mathcal{S}_{S_\odot^{-1}(\mu)}, \\ {\mathcal{L}_H^{b}}^{-1}\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs}\mathcal{L}_H^{b} = \mathcal{S}_{S_\odot^{-1}(\mu)}, \end{cases} \tag{III.168}$$

*où $\mathcal{S}_{S_\odot^{-1}(\mu)}$ est la translation temporelle sur les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans l'espace borné $\mathbb{U}$ selon le cas.*

*Démonstration* — Il ne reste qu'à rassembler les propriétés exposées au fil de lignes précédentes. Partons d'un signal $W^\infty(u)$ qui est la transformée de Lamperti inverse d'un certain $\phi(t)$ (pouvant être représenté par $U(s)$). Le calcul direct suivant combine les résultats déjà exposés :

$$\begin{aligned} ({\mathcal{L}_H^{fs}}^{-1}\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs}\mathcal{L}_H^{fs}W)(u) &= \left({\mathcal{L}_H^{fs}}^{-1}\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs} W(S_\odot^{-1}(s) \otimes^{-1} g(s)\right)(u) && \text{(III.169)} \\ &= \left({\mathcal{L}_H^{fs}}^{-1} W(S_\odot^{-1}(s\odot\mu)) \otimes^{-1} g(s\odot\mu) \otimes g(\mu)\right)(u) && \text{(III.170)} \\ &= \left({\mathcal{L}_H^{fs}}^{-1} W(S_\odot^{-1}(s\odot\mu)) \otimes^{-1} g(s)\right)(u) && \text{(III.171)} \\ &= W(S_\odot^{-1}(S_\odot(u)\odot\mu)) \otimes^{-1} g(S_\odot(u)) \otimes g(S_\odot(u)) && \text{(III.172)} \\ &= W(S_\odot^{-1}(S_\odot(u)\odot\mu)) = W(u + S_\odot^{-1}(\mu)). && \text{(III.173)} \end{aligned}$$

Cette démonstration, un peu laborieuse du fait des notations que nous devons utiliser, n'est que l'exact analogue de la preuve du théorème de Lamperti que nous avons écrite au chapitre II, partant de l'équation (II.66).

□

Afin de conforter le lecteur nous pouvons compléter ce résultat en prouvant que cette transformation coïncide avec $\mathcal{L}_H$ si les bornes sont rejetée à l'infini. Nous avons montré qu'alors les morphismes $S_\odot$ et $S_\otimes$ sont l'identité et les lois simplement $+$. Donc $W(s) = U(s) + g(s) = U(s) - Hs$ et $W$ se trouve être exactement la délampertisée additive (IV du tableau III.8) de $\phi(t)$.

Corollaire III.1: *Un processus $\{\phi(t), t \in \mathbb{T}\}$ est auto-similaire pour les dilatations avec effets de taille finie $\mathcal{D}^{fs}_{g,\mu}$ d'indice $H$, au sens de (III.159), si et seulement si sa transformée de Lamperti généralisée inverse $Y(u) = ({\mathcal{L}^{fs}_H}^{-1}\phi)(u)$, processus aléatoire de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est stationnaire.*

Corollaire III.2: *Un processus $\{\phi(t), t \in \mathbb{T}\}$ est auto-similaire pour les dilatations avec effets de taille finie $\mathcal{D}^{fs}_{g,\mu}$ d'indice $H$, au sens de (III.159), si et seulement si sa transformée de Lamperti généralisée inverse bornée $\psi(u) = ({\mathcal{L}^{b}_H}^{-1}\phi)(u)$, processus aléatoire de $\mathbb{R}$ à valeurs bornées dans $e^{\mathbb{U}}$ est stationnaire.*

Ces deux résultats découlent sans effort supplémentaire de la proposition précédente.

**Comprendre les processus avec des effets de taille finie.** En se débarassant des intermédiaires des représentations additives (et toujours avec les références d'unité mises à 1), la transformation de Lamperti généralisée pour les dilatations avec taille finie s'écrit :

$$(\mathcal{L}^{fs}_H Y)(t) = \exp\left\{S_\otimes \ln Y(S_\odot^{-1}(\ln t)) \otimes^{-1} g(\ln t)\right\}. \qquad \text{(III.174)}$$

Nous pouvons identifier trois effets successifs de la transformation sur les processus que l'on peut qualifier d'ordinaires $\{Y(u), u \in \mathbb{R}\}$ (ils sont dans le monde stationnaire et ses extensions) que nous allons étudier séparément.

1. Le premier effet est un changement majeur de la variable temporelle, passant de $u$ à $t = e^{S_\odot(u)}$. Pour construire les processus auto-similaires avec effets de taille finie, cette étape revient à introduire une sorte de *warping* temporel $\omega(t) = S_\odot^{-1}(\ln t)$.
2. La transformation envoie ensuite les processus dans l'espace des valeurs bornées ($\mathbb{U}$ après transformation logarithmique). Cette étape est une déformation non-linéaire ponctuelle qui modifie la loi de probabilité du processus en même temps que l'espace dans lequel il prend ses valeurs. C'est ici que nous avons opté pour les notations simplifiées des champs qui restent toujours du même signe ; mais nous savons comment une représentation à deux paramètres et l'extension du morphisme $S_\otimes$ à la forme $S_\pm$ sur ces deux paramètres est possible.
3. Enfin il reste à prendre en compte l'équivalent de la multiplication par $t^H$ décrit par la renormalisation en $g(\ln t)$. Il est plus difficile de l'étudier génériquement puisque qu'il affecte autant les propriétés ponctuelles que temporelles et mélange les précédents. Nous ne mènerons pas ici une étude très générale.

**Le warping : effet sur la structure temporelle.** La modification de l'axe temporel est obtenue comme $\omega(t) = S_{\odot}^{-1}(\ln t)$ à partir des processus stationnaires. Ces transformations temporelles sont tracées en figure III.11 que l'on ait une ou deux limites. Supposons pour l'instant que seules les échelles, et donc le temps, admettent des bornes (et non le champ). Partant d'un processus stationnaire $\{Y(u), u \in \mathbb{R}\}$, la transformation de Lamperti de taille finie conduit à la classe des processus $H$-ss de taille finie $\{X(t), t \in ]e^{s_-}\ e^{s_+}[\}$, telle que :

$$R_X(t, t') = \gamma_Y(\omega(t) - \omega(t')). \tag{III.175}$$

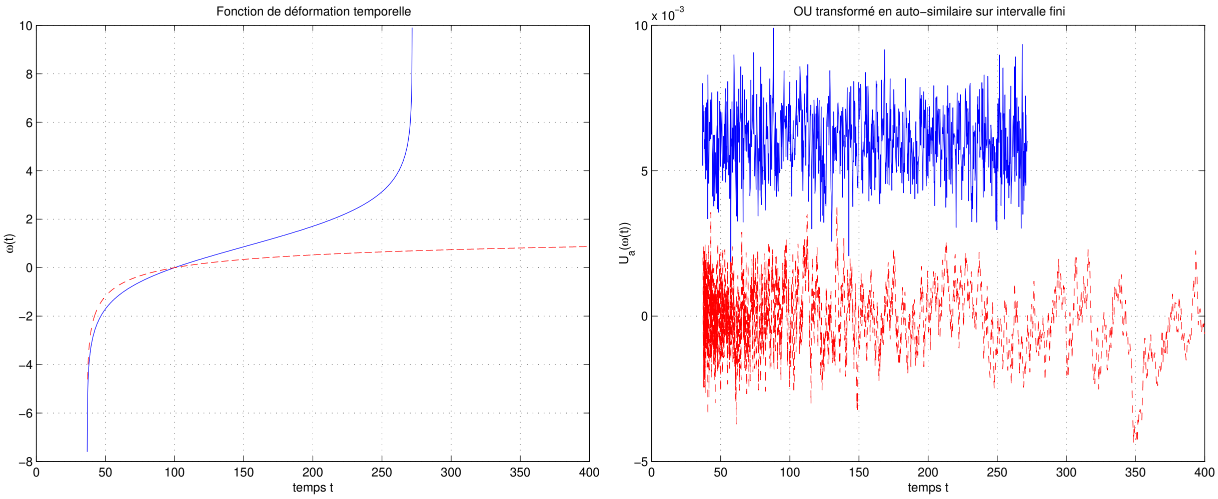



Fig. III.11: À gauche sont tracés les warpings $\omega(t)$ pour une -- et deux – limites. À côté on montre deux exemples d'un processus OU modifiés en temps par $\omega(t)$, selon qu'il y a une -- ou deux bornes – (courbe décalée arbitrairement par une constante).

Nous montrons sur la figure III.11 à droite un simple exemple de l'utilisation de ces transformations du temps sur une réalisation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (définition II.15) . Les processus obtenus sont auto-similaires au sens des échelles bornées pour le paramètre $t$.

L'existence de ces limites infranchissables n'est pas une idée théorique inutilisable en physique. Si nous nous référons à $t$ comme à un temps en général dans le manuscrit, c'est par commodité d'expression (et de confrontation avec diverses constructions théoriques d'analyse des signaux). On peut imaginer deux types de situation au moins où ce paramètre peut rester borné. D'abord quand $t$ n'est pas un temps mais une longueur (paramètre évetuel d'un incrément de vitesse en turbulence [Dub00]) qui admet bien volontiers des limites haute et basse pour un système (et une description physique) particulier. L'autre situation est dans la progression vers un point ou pourquoi pas un temps critique. Les comportements génériques que nous regardons ici ont des applications naturelles à des systèmes statistiques ou par exemple des problèmes de fracture [Dub00].

Ces processus sont ici donnés sous une forme stationnarisable comme dans les travaux de Perrin [PS99] mentionné aux III.1.4.1. Les transformations du temps sont fortement contraintes par la structure de groupe initiale des dilatations avec des effets de taille finie. Ce qui est important alors est la structure corrélative que les processus autorisent. Nous en donnons l'exemple à nouveau pour la transformation de processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU), en figure III.12. La comparaison avec la corrélation du processus OU initial suggère une dépendance corrélative longue, sur l'intervalle en $t$ accessible, du processus $W(\omega(t))$. En soi cela généralise bien le comportement des processus $H$-ss définis sur $\mathbb{R}_*^+$.

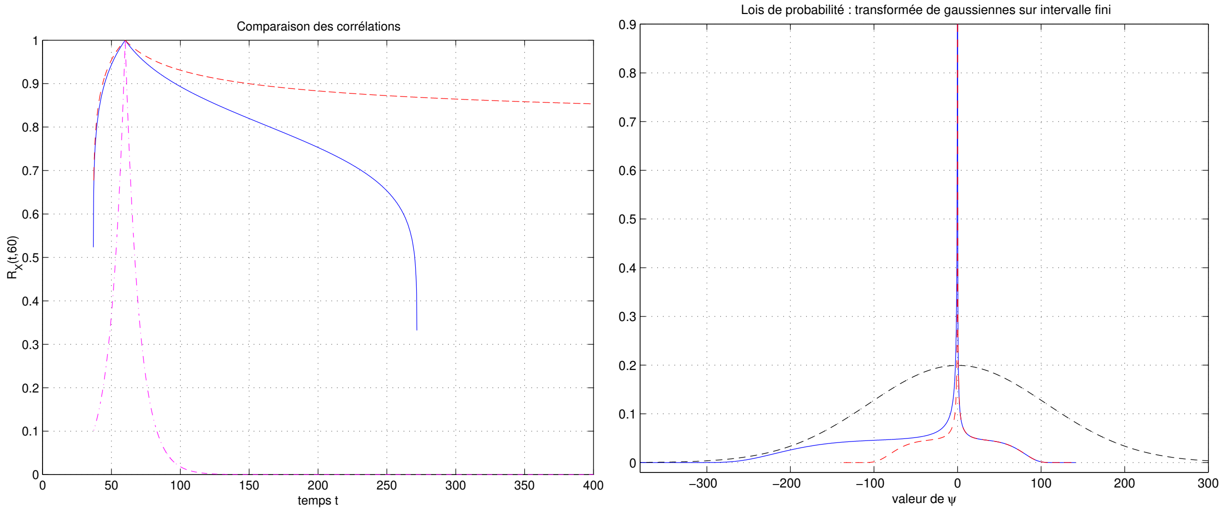



Fig. III.12: À gauche, corrélations des processus OU transformés de la figure III.11 (une borne -- ou deux bornes –), comparées à la corrélation ·— du processus d'OU initial avec $a = 0.2$. À côté, loi de probablité Gaussienne transformée par (III.178) en une loi sur un intervalle fini. L'intervalle est borné aux deux extrémités et la loi est alors symétrique, tracée en -- ; l'intervalle n'est borné que d'un seul côté et conduit à la loi non symétrique en –. On a tracé en trait mixte ·— une gaussienne non bornée pour comparaison.

**La déformation non-linéaire : effet sur la loi de probabilité.** Si maintenant des bornes sont supposées exister sur le champ auto-similaire recherché, il faut d'abord examiner l'effet de passer des lois de probabilité qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, aux lois bornées dans $\mathbb{U}$ (en représentation logarithmique).

Afin de mieux cerner cette déformation seule, nous ne regardons que cet effet sans le warping temporel. Cela consiste donc à étudier le processus borné $\psi(u) = e^{S_\otimes \ln Y(u)}$ en case III de la figure III.10. Nous pouvons en calculer la loi de probabilité à un temps en fonction de celle de $Y(u)$. Nous notons $y$ la valeur prise par $Y$ et $x$ celle prise par $\psi$ ; les lois de probabilité sont $p_Y(y)$ et $p_\psi(x)$ et vérifient :

$$p_\psi(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} p_Y(y(x)), \tag{III.176}$$

où $y(x) = e^{S_\otimes \ln x}$. Nous donnons le résultat du calcul de changement de variable aléatoire dans deux cas.

– Si la variable aléatoire de départ reste positive, la dérivation de la forme du morphisme

$S_\otimes$ dans le cas où $M$ et $P$ sont les bornes sur $\ln Y$ conduit à :

$$p_\psi(x) = \frac{\exp\left\{\dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{1-\ln x/M}{1-\ln x/P}\right\}}{\alpha x}\left(\frac{1}{P-\ln x}-\frac{1}{M-\ln x}\right)p_Y(e^{S_\otimes \ln x}) \qquad \text{(III.177)}$$

– Si la variable aléatoire $Y(u)$ peut prendre des valeurs négatives, alors il faut passer par la représentation à deux états que nous avons décrite si $Y$ a deux bornes, $-e^M$ et $e^P$. Un calcul de dérivation immédiat donne :

$$p_\psi(x,\theta) = \frac{e^{S_\pm^{-1}(\ln|x|,\theta)}}{\alpha x}\frac{1}{U_\pm(\theta)-\ln x}p_Y(e^{S_\pm(\ln x,\theta)}), \qquad \text{(III.178)}$$

où nous avons noté les deux bornes comme $U_\pm(0) = P$ et $U_\pm(1) = M$

La figure III.12 illustre la deuxième situation en montrant des exemples de lois de probabilité que l'on peut obtenir ainsi. Il faut remarquer que le morphisme $S_\pm$ utilisé pour les variables de signe quelconque est dissymétrique pour le comportement vis-à-vis des quantités de signes opposés en son expression et peut conduire à des lois ayant cette dissymétrie. On retrouve un comportement symétrique quand $P = M$.

**La renormalisation de type « $t^H$ ».** Cette seconde partie de la déformation mélange le champ et le paramètre de temps et est ainsi plus difficile à qualifier de façon théorique et générale.

Si l'on se contente de processus qui prennent leurs valeurs dans un espace sans borne $U_-$ et $U_+$ finie, l'effet de l'indice $H$ de la transformation de Lamperti généralisée[14] est décrit simplement à l'équation (III.164) par un $e^{-Hu}$ pour la transformée inverse, donc un $e^{H\omega(t)}$ dans l'autre sens. Nous avons exactement :

$$\phi(t) = e^{H\omega(t)}Y(\omega(t)), \qquad \text{(III.179)}$$

et la fonction de corrélation du processus lampertisé s'écrit si le processus initial est stationnaire :

$$\begin{aligned} R_X(t,t) &= e^{H(\omega(t)+\omega(t'))}\,\gamma_Y(\omega(t)-\omega(t')) && \text{(III.180)}\\ &= e^{HS_\odot^{-1}(\ln t\odot\ln t')}\,\gamma_Y(S_\odot^{-1}(\ln t\odot^{-1}\ln t')) && \text{(III.181)}\end{aligned}$$

Un cas trivial quand $H$ est fixé à 0 peut être écarté. Du fait de la propriété de morphisme $S_\otimes(0) = 0$, le processus obtenu n'est en effet autre que $\phi(t) = W(\ln t/t_0)$. Au changement d'axe des temps près, le processus obtenu a une sorte de stationnarité et partage les particularités des processus 0-ss.

C'est quand $H$ est non nul qu'on obtient alors des comportements plus intéressants. Un exemple de réalisation basée sur un processus d'Ornstein-Uhlenbeck Gaussien est montré. La transformation ramenant à des champs bornés étant non-linéaire, elle impose des déviations importantes à la gaussianité du processus transformé.

[14] Bornée ou non puisqu'alors elles coïncident.

## 3.2 Auto-similarité asymptotique locale

La transformation de Lamperti porte sur les propriétés globales d'un processus comme l'auto-similarité qui impose un même comportement à toutes les échelles et à tout temps (revoir par exemple le II.4.4 pour les mouvements Browniens). Cependant dans de nombreux cas, dont celui des fBm, les propriétés en échelle sont étudiées plutôt par leur effet sur le comportement local du processus, en premier lieu de sa régularité. Une déviation naturelle á étudier de l'invariance en échelle stricte est de proposer une évolution en temps de la régularité locale et définir ainsi une auto-similarité locale.

### 3.2.1 Définition et exemples de l'auto-similarité locale

Avant de présenter la théorie précise qui a été developpée pour définir ce qu'est l'auto-similarité locale asymtotique, initialement proposée dans [BCIJ97] et dont une présentation est rédigée dans [Coh02], nous allons par étapes nous approcher de cette classe générale.

**Processus localement stationnaires.** Une première idée, presque naïve, pour rendre compte de l'évolution de propriétés en échelle au cours du temps, est de partir d'une définition de stationnarité locale et d'en chercher l'image correspondante par la transformation de Lamperti. C'est une proposition que nous avons avancée dans [FBA02] et [BFA02].

Les processus localement stationnaires sont définis par Silverman [Sil57] comme la classe des processus dont la covariance peut être écrite sous la forme (non stationnaire) suivante :

$$R_Y(t,s) = m_Y\left(\frac{t+s}{2}\right)\gamma_Y(t-s). \tag{III.182}$$

$\gamma_Y$ est nécessairement une fonction définie positive et $m_Y(t) \geq 0$. Ces processus sont tels que leur covariance autour d'un instant $t$ se comporte comme $\gamma_Y(\tau)$ pour un retard $\tau$ puisqu'elle s'écrit, astucieusement symétrisée autour de $t$, en $R_Y(t-\tau/2, t+\tau/2) = m_Y(t)\gamma_Y(\tau)$. La fonction $m_Y(t)$ rend compte de fluctuations locales dépendant du temps moyen. Une représentation mixte temps-fréquence renforce l'interprétation que le processus est la modulation au cours du temps d'un processus stationnaire puisque le spectre de Wigner-Ville, par exemple, est :

$$W_Y(t,f) = m_Y(t)\Gamma_Y(f). \tag{III.183}$$

L'équivalent pour les processus caractérisés par leurs propriétés en échelle, après utilisation de $\mathcal{L}_H$, est de regarder les processus de covariance :

$$R_{\mathcal{L}_H Y}(t,s) = m_Y(\ln\sqrt{ts})(ts)^H\gamma_Y\left(\ln\frac{t}{s}\right) \tag{III.184}$$

Cette covariance caractérise des processus auto-similaires avec des modulations ajoutées au cours du temps et dont une représentation temps-échelle se lit :

$$\underline{W}_{\mathcal{L}_H Y}(t,\beta) = m_Y(t)t^{2H}\Xi_{\mathcal{L}_H Y}(\beta). \tag{III.185}$$

Cette notion est une première proposition pour rendre compte de variations dans le temps des propriétés d'invariance en échelle. Cependant elle décrit une modulation en temps d'un processus par ailleurs auto-similaire et les propriétés en échelle ne varient pas autrement. En particulier on ne peut rendre compte d'une possibilité intuitive qui est l'évolution au cours du temps de l'exposant de Hölder de régularité locale $H(t)$ (voir la définition II.26).

**Processus localement auto-similaires.** Afin d'explorer cette idée de permettre l'évolution locale des propriétés de régularité et d'auto-similarité d'un processus avec un exposant $H(t)$, un exemple a été proposé par [PL95] et [BCIJ97] de façon indépendante. C'est le mouvement Brownien multifractionnaire (selon le nom donné dans [PL95]) qui s'exprime en représentation harmonisable par une généralisation de (II.249) :

$$B_{H(t)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2\pi ft} - 1}{|f|^{H(t)+1/2}} \mathrm{d}\xi(f) \tag{III.186}$$

où $\mathrm{d}\xi(f)$ est la mesure spectrale de Wiener et $H : [0, \infty) \to [a, b] \subset (0, 1)$ une fonction de Hölder d'exposant $\beta > 0$. Il a été prouvé dans [Coh99] que ce processus (ainsi écrit dans [BCIJ97]) est bien identique (à une constante près) à la représentation en moyenne mobile de $B_{H(t)}(t)$ (obtenue comme généralisation de (II.250)) que proposait [PL95]. $\mathrm{d}B(s)$ est une mesure de Wiener en temps.

$$B_{H(t)}(t) = \frac{1}{\boldsymbol{\Gamma}(H(t) + 1/2)} \left[ \int_{-\infty}^{t} |t - s|^{H(t)-1/2} \mathrm{d}B(s) - \int_{-\infty}^{0} |-s|^{H(t)-1/2} \mathrm{d}B(s) \right]. \tag{III.187}$$

Trois propriétés principales montrent l'intérêt du mouvement Brownien multifractionnaire (ou mfBm). La fonction de covariance d'un tel processus a été prouvée [ACL00] égale à :

$$R_{B_{H(t)}}(t, s) = \frac{\sigma^2}{2} \left( t^{h(t,s)} + s^{h(t,s)} - |t - s|^{h(t,s)} \right), \tag{III.188}$$

avec $h(t, s) = H(t) + H(s)$. La structure est celle d'un fBm avec une évolution de l'exposant dans le temps. La deuxième propriété concerne la régularité locale du mfBm qui est presque sûrement de régularité $H(t)$ en chaque point ([BCIJ97], [AL99] ou [Coh02]). Enfin on montre que le mfBm est asymptotiquement localement auto-similaire [BCIJ97].

Définition III.6: *Un processus $\{X(t), t > 0\}$ est **asymtotiquement localement auto-similaire** de fonction multifractionnaire $h(t)$ si :*

$$(\forall t > 0) \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left( \frac{X(t + \varepsilon u) - X(t)}{\varepsilon^{h(t)}} \right)_{u \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} a(t) \left( B_H(u) \right)_{u \in \mathbb{R}}, \tag{III.189}$$

*où $a(\cdot)$ est une fonction strictement positive et $B_H$ est un mouvement Brownien fractionnaire d'exposant de Hurst $H = h(t)$.*

Qualitativement le processus ressemble en tout point à un fBm avec une normalisation qui peut fluctuer par la modulation $a(t)$ et surtout cette fois un exposant $h(t)$ qui est autorisé à varier au cours du temps. Il faut ajouter que la définition est donnée en imposant une sorte d'auto-similarité aux accroissements puiqu'elle porte justement sur les accroissements renormalisés du processus $X(t)$ autour de l'instant $t$ (cela permet de s'affranchir du problème de divergence infrarouge autour de $t$). Enfin cette définition s'adapte sans difficulté à un processus de paramètre $t$ ou $u$ dans $\mathbb{R}^d$ où $d \in \mathbb{N}$ [Coh02].

### 3.2.2 Délampertisation des processus localement auto-similaires

Bien que $\mathcal{L}_H$ ait été construite pour les processus invariants en échelle avec un exposant $H$ fixé, global pour tout le processus, nous montrons ici comment assouplir cette contrainte et étudier la déviation à l'auto-similarité supposant un $H(t)$.

**Mouvement Brownien multifractionnaire.** À l'aide de la relation (II.95), le mfBm délampertisé avec un exposant $H \in ]0\ 1[$, noté $Y_H(t) = (\mathcal{L}_H{}^{-1} B_{H(t)})(t)$, a pour covariance :

$$R_{Y_H}\left(t+\frac{\tau}{2}, t-\frac{\tau}{2}\right) = \sigma^2 e^{(\eta(t,\tau)-2H)t}\left(\cosh[\eta(t,\tau)|\tau|/2] - \frac{1}{2}[2\sinh(|\tau|/2)]^{\eta(t,\tau)}\right), \quad \text{(III.190)}$$

avec

$$\eta(t,\tau) = h(\exp(t+\tau/2), \exp(t-\tau/2)) = H\left(e^{t+\tau/2}\right) + H\left(e^{t-\tau/2}\right). \quad \text{(III.191)}$$

La covariance n'est pas stationnaire mais adopte une structure proche de celle de l'Ornstein-Uhlenbeck généralisé qui est le délampertisé d'un fBm et dont la corrélation est donnée en (II.244).

Pour un processus tel que l'exposant évolue en temps en $H(t) = H + \alpha \log t$, on aura $\eta(t,\tau) = 2(H + \alpha t)$. Cette forme peut provenir d'un développement local en temps de la fonction multifractionnaire $H(t)$ du mfBm. Le processus délampertisé localement avec l'exposant $H(e^t)$ est alors :

$$\tilde{Y}(t) = (\mathcal{L}^{-1}_{H(e^t)} B_{H(t)})(t) = e^{-(H+\alpha t)t}\, B_{H(e^t)}(e^t) \quad \text{(III.192)}$$

et sa covariance se trouve être :

$$R_{\tilde{Y}}\left(t+\frac{\tau}{2}, t-\frac{\tau}{2}\right) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2/2}\left(\cosh[(H+\alpha t)|\tau|] - \frac{1}{2}[2\sinh(|\tau|/2)]^{2(H+\alpha t)}\right). \quad \text{(III.193)}$$

Cette expression est identique à (II.244) en remplaçant $H$ par $H(e^t) = H + \alpha t$ qui est le délampertisé de la fonction multifractionnaire. Le mfBm dont cette fonction admet une approximation en développement logarithmique $H(t) = H + \alpha \log t$ admet donc un générateur par délampertisation locale, ou non stationnaire, dont une approximation est un gOU non stationnaire d'exposant local $H + \alpha t$.

Si on veut rester un peu plus général, la covariance de $\tilde{Y}(t)$ sans supposer une structure spécifique de $H(t)$ ni un développement local logarithmique, est égale à :

$$R_{\tilde{Y}}\left(t+\frac{\tau}{2}, t-\frac{\tau}{2}\right) = \sigma^2 e^{-\tau\mu(t,\tau)/2}\left(\cosh[(H+\alpha t)|\tau|] - \frac{1}{2}[2\sinh(|\tau|/2)]^{2(H+\alpha t)}\right), \quad \text{(III.194)}$$

en ayant introduit l'écriture :

$$\mu(t,\tau) = H\left(e^{t+\tau/2}\right) - H\left(e^{t-\tau/2}\right). \quad \text{(III.195)}$$

On peut obtenir de cette manière le comportement local du générateur délampertisé avec un exposant instantané du mfBm de fonction multifractionnaire quelconque.

**Transformation de Lamperti évoluant dans le temps.** Les calculs précédents ne portent que sur la struture de corrélation spécifique à l'exemple qu'est le mfBm. Nous pouvons généraliser un peu en donnant les propriétés de délampertisation non stationnaire par $\mathcal{L}_{H(t)}^{-1}$ de processus qui sont en un certain sens localement auto-similaires mais pas selon la définition III.6. Nous partons de processus $\{X_{h(t)}(t), t > 0\}$ tels que :

$$(\forall t > 0) \quad \lim_{\varepsilon \to 1^+} \left( \frac{X_{h(t)}(\varepsilon \lambda t) - X_{h(t)}(t)}{\varepsilon^{h(t)}} \right)_{\lambda \in \mathbb{R}_*^+} \stackrel{d}{=} a(t) \left( H\mathrm{ss}(\lambda) \right)_{\lambda \in \mathbb{R}_*^+}, \tag{III.196}$$

où l'on note $H$ss un processus auto-similaire d'exposant $H = h(t)$. C'est une forme modifiée de la définition III.6 qui passe par les accroissements multiplicatifs et évite de travailler avec les accroissements usuels qui ne sont pas toujours stationnaires pour les processus $H$-ss. De plus on généralise le comportement en permettant au processus de ressembler à n'importe quel processus auto-similaire et non spécifiquement au fBm.

Leur transformée de Lamperti évoluant au fil du temps est donnée comme en (III.192) par :

$$\tilde{Y}(t) = \left( \mathcal{L}_{H(e^t)}^{-1} X_{h(t)} \right)(t), \tag{III.197}$$

et elle vérifie alors après un calcul direct que :

$$(\forall t > 0) \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left( \tilde{Y}(\ln t + y + \varepsilon) - \tilde{Y}(\ln t) \right)_{y \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} t^{-h(t)} a(t) \left( \mathrm{St}_{h(t)}(y) \right)_{y \in \mathbb{R}}. \tag{III.198}$$

Ici $\{\mathrm{St}_{h(t)}(y), y \in \mathbb{R}\}$ désigne un processus stationnaire qui est le délampertisé du $H\mathrm{ss}(t)$ qui sert à définir $X_{h(t)}(t)$. La forme du processus délampertisé $\tilde{Y}(t)$ entre dans un cadre plus général que les processus localement stationnaires de Silverman rappelés en (III.182) puisque la fonction de corrélation que l'on va obtenir s'écrit par un développement local autour d'un instant $s$ comme :

$$R_{\tilde{Y}}(s - \tau/2, s + \tau/2) = \left| (\mathcal{L}_{h(t)}^{-1} a)(s) \right|^2 \gamma_{\mathrm{St}_{h(t)}}(\tau). \tag{III.199}$$

La fonction de corrélation $\gamma_{\mathrm{St}_{h(t)}}(\cdot)$ qui intervient dans (III.199) est ici autorisée à évoluer au cours du temps comme l'instant moyen auquel la covariance est observée, du fait du $h(t)$ qui joue sur le processus stationnaire auquel $\tilde{Y}$ ressemble localement. C'est la situation que nous avons pour le mfBm.

**Transformation de Lamperti locale.** Si on préfère s'en tenir à la définition III.6 exacte des processus localement asymptotiquement auto-similaires (ou **lass**) qui repose sur une ressemblance locale des accroissements à ceux du fBm, nous devons introduire une transformation de Lamperti inverse locale autour de $t$. Nous la définissons autour de $t$ et pour $H = h(t)$ comme :

$$\tilde{Y}(s) = e^{-Hs} \left( X(e^s + t) - X(t) \right). \tag{III.200}$$

La définition de $\tilde{Y}(s)$ peut être réécrite comme :

$$X(\varepsilon u + t) - X(t) = (\varepsilon u)^H \tilde{Y}(\ln \varepsilon u), \tag{III.201}$$

qui conduit à l'aide de la définition III.6, si $\{X(t), t > 0\}$ est **lass**, à la propriété suivante pour $\tilde{Y}$ :

$$(\forall t > 0) \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \tilde{Y}(s + \ln \varepsilon)_{s\in\mathbb{R}} \stackrel{d}{=} a(t) \left(e^{-Hs} B_H(e^s)\right)_{s\in\mathbb{R}} \stackrel{d}{=} a(t) \left(\mathrm{gOU}_H(s)\right)_{s\in\mathbb{R}}, \tag{III.202}$$

où $\mathrm{gOU}_H(s)$ désigne le processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé d'exposant $H = h(t)$. Par un développement asymptotique local, la partie $a(t)$ contribue à la covariance comme une modulation au temps milieu et l'évolution en fonction du retard est principalement donnée par la fonction de corrélation du gOU. Nous pouvons écrire, quand $\tau \to 0^+$ :

$$R_{\tilde{Y}}(t - \tau/2, t + \tau/2) \simeq |a(t)|^2 R_{\mathrm{gOU}_{h(t)}}(\tau), \tag{III.203}$$

qui prend comme au paragraphe suivant une forme un peu plus générale que (III.182).

L'équation (III.200) est une forme locale autour de l'instant $t$ de la transformation de Lamperti ; son inverse est simplement donnée par :

$$X(t + u) = X(t) + u^H \tilde{Y}(\ln u), \tag{III.204}$$

et elle est la déformation utile de $\mathcal{L}_H$ pour étudier ici les propriétés de **lass** en regard avec une version de ressemblance locale avec les gOU. Nous pouvons même élargir la correspondance impliquée par cette transformée de Lamperti locale. Étant donné un processus $\{X(t), t > 0\}$ qui serait localement asymtotiquement auto-similaire en un sens plus large tel qu'il ressemble localement à un processus $H$-ss qui n'est pas forcément un fBm, avec $H = h(t)$ :

$$(\forall t > 0) \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left( \frac{X(t + \varepsilon u) - X(t)}{\varepsilon^{h(u)}} \right)_{u\in\mathbb{R}} \stackrel{d}{=} a(t) \left(H\mathrm{ss}(u)\right)_{u\in\mathbb{R}}, \tag{III.205}$$

où l'on note $H$ss pour ce processus auto-similaire. Alors le délampertisé local autour de temps avec l'exposant $H = h(t)$ vérifie :

$$(\forall t > 0) \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \tilde{Y}(s + \ln \varepsilon)_{s\in\mathbb{R}} \stackrel{d}{=} a(t) \left( (\mathcal{L}_H{}^{-1} H\mathrm{ss})(s) \right)_{s\in\mathbb{R}}. \tag{III.206}$$

Le défaut de cette approche est que l'on dispose d'une version de la transformée à chaque instant et, même si on peut en trouver une utilité pour la description théorique du processus, la transformation de Lamperti évoluant au cours du temps semble plus à même d'être employée en pratique.

## 4 Conclusion : transformations à la Lamperti pour les invariances brisées

Nous avons introduit les possibilités d'extension de la transformation de Lamperti pour étudier des situations où l'invariance en échelle n'est pas exacte. Selon la manière dont la symétrie est brisée, il a été proposé des solutions de nature différente.

• Si on ne sait pas spécifier la brisure comme de symétrie comme laissant la place à une nouveau groupe de transformation sous l'action duquel le processus reste invariant, la transposition des méthodes non paramétriques d'analyse conjointes temps-fréquence (ou pour d'autres couples de grandeurs physiques) nous a conduit à un ensemble de représentations en échelle de Mellin, ou mixtes temps-échelle de Mellin, aptes à décrire les déviations à l'invariance d'échelle.

• Si la brisure de symétrie s'exprime comme l'invariance sous un nouveau groupe, une idée est d'adapter la transformation de Lamperti, de la généraliser de telle sorte qu'elle serve à nouveau d'outil de stationnarisation des processus et nous permette alors de reporter les méthodes d'analyse stationnaire usuelle aux processus ayant cette symétrie brisée.

Les idées clefs sont donc celles de stationnarisation des processus et aussi d'étude des propriétés en terme de groupes de transformation. C'est à ce titre que nous avons longuement détaillé comme le comportement de signaux sous les opérateurs représentant des transformations ou des grandeurs physiques permettent de construire des outils non stationnaires.

Nous avons seulement esquissé le problème pratique de la mise en œuvre numérique des outils que l'on construit ainsi. La remarque importante pour cet aspect est qu'il faut adapter la programmation numérique à chaque implémentation envisagés. Les nombreux travaux existants au sujet du « temps-fréquence » habituel combinés aux remarques du II.5 sur la transformation de Mellin discrète et l'utilisation numérique de la transformation de Lamperti sont des guides utiles pour ce faire.

# IV. Invariance d'échelle discrète

*Nous avons déjà mentionné ici ou là une brisure particulière de la symétrie par dilatations appelée l'invariance en échelle discrète, et allons l'examiner dans ce nouveau chapitre. Nous noterons en abrégé **DSI** pour en parler, selon le terme anglais Discrete Scale Invariance.*

*Nous esquissons d'abord le cadre général des travaux existants sur cette invariance en échelle discrète en IV-1, avant d'en développer l'étude par la transformation de Lamperti en IV-2, selon les outils et les concepts que nous venons de proposer au chapitre précédent. La troisième partie est consacrée à l'étude plus détaillée que nous avons menée des problèmes (pratiques et numériques) de synthèse de séquences à DSI et de leur analyse.*

## 1 L'invariance d'échelle discrète déterministe ou des fractales

La notion d'invariance en échelle discrète a été remise au goût du jour par D. Sornette et collaborateurs (voir par exemple [SS95, OSGC96, SS96, SSS96, Sor97] ou l'article de revue [Sor98a]) quand ils ont d'une part prouvé que cette brisure de symétrie pouvait exister spontanément, et qu'ils ont exhibé d'autre part des problèmes physiques où l'invariance en échelle semblait discrète.

Notre approche générale étant celle de l'étude de fonctions aléatoires, nous proposerons en 2.1 une définition structurée de ce qu'est la DSI stochastique. Cependant l'idée d'invariance seulement sous un facteur d'échelle privilégié est plus générale et nous passons en revue quelques domaines où on la trouve.

### 1.1 Lacunarité des fractales

De même que l'intérêt pour les propriétés d'invariance en échelle connut un regain avec l'idée de fractale [Man82], les exemples les plus simples de DSI sont fournis dès les premiers traités sur les fractales [Fal90, Tri93].

L'ensemble triadique de Cantor est formé par itération d'une procédure qui utilise des dilatations d'un facteur $1/3$. La figure IV.1 montre les étapes successives où partant d'un segment initial, on enlève de son centre la partie centrale pour laisser deux segments qui sont les dilatés de facteur $1/3$ du premier, et on recommence sur chaque segment. L'ensemble de Cantor est connu pour être un exemple d'ensemble fractal, de dimension non entière (au sens de Hausdorff) $D = \ln 2/\ln 3$. En fait il n'est strictement invariant que par les dilatations de facteur $3^{-n}$ où $n \in \mathbb{N}$ (en adoptant la généralisation de l'ensemble pour le définir sur la droite réelle [BI02], on peut prendre $n \in \mathbb{Z}$). C'est ce qu'on appelle l'invariance en échelle discrète, que nous avions rencontrée brièvement au III.1.3.3 comme un exemple de brisure de l'invariance en échelle : il existe un rapport entre échelle privilégié tel que l'invariance soit vraie seulement pour l'ensemble discret des dilatations par ce facteur d'échelle ou ses puissances.

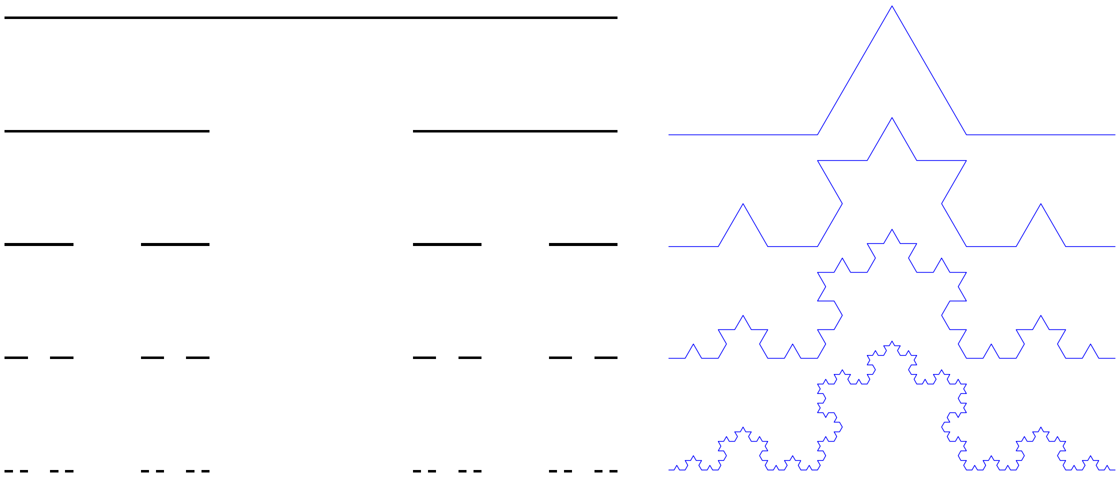


Fig. IV.1: Construction d'un ensemble de Cantor triadique à gauche et d'un côté du flocon de von Koch à droite. Ces deux figures fractales sont bâties sur un rapport d'échelle privilégie de 1/3 et sont alors lacunaires ou à DSI.

La majorité des constructions fractales qui reposent sur des itérations conduisent à des figures ayant la propriété de DSI de préférence à celle d'invariance en échelle continue. Le flocon de Von Koch (figure IV.1), le tapis de Sierpinski, et bien d'autres, en font partie. La construction assez générale de fractales déterministes ou aléatoires sous la procédure des IFS (systèmes de fonctions itérées) repose sur une étape de renormalisation par un groupe précis (qui peut avoir un paramètre aléatoire) d'une figure initiale. La solution obtenue comme point fixe du groupe de renormalisation a alors une sorte de DSI comme symétrie, où les dilatations à considérer découlent du groupe choisi au départ [Fal86, Dao96].

## 1.2 Des observations en physique statistique

Dès le début des années 80, de nombreux physiciens ont posé le problème de la mesure des propriété d'un système qui relèvent d'un comportement « fractal », nous dirions plutôt auto-similaire ou invariant en échelle maintenant. Les premiers essais sur des modèles comme des ensembles géométriques ou des mesures fractales ont rapidement révélé une possibilité de DSI.

**DSI et oscillations log-périodiques.** Dès les tentatives initiales de mesures des propriétés en échelle (par les dimensions généralisées [GP83]), l'existence de la DSI fut signalée, par exemple dans [BP84b], [BP84a] et [SFS86], sous le nom de *lacunarité*. Sa signature est l'existence d'*oscillations log-périodiques* dans les propriétés statistiques du système. Nous donnons un premier argument à ce sujet.

Les propriétés de dimension non entière d'un signal reposent sur son comportement lors d'un décompte de l'espace qu'il occupe. La dimension fractale $D$ peut être obtenue comme limite à $\varepsilon$ tendant vers 0 de $\ln N(\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon)$ si $N(\varepsilon)$ est le nombre de « boîtes » de taille $\varepsilon$ nécessaires pour recouvrir le système. Dans le cas des fractales lacunaires, $N(\varepsilon)$ est obtenu par une renormalisation simple pour le facteur en échelle privilégié seulement (et cette renormalisation donne justement la dimension). Il existe alors une fonction $f$ telle que $N(\varepsilon) = \varepsilon^D f(\varepsilon)$, et qui vérifie pour le facteur d'échelle privilégié $\lambda$ que $f(\lambda\varepsilon) = f(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon$. Ainsi $u \to f(e^u)$ est une fonction périodique de période $\ln\lambda$ et on s'attend à obtenir des oscillations périodiques pour la variable $\ln\varepsilon$.

**La DSI déterministe de Sornette et co-auteurs.** Pour développer un peu, les propriétés statistiques générales (y compris les dimensions généralisées) vont vérifier aussi cette invariance sous l'effet des dilatations de facteur $\lambda$. Leur comportement général est ainsi celui des solutions *déterministes* de ce type d'invariance en échelle [SS95]. Quand elle est continue, ce sont des lois de puissances (exactes tant que des bornes physiques ne sont pas prises en compte), alors que si seule la DSI est supposée, l'équation $g(t) = \lambda^{-H} g(\lambda t)$ résolue pour des fonctions conduit à des solutions $t^\gamma$ avec $\lambda^\gamma = \lambda^H$. La solution générale dans $\mathbb{C}$ est que $\gamma = H + i2\pi n/\ln\lambda$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Des fonctions log-périodiques se retrouvent être la signature majeure de la DSI, qui sont les fonctions de Mellin : les grandeurs statistiques de la DSI aléatoire vont être décomposées sur cette base.

Dans ses travaux qui remettent à l'ordre du jour la DSI en physique, D. Sornette propose une interprétation imagée intéressante de ce que sont ces oscillations. Puisque pour un ensemble fractal la mesure de la dimension conduit à une fonction $\varepsilon^D P(\ln\varepsilon)$ où $P$ est un fonction périodique de période $\ln\lambda$, on peut développer $P$ sur la base de Fourier (ou $P \circ \ln$ sur la base de Mellin) et $\varepsilon^D P(\ln\varepsilon) = \sum_n a_n \varepsilon^{D+i2\pi n/\ln\lambda}$. En plongeant ceci dans la définition de la dimension de capacité, il est proposé d'interpréter les $(D + i2\pi n/\ln\lambda)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ qui apparaissent comme exposants des lois de puissance comme un *spectre de dimensions* complexes du système [Sor98a]. C'est la notion de *spectre* de comportements qui fondamentalement sont liés à des chirps, ou des singularités oscillantes, qui nous apparaît ici importante.

**DSI et ondelettes.** Un autre outil qui se révèle puissant pour l'analyse des auto-similarités est la transformation en ondelettes, qui peut sonder les comportements le long de l'échelle de signaux mesurés. On trouve la remarque dans [AGH87], [AGK87] ou [Hol88], de l'existence d'oscillations en analysant par exemple les mesures de Cantor. Les théorèmes donnant les propriétés des ondelettes vis-à-vis de l'invariance en échelle tiennent compte de la lacunarité [Hol88, GV89].

Le passage à des études sur des systèmes physiques avec les ondelettes [Abr97], [AAB$^+$95] ou les dimensions généralisées [GP83] a plutôt gommé cet aspect en mettant l'accent sur l'invariance en échelle continue exacte. Il en est resté cependant la remarque que la possibilité de DSI induit des difficultés pour la mesure des exposants de singularité d'un processus puisque les oscillations (de phase initiale variable) distordent légèrement les lois de puissance, mais suffisamment pour perturber l'estimation [BP84b, BP84a, SFS86], ou encore [AGH87, AM94, AAB$^+$95].

**DSI et analyse de Mellin.** Parallèlement, tout un ensemble de travaux cherchait à caractériser avec précision les propriétés d'invariance en échelle y compris les oscillations log-périodiques en utilisant l'outil naturel pour cela : la transformation de Mellin. L'observation initiale est l'existence de corrections log-périodiques dans certaines études de systèmes critiques [DDI83, DIL84].

Au centre de ces études réside le fait que, étant choisie une manière de mesurer les propriétés statistiques d'un système avec une invariance en échelle (pas forcément exacte) – au rang desquelles sont envisagées les fonctions de corrélation [DDI83, DIL84, BSTV87, BFS+87], les dimensions de corrélations généralisées [BFS+87, FTV89], le lien avec les décompositions en ondelette, éventuellement intégrées [GV92a, GV92b, OTT93], les théories de potentiel (voir [Fal90]) et les intégrales en énergie [BFS+87, BPTV88, FTV89, Vai91, ST97] qui en découlent – il existe alors une manière d'employer une transformation de Mellin de variable complexe reliée aux grandeurs de l'estimation qui contient dans ses pôles l'information sur l'invariance en échelle discrète du système. C'est à nouveau un *spectre de singularité* qui est obtenu, par exemple le spectre dit multi-lacunaire de [FTV89], et les pôles donnent dans l'inversion de la transformation de Mellin les comportements log-périodiques des systèmes.

Nous montrerons en 2.6 que les analyses qu'ils proposent entrent dans le cadre des développements au-delà du $H$-ss que nous proposions au III quand on les adapte à la DSI. Ces travaux nous apparaissent importants et assez généraux puisqu'ils ne se limitent en fait pas à la DSI stricte mais pourraient rendre compte de propriétés plus générales de systèmes déviant de l'auto-similarité exacte, assez proches de ce que nous avons étudié.

## 1.3 Arguments pour la DSI en physique

Le grand mérite des travaux de D. Sornette, H. Saleur et collaborateurs est d'avoir montré en quoi les corrections log-périodiques et la DSI pouvaient être pertinentes en physique. Nous résumons les arguments proposés en faveur de l'existence de la DSI en pour des systèmes physiques dans différents articles dont on peut trouver des références plus étendues dans [Sor98a] pour les plus anciens ou plus récemment dans [Sor00].

**Systèmes construits hiérarchiquement.** Différents mécanismes ont été dégagés comme pouvant provoquer une brisure de symétrie amenant de la DSI dans un système. L'existence d'une grandeur caractéristique dans les propriétés d'invariance (comme le pas d'un réseau de définition d'un système critique non continu) [SS96] ou mieux dans une construction hiérarchique du système (que ce soit par l'intermédiaire d'étapes de renormalisation, l'existence d'une structure en arbre sous-jacente, un comportement de récurrence discrète comme dans les transitions vers le chaos) [AFSS95, SS95], laisse souvent émerger une invariance en échelle discrète et sa signature en oscillations log-périodiques.

**Instabilités et cascades.** L'évolution vers un point critique ou l'existence d'un phénomène de croissance [SJA+96] ou de cascade [ZS02a, Sor98b], même sans hiérarchie pré-imposée, relève souvent de la DSI car les interactions non-linéaires entre les différents modes stables et instables peuvent favoriser l'émergence d'oscillations autrement instables [SS96, JSB99, SI02, IS01]. C'est aussi le mécanisme proposé par Sornette et coll. pour expliquer les évidences de

DSI qu'ils montrent dans les problèmes de rupture (en particulier en géophysique pour les tremblements de terre) [SS95, JSW$^+$96, SSS96, HOSS97], pour la croissance de structures quasi-fractales (agrégats) [SJA$^+$96, JS98], mais aussi quand existent des points de rupture à l'image des krachs dans les systèmes financiers [JS97, JS00, SJ01].

**Problèmes non locaux et/ou désordonnés.** Un autre argument est bien plus étayé théoriquement et montre que la DSI et son cortège de corrections log-périodiques sont possibles et fréquents dans les systèmes décrits par des théories de champ non unitaires [SS96]. Un champ non unitaire correspond à avoir des observables (et un Hamiltonien) qui ne sont pas contraints à être hermitiens et admettent alors des exposants critiques ou des fonctions de corrélations à valeur dans $\mathbb{C}$ ; ce sont les dimensions complexes qui rendent la DSI manifeste. En quoi ces théories décrivent des réalités physiques alors que jusqu'ici nous avons argumenté que les observables naturelles sont hermitiennes ? Il est montré dans [SS96] que ces théories peuvent représenter des formulations locales de problèmes non locaux comme la percolation [SS98] ou l'étude de polymères. Des situations de désordre fort conduisent aussi à de telles théories quand le désordre important de certains points commande la dynamique de lieux distants. Enfin toute situation hétérogène, intermittente, ou encore fondée sur des événements ponctuels (comme les microfractures) pourraient relever de ce mécanisme [OSGC96, LS00].

## 1.4 Analyse et estimation de la DSI

**Les approches initiales.** C'est à l'entreprise de mise en évidence directe de DSI dans des données expérimentales que se sont attachés Sornette et coll. par la suite. Nous citons ici les références d'un ensemble de situations analysées et d'outils d'analyse de signal utilisées alors.

La méthode initiale qui ne demande pas grand effort est l'ajustement aux données d'un modèle simple incorporant la DSI : $u^D(a_0 + a_1 \cos(2\pi \ln u / \ln \lambda))$ si $u$ est le paramètre des données, $D$ l'exposant principal de la loi de puissance et $\lambda$ le facteur d'échelle privilégié [SS95, OSGC96, JSW$^+$96]. Ce modèle simplifié regroupe les premiers termes en fait d'une décomposition en série de Mellin. Un avantage est que l'ajustement par DSI quand elle existe est plus robuste que par une loi de puissance ; le problème est alors d'être certain que la DSI est la propriété cherchée – utiliser ce modèle sans que la DSI existe dans le système conduirait à des interprétations fausses.

Un développement de ce modèle pour répondre à la question d'existence de DSI dans un système est de chercher par une analyse spectrale l'existence de périodicitié dans les données. Comme les situations envisagées ici se limitent à des données avec peu de points (soit du fait de mesures espacées, soit parce que l'analyse porte sur des quantités intégrées), éventuellement irrégulièrement espacés, le périodogramme de Lomb est adapté au problème [SJA$^+$96, HOSS97].

**Deux obstacles pratiques.** Bien que les résultats semblent en faveur de l'existence de DSI dans les systèmes étudiés, deux obstacles perturbent la conclusion définitive. Le premier est que quand on combine une analyse de type passe-bas (comme le recours à une quantité intégrée) avec la recherche de périodicité logarithmique ajoutée à une loi de puissance (plutôt de type passe-haut car fondée sur le comportement des dérivées), la structure la plus probable d'un bruit blanc génère comme artefact de mesure une log-périodicité à basse fréquence. Elle a le mauvais goût de se confondre en position et en amplitude avec les pics recherchés comme signature de la DSI... Les analyses et les pics qu'elles décèlent doivent alors être comparées statistiquement à l'apparition de ces faux pics dus au bruit [HJL+00, HSS00].

Le deuxième obstacle est la difficulté de réaliser des moyennes sur ces méthodes d'analyse. Comme il n'y a aucune raison que d'une mesure à l'autre les phases des oscillations log-périodiques restent semblables, moyenner brutalement cela a toutes les chances de réduire les oscillations à zéro par interférence sans cohérence. Un raffinement proposé de la méthode est de remettre en cohérence les phases pour réaliser des moyennes canoniques [JS98, JSS00, SJ01, ZS02a].

**État des lieux : quelle DSI actuellement ?** Par ces techniques, les évidences de DSI semblent rester robustes sans que la conclusion puisse être définitive. Les auteurs de ces méthodes continuent à travailler activement à leurs validations et leurs développements. Une approche récente utilisant l'opération de $q$-dérivation est en particulier à l'étude [ZS02b, EE97, Erz97]. Les situations principalement explorées fournissent des données qui n'ont que peu de périodes d'ocillations et globalement pas beaucoup de points car ce sont en général déjà des quantités intégrées qui sont analysées. Les recherches pour une pertinence assurée sans ambiguïté de la DSI poursuivent leur cours.

Nous choisissons ici de privilégier une approche distincte de la DSI en donnant une définition de ce qu'est la DSI dans un contexte stochastique. L'objectif est de construire des méthodes d'analyse qui portent directement sur des mesures temporelles sur un système et l'on espère ainsi disposer de données plus longues, sans traitement préalable. Nous devrions dans ce cas disposer d'un nombre de log-périodes plus grand et surtout de possibilités de corréler la DSI sur plusieurs échelles. Cette approche de la DSI est en fait assez orthogonale aux situations jusqu'ici regardées par les auteurs cités et nous souhaitons par cette voie aborder avec un regard neuf la question de la pertinence de la DSI dans les expériences.

## 2 Invariance d'échelle discrète et transformation de Lamperti

Le cadre dans lequel se situent nos contributions à la DSI étant dressé, nous posons d'abord sa définition pour les fonctions aléatoires avant de prouver son lien *via* $\mathcal{L}_H$ avec la cyclostationnarité. Nous en déduisons ensuite de nouvelles méthodes d'analyse de la DSI et proposons quelques exemples avant de réinterpréter les travaux cités sur la DSI et Mellin.

### 2.1 Définition de la DSI stochastique

Définition IV.1: *Un processus $\{X(t), t > 0\}$ est à invariance en échelle discrète d'exposant d'auto-similitude $H$ et de rapport d'échelle privilégié $\lambda$, ce que l'on note $(H, \lambda)$-DSI, si pour ce $\lambda$ fixé :*

$$\{(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t), t > 0\} \stackrel{d}{=} \{X(t), t > 0\}. \tag{IV.1}$$

Cette définition, proposée dans [BFA02], joue pour les fonctions aléatoires et par rapport à la lacunarité, le rôle analogue à celui de la définition de l'auto-similarité stochastique par rapport aux fractales. La propriété au deuxième ordre statistique est que la fonction de corrélation vérifie pour tout $s$ et $t > 0$ et pour le $\lambda$ privilégié :

$$R_X(\lambda t, \lambda s) = \lambda^{2H} R_X(t, s). \tag{IV.2}$$

Le processus est invariant par dilatations d'un facteur égal à une puissance quelconque de $\lambda$ : le groupe sous lequel il reste invariant est donc un groupe des dilatations discrètes (mais un groupe infini) $\{\mathcal{D}_{H,\lambda^n}, n \in \mathbb{Z}\}$, qui représente un sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{R}_*^+, \times)$. Nous somme ainsi dans la situation des brisures des symétries envisagées par Hannan [Han65] qui se réexpriment comme une symétrie sous un nouveau groupe de transformations. Ce groupe n'étant pas continu, il nous faut faire usage de quelques précautions en utilisant les notions du III, développées principalement pour des groupes continus.

Le passage de l'auto-similarité usuelle à l'invariance affaiblie qu'est la DSI est conceptuellement analogue au passage en physique des solides de l'invariance par déplacement dans l'espace de la mécanique en général, à l'invariance sur un réseau discret de translations seulement pour les propriété du solide. C'est ainsi un concept sur lequel fonder des propriétés d'un système physique précis et non des outils généraux. Un analogue plus proche que nous allons employer est le passage d'une invariance statistique sous n'importe quelle translation temporelle au cas où l'invariance n'est vérifiée que pour une période privilégiée : c'est ce que nous avons appelé au II.1.4 la cyclostationnarité (définition II.6) et sur laquelle nous allons construire notre analyse.

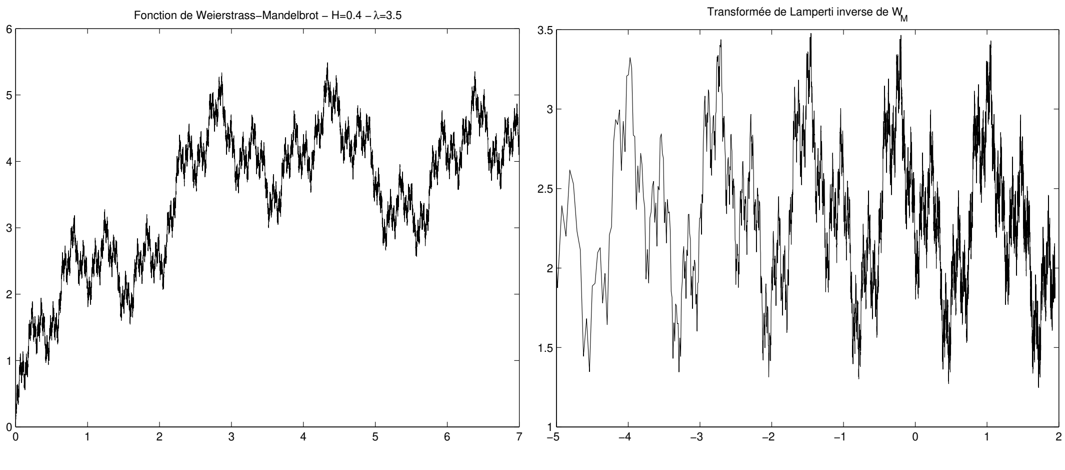



Fig. IV.2: Délampertisation d'un processus à DSI, ici une fonction de Weierstrass (voir 2.5 pour sa définition). La fonction originelle est à gauche et est log-périodique, son image par ${\mathcal{L}_H}^{-1}$ est à droite et est périodique dans le temps.

## 2.2 La DSI comme image de la cyclostationnarité

### 2.2.1 Délampertisation des processus à DSI

L'invariance en échelle discrète étant une sorte de périodicité le long des échelles des propriétés statistiques, nous pouvons la ramener à une périodicité en fonction du temps d'un processus délampertisé. Nous rappelons d'abord la définition du II.1.4 avant de donner le résultat duquel part notre analyse de la DSI stochastique [BFA02, FBA02].

Définition IV.2: *Un processus* $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est* ***périodiquement corrélé*** *ou* ***cyclostationnaire*** *de période* $T$ *si*

$$\{(\mathcal{S}_T Y)(t), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}. \tag{IV.3}$$

La cyclostationnarité au sens large impose la périodicité des deux premiers moments :

$$\mathbb{E}Y(t+T) = \mathbb{E}Y(t) \qquad \text{et} \qquad R_Y(t+T, s+T) = R_Y(t,s). \tag{IV.4}$$

Cette deuxième égalité autorise de décomposer $R_Y$ en série de Fourier comme

$$R_Y(t, t+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\tau) e^{i2\pi nt/T}. \tag{IV.5}$$

Théorème IV.1: *Si* $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est cyclostationnaire de période* $T$*, son image par la transformation de Lamperti* $\{(\mathcal{L}_H Y)(t), t > 0\}$ *est à* $(H, e^T)$*-DSI. Inversement, si* $\{X(t), t > 0\}$ *est à* $(H, \lambda)$*-DSI, son image inverse par la transformation de Lamperti* $\{({\mathcal{L}_H}^{-1} X)(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est cyclostationnaire de période* $\ln \lambda$.

*Démonstration* — La preuve repose à nouveau sur le lemme II.1. Soit $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ cyclostationnaire de période $T$ alors $Y(t+T) \stackrel{d}{=} Y(t)$ et le processus $X = \mathcal{L}_H Y$ vérifie :

$$\begin{aligned} X(e^T t) &= (e^T t)^H Y(\ln(te^T)) \\ &\stackrel{d}{=} e^{HT} t^H Y(\ln t + T) \stackrel{d}{=} (e^T)^H t^H Y(\ln t) = \left(e^T\right)^H X(t), \end{aligned} \tag{IV.6}$$

prouvant ainsi que $X(t)$ est à $(H, e^T)$-DSI.

Inversement, partant de $\{X(t), t > 0\}$ à $(H, \lambda)$-DSI, le processus délampertisé $Y = {\mathcal{L}_H}^{-1} X$ vérifie :

$$\begin{aligned} Y(t + \ln \lambda) &= e^{-Ht - H\ln\lambda} X\left(\lambda e^t\right) \\ &\stackrel{d}{=} e^{-Ht - H\ln\lambda} \lambda^H X(e^t) = e^{-Ht} X\left(e^t\right) = Y(t), \end{aligned} \tag{IV.7}$$

puisque que $X(\lambda t) \stackrel{d}{=} \lambda^H X(t)$. Ainsi $Y(t)$ est cyclostationnaire de période $\ln \lambda$.

□

Le théorème est illustré graphiquement en figure IV.2 où l'on voit bien la périodicité en correspondance par $\mathcal{L}_H$ avec la log-périodicité. Pour les mêmes raisons que l'auto-similarité, les processus à DSI ne peuvent pas être stationnaires. La forme (IV.5) de la fonction de corrélation des processus cyclostationnaires conduit à une caractérisation de celle des processus à DSI.

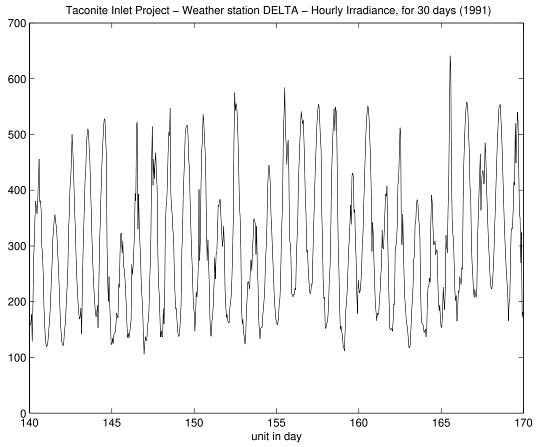



Fig. IV.3: Irradiance globale (en $W/m^2$) de la station de météorologie Delta du project *Taconite Inlet* ; exemple de processus naturel cyclostationnaire de période égale à un jour... On se reportera à la figure IV.6 pour l'analyse de la série.

Corollaire IV.1: *Tout processus* $\{X(t), t > 0\}$ *à* $(H, \lambda)$*-DSI a comme covariance une fonction de la forme suivante :*

$$R_X(t, kt) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k^H C_n(\ln k) t^{2H + i2\pi n/\ln \lambda}. \tag{IV.8}$$

*Démonstration* — Partant d'un processus $\{X(t), t > 0\}$ à $(H, \lambda)$-DSI, sa covariance s'écrit en vertue de la relation (II.94) entre $R_X$ et $R_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}$ :

$$\begin{aligned} R_X(t, kt) &= (t\ kt)^H R_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(\ln t \ln kt) && \text{(IV.9)} \\ &= k^H t^{2H} R_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(\ln t, \ln t + \ln k). && \text{(IV.10)} \end{aligned}$$

D'après le théorème IV.1, le processus $\{(\mathcal{L}_H{}^{-1}X)(t), t \in \mathbb{R}\}$ est cyclostationnaire de période $T = \ln \lambda$ et, utilisant la décomposition (IV.5) en série de Fourier, on a :

$$R_X(t, kt) = k^H t^{2H} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\ln k) e^{i2\pi n \ln t/\ln \lambda}, \tag{IV.11}$$

d'où vient le résultat (IV.8) annoncé.

□

Ce corrolaire n'est pas une vraie caractérisation des fonctions de corrélation à DSI ; nous allons devoir nous pencher plus avant sur la littérature abondante au sujet de la cyclostationnarité pour cela. L'écriture obtenue est un exemple de ce que les grandeurs statistiques d'un processus à DSI sont solutions de la DSI déterministe. Nous nous attendons alors à rendre compte de situations semblables à celles examinées par cette approche de la DSI mais avec des outils d'analyse de fonctions aléatoires.

### 2.2.2 Quelques rappels sur la cyclostationnarité

L'étude spectrale mathématique des processus périodiquement corrélés a été initiée par Gladyshev [Gla61], [Gla63], poursuivie ensuite par Hurd [Hur69], [Hur97] tandis que la communauté de traitement du signal abordait ces processus d'abord par des applications, la première étant trouvée dans [Ben58], prenant en général le nom de cyclostationnaire dans des travaux soucieux des applications ; nous renvoyons en particulier à l'immense travail de Gardner et collaborateurs en ce domaine [GF75, Gar86, Gar87, RBL91].

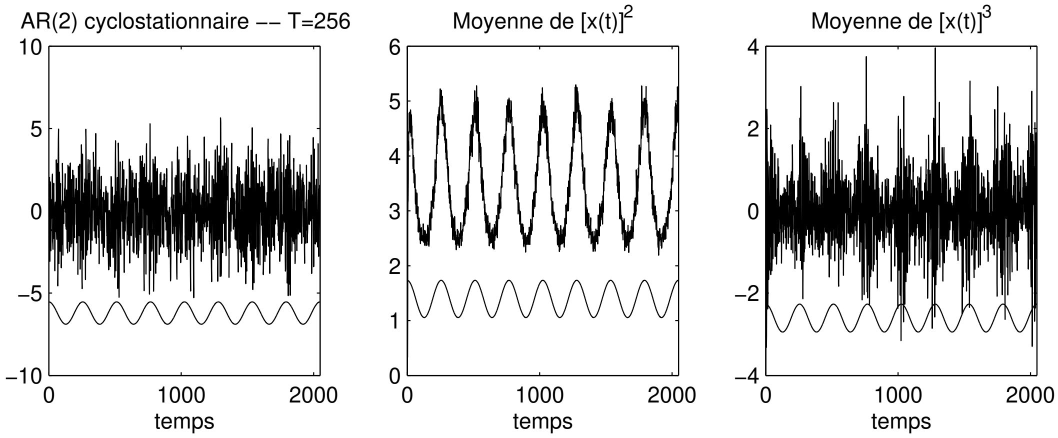



Fig. IV.4: Exemple de système AR cyclostationnaire d'ordre 2 et de ses moments d'ordre 2 et 3 qui révèlent cette cyclostationnarité.

**Analyse spectrale et représentations des processus cyclostationnaires.** Puisque les processus cyclostationnaires ne sont justement pas stationnaires, leur analyse spectrale a été un premier sujet d'intérêt et il revient à Gladyshev puis à Hurd d'avoir répondu à cette question en usant des propriétés d'harmonisabilité de Loève. Nous n'exposons pas les détails mathématiques complets de validité des écritures. Des exemples de processus cyclostationnaires sont montrés en figures IV.3 pour un phénomène naturel et IV.4 pour une séquence synthétique.

• La condition pour que la fonction de corrélation donnée par (IV.5) soit définie positive se réexprime comme il suit [Gla61, Gla63]. Un ensemble de fonctions $\{C_n(\tau),\ \tau \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\}$ donne la fonction de corrélation d'un processus cyclostationnaire par (IV.5) si et seulement si pour tout $N$ et pour tout ensemble de nombres dans $\mathbb{C}$, et d'entier $\{k_1, \ldots, k_N\}$, on a : $\{a_1, \ldots, a_N\}$ et $\{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$, on a :

$$\sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} a_p \overline{a}_q C_{k_q - k_p}(\tau_p - \tau_q) e^{i2\pi k_p(\tau_p - \tau_q)/T} \geq 0. \qquad \text{(IV.12)}$$

En fait les $\gamma_{jk}(\tau) = C_{k-j}(\tau) e^{i2\pi j\tau/T}$ sont les coefficients d'une séquence stationnaire dans un espace à plusieurs dimensions. Une méthode pour stationnariser ces séquences est justement de passer a une représentation de dimension plus grande [Gla61], [Pag78].

• Alors que pour les séquences aléatoires cyclostationnaires l'existence systématique d'une représentation harmonique est prouvée [Gla61], ce n'est plus le cas à temps continu [Gla63, Hur73]. Nous poursuivons donc sous l'hypothèse de l'existence d'une représentation harmonisable. Dans tous les cas les fonctions $C_n(\tau)$ sont des transformées de Fourier de mesures et on obtient le résultat suivant en injectant (IV.5) dans la définition de la fonction spectrale (III.41).

Proposition IV.1: *La fonction spectrale d'un processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ cyclostationnaire harmonisable est donnée par l'équation :*

$$\phi_Y(\nu_1, \nu_2) = \sum_n \tilde{C}_n(-\nu_2)\delta\left(\nu_1 - \nu_2 - \frac{n}{T}\right), \tag{IV.13}$$

*pour laquelle on a $\tilde{C}_n(\nu) = (\mathbf{F}C_n)(\nu)$.*

*Démonstration* — On part de l'équation (III.42) en plongeant la forme (IV.5) de la covariance d'un processus cyclostationnaire $Y(t)$.

$$\begin{aligned}
\phi_Y(\nu_1, \nu_2) &= \iint e^{-i2\pi t\nu_1 + i2\pi s\nu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(s-t) e^{i2\pi nt/T} \mathrm{d}t\mathrm{d}s & \text{(IV.14)}\\
&= \iint e^{-i2\pi t\nu_1 + i2\pi(t+\tau)\nu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\tau) e^{i2\pi nt/T} \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau & \text{(IV.15)}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu_1 - \nu_2 - n/T) \int_{-\infty}^{+\infty} C_n(\tau) e^{-i2\pi\tau\nu_2} \mathrm{d}\tau, & \text{(IV.16)}
\end{aligned}$$

qui est de la forme (IV.13).

□

La densité spectrale harmonisable est ainsi un spectre de raies le long de la fréquence (dite cyclique) $\nu_c = \nu_1 - \nu_2$ ; alors que les processus stationnaires ont une densité singulière concentrée sur la diagonale en $\nu_1 = \nu_2$, c'est ici un ensemble de droites parallèles à cette diagonale qui concentrent les contributions spectrales non nulles. Pour l'estimation de la seule période cyclique, on gagne en robustesse en ne regardant la distribution spectrale que fonction de $\nu_c$ en calculant le spectre marginal en fréquence cyclique $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_Y(f + \nu_c/2, f - \nu_c/2)\mathrm{d}f$. Selon le schéma IV.5 représentant la fonction spectrale d'un processus cyclostationnaire, on gagne en cohérence en intégrant selon $f$, fréquence moyenne.

• Les processus cyclostationnaires admettent diverses représentations et nous renvoyons plutôt à [Gar86, GS94] par exemple, ou [Hur89b, DH94] pour les détails à ce sujet. L'une d'entre elles permet des développements intéressants : c'est la représentation basée sur un opérateur unitaire. On montre qu'il existe pour tout $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ cyclostationnaire un opérateur $\mathcal{U}_Y$ unitaire tel que $Y(t+T) = (\mathcal{U}_Y Y)(t)$ pour tout $t$. $\mathcal{U}_Y$ est donc l'opérateur de translation associé au processus $Y$.

Proposition IV.2: *Un processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est cyclostationnaire de période $T$ si et seulement il existe un groupe d'opérateurs unitaires $\{\mathcal{U}_t, t \in \mathbb{R}\}$ et une fonction aléatoire périodique $P(t)$ tels que : $Y(t) \stackrel{d}{=} (\mathcal{U}_t P)(t)$.*

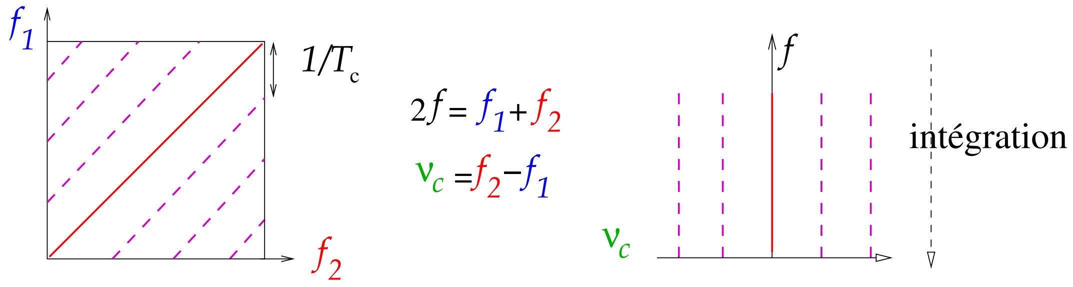



Fig. IV.5: Schématisation de la fonction spectrale $\phi_Y(\nu_1, \nu_2)$. Seule la diagonale (en trait plein) contient des contributions non nulles pour un processus stationnaires alors que les processus cyclostationnaires de période $T_c$ admettent des densités spectrales non nulles sur les droites parallèles à la diagonale, espacées de la fréquence cyclique $1/T_c$ (en traits pointillés). À droite on montre le changement de variable et l'intégration qui donne le spectre marginal cyclique qui permet d'estimer $T_c$.

On doit avoir en particulier $\mathcal{U}_T = \mathcal{U}_Y$. Cette représentation n'est pas unique mais clarifie l'interprétation des générations de séquences numériques aléatoires au 3.2.2.

**Méthodes d'estimation pour les processus cyclostationnaires.** Elles découlent alors des caractérisations spectrales des processus cyclostationnaires. Nous en citons deux sur lesquelles nous pouvons nous appuyer.

• Comme les processus cyclostationnaires sont reliés aux processus stationnaires à l'aide de diverses transformations ou représentations, des adaptations des méthodes d'estimation classiques sont possibles. Nous retenons en particulier les estimateurs suivants [Hur89a, DH94] qui généralisent le périodogramme.

Proposition IV.3: *Les quantités suivantes pour un processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ cyclostationnaire :*

$$\hat{C}_n(\tau; A) = \frac{1}{A} \int_{I(A,\tau)} Y(t+\tau)\overline{Y}(t) e^{-i2\pi n t/T} \mathrm{d}t, \tag{IV.17}$$

*où $I(A,\tau) = [0\ ,\ A-\tau]$ pour $\tau \geq 0$ et $[-\tau\ ,\ A]$ pour $\tau < 0$, sont des estimateurs biaisés de $C_n(\tau)$ : $\mathbb{E}\left\{\hat{C}_n(\tau; A)\right\} = C_n(\tau)(1 - |\tau|/A)$.*

Ce périodogramme cyclique n'est pas consistant en général (problème identique à celui du périodogramme stationnaire) si on ne prend pas la précaution de lisser le périodogramme. En particulier il ne l'est pas dès que des raies spectrales existent sur les diagonales cycliques.

• Les estimateurs consistants sont donnés en introduisant un noyau de lissage qui conduit au périodogramme cyclique lissé que nous décrivons ici. Nous utilisons la transformée de Fourier du processus sur un intervalle fini, notée $S_Y(\nu; A) = \displaystyle\int_0^A Y(t) e^{-i2\pi\nu t} \mathrm{d}t$.

Définition IV.3: *Le périodogramme cyclique lissé général est défini soit en temps soit en fréquence, avec une fenêtre de pondération $h(t)$, selon :*

$$\begin{aligned} S(\nu, n; A) &= \int_{-A}^{A} h(B_A u)\hat{C}_n(u; A)e^{-i2\pi\nu u}\mathrm{d}\nu && \text{(IV.18)} \\ &= \frac{1}{B_A}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}\left(\frac{f-\nu}{B_A}\right)\frac{1}{A}S_Y(f; A)\overline{S_Y}\left(f - \frac{n}{T}; A\right)\mathrm{d}f, && \text{(IV.19)} \end{aligned}$$

*où $B_A$ est une fonction de $A$ telle que $\lim_{A\to+\infty} B_A = 0$ et $\lim_{A\to+\infty} AB_A = \infty$ (par exemple $B_A = 1/\sqrt{A}$), et $\tilde{h} = \mathbf{F}h$.*

Le périodogramme cyclique est un estimateur de $\tilde{C}_n(\nu)$ car on a : $\lim_{A\to+\infty} \mathbb{E}\{S(\nu, n; A)\} = \tilde{C}_n(\nu)$. Il est en général non biaisé mais la discussion sur sa validité exacte est bien trop longue pour trouver sa place ici. Cet estimateur est l'élément de base qui permet de construire des algorithmes efficaces (en temps de calcul et résultat d'estimation) pour les processus cyclostationnaires.

• L'article de revue [RBL91] constitue une bonne introduction à ces méthodes. Sans entrer dans le détail des algorithmes, le schéma général est de couper le signal à analyser en blocs de longueur $A$, de calculer les spectres en les lissant à l'aide de fonctions de pondération puis de corréler les composantes spectrales à différentes fréquences ce qui produit une estimée de la fonction spectrale $\phi_Y(f_1, f_2)$.

Par exemple si $T_e$ est la période d'échantillonnage, $N$ le nombre de blocs de longueur $A$, $h$ et $g$ des fenêtres de pondération de longueur $A/T_e$ et $NT_e$, on calcule alors :

$$\begin{cases} \tilde{Y}_A(n, f) = \sum_{l=-N/2}^{N/2} h(r)Y_{T_e}[n-l]e^{-i2\pi f(n-l)T_e} \\ S_Y^{\nu_c}(v, f) = \sum_n \tilde{Y}_A(n, f-\nu_c/2)\tilde{Y}_A^*(n, f+\nu_c/2)g(v-n) \end{cases} \qquad \text{(IV.20)}$$

Une estimation de $\phi_Y(f+\nu_c/2, f-\nu_c/2)$ est donnée en moyennant les $S_Y^{\nu_c}(v, f)$ sur les différents instants $v$. Nous utilisons principalement des versions de cet algorithme par la suite. En figure IV.6 nous montrons (en bas à droite) le résultat de cette procédure d'estimation regardée sur la marginale cyclique uniquement.

## 2.3 Analyse spectrale de la DSI

**Structure spectrale des processus à DSI.** Comme pour les processsus cyclostationnaires nous sommes obligés de poser comme hypothèse que le processus admet une décomposition harmonisable multiplicative comme au II.2.1 sans que cela soit toujours vrai. La notion d'harmonisabilité multiplicative permet de formuler l'équivalent de la Proposition IV.1 pour les processus à DSI.

Proposition IV.4: *Les propriétés spectrales et d'harmonisabilité multiplicative d'un processus $\{X(t), t > 0\}$ à $(H, \lambda)$-DSI sont identiques aux propriétés spectrales et d'harmonisabilité usuelles du processus cyclostationnaire délampertisé $\{(\mathcal{L}_H{}^{-1}X)(t), t \in \mathbb{R}\}$*

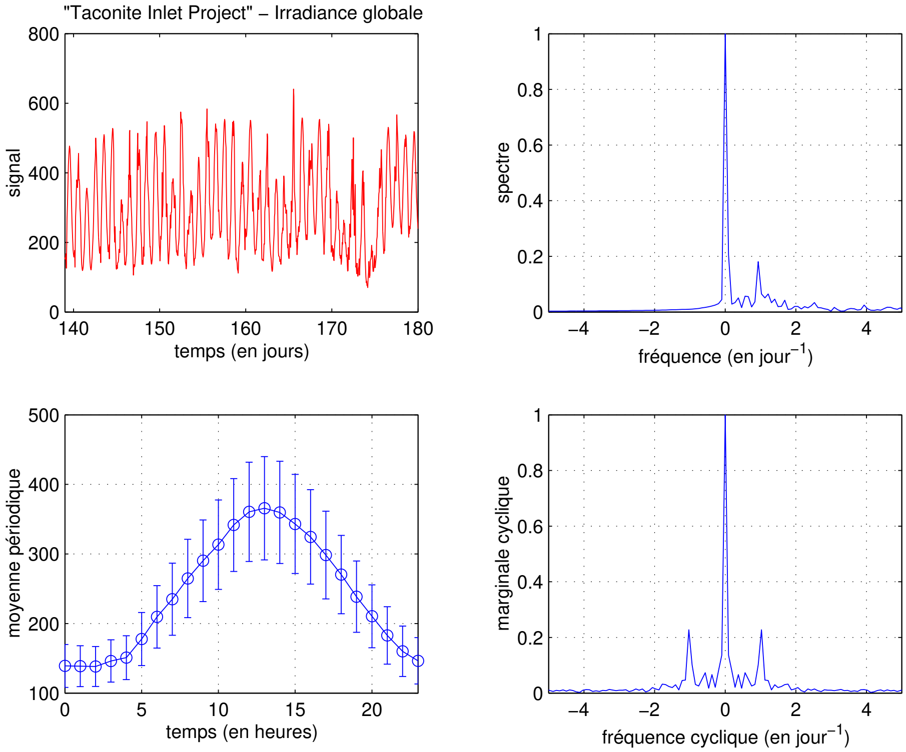



Fig. IV.6: Analyse de l'irradiance globale de la station Delta. Nous montrons en haut à droite le spectre du signal analytique ; en bas à gauche la moyenne périodique empirique de la série de période 24 heures. Elle révèle l'évolution sur la période cyclique des statistiques de la série. Les barres représente l'estimation empirique de la variance périodique de la série et elle évolue aussi sur 24 h. Enfin la marginale cyclique calculée comme $\int_{-\infty}^{+\infty} S^{\nu_c}(v,f)\mathrm{d}f$ (voir aussi (IV.27)) est représentée en bas à droite et, en plus du pic central qui est l'énergie du signal, présente les pics symétriques à la fréquence cyclostationnaire.

Le théorème IV.1 prouve que $Y(t) = (\mathcal{L}_H{}^{-1}X)(t)$ est cyclostationnaire si et seulement si $X(t)$ est à DSI. Les principes de correspondance longuement établis au III entre les représentations spectrales et harmoniques d'un processus et celles de son transformé de Lamperti démontrent en tout point le résultat. Nous pouvons donc utiliser les résultats rappelés sur la cyclostationnarité pour étudier la DSI.

Ils ne donnent pas de caractérisation utilisable de ce que doit être la fonction de corrélation d'un processus à DSI, autre que de réécrire la condition de définie positivité de $R_X$ de façon analogue à (IV.12). La caractérisation spectrale est plus utile.

Corollaire IV.2: *Un processus $\{X(t), t > 0\}$ à $(H,\lambda)$-DSI, multiplicativement harmonisable, a pour fonction spectrale multiplicative :*

$$\phi_X(\beta_1,\beta_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathbf{M}C_n(\ln k))(-\beta_2)\delta\left(\beta_1 - \beta_2 - \frac{n}{\ln\lambda}\right), \tag{IV.21}$$

*où $C_n(\ln k)$ vient de l'expression (IV.8).*

Les composantes du spectre de Mellin sont réparties parallèlelement à la diagonale principale (qui contient l'information sur le comportement auto-similaire strict). C'est une décomposition de Mellin qui donne les propriétés spectrales sur ces diagonales : $(\mathbf{M}C_n(\ln k))(-\beta_2) = \int C_n(\ln k)k^{i2\pi\beta_2-1}\mathrm{d}k$, que l'on pourrait aisément ramener à une transformation de Fourier.

Les harmoniques qui apparaissent donnent des pics parfaitement localisés sur certaines échelles, que l'on nomme cycliques en rappel de la cyclostationnarité sous-jacente, et on regarde naturellement ce spectre en fonction des variables $\beta_c = \beta_2 - \beta_1$, échelle cyclique et $\beta_m = (\beta_1 + \beta_2)/2$, échelle moyenne. Les raies de la DSI sont obtenues pour $\beta_c = n/\ln\lambda$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Le schéma du support spectral en échelle de la DSI est identique à celui que nous avons proposé en figure IV.5.

**Analyse temps-échelle ou fréquence de la DSI.** Les représentations mixtes suggèrent une autre méthode d'analyse de la DSI. L'exemple du spectre de Wigner invariant en échelle donne pour un processus à DSI :

$$\underline{W}_X(t,\beta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathbf{M}C_n(\ln u))\left(-\beta + \frac{n}{2\ln\lambda}\right)t^{2H+i2\pi n/\ln\lambda}. \qquad \text{(IV.22)}$$

*Démonstration* — Nous avons donné l'expression (III.58) du spectre de Wigner invariant en échelle en fonction de la covariance $R_X\left(t\sqrt{\tau}, t/\sqrt{\tau}\right)$. nous savons écrire cette dernière en faisant le changement de variable nécessaire dans (IV.8). Nous prenons $k = 1/\tau$, $t$ est le temps milieu (en moyenne géométrique) et il vient :

$$\begin{aligned}\underline{W}_X(t,\beta) &= \int_0^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\tau^H}C_n\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)(t\sqrt{\tau})^{2H+i2\pi n/\ln\lambda}\tau^{-i2\pi\beta}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} && \text{(IV.23)}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{+\infty}C_n(\ln u)u^{i2\pi(\beta-n/2\ln\lambda)}\frac{\mathrm{d}u}{u}t^{2H+i2\pi n/\ln\lambda}, && \text{(IV.24)}\end{aligned}$$

em faisant le changement de variable $u = 1/\tau$ et donc $\mathrm{d}u/u = -\mathrm{d}\tau/\tau$ avant de rétablir les bornes d'intégration dans le bon sens. L'intégrale résulte en un terme $(\mathbf{M}C_n(\ln u))\left(-\beta + \frac{n}{2\ln\lambda}\right)$ et le résultat (IV.22) est ainsi démontré.

□

La structure est celle de chirps en temps dont le comportement en échelle s'étale sur les harmoniques en échelle cyclique et en révèle la périodicité ; le $\beta$ du spectre de Wigner invariant en échelle mesure en fait cette échelle cyclique car il est convenablement symétrisé et défini à partir de $R_X(t\sqrt{\tau}, t/\sqrt{\tau})$. Les autres distributions de la classe de Mellin partagent avec $\underline{W}_X(t,\beta)$ la structure montrant des harmoniques en échelle, plus ou moins bien localisées puisque l'on sait que tous les $\underline{\Pi}_X$ sont engendrées par un lissage du spectre de Wigner invariant en échelle.

Une réflexion plus globale déduit de (IV.1) des conditions nécessaires sur les représentations mixtes pour qu'un processus soit à DSI :

$$\begin{aligned}(\forall t>0)\ (\forall\beta\in\mathbb{R})\ \ \underline{W}_X(t,\beta) &= \lambda^{-2H}\underline{W}_X(\lambda t,\beta) && \text{(IV.25)}\\ (\forall t>0)\ (\forall f\in\mathbb{R})\ \ W_X(t,f) &= \lambda^{-2H-1}W_X\left(\lambda t,\frac{f}{\lambda}\right). && \text{(IV.26)}\end{aligned}$$

Ces deux conditions jumelles sont satisfaites dans un certain nombre de cas simples qui autorisent une lecture triple de l'émergence de la DSI :

1. si $X$ a des raies spectrales réparties en fréquence comme une série géométrique, ou alors simplement que son « spectre »[1] est log-périodique de manière générale ;
2. si la distribution est identique pour tout $\beta$ ou $f$ et se décompose en temps en série de Mellin ; le processus est proche alors d'un processus stationnaire (ou $H$-ss) modulé par un chirp logarithmique ;
3. si $X$ est globalement semblable à un chirp logarithmique, les deux distributions se localisent autour du paramètre du chirp et les conditions sont satisfaites ; elles le sont toujours si une somme de chirps est considérée et le processus est donné par une série de Mellin aléatoire.

Nous allons en fait constater dans la suite que ces possibilités se mélangent et qu'un même processus à DSI peut souvent être examiné par l'un ou l'autre point de vue.

**Estimation spectrale de la DSI.** L'analyse spectrale suggère une estimation du facteur d'échelle privilégié $\lambda$ par l'équivalent du périodogramme cyclique lissé. La procédure est décrite ici et peut se faire différemment selon le schéma d'adaptation aux séquences numériques que l'on souhaite privilégié.

• *Délampertisation et analyse cyclostationnaire.* En s'appuyant sur la littérature importante concernant l'application concrète du périodogramme cyclique lissé défini en IV.3 pour les séquences supposées cyclostationnaires (même quand la période n'est pas un multiple du pas d'échantillonnage) [Gar86, RBL91], la solution de facilité est de choisir de délampertiser le processus à DSI et d'analyser la séquence suspectée être cyclostationnaire.

Nous présentons le résultat de cette procédure obtenu sur un des exemples ci-dessous. La lecture est en fait difficile pour prouver que l'on a bien de la DSI. La simple existence de contributions spectrales importantes sur la diagonale induit l'existence de pics aux échelles croisées. Il sont visibles sur la figure IV.8

C'est en pouvant moyenner suffisamment que ces pics hors diagonale peuvent être retenus comme pertinents, signature de la DSI, ou factices (ils retombent vers le niveau du bruit). Nous montrons cela sur deux exemples : l'un simplement $H$-ss mais avec deux échelles principales pour lequel il reste des contributions diffuses hors la diagonale principale ; l'autre est vraiment à DSI et les valeurs hors de la diagonale sont pertinentes. Le nombre de moyennes réalisées, et donc la quantité de données apparaissent alors cruciaux.

• *Marginale cyclique.* Une manière d'augmenter un peu la confiance en la détection et surtout de rendre possible l'estimation est de marginaliser en fonction de l'échelle cyclique la densité spectrale estimée. Nous regardons alors la quantité suivante, qui est un spectre en échelle cyclique :

$$S_X(\beta_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(\sigma - \beta_c, \sigma + \beta_c) \mathrm{d}\sigma. \tag{IV.27}$$

Les pics hors-diagonale de processus qui ne sont pas à DSI étant en règle général sans cohérence de phase les uns par rapport aux autres, l'opération de moyenne détruit les pics

[1] Rigoureusement, DSI et stationnarité sont incompatibles et le spectre dont nous parlons doit être fondé sur les représentations mixtes [Fla93] ou la stationnarité des accroissements [Yag87].

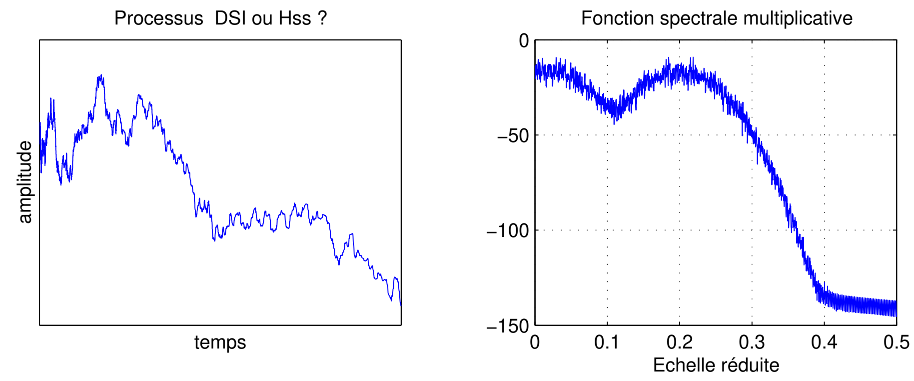



Fig. IV.7: Exemple de processus construit avec des séries de Mellin aléatoires, sous une forme $a_1(t)t^{H+i2\pi\beta_1} + a_2(t)t^{H+i2\pi\beta_2}$ (voir l'équation (IV.29)). À gauche une réalisation du processus, à droite la fonction spectrale multiplicative sur la diagonale. Processus $H$-ss ou à DSI ? Voir la réponse en figure IV.8.

artificiels de processus sans DSI pour ne faire émerger que le pic central, correspondant à l'énergie totale du signal, et les pics hors-diagonales qui signalent l'existence de DSI et sont situés aux harmoniques de la log-période, en $n/\ln\lambda$.

• *Calcul par représentations mixtes.* L'autre mise en œuvre numérique possible est de construire des méthodes directement lampertisées qui s'appliquent alors au signal brut et non à son image inverse par $\mathcal{L}_H{}^{-1}$. Nous avons montré au III.2.4 qu'il existe deux possibilités : le calcul direct à l'aide de la transformée de Mellin discrète ; la reformulation en temps-fréquence du calcul des représentations mixtes qui conduit aux méthodes de chasse aux chirps.

La figure IV.11 utilise la visualisation du contenu en échelle de Mellin à l'aide d'une représentation mixte (ici en temps-fréquence donc une échelle de Mellin $\beta$ donnée se traduit par une composant sur une hyperbole de fréquence instantanée $f = \beta/t$).

Nous fermons ce paragraphe sur une remarque : l'estimation par ces méthodes est possible car la DSI (comme la cyclostationnarité) revient à supposer une ergodicité partielle du processus, ergodicitié périodique en échelle (en temps si cyclostationnaire). Sans elle, nous rencontrons toutes les difficultés exposées au III liées à l'estimation de l'espérance d'une grandeur quand on ne peut faire de moyennes...

## 2.4 Exemples de processus à DSI

### 2.4.1 Quelques exemples immédiats

**Ajout d'un chirp à $H$-ss.** Si $\{X(t), t > 0\}$ est un processus $H$-ss, alors le processus $Z(t) = X(t) + t^{H+i2\pi\beta}$ est à DSI d'indice $H$ et de facteur d'échelle privilégié $e^{1/\beta}$. L'exemple s'étend sans peine à l'addition de toute fonction qui est log-périodique (donc décomposable en *série* de Mellin).

**Processus à modulation logarithmique.** Si $\{X(t), t > 0\}$ est un processus $H$-ss et $m(t)$ une fonction log-périodique à DSI déterministe, donc $m(\lambda t) = \lambda^H m(t)$ pour un certain $\lambda$ et

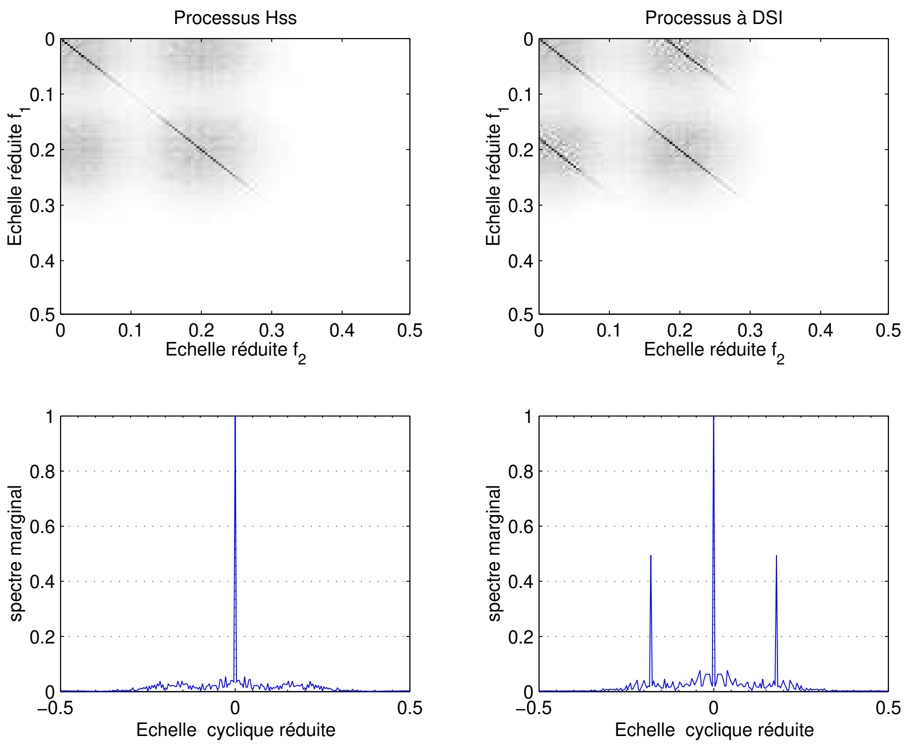



Fig. IV.8: Le processus précédent de la figure IV.7 peut être au choix synthétisé avec des propriétés auto-similaires (si $\mathbb{E}\{a_1(t)\overline{a}_2(t)\} = 0$) ou de DSI sinon. Alors que le spectre multiplicatif moyen est le même, l'estimation de la fonction spectrale multiplicative (en haut) puis du spectre marginal en échelle cyclique révèlent l'auto-similarité du premier cas et l'invariance en échelle discrète dans le second dont on estime le facteur en échelle privilégié à l'aide des pics de part et d'autre du pic central dans le spectre marginal cyclique..

$m(t)$ est décomposable en série de Mellin, alors $Z(t) = m(t)X(t)$ est à DSI d'indice $H$ et de fateur d'échelle privilégié $\lambda$.

**Processus à DSI non harmonisable.** Pour illustrer le fait que l'harmonisabilité n'est pas garantie, nous rapportons l'exemple de [Gla63] à ce sujet. Soit $f(t)$ une fonction à DSI déterministe de facteur d'échelle $\lambda$, $R(t,s) = f(t)\overline{f}(s)$ est la fonction de corrélation d'un processus à DSI. Cependant, si la série de Mellin de $f(t)$ n'a pas la propriété de convergence absolue, alors on prouve comme dans [Gla63] que le processus ne peut pas être harmonisable.

**Modèle simple de la DSI déterministe.** Pour se rapprocher du modèle simple de DSI déterministe proposé par D. Sornette en $u^D(a_0 + a_1 \cos(2\pi \ln u / \ln \lambda))$, nous pouvons introduire un exemple avec des masses spectrales en 0 et $\pm 1/\ln\lambda$ seulement. Le schéma suivant, en IV.9, indique la répartition de la fonction spectrale et un exemple de réalisation d'un tel processus. Sa corrélation est donnée par :

$$R_X(t, kt) = k^H t^{2H} \left( c_0 + c_1 \cos\left(\frac{\ln k}{\ln \lambda} + \phi_1\right)\right) \left( c_0' + c_1' \cos\left(\frac{\ln t}{\ln \lambda} + \phi_1'\right)\right). \qquad \text{(IV.28)}$$

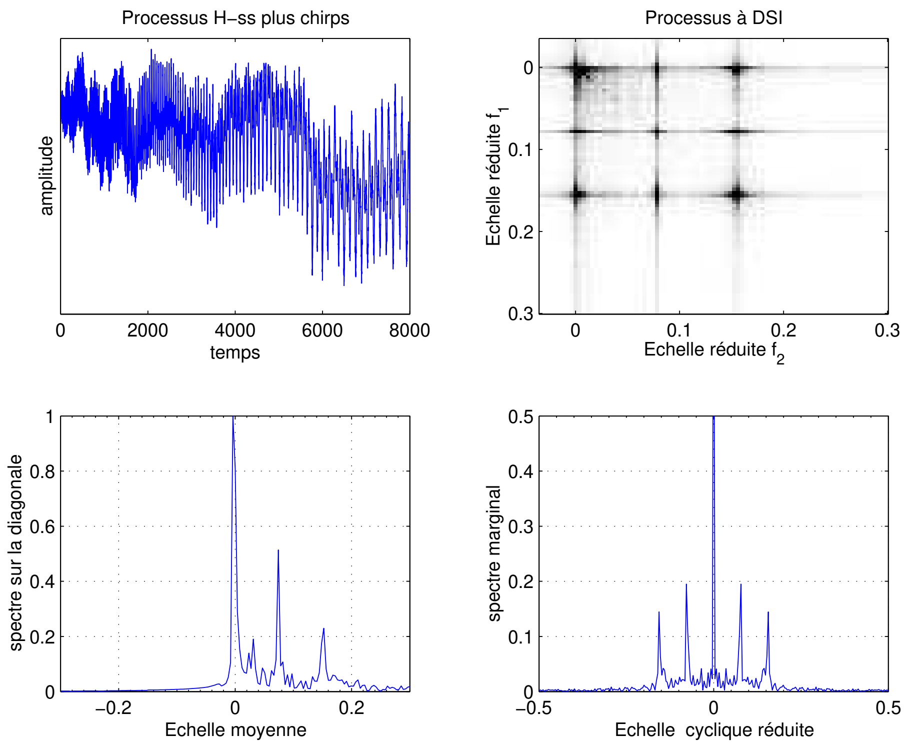



Fig. IV.9: Exemple de processus dont la fonction de corrélation obéit à (IV.28), ici avec en fait une harmonique d'ordre 2 en plus. On montre un exemple de réalisation (contruite en mélangeant un processus $H$-ss et des chirps de Mellin) et sa fonction spectrale estimée (à droite), avec le spectre marginal en fonction de la fréquence moyenne ainsi que le spectre marginal cyclique. La fonction spectrale à deux échelles est ici constituée de sorte de pics de Dirac répartis sur le support spectral admissible pour la DSI.

### 2.4.2 Séries de Mellin aléatoires

Le modèle précédent est un exemple de séries de Mellin aléatoires qui sont des représentations relativement générales de processus à DSI. Nous n'entrons pas dans les détails sur les représentations en série harmonique pour les processus à DSI harmonisables (détails analogues à ceux pour les processus cyclostationnaires [GF75], [DH94]). On peut en général représenter ces processus par la série suivante en moyenne quadratique [Hur89b] :

$$X(t) = \sum_{n \in I} a_n(t) t^{H+i2\pi n/\ln\lambda}, \tag{IV.29}$$

où $I \subseteq \mathbb{Z}$ (dénombrable dans le cas général), $a_n(t)$ sont des fonctions conjointement auto-similaires et sont en fait donnés à partir du processus $X$ comme [GF75] :

$$a_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\ln\lambda} \operatorname{sinc}\left(\frac{\ln t - \sigma}{\ln\lambda}\right) X(t) t^{-H-i2\pi n\sigma/\ln\lambda} \mathrm{d}\sigma. \tag{IV.30}$$

Nous utilisons cette forme de représentation comme exemples possibles de processus à DSI. Étant donnés $N$ processus auto-similaires (d'exposant nul) et conjointement auto-similaires (c'est-à-dire vérifiant par exemple au second ordre $\mathbb{E}\{a_n(kt)\overline{a}_m(ks)\} = \mathbb{E}\{a_n(t)\overline{a}_m(s)\}$ pour tout $k > 0$), le processus $X(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(t) t^{H+i2\pi n/\ln\lambda}$ est alors à $(H,\lambda)$-DSI.

Une généralisation de ces exemples serait de prendre une somme de fonctions log-périodiques quelconques (avec des périodes multiples d'une même période fondamentale) en lieu et place des chirps de Mellin.

### 2.4.3 Modèles paramétriques

Les systèmes d'Euler-Cauchy sont les pendants auto-similaires des systèmes à temps continu ARMA selon la Proposition II.19 et dans les deux cas le passage à des coefficients périodiques, en échelle (log-périodique) ou en temps, constitue leur généralisation pour représenter des signaux à DSI et cyclostationnaires.

Proposition IV.5: *Le système d'Euler-Cauchy dépendant du temps suivant :*

$$\sum_{n=0}^{p} \alpha'_n(t) t^n X^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{q} \beta'_n(t) t^n Z^{(n)}(t), \tag{IV.31}$$

*où les $\alpha'_n(t)$ et $\beta'_n(t)$ sont des fonctions log-périodiques du temps et $\{Z(t),\ t > 0\}$ un processus à $(H,\lambda)$-DSI, a pour solution un processus $\{X(t),\ t > 0\}$ à $(H,\lambda)$-DSI.*

Il faut remarquer que l'entrée $\{Z(t),\ t > 0\}$ peut simplement être un processus $H$-ss qui vérifie évidemment la propriété affaiblie de DSI pour tout $\lambda$. Une définition plus générale est d'autoriser l'ordre du système à dépendre log-périodiquement du temps, $p(t)$ et $q(t)$, mais nous n'explorerons pas cette voie.

Les modèles paramétriques seront utilisés par la suite comme modèles de synthèse des séquences à DSI ; nous étudierons comment discrétiser convenablement le temps. Le travail comparable à celui accompli sur les ARMA non stationnaires [Gre87] et cyclostationnaires [Pag78], [LL00, LL98] qui abordent l'estimation des paramètres est laissé pour le futur ; nous nous sommes limités à développer à l'aide de $\mathcal{L}_H$ et des outils de Mellin les méthodes non paramétriques d'analyse.

## 2.5 Un exemple fondamental : la fonction de Weierstrass

La fonction de Weiertrass est à la croisée de nombreuses approches sur la DSI et il nous est nécessaire de l'examiner de près pour comprendre différents aspects de la DSI puis s'en servir de modèle. Introduite par Weiertrass en 1872, discutée par Mandelbrot [Man82], étudiée dans ses extensions aléatoires par Berry et Lewis [BL80], modèle approché pour le fBm [Fal90], [Wor96] mais aussi un des premiers exemples récents étudiés par une transformation semblable à $\mathcal{L}_H$ [Tri93], reprise comme élément de base de classification des fonctions aléatoires à DSI [GS02], elle permet de confronter des études sur les fractales, les fonctions aléatoires $H$-ss ou à DSI et les représentations à la Lamperti.

### 2.5.1 Définitions et premières propriétés

Définition IV.4: *Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $0 < H < 1$, la fonction de Weierstrass $W_g(t)$ est définie par :*

$$W_g^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-nH} g\left(\lambda^n t\right). \tag{IV.32}$$

La fonction originelle est définie par Weierstrass avec $g(u) = \cos u$, et nous l'appellerons $W^*(t)$. Elle fait partie des fonctions écrites généralement $\sum_{n \geq 0} a_n g(\lambda^n t)$ où $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite qui tend vers 0, et qui ont en général un graphe de dimension non entière $D = 2 - H$ [Tri93] ; $g$ doit être une fonction infiniment oscillante ou à support borné (en quel cas c'est son spectre qui s'étend avec des oscillations à l'infini) pour cela [GS02]. Il en est bien ainsi pour $W^*(t)$.

Alors que la fonction est fractale au sens de son graphe, elle n'est pas auto-similaire selon la définition II.8 ni à DSI : il manque pour cela tous les modes de basse fréquence où $n < 0$. Mandelbrot propose alors une version modifiée de cette fonction.

Définition IV.5: *Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $0 < H < 1$, la fonction de Weierstrass-Mandelbrot $W_g(t)$ est définie par :*

$$W_g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^{-nH} \left(g(0) - g\left(\lambda^n t\right)\right). \tag{IV.33}$$

Nous notons $W(t)$ quand $g(u) = \cos u$ pour retrouver la forme spécifique introduite par Mandelbrot. Ainsi définie la série converge convenablement, son graphe est de dimension $D_H = 2 - H$ aux mêmes conditions qu'avant. Les basses fréquences $n < 0$ rajoutées donne à la courbe une allure croissante en $t^H$ et permettent d'assurer que $W_g(t)$ est exactement à $(H, \lambda)$-DSI déterministe. Notons enfin que $H$ est aussi le paramètre de régularité locale de Hölder de la fonction en tout point. La figure IV.10 montre les fonctions définies dans quelques situations. Nous montrons aussi le graphe associé au choix $g(u) = e^{iu+n\mu}$ de [BL80] qui obéit aussi à l'auto-similarité en échelle discrète.

**Version aléatoire de ces fonctions.** Il est aisé de proposer une version aléatoire des fonctions de Weierstrass-Mandelbrot en supposant simplement que la fonction $g_n$ de chaque mode est tirée d'un ensemble aléatoire, $g(\cdot, \omega)$ où $\omega$ est la variable de probabilité.

$$W_g(t; \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^{-nH} \left(g_n(0; \omega_n) - g_n\left(\lambda^n t; \omega_n\right)\right). \tag{IV.34}$$

Cette fonction est à $(H, \lambda)$-DSI stochastique. Cela peut être l'exemple étudié par Berry et Lewis [BL80], avec $g(u; \omega) = e^{i(u+\varphi(\omega))}$, et $\varphi(\omega)$ est une phase aléatoire i.i.d. pour chaque mode $n$ ; nous noterons cette fonction $W(t)$ par simplicité sans préciser $g$ et elle sera appelée fonction de Weierstrass-Mandelbrot aléatoire.

Notons qu'en ajoutant une amplitude aléatoire avec $g(u; \omega) = C(\omega) \cos(u + \varphi(\omega))$ où $C(\omega)$ est une variable Gaussienne, i.i.d entre les modes $n$ et $\varphi(\omega)$ est i.i.d uniforme dans $[0\ 2\pi[$,

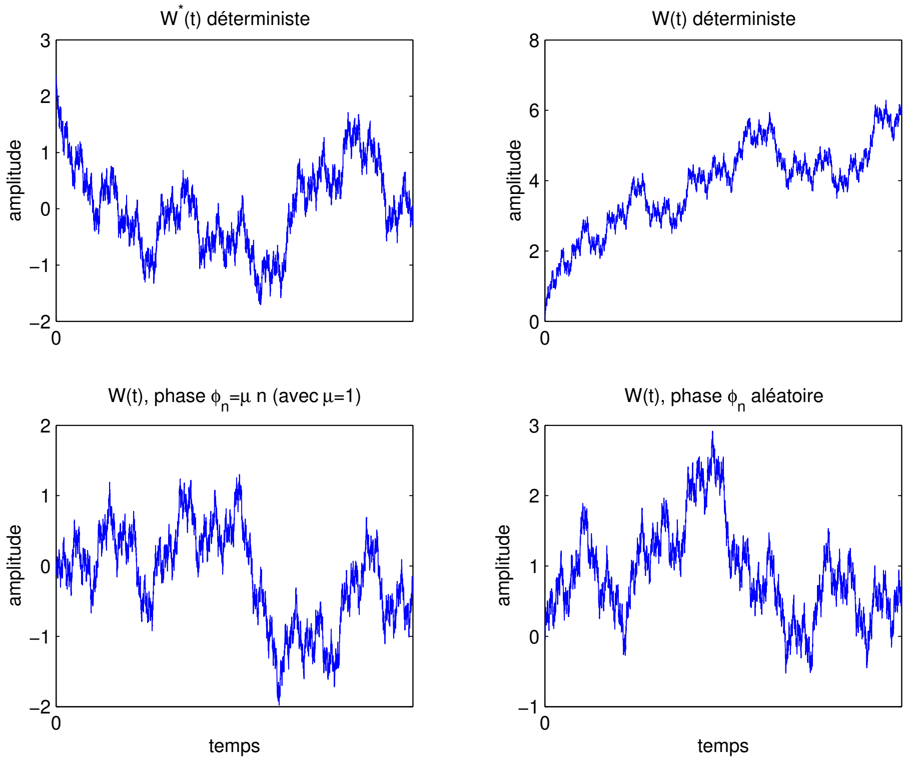



Fig. IV.10: Différentes versions de la fonction de Weierstrass-Mandelbrot ainsi que définies dans le texte. On les montre ici pour $H = 0.4$ et $\lambda = 2.3$. de gauche à droite et de haut en bas on a $W^*(t)$, $W(t)$ à phases nulles, $W(t)$ à phases en $\mu n$ et $W(t)$ à phases i.i.d. et uniformes sur le cercle unité.

la fonction obtenue est une approximation convenable du fBm si $\lambda$ n'est pas trop grand [Fal90] ; il faut en fait que les modes distribués dans le spectre en série géométrique soient assez proches les uns des autres pour ne pas être discernables à l'œil lors d'une représentation numérique.

**Décomposition en chirp de $W(t)$.** Puisque la fonction de Weiertrass est à DSI, nous devons pouvoir trouver ses différentes décompositions temps-échelle ou fréquence qui caractérisent la DSI. Elles furent trouvées dans [BL80]. La forme de $W(t)$ comme une superposition de signaux localisés sur une série de fréquences géométriques en $\lambda^{-n}/2\pi$ est directement visible de (IV.33), soit comme des pics de Dirac si $g(u) = \cos(u)$, soit des pics élargis pour une autre fonction – l'important est la périodicité géométrique, pas la forme de l'élément périodique.

Son spectre, toutes réserves prises au sujet de son existence, est (sauf à $\nu = 0$) :

$$\Gamma_W(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^{-2nH} \delta\left(\nu - \lambda^n/2\pi\right), \tag{IV.35}$$

Notons que si $\lambda$ est proche de 1 et les modes peu espacés, on peut introduire une densité spectrale moyennée sur une bande $\Delta\nu$ qui est égale à $< \Gamma_W(\nu) >_{\Delta\nu} \propto \nu^{-2H-1}$ et donne bien l'impression d'un processus auto-similaire avec un spectre en loi de puissance.

La décomposition sur une base de chirps est obtenue par la formule de Poisson et on a pour $W(t)$ avec des phases déterministes $\varphi_n = n\mu$ :

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\pi\mu}{2\ln\lambda}} e^{i\pi(1-H/2)}}{\ln\lambda} \exp\left(-\frac{2\pi n}{\ln\lambda}\right) \mathbf{\Gamma}\left(-H + i\frac{\mu + 2\pi n}{\ln\lambda}\right) t^{H - i\frac{\mu+2\pi n}{\ln\lambda}}. \qquad \text{(IV.36)}$$

L'équivalence entre une structure en somme de chirps et une périodicité géométrique du comportement fréquentiel est ici manifeste et étayée par le calcul. Quand nous considérons une version aléatoire de $W_g(t)$, il n'est plus possible de mener l'intégration ainsi ; nous verrons dessous comment l'analyse se reporte sur les propriétés spectrales. Cette double représentation se visualise de manière intéressante à l'aide d'une décomposition temps-fréquence rapportée en figure IV.11

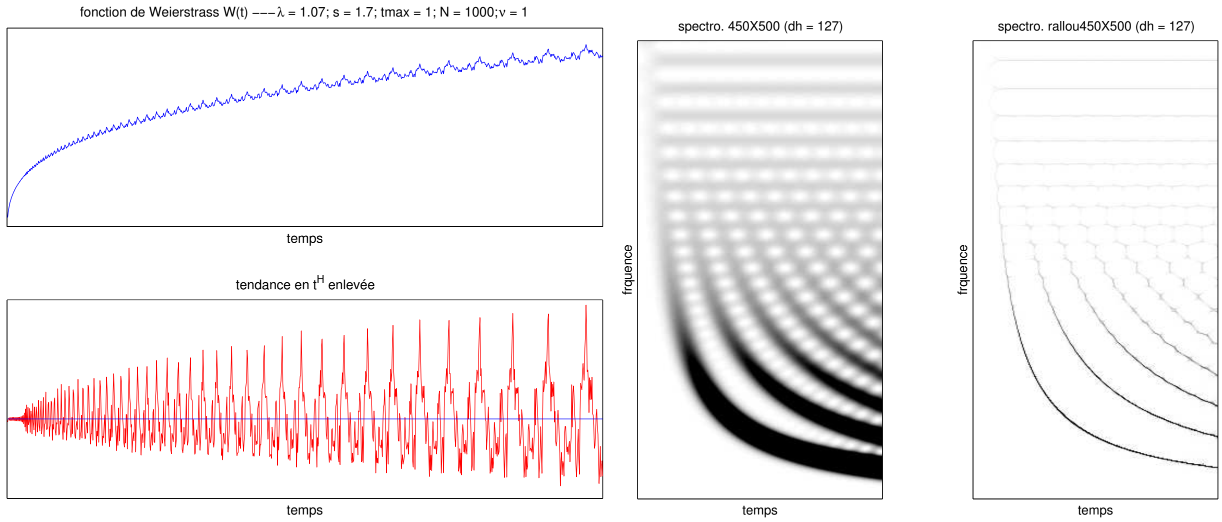



Fig. IV.11: À gauche on a tracé une fonction de Weierstrass déterministe et la même fonction une fois le mode de croissance général en $t^H$ enlevé (il ne reste que les oscillations de la DSI). À droite se trouvent les décompositions temps-fréquence (spectrogramme et spectrogramme réalloué) où sont bien visibles la double lecture possible pour $W(t)$ : une somme de chirps hyperboliques (détectés à basse fréquence quand la fenêtre du spectrogramme est de largeur comparable à la période au plus des fréquences cherchées) ou une somme de modes géométriquement espacés en fréquence (détectés quand la fenêtre est grande devant les périodes testées).

**Décomposition en chirps de $W_g(t)$.** La forme générale n'est pas toujours caclulable explicitement ; on peut exhiber les tendances sur la base de Mellin de $W_g(t)$ en passant par $\mathbf{M}$ avant de l'inverser. On obtient :

$$(\mathbf{M}W_g)(t) = \sum_n \lambda^{n(s-H)} \left(g(0)\delta(s) - (\mathbf{M}g)(s)\right). \qquad \text{(IV.37)}$$

Laissant de côté le problème de convergence, la sommation conduit à un facteur $1/(1-\lambda^{s-H})$ qui admet des pôles aux exposants (qui sont les dimensions complexes de Sornette) $s_n = H + i2\pi n/\ln\lambda$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Le calcul de la transformée de Mellin inverse à l'aide de la formule de Cauchy donne, en plus d'une partie régulière que nous laissons ici de côté, une somme de contributions en $t^{s_n}$ qui sont les contributions spécifiques sur la base de Mellin de $W_g(t)$ et qui signent la présence de DSI. Nous avons explicitement :

$$W_g(t) = f_r(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{M}g)(s_n)}{\ln\lambda} t^{H+i2\pi n/\ln\lambda}. \tag{IV.38}$$

La fonction $f_r(t)$ désigne le reste régulier de la fonction. Notons que le cas aléatoire ne permet pas toujours simplement ce calcul (et qu'alors c'est la corrélation ou une description spectrale qui se décompose sur la base de Mellin). Nous allons bientôt revenir sur l'importance de cette écriture sur une base de chirps. Avant cela, faisons un détour par l'étude des accroissements.

### 2.5.2 Une fonction à DSI et à accroissements stationnaires

**Processus accroissement de $W(t)$.** Les propriétés des versions stochastiques de la fonction de Weierstrass-Mandelbrot passent par l'étude de leurs accroissements. Pour $W(t)$, nous posons $\{V_\tau(t) = W(t+\tau) - W(t)\ ,\ t > 0\}$ dont la fonction de structure et celle de sa corrélation sont [BL80] :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{|V_\tau(t)|^2\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\lambda^{-2nH}\left(1-\cos\lambda^n\tau\right) && \text{(IV.39)}\\ R_{V_\tau}(t,s) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\lambda^{-2nH}\left(1-\cos\lambda^n\tau\right)e^{i\lambda^n(t-s)}. && \text{(IV.40)} \end{aligned}$$

Le processus des *accroissements* est *stationnaire* et c'est à ce titre qu'il est légitime de parler du spectre de $W(t)$ aléatoire, selon la théorie générale de [Yag87]. Nous mentionnons au passage l'analyse harmonique de $V_\tau(t)$ :

$$\begin{aligned} V_\tau(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\nu t}\sum_n \lambda^{-nH}\left(1-e^{i2\pi\nu\tau}\right)\delta\left(\nu - \frac{\lambda^n}{2\pi}\right)e^{i\varphi_n}\mathrm{d}\nu && \text{(IV.41)}\\ \Gamma_{V_\tau}(\nu) &= \left|1-e^{-i2\pi\nu\tau}\right|^2\sum_n \lambda^{-2nH}\delta\left(\nu-\frac{\lambda^n}{2\pi}\right). && \text{(IV.42)} \end{aligned}$$

dont découle le spectre de $W(t)$ donné en (IV.35).

**Processus accroissement de $W_g(t)$ aléatoire.** Partant de la version (IV.34) de $W_g(t)$, le processus accroissement est $V_{g,\tau}(t;\omega) = W_g(t+\tau;\omega) - W_g(t;\omega)$. Nous prenons l'hypothèse que les fonctions aléatoires sont orthogonales deux à deux, soit $\mathbb{E}\left\{g_n(u;\omega_n)\overline{g_m(v;\omega_m)}\right\} =$

$g(u)\overline{g(v)}\delta_{n,m}$ qui est entre autre réalisé pour le modèle aléatoire en $g(u;\omega) = e^{iu+\varphi(\omega)}$ de [BL80]. La fonction de structure à l'ordre deux est alors :

$$\mathbb{E}\, |V_{g,\tau}(t|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\lambda^{-2nH} \left|g(\lambda^n t) - (g(\lambda^n t + \lambda^n \tau)\right|^2 . \qquad \text{(IV.43)}$$

Nous ne savons pas alors résoudre l'équation fonctionnelle telle que $V_{g,\tau}(t;\omega)$ soit à **a.s.** : le terme ci-dessus ne doit dépendre que de $\tau$ et non de $t$. Des solutions immédiates sont $g(u;\omega) = e^{iu+\varphi(\omega)}$ avec $\varphi$ uniforme dans $[0\; 2\pi[$, ou $g(u;\omega) = e^{i\varphi(\omega)}(au+b)$ avec une phase du même type. La résolution générale pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ nous échappe. Nous verrons cependant au 3.1 comment synthétiser un modèle de $W_g(t;\omega)$ qui est à DSI et à **a.s.**

### 2.5.3 Analyse en ondelettes

L'outil des ondelettes permet de révéler directement dans les lois en échelle les oscillations log-périodiques qui existent et compliqueraient l'estimation de $H$. Soit $\psi(t)$ une ondelette et $T_X(t,a) = a^{-r} \int X(s)\psi((t-s)/a)\mathrm{d}s$ la transformée en ondelette de $X(t)$.

$$T_W(t,a) = -a^{1-r}\ \mathrm{Re}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^{-nH} e^{i\lambda^n t} \tilde{\psi}(\lambda^n a) \right\} . \qquad \text{(IV.44)}$$

Cette représentation est à nouveau une somme de contributions centrées sur des fréquences géométriquement réparties. Au premier ordre en supposant la transformée de Fourier $\tilde{\psi}$ de l'ondelette assez étroite, le diagramme en échelle du moment d'ordre $q$ de $T_W(t,a)$ moyenné sur le temps donne :

$$\ln \langle |T_W(t,a)|^q \rangle_t \simeq q(1-r-H)\ln a + \mathrm{Cte}_q - \frac{qH}{2\pi \ln \lambda} \sin \Phi(a_*) + q \ln |\tilde{\psi}(a_*)|, \qquad \text{(IV.45)}$$

où $a_* = \mathrm{E}(a \ln \nu_0 / \ln \lambda)$, et $\nu_0$ est le maximum de $\nu^{-H-1}\tilde{\psi}(\nu)$ ; enfin $\Phi(a)$ est une fonction log-périodique de période $\ln \lambda$. La figure IV.12 montre les oscillations qui s'ajoutent donc au comportement en loi de puissance de $\ln \left\langle |T_W(t,a)|^2 \right\rangle_t$ ainsi que les conséquences possibles sur l'estimation.

## 2.6 Réinterpréter les études avec Mellin de la DSI

Nous prouvons ici que les études de la DSI menées dans les articles déjà cités sur les approches par la transformée de Mellin survolées en 1.2 (DSI et analyse de Mellin) entrent dans le cadre de nos propositions. Ainsi que nous l'écrivions, ces recherches s'inscrivaient originellement dans les extensions des études de physique statistique des systèmes critiques aux mesures et fonctions fractales, en fait auto-similaires ou lacunaires. Ainsi l'outil théorique privilégié de description et d'analyse est la fonction de corrélation puis ses généralisations.

### 2.6.1 Survol des études de la DSI par les théories de potentiel

**Fonctions de corrélations et théorie du potentiel de Frostman.** Les recherches ont évolué en partant de l'utilisation simple des fonctions de corrélation à deux points d'une

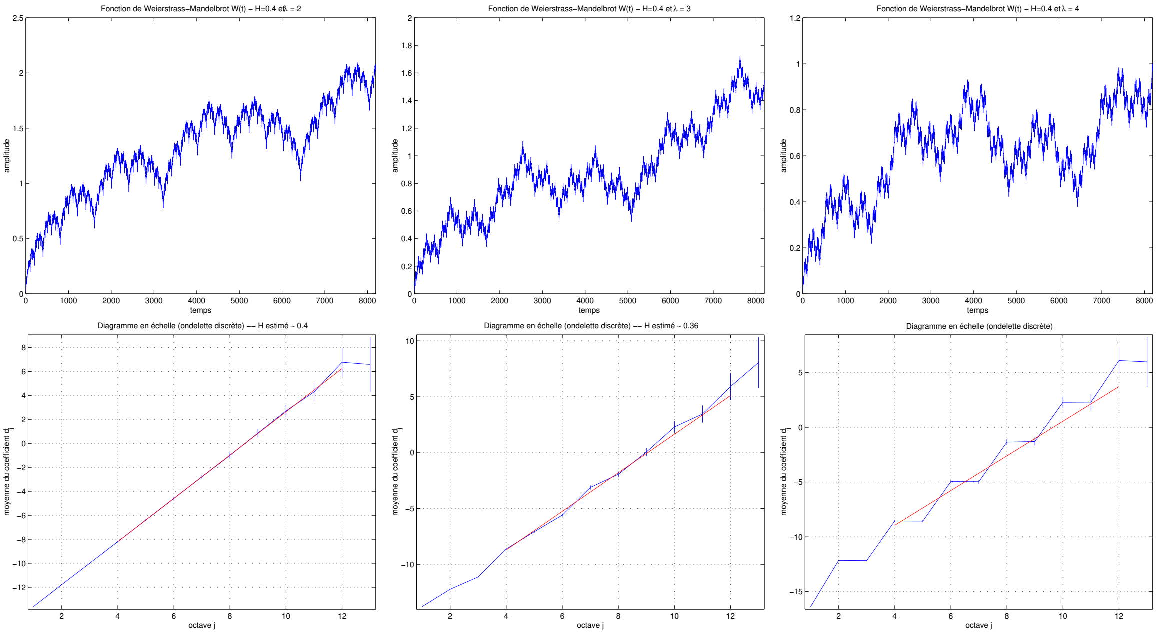



Fig. IV.12: Trois exemples de fonctions $W(t)$ pour $H = 0.4$ avec $\lambda$ égal à 2, 3 et 4 de gauche à droite. En-dessous on a calculé la représentation en ondelettes moyennée sur le temps comme en (IV.45) et tracée en log-log. Selon la valeur de $\lambda$ par rapport au pas d'analyse (ici sur la grille dyadique qui privilégie les rapports d'échelle de valeur 2), soit on ne voit pas la DSI ($\lambda = 2$), soit elle est flagrante (si $\lambda = 4$) soit, et c'est le cas général, elle pertube l'estimation de $H$ du fait des légères oscillations sans donner lieu à une fréquence en échelle facilement identifiable sur ce diagramme en échelle (ici cas où $\lambda = 3$).

mesure $\mu(x)$, $x \in \Omega$ (en général $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$), sujet privilégié au départ de ces études [BSTV87] :

$$\mathrm{C}_{\mu,2}(l) = \iint_{\Omega\times\Omega} \mathbb{H}(l - |x-y|)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y). \tag{IV.46}$$

On note $|\ |$ la norme sur l'espace $\Omega$. La dimension de capacité de la mesure est obtenue par le calcul de la limite aux petites distances : $D = \lim_{l\to 0^+} \ln \mathrm{C}_{\mu,2}(l)/\ln l$.

Une technique de calcul des dimensions de Hausdorff prend son origine dans les théories de champ comme l'électromagnétisme ou la gravitation et est connue sous le nom de théorie du potentiel [Fal90], introduite dans ce contexte par Frostman [Fro35]. Elle propose de regarder le potentiel en $x$ d'indice $s \in \mathbb{C}$ :

$$V_\mu(s;x) = \int_\Omega \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} \tag{IV.47}$$

L'intégrale en énergie $\mathrm{I}_\mu(s)$ est définie alors comme l'intégration de ce potentiel sur tout l'espace et on montre très simplement qu'elle est donnée par la transformation de Mellin[2] de

[2] La transformation de Mellin telle qu'ici écrite correspond à $\mathbf{M}$ en $1-s$ mais nous gardons l'écriture donnée ici par simplicité.

la fonction de corrélation. Nous notons $\Delta$ le diamètre de l'ensemble $\Omega$.

$$I_\mu(s) = \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} = \int_0^\Delta l^{-s}\mathrm{dC}_{\mu,2}(l). \tag{IV.48}$$

Sans entrer dans la formulation précise du théorème de Frostman (que l'on peut trouver en 4.13 de [Fal90] avec une démonstration), son interprétation dit que les points où l'intégrale en énergie $I_\mu(s)$ divergent fournissent des bornes à la dimension de Hausdorff de la mesure : si $I_\mu(s) < +\infty$, alors $D(\mu) \geq s$ ; (la propriété réciproque est vraie). En fait on a en général identité entre la dimension de capacité et la partie réelle de la position du premier pôle dans $I_\mu(s)$.

**Relation entre pôle de $I_\mu(s)$ et tendances dans $C_2(l)$.** Par la suite, l'existence d'un pôle dans l'intégrale en énergie, en plus de contraindre la dimension $D$, impose l'existence d'un comportement en loi de puissance dans la fonction de corrélation puisque celle-ci est obtenue en inversant la transformée de Mellin qui définit $I_\mu(s)$. Les trois situations classiques sont alors [BFS+87] :

1. pôle simple réel en $I_\mu(s) \sim \dfrac{\Delta^{-s}}{\alpha - s}$ qui conduit à une partie en loi de puissance réelle dans $\mathrm{C}_2(l)$ : $\mathrm{C}_2(l) \sim (l/\Delta)^\alpha/\alpha$, et donc un comportement auto-affine.
2. pôle multiple réel en $I_\mu(s) \sim \dfrac{\Delta^{-s}}{(\alpha-s)^m}$ qui implique $\mathrm{C}_2(l) \sim \dfrac{1}{\alpha^m}(l/\Delta)^\alpha \sum_k^{m-1} \dfrac{\alpha^k}{k!}\left(\ln\dfrac{\Delta}{l}\right)^k$ et introduit des corrections logarithmiques au comportement auto-similaire, connues pour être très fines et peu mesurables.
3. pôles complexes conjugués en $I_\mu(s) \sim \dfrac{\Delta^{-s}}{\alpha + i\gamma - s}$ + c.c., qui engendre un comportement : $\mathrm{C}_2(l) \sim \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}(1/\Delta)^\alpha \cos\left(\gamma \ln\dfrac{\Delta}{l} + \varphi\right)$, où $\tan\varphi = -\gamma/\nu$. C'est le cas qui conduit à des corrections log-périodiques tandis que les pôles dans $\mathbb{C}$ que sont $\alpha \pm i\gamma$ renouent avec l'interprétation de Sornette de la DSI comme l'existence de dimensions complexes dans le système.

**Dimensions de corrélation généralisées et transformation de Mellin.** Cette théorie se généralise pour l'étude de systèmes non strictement $H$-ss et potentiellement multifractals en regardant plutôt les corrélations généralisés [BFS+87, FTV89], qui donnent les dimensions généralisées [GP83]. Une définition possible est [FTV89] :

$$\mathrm{C}_{\mu,q}(l) = \frac{1}{q-1}\iint_{\Omega\times\Omega} \mathbb{H}(l - |x-y|)\,\mu^{q-2}\left(B[x,|x-y|]\right)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y), \tag{IV.49}$$

où $B[x,|x-y|]$ est une boule dans $\Omega$ de centre $x$ et de rayon $|x-y|$. Les dimensions généralisées viennent de $D_q = \lim_{l\to 0^+} \ln \mathrm{C}_q(l)/\ln l$ (et on a $D = D_2$). L'intégrale en énergie généralisée est à nouveau une transformée de Mellin de la corrélation et a la double écriture :

$$I_{\mu,q}(s) = \iint_{\Omega\times\Omega} \mu^{q-2}\left(B[x,|x-y|]\right)\frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} = \int_0^\Delta l^{-s}\mathrm{dC}_{\mu,q}(l). \tag{IV.50}$$

L'extension du théorème de Frostman est que les $D_q$ sont bornés par $s(q)/(q-1)$ où $s(q) = \alpha(q) + i\gamma(q)$ est un pôle de l'intégrale en énergie d'ordre $q$, et en général cette borne est la dimension de capacité généralisée. Le comportement des pôles donne la caractérisation de la mesure par ses propriétés multifractales à l'aide des exposant $\alpha(q)$ (que l'on sait relier au spectre multifractal $f(h)$ [Fri95, AAB$^+$95]) et les propriétés de DSI si des pôles complexes existent.

**Extension aux processus aléatoires.** Ces travaux concernant initialement des mesures déterministes s'étendent sans peine d'abord aux ensembles aléatoires, en prenant simplement les espérances des quantités étudiées. Le pendant aléatoire de la théorie potentielle simple est examiné dès [Fal90] (chapitre 15) tandis que [ST97] étudie les intégrales généralisées.

$$\mathbb{C}_{\mu,q}(l) = \mathbb{E}\,\mathrm{C}_{\mu,q}(l) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{I}_{\mu,q}(s) = \mathbb{E}\,\mathrm{I}_{\mu,q}(s) = \int_0^{\Delta} l^{-s}\mathrm{d}\mathbb{C}_{\mu,q}(l). \tag{IV.51}$$

L'extension à des signaux est possible, une façon étant de passer par une représentation en ondelettes et [GV92a] montre comment les ondelettes pour les mesures et celles pour les signaux sont reliées. Le travail accompli dans [Vai91, GV92b, GV92b, OTT93] pour généraliser le résultat de Frostman aux décomposition en ondelettes des mesures s'appuient ici sur une corrélation écrite comme :

$$\mathrm{T}_{\mu,q}(l) = l^{-q} \iint_{\Omega\times\Omega} g\left(\frac{|x-y|}{l}\right) \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y), \tag{IV.52}$$

avec $\lim_{l\to 0^+} l^{-q} g(r/l) = 0$. Passer à des signaux est possible en supposant que la dérivée $p^{\text{ème}}$ de $g$ est une ondelette. On peut alors prendre la mesure régulière $X(t)\mathrm{d}t$ pour analyser le signal.

Nous allons voir en fait que l'ondelette est une manière d'introduire un lissage particulier du signal et offre une nouvelle interprétation des résultats.

### 2.6.2 Interprétation pour les propriétés en échelle

**Lien avec les représentations mixtes.** À l'ordre deux, la fonction de corrélation de (IV.46) s'écrit avec la fonction porte $\mathbf{\Pi}$ de manière proche de (IV.52).

$$\mathbb{C}_{X,2}(l) = \mathbb{E} \iint \mathbf{\Pi}\left(\frac{u-t}{l}\right) X(t)\overline{X(u)}\mathrm{d}t\mathrm{d}u = \iint \mathbf{\Pi}\left(\frac{u-t}{l}\right) R_X(t,u)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}u. \tag{IV.53}$$

Sa transformation de Mellin donne une intégrale en énergie dont les pôles qualifient le comportement auto-similaire généralisé selon les travaux que nous avons rapportés :

$$\mathbb{I}_{X,2}(s) = \int_0^{\infty} l^{-s}\mathrm{d}\mathbb{C}_{X,2}(l) = \iint |u-t|^{-s} R_X(t,u)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}u. \tag{IV.54}$$

Ce n'est pas une surprise ; en plongeant la propriété d'harmonisabilité multiplicative pour un processus quelconque dans la fonction de corrélation, il vient à l'aide d'intégrales classiques [BBO96] :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{X,2}(l) &= \iiint \frac{t^{H+i2\pi\beta_1}}{1+H-i2\pi\beta_2}\left[(t+l)^{1+H-i2\pi\beta_2}-(t-l)_+^{1+H-i2\pi\beta_2}\right]\underline{\phi}_X(\beta_1,\beta_2)\mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\beta_2\mathrm{d}t \\
&= \iint N(\beta_1,\beta_2)\, l^{2H+i2\pi(\beta_2-\beta_1)+2}\underline{\phi}_X(\beta_1,\beta_2)\,\mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\beta_2. \qquad \text{(IV.55)}
\end{aligned}$$

Nous avons noté $N(\beta_1, \beta_2)$ un noyau dont la forme explicite est calculable (et dépend de $H$ en particulier) mais peu importante car c'est simplement une manière de lisser la distribution regardée, contrainte par le choix de $\mathbf{\Pi}$ pour la fonction de corrélation. Le passage par une fonction de corrélation avec une ondelette intégrée $g$ selon (IV.52) [OTT93] change simplement la structure de ce noyau.

Si le processus est à $(H, \lambda)$-DSI, la fonction spectrale $\underline{\phi}_X(\beta_1, \beta_2)$ se localise sur des droites parallèles à la diagonale et la fonction de corrélation est une somme de chirps oscillants :

$$\mathbb{C}_{X,2}(l) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\{\int N\left(\beta_2+\frac{n}{\ln\lambda},\beta_2\right)(\mathbf{M}C_n(\ln k))\,(-\beta_2)\mathrm{d}\beta_2\right\}\, l^{2H+2-i2\pi n/\ln\lambda} \qquad \text{(IV.56)}$$

Il faut comparer ceci avec les représentations mixtes temps-échelle de Mellin que l'on sait construire à partir du spectre de Wigner invariant en échelle et dont l'utilisation pour la DSI donne (IV.22). L'écriture précédente pour $\mathbb{C}_{X,2}(l)$ est en fait la marginale pour un temps $t \equiv l$ d'une représentation temps-échelle et nous pouvons exprimer comment le noyau $N(\beta_1, \beta_2)$ qui calcule ici la marginale vient d'un noyau de lissage $\underline{\Pi}(u, \beta)$ que l'on appliquerait à $\underline{W}_X(t, \beta)$ pour retrouver l'expression (IV.56).

Par la suite, en prenant la transformation de Mellin de $\mathbb{C}_{X,2}(l)$ pour en obtenir $\mathbb{I}_{X,2}(s)$, les chirps de Mellin qui y apparaissent dans le cas de la DSI donnent des singularités dans cette intégrale en énergie, plus précisément un spectre de raie avec des termes en $\delta(s-2H-2+i2\pi n/\ln\lambda)$.

**Pôles et pics des spectres de Mellin.** Un point est alors à clarifier : nous venons d'affirmer que le spectre de raies obtenu pour la DSI coïncide avec l'analyse en pôles initiale de la théorie de potentiel. C'est qu'en fait les théories de potentiel pour la DSI sont à la recherche d'une *contribution* de la DSI au comportement du système alors que si l'on suppose exactement vérifiée la DSI stochastique, nous devons obtenir *seulement* la signature de la DSI. L'analyse de Fourier rencontre les mêmes situations : d'un côté la recherche de composantes fréquentielles pures dans un signal pas forcément stationnaire, de l'autre la décomposition d'un signal uniquement en série de Fourier. Les pôles de la transformée de Mellin d'argument complexe (l'équivalent de celle de Laplace) donnent la position de pics contribuant aux signatures log-périodiques, tandis que si DSI exacte il y a, c'est la transformée $\mathbf{M}_H$ que l'on utilise (équivalente à $\mathbf{F}$) et on cherche alors les pics (de Dirac) dans ce spectre.

On peut illustrer cette discussion en partant d'une situation très générale invariante par une opération de renormalisation. L'exemple construit ici est proche d'une illustration de la DSI proposée dans [Sor98a]. Nous notons $\mathcal{O}$ une observable fonction d'un paramètre $x$, $\mathcal{R}$ le procédé de renormalisation et $\mathcal{G}$ la partie régulière qui rend compte des détails effacés (interaction entre les degrés de liberté microscopiques en physique statistique) par la renormalisation.

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{R}\left\{\mathcal{O}(x)\right\} + \mathcal{G}(x). \tag{IV.57}$$

Sous hypothèse que l'on peut linéariser l'action du groupe autour du point fixe $x_0$, il existe deux constantes $\mu$ et $\lambda$ telles que :

$$\mathcal{R}\left\{\mathcal{O}(x)\right\} \simeq \frac{1}{\mu}\mathcal{O}\left(x_0 + \lambda(x - x_0)\right). \tag{IV.58}$$

Si le groupe est celui de dilatations simples alors $\mu = \lambda^H$ et $x_0 = 0$. La solution générale d'un groupe de renormalisation est donnée par une somme analogue à une fonction de Weierstrass généralisée $W_g^*(t)$ mais pour des observables et des paramètres $t$ de nature potentiellement complexes. Le calcul mené ici est donc identique au calcul des modes sur une base de Mellin de $W_g^*(t)$.

• *Si la partie régulière n'est pas nulle.* La solution par itérations successives dans l'équation du groupe de renormalisation a pour écriture formelle :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(x) &= \lim_{m\to+\infty} \mathcal{R}^m\left\{\mathcal{O}(x)\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}^n\left\{\mathcal{G}(x)\right\} &\text{(IV.59)}\\ &\simeq \mathcal{O}(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^n}\mathcal{G}(x_0 + \lambda^n(x - x_0)). &\text{(IV.60)}\end{aligned}$$

À ce point, la transformation de Mellin est un outil usuel pour résoudre cette équation qui porte sur des processus dilatés. Il faut placer l'origine de la transformée en $x_0$ et nous posons donc pour la suite $x_0 = 0$ (obtenu par une translation simple).

$$(\mathbf{M}\mathcal{O})(s) = \mathcal{O}(x_0)\delta(s) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{sn}}{\mu^n}(\mathbf{M}\mathcal{G})(s) = \mathcal{O}(x_0)\delta(s) + (\mathbf{M}\mathcal{G})(s)\frac{\mu}{\mu - \lambda^s}. \tag{IV.61}$$

Le système est donc décrit par une observable qui admet des pôles en représentation de Mellin. Mieux, si on regarde une mesure de l'observable comme une une fonction aléatoire, où l'on obtient $< \psi|\mathcal{O}|\psi >$ si $\psi$ est l'état aléatoire, nous déduisons de son écriture harmonique multiplicative la représentation en sortie de filtre invariant en échelle de fonction de transfert $|(\mathbf{M}\mathcal{G})(s)\mu/(\mu - \lambda^s)|^2 + |\mathcal{O}(x_0)|^2\delta(s)$. Les pôles de la fonction de transfert sont alors associés aux chirps de Mellin exacts, c'est-à-dire aux lois de puissance plus ou moins modulées logarithmiquement, dans la fonction de corrélation de l'observation.

Ceci correspond au cas général des études de la DSI par transformation de Mellin, et assez régulièrement aux situations raportées dans [Sor98a]. La DSI n'est pas exacte ; elle est une contribution qui s'ajoute au comportement en échelle.

• *Si la partie régulière est nulle.* L'équation de DSI est exactement vérififée si $\mathcal{G} \equiv 0$, laissant l'égalité simple entre l'observable et sa version renormalisée. La représentation de Mellin de l'équation d'invariance donne directement pour le groupe de renormalisation linéarisé :

$$(\mathbf{M}\mathcal{O})(s) = \frac{\lambda^s}{\mu}(\mathbf{M}\mathcal{O})(s) \tag{IV.62}$$

La DSI impose ainsi que $\lambda^s/\mu = 1$ et nous avons déjà eu l'occasion de résoudre cette simple équation dans $\mathbb{C}$ (quand $\mu = \lambda^H$) en introduisant la DSI au sens déterministe : il faut que $s_n = \dfrac{\ln\mu}{\ln\lambda} + i\dfrac{2\pi n}{\ln\lambda}$, $n \in \mathbb{Z}$. La décomposition de Mellin est donc distribuée de manière singulière (par des pics de Dirac) sur les variables d'échelle (dans $\mathbb{C}$) représentatives d'oscillations log-périodiques.

• *Analyse paramétrique des contributions en DSI et autres.* Le développement naturel de ces remarques est que, selon les situations, on préfèrera adopter une représentation avec des spectres de Mellin continus dans lesquels certains pôles signent une tendance à la DSI ; ou une représentation en série discrète si la DSI est analysée selon un modèle paramétrique exacte.

Un développement du travail serait alors de mettre en place comme il existe dans les cadres stationnaire et non stationnaire les procédures d'estimations paramétriques des densités spectrales continues ou de raies qui décrivent les diverses situations rencontrées.

**Exemple : mesure de Cantor.** En application des méthodes de potentiel, le calcul des propriétés de la mesure triadique de Cantor part de l'équation : $\mu(x) = \lambda^D\mu(x/\lambda^D)P(\ln x)$ ou $D$ est sa dimension, $G$ une fonction périodique et $\lambda = 1/3$. Pour une mesure aléatoire où l'équation ne tient qu'en moyenne, le calcul est développé dans [BFS⁺87] et conduit à localiser les pôles de $\mathbb{I}_{\mu,q}(s)$ en résolvant : $\sum_n p_n^q \lambda_n^{-s(q)} = 1$. Les $p_n$ sont les poids de la mesure sur chaque segment et la somme porte sur les différents segments du Cantor. Pour une mesure symétrique, $l_{1,2} = 1/3$ et $p_{1,2} = 1/2$ et les pôles sont en $s_n(q) = (q-1)\frac{\ln 2}{\ln 3} + i\frac{n2\pi}{\ln 3}$, linéaires en $q$ puisque la mesure est simplement fractale, et on a des dimensions complexes généralisées $D_q/(q-1)$, donc des lois de puissance avec oscillations en $l^{s_n(q)}$ dans la fonction de corrélation d'ordre $q$.

Le calcul est prolongé [BFS⁺87, ST97] pour les mesures de Cantor multifractales et on obtient toujours les pôles en résolvant le groupe de renormalisation qui sert à la construction de la mesure de Cantor aléatoire [Fal90] : $\sum_n p_n^q \lambda_n^{-s(q)} = 1$ et implique sur l'intégrale énergie que :

$$\mathbb{I}_{\mu,q}^{(l)}(s) = \sum_n p_n^q \lambda_n^{-s} \mathbb{I}_{\mu,q}^{(l-1)}(s) + \mathrm{R}_n(p,\lambda,s), \tag{IV.63}$$

où le calcul du reste est un peu long [ST97]. Cependant dans tous les cas on exhibe les tendances log-périodiques en plus de la multi-fractalité dans les fonctions de corrélations généralisées ; des calculs numériques à l'aide de la représentation en ondelettes les montrant sont reportés dans [GV92b].

### 2.6.3 Fonction de Weierstrass : une route vers les courbes à DSI

La fonction de Weierstrass peut servir de prototype pour les courbes à DSI de deux manières : pour les processus à DSI, nous verrons ci-dessous le modèle à **a.s.** que nous proposons ; d'autre part une étude déterministe différente est proposée dans [GS02] et prolonge l'analyse en chirps de Mellin des fonctions de type Weiertrass de (IV.38) et nous nous en faisons l'écho ici.

Le modèle de Weierstrass est étendu par la généralisation de l'écriture en chirps de $W(t)$ que nous donnons en (IV.36). Cela revient en fait à considérer une fonction qui obéit à un groupe de renormalisation quelconque de sorte que sa transformée de Mellin s'écrit comme (IV.61) et l'inversion conduit à des chirps dont les exposants sont les pôles de $(\mathbf{M}\mathcal{O})(s)$ :

$$\mathcal{O}(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{-s_n} \quad \text{avec} \quad s_n = \frac{\ln \mu}{\ln \lambda} + i\frac{2\pi n}{\ln \lambda}. \tag{IV.64}$$

À cette partie singulière peut se rajouter un comportement régulier sans chirps. La classification proposée par Gluzman et Sornette étudie le comportement pour $n$ grand des résidus $A_n = (\mathbf{M}\mathcal{G})(s_n)/\ln\lambda$ qui se comporte asymtotiquement comme :

$$A_n \sim \frac{1}{n^p}\, e^{-\kappa n} e^{i\psi_n} \quad \text{pour} \quad n \to +\infty. \tag{IV.65}$$

Les propriétés de la forme asymptotique générale sont montrées dans [GS02] et il est conjecturé que la fonction de Weierstrass déterministe, pour laquelle $A_n \sim n^{-H-1/2} e^{i\omega n \ln(\omega n)}$ où $H = \ln\mu/\ln\lambda$ et $\nu = 2\pi/\ln\lambda$, constitue une valeur critique vis-à-vis de la différentiabilité des courbes obtenues.

- Si $\kappa > 0$ alors la courbe est régulière.
- Si $\kappa = 0$ et les phases sont moins mélangeantes que $\omega n \ln(\omega n)$ (par exemple en $\omega n$ seulement), le graphe obtenu comporte des singularités isolées.
- Si $\kappa = 0$ et $\psi_n = \omega n \ln(\omega n)$, les phases parcourent ergodiquement le cercle unité et le graphe est non-différentiable et fractal.
- Enfin si $\kappa = 0$ et les phases au moins aussi mélangeantes que $\omega n \ln(\omega n)$ (et varient plus vite éventuellement) et ergodiques, le graphe est fractal. Une conjecture est que la partie singulière (qui vient des pôles de $(\mathbf{M}\mathcal{O})(s)$) n'est pas dérivable à partir de l'ordre $l_{\min} = \mathrm{E}[p - 3/2]$.

Nous ajoutons à cela que les modèles aléatoires avec des phases décorrélées appartiennent à la catégorie des courbes fractales puisque les phases $\varphi_n$ sont justement supposées ergodiques dans $[0\ 2\pi[$. Actuellement cette étude n'a pas conduit à des méthodes d'estimation des contributions de la DSI : pour cela il faudrait proprement développer les représentations paramétriques des processus à DSI qui permettront d'estimer le modèle convenable et donc les pôles de sa transformée de Mellin, à partir de l'observation de données.

## 2.7 DSI et processus aléatoires : un point de vue général

Nous pouvons résumer en quelques lignes le chemin parcouru dans l'étude de l'invariance en échelle discrète. Introduite dans le nouveau cadre des processus aléatoires, nous avons réinterprété la DSI comme l'existence d'une périodicité en échelle et montré comment l'analyse des propriétés de symétrie générales en échelle par une tranformation à la Lamperti permet de développer ce que sont les processus à DSI et de proposer des idées générales sur leur analyse.

Ensuite nous avons proposé un regard neuf sur les études menées par d'autres auteurs, et parfois dans des cadres différents, en montrant comment elles se coulaient naturellement dans les théories au-delà de $H$-ss que nous regardons. Ce sont en particulier les études de potentiels pour les dimensions généralisées de la physique statistique (portant sur les mesures fractales) puis l'étude des fonctions fractales lacunaires à l'aide des générateurs particuliers que sont les fonctions de Weierstrass, les équations type renormalisation et la classification par développement sur une base de chirps.

Notons qu'une perspective intéressante de développement serait de continuer le travail accompli sur les fonctions aléatoires générées par la méthode des systèmes de fonctions itérées ou IFS [Dao96], dont des résultats récents donnent les propriétés de convergence [HR00] et pour lesquelles débutent à la fois les calculs théoriques des propriétés statistiques et les études liées à l'estimation. Ces IFS obéissent à une construction hiérarchique, en débordant du cadre des fractales géométriques aléatoires à la Falconer [Fal86], qui peut soit imposer un rapport d'échelle caractéristique à l'image d'un groupe de renormalisation comme (IV.57), soit imposer un ensemble de changements en échelle particuliers qui demanderait alors d'être étudié dans un formalisme de processus presque à DSI, analogues après lampertisation des processus presque cyclostationnaires [Hur97]. Dans les deux cas le calcul théorique du type de DSI qu'induit un IFS donné ou les possibilités d'estimation ou de codage de la DSI par les IFS restent des prolongements non abordés à ces travaux.

## 3 Séquences aléatoires à invariance en échelle discrète

Nous revenons pour ne plus les quitter dans ce chapitre aux fonctions aléatoires et nous penchons ici sur les aspects pratiques des séquences à invariance en échelle discrète, la synthèse et l'analyse. Le problème de synthèse sera abordé en deux étapes. La première est de montrer comment proposer des modèles à DSI et accroissements stationnaires que l'on sait générer à l'aide des méthodes basées sur les fonctions de corrélation ou spectrales. La seconde fait appel aux modèles paramétriques à temps discret, étendant au cas DSI les méthodes regardées en II.5.3 pour les séquences auto-similaire, soit avec des systèmes d'Euler-Cauchy discrétisés, soit à l'aide d'opérateur de différence fractionnaire. L'analyse sera accomplie à l'aide des périodogrammes cycliques (marginalisés en particulier) introduits ci-dessus ou les représentations mixtes temps-échelle et illustrée principalement dans ce paragraphe sur les exemples que nous construisons.

### 3.1 Méthode spectrale ou par la corrélation

#### 3.1.1 DSI à accroissement stationnaire

Le calcul classique, rappelé au 4.4, qui contraint la fonction de corrélation des processus $H$-ss et à accroissements stationnaires à être semblable à celle d'un fBm d'exposant $H$, selon (II.236), est adapté ici au cas où l'on impose DSI et **a.s.**

*Démonstration* — Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus à DSI et **a.s.**. On prend $s \geq t \geq 0$. Le développement de $(X(t) - X(s))^2$ et la stationnarité des accroissements $X(t) - X(s)$ impliquent que :

$$\mathbb{E}\{X(t)X(s)\} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\{X(t)^2\} + \mathbb{E}\{X(s)^2\} - \mathbb{E}\{(X(t) - X(s))^2\}\right) \quad \text{(IV.66)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\{X(t)^2\} + \mathbb{E}\{X(s)^2\} - \mathbb{E}\{(X(s-t) - X(0))^2\}\right). \quad \text{(IV.67)}$$

La propriété de DSI impose ensuite que $\mathbb{E}\{X(\lambda u)^2\} = \lambda^{2H}\mathbb{E}\{X(u)^2\}$ pour le $\lambda$ privilégié ce qui autorise un développement en série de Mellin de la variance (on pose $v_n = C_n(0)$) :

$$\mathbb{E}\left\{X(u)^2\right\} = u^{2H} \sum_{n=\infty}^{\infty} v_n u^{i2\pi n/\ln\lambda}. \tag{IV.68}$$

Il ne reste plus qu'à plonger cette forme dans l'équation (IV.67). Avant cela il faut examiner le comportement du processus à l'origine. De la même façon que le temps origine est particulier pour les processus $H$-ss, il n'est pas quelconque pour la DSI puisque c'est un point d'attraction fixe des opérations de dilatations qui la définissent. Nous sommes alors obligés de particulariser l'origine en lui attribuant une valeur nulle presque certaine (puisque $X(0)$ doit être égal en loi à $\lambda^{nH}X(0)$). Ceci permet d'utiliser alors (IV.68) pour calculer $\mathbb{E}\{(X(s-t)-X(0))^2\}$. Le calcul de la corrélation des accroissements est alors direct et on a le résultat qui suit.

□

Proposition IV.6: *Les fonctions de corrélations d'un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ à $(H,\lambda)$-DSI et* ***a.s.*** *et de ses accroissements $Z_\tau(t) = X(t+\tau) - X(t)$ prennent nécessairement les formes :*

$$\begin{aligned} R_X(t,s) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{v_n}{2}\left(t^{2H+i2\pi n/\ln\lambda} + s^{2H+i2\pi n/\ln\lambda} - (s-t)^{2H+i2\pi n/\ln\lambda}\right), && \text{(IV.69)} \\ R_{Z_\tau}(t,t+k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{v_n}{2}\left(|k+\tau|^{2H+in2\pi/\ln\lambda} + |k-\tau|^{2H+in2\pi/\ln\lambda} - 2|k|^{2H+in2\pi/\ln\lambda}\right) && \text{(IV.70)} \end{aligned}$$

De tels processus peuvent alors être synthétisés (et aussi étudiés) à l'aide de la stationnarité des accroissements ce qui est un avantage certain. Le problème est que la forme donnée est nécessaire mais non suffisante : il faut encore imposer que $R_X$ soit définie positive et la condition qui porte alors sur l'ensemble des $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas facilement exploitable.

### 3.1.2 Généralisation de la fonction de Weierstrass-Mandelbrot

Nous introduisons alors un modèle assez général qui est à DSI et **a.s.** en partant de la fonction de Weierstrass que l'on a vue posséder justement ces deux propriétés. La construction qui vient est une approche suffisante pour des processus DSI et **a.s.** et qui reste assez large.

Nous ne savons pas donner une condition générale sur $g$ pour imposer que $W_g(t)$ est à **a.s.** mais il est possible de définir d'abord un processus à accroissements stationnaires tel qu'il porte en germe la DSI du processus intégré. La corrélation des accroissements d'un processus doit globalement adopter la forme $f(k+\tau) + f(k-\tau) - 2f(k)$ où $\tau$ est le pas de l'accroissement et $k$ le retard. Nous proposons à l'image de $W_g$ de décomposer cette fonction $f$ en modes géométriquement répartis, sous la forme $G(\lambda^n k)$, ce qui va conduire, et nous allons le montrer, à de la DSI pour le processus intégré.

Proposition IV.7: *Les séquences aléatoires $\{X_\tau[n], n \in \mathbb{N}\}$ définis par $X_\tau[0] \stackrel{d}{=} 0$ et par la fonction de corrélation de leurs accroissements $Z_\tau[k] = X_\tau[k+1] - X_\tau[k]$, pour $k \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une fonction $G$ quelconque telle que :*

$$R_{Z_\tau}(t, t+k\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^{-2nH}\left\{G(\lambda^n(k\tau+\tau)) + G(\lambda^n(k\tau-\tau)) - 2G(\lambda^n k\tau)\right\}, \quad \textit{avec} \quad (t/\tau) \in \mathbb{N}, \tag{IV.71}$$

*sont des séquences à $(H,\lambda)$-DSI et à **a.s.** que l'on sait calculer en intégrant $(Z_\tau)[k]$.*

*Démonstration* — La forme (IV.71) assure que $(Z_\tau)[k]$ est une séquence stationnaire. En connaissant la valeur du processus intégré à l'origine, on sait alors calculer les réalisations de $\{X_\tau[n], n\in\mathbb{N}\}$ à tout temps. Il reste à montrer que $\{X_\tau[n], n\in\mathbb{N}\}$ est bien à DSI. Considérons la fonction $k \longrightarrow \sum_n \lambda^{-2nH}G(\lambda^n k)$. Cette fonction est à $(H,\lambda)$-DSI et sa décomposition sur la base de Mellin est obtenue en calculant la somme à l'aide de la formule de sommation de Poisson :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{-2nH}G(\lambda^n k) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^{-2Hy}G(\lambda^y k)e^{-i2\pi my}\mathrm{d}y &\text{(IV.72)}\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^{-2Hz}G(\lambda^z)e^{-i2\pi mz}\mathrm{d}z\right)k^{2H+im\frac{2\pi}{\ln\lambda}}. &\text{(IV.73)}\end{aligned}$$

La fonction de corrélation (IV.71) prend alors la forme (IV.70) avec pour coefficients $v_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^{-2Hz}G(\lambda^z)e^{-i2\pi mz}\mathrm{d}z$, et pour le processus intégré $X$ on a aussi la forme (IV.69) et il est bien à **a.s** et DSI.

□

Il faut noter que le choix de la fonction est très libre et qu'en pratique, imposer $G$ conduit généralement à une corrélation $R_{Z\tau}$ qui est bien définie positive alors qu'imposer les $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'assure en général pas cela. Noter aussi que le modèle est explicitement construit à temps discret en échantillonnage arithmétique puisqu'on obtient $X$ par

$$X_\tau[n] = X_\tau[0] + \sum_{k=1}^{n} Z_\tau[k]. \qquad \text{(IV.74)}$$

On ne sait pas revenir à un modèle à temps continu puisqu'il faudrait alors imposer un comportement convenable de $G$ avec $\tau$ variable selon

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, Z_{\tau_1}[k]Z_{\tau_2}[m] &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\{G(\lambda^n(k\tau_1+m\tau_2)) + G(\lambda^n((k+1)\tau_1-(m+1)\tau_2))\\ &\quad -G(\lambda^n((k+1)\tau_1-m\tau_2)) - G(\lambda^n(k\tau_1-(m+1)\tau_2))\}, \qquad \text{(IV.75)}\end{aligned}$$

qui revient à nouveau à chercher à résoudre l'équation générale pour imposer que $W_g(t)$ a des accroissements stationnaires. Le modèle proposé à temps discret n'oblige pas à résoudre cette équation car on n'a pas besoin de raccorder avec cette contrainte le comportement de $G$ à tout temps.

La figure IV.13 rapporte un exemple construit tel que nous venons de l'expliquer et illustre ses propriétés par l'analyse de ses statistiques et du spectre usuel.

### 3.1.3 Remarques sur les algorithmes

Étant donnée une covariance stationnaire de la forme (IV.71), les méthodes de synthèses spectrales qui reposent sur la stationnarité nous sont accessibles. En quelques lignes elles sont les suivantes.

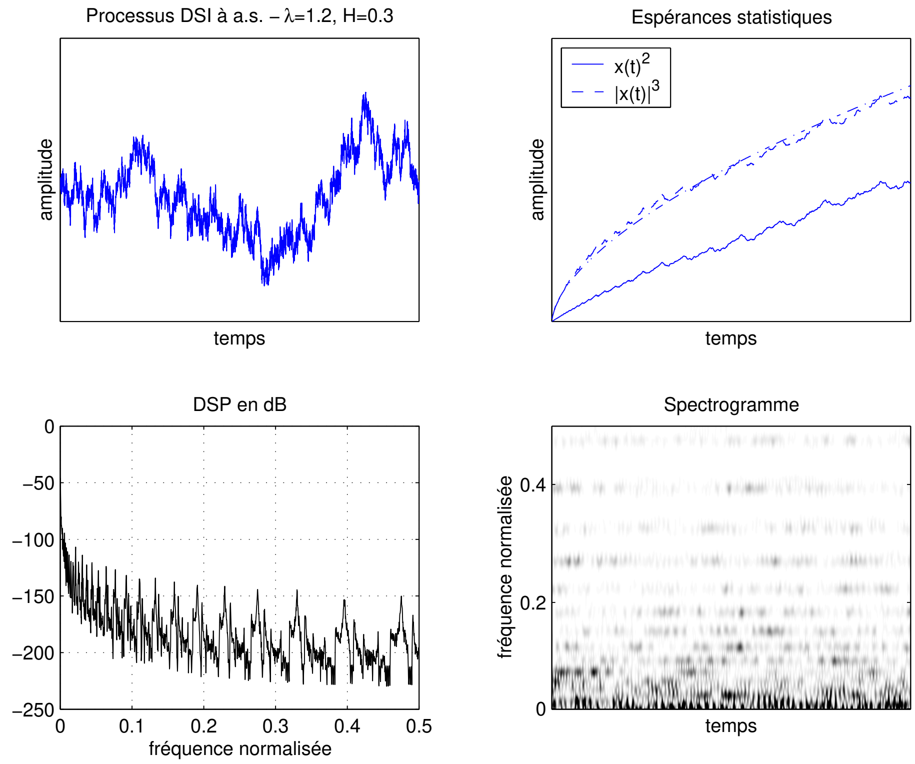



Fig. IV.13: Exemple de réalisation de processus à DSI et accroissements stationnaires à l'aide de la généralisation construite à partir de la fonction de Weierstrass. La synthèse est faite à l'aide de la méthode de la matrice circulante. Paramètres $H$=0.3 et $\lambda = 1.2$. On présente l'estimation des deux premiers moments à droite (avec en traits mixtes le comportement théorique attendu en $t^{2H}$ de la variance) ; le spectre d'une réalisation en bas à gauche et une représentation temps-fréquence correspondante. Sur les deux, la répartition en série géométrique des principaux modes en fréquence y sont bien visibles.

• *Methodes de Choleski et de Levinson.* La factorisation de Choleski, très coûteuse algorithmiquement parlant, est remplacée avantageusement dans le cas stationnaire par celle de Levinson qui utilise la structure de Toeplitz de la matrice de corrélation $(R)_{nl} = R_{Z_\tau}(n-l)$. La complexité est réduite de $O(N^3)$ à $O(N^2 \ln N)$ pour générer $N$ points.

• *Méthodes spectrales.* La connaissance de $R_{Z_\tau}$ implique celle du spectre et la possibilité alors de synthétiser dans le domaine fréquentiel (ici pour un temps échantillonné dès la définition du modèle) la séquence. La difficulté réside dans la structure de phase à imposer à l'écriture harmonique du processus qui n'est pas facilement contrôlable. On sait revenir à un processus Gaussien en imposant des phases i.i.d. uniformes dans $[0\ 2\pi[$ mais des lois plus compliquées ont des répercussions délicates à préciser sur la phase dans le domaine spectral et même le choix des phases que nous avons précisé est une condition suffisante mais non nécessaire pour les processus normaux. Ce cas restreint induit une synthèse rapide (en $O(N \ln N)$ du fait de la FFT) de processus Gaussiens à **a.s.** et DSI et reste utile.

• *Méthode de la matrice circulante.* Proposée par Wood et Chan [WC94], raffinée par Dietrich et Newsam [DN97], elle est une manière efficace de synthétiser de façon exacte des processus stationnaires gaussiens en $O(N \ln N)$. Elle a été reprise pour la simulation de processus $H$-ss dans [Cœu00] et [PHJI01] où le lecteur pourra trouver des détails sur son implémentation.

En quelques mots, pour synthétiser $N$ points d'un processus stationnaire avec une corrélation imposée, on plonge la matrice $R$ dans une matrice circulante $C$ de taille $M \geq 2N$ avec $C_m = R(m)$ si $m \leq N$ et $C_m = R(N-m)$ si $M - N \leq m \leq M$. Les autres coefficients $C_m$ pour $N < m < M - N$ sont choisis tels que $C$ reste définie positive. En général $M = 2N$ suffit et les coefficients peuvent être fixés à 0. Puisque $C$ est une matrice cirulante, elle se factorise facilement comme $C = Q\Lambda Q^t$, où $\Lambda$ est une matrice diagonale avec des valeurs propres réelles positives (si elles ne le sont pas, c'est que $C$ ne reste pas définie positive) et $Q$ une matrice unitaire. Par la suite $Q\sqrt{\Lambda}U$ où $U$ est un vecteur aléatoire blanc et Gaussien, admet $R$ comme matrice de corrélation des $N$ premiers points de la séquence. L'implémentation par FFT de la méthode (pour la calcul de la décomposition) induit la complexite en $O(N \ln N)$.

En plus d'être rapide et exacte, cette méthode présente l'avantage numérique de pouvoir facilement vérifier que le modèle donné par (IV.71) est bien une fonction de corrélation sans être sensible aux problèmes de précision numérique finie. Ceux-ci empêchent dans certains cas les algorithmes de Choleski et Levinson d'être utilisables car on ne sait pas proprement corriger l'erreur en projetant $R$ dans l'espace des matrices définies positives. Ici on peut obtenir des valeurs propres de $\Lambda$ négatives mais de très faible amplitude comme signature des problèmes de précision numérique. La correction des erreurs est facile en fixant ces fausses valeurs à zéro pour engendrer un processus très proche de ce qu'on recherche. Une extension de la méthode aux processus non Gaussien permet de fixer la loi de probabilité ponctuelle en changeant la loi du vecteur $U$.

## 3.2 Modèles paramétriques discrétisés

Si l'on poursuit un parallèle avec le chapitre II.5.3, trois autres méthodes générales sont possibles pour la synthèse des séquences à DSI. La première serait de passer par une expression en sortie de filtre invariance en échelle (discrète) des processus à DSI ; elle est peu utilisable du fait de la grande non stationnarité des filtres. Nous examinons ici les méthodes directement temporelles qui s'appuient sur les deux types de modèles paramétriques étudiés : ceux, exacts, qui sont les discrétisés des systèmes d'Euler-Cauchy introduits par la Proposition IV.5 ; ceux, approchés, que l'on construit par le calcul fractionnaire.

### 3.2.1 Discrétisation des EC à DSI d'ordre 1

Ainsi qu'il fut fait dans le cas auto-similaire, un équivalent à temps discret des EC à DSI est obtenu à partir de la forme de la solution sur un intervalle fini. En repartant de l'équation différentielle avec un bruit $V(t)$ multiplicatif blanc d'exposant $H$ en entrée (et de variance unité) :

$$\sum_{n=0}^{p} \alpha'_n(t) t^n X^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{q} \beta'_n(t) t^n \sigma(t) V^{(n)}(t), \tag{IV.76}$$

on cherche la fonction de Green $G(t,u)$ de condition initiale $G(u,u) = 1$ et vérifiant :

$$\sum_{n=0}^{p} \alpha_n'(t) t^n \frac{\partial^n G(t,u)}{\partial t^n} = \delta(t-u). \tag{IV.77}$$

La forme générale de la solution est donc :

$$X(t_k) = G(t_k, t_{k-1}) X(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} G(t_k, u) \left( \sum_{m=0}^{q} \beta_q'(u) u^q V^{(m)}(u) \right) \mathrm{d}u. \tag{IV.78}$$

Nous réduisons le calcul et la discussion du modèle à l'ordre 1 (pouvant toujours combiner $N$ modèles d'ordre 1 en parallèle pour engendrer un système d'ordre $N$ [Gug92]) qui s'écrit avec $a(t)$ et $\sigma(t)$ des fonctions log-périodiques de $t$ :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{a(t) - H}{t} X(t) = \frac{\sigma(t) V(t)}{t}. \tag{IV.79}$$

Le propagateur est donné par intégration immédiate :

$$G(t,u) = \exp\left( -\int_u^t \frac{a(v)}{v} \mathrm{d}v \right) = \left( \frac{t}{u} \right)^{-c_0} \frac{F(t)}{F(u)}, \tag{IV.80}$$

$$\text{avec} \quad F(u) = \prod_{n \neq 0} \exp\left( \frac{-i c_n \log\lambda}{2\pi n} u^{i2\pi n/\log\lambda} \right), \tag{IV.81}$$

où $c_0$ et $F$ viennent de l'expansion de $a(t)/t$ sur la base de Mellin comme $(a(t) - H)/t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^{-1-i2\pi n/\log\lambda}$. Si on compare au modèle $H$-ss pour lequel $G(t,u) = (t/u)^{H-a}$ et $c_0 = a - H$, c'est la partie oscillante donnée par $F$ qui modifie le propagateur et rend compte de la DSI. Nous identifions dans solution sur un intervalle finie de (IV.78) pour l'ordre 1 les coefficients du modèles à temps discret de la forme :

$$X_\tau[k] = a[k] X_\tau[k-1] + e_k, \tag{IV.82}$$

et on a $a_k = G(t_k, t_{k-1})$ ; $e_k$ est un bruit $e_k = \int_{\tau(k-1)}^{\tau k} G(t_k, u) \sigma(u) V(u) u^{H-1/2} \mathrm{d}u$, dont la covariance non stationnaire s'écrit comme :

$$\mathbb{E}\left\{ e_k \overline{e_k} \right\} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |G(t_k, u)|^2 |\sigma(u)|^2 u^{2H-1} \mathrm{d}u. \tag{IV.83}$$

Afin de comprendre le comportement de ce système, nous examinons le comportement à long temps de ses coefficients. D'une part $a_k \simeq (1 - c_0/k) F_k / F_{k-1}$ aux grands $k$ ce qui suggère que l'évolution temporelle de $a_k$ devient faible sauf pour la partie due à la DSI (imposée par $F$). D'autre part le bruit est de variance à grand $k$ en $\mathbb{E}\{e_k \bar{e}_k\} \simeq {t_k}^{2H-1} \tau |\sigma_k|^2 (1 + \tau F_k'/2t_k)$. La croissance générale de type auto-similaire (telle que la variance augmente globalement comme $k^{2H}$) est pilotée comme cela était pour le modèle uniquement $H$-ss par le bruit d'entrée. Inversement la part de DSI n'est qu'au second ordre dans cette entrée tandis qu'elle domine le comportement de $a_k$.

La séquence $X_\tau[k]$ solution de ce modèle est auto-similaire car sa corrélation vient de :

$$R_X(t,s) = \int_{t_0}^{\min(t,s)} \left(\frac{t\,s}{u^2}\right)^{-c_0} |\sigma(u)|^2 \frac{F(t)\overline{F(s)}}{|F(u)|^2} u^{2H-1}\mathrm{d}u + G(\min(t,s),t_0)\mathbb{E}\left\{X(t_0)^2\right\}, \tag{IV.84}$$

qui vérifie la propriété (IV.2) sous hypothèse que le système est de réponse stable ($G(t,t_0) \longrightarrow 0$ quand $(t-t_0) \longrightarrow +\infty$) ou de condition initiale choisie égale de loi identique à la loi s'équilibre. Le système est alors à $(H,\lambda)$-DSI. Nous en montrons un exemple en figure IV.14.

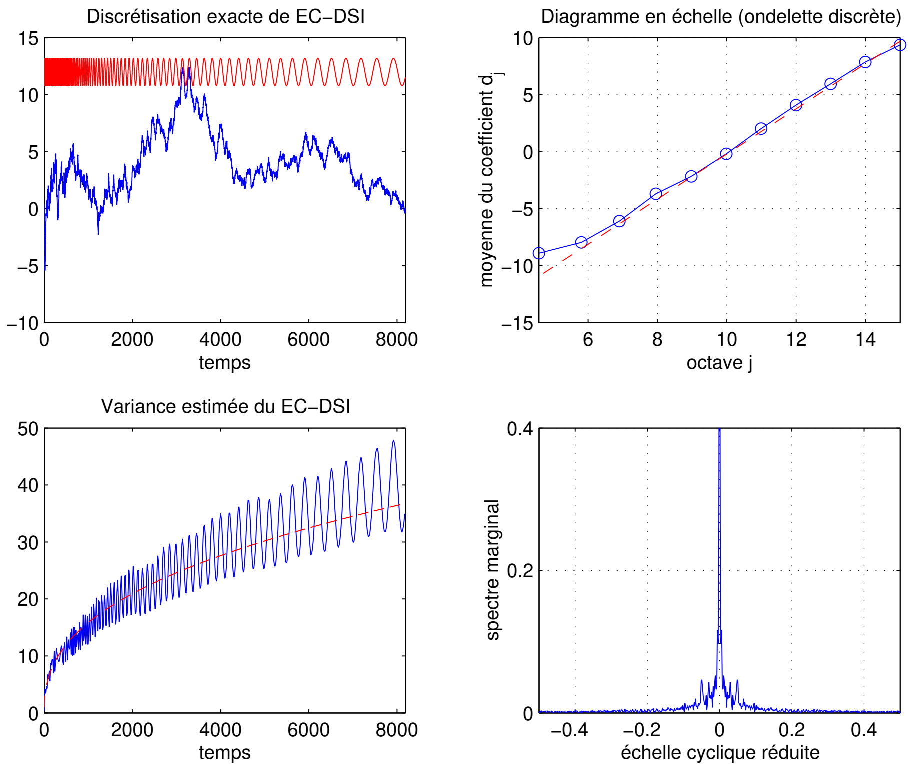



Fig. IV.14: Exemple de réalisation d'un processus d'Euler-Cauchy d'ordre 1 à DSI ; $H = 0.2, \lambda = 1.05$. On a superposé au graphe du processus une évolution synchronisée avec le coefficient log-périodique pour référence. En haut à droite on montre le diagramme en échelle qui ici a une pente conduisant à une fausse estimation de $H$ comme 0.5 (processus dont les accroissements ne sont pas stationnaires). En bas, nous montrons la DSI à l'aide d'une part de l'évolution de la variance du processus au cours du temps, d'autre part du résultat d'estimation du spectre marginal cyclique sur une réalisation. Les deux pics de part et d'autre du pic central sont bien à la fréquence correspondant à la log-période, mais restent ici peu visibles.

### 3.2.2 Différences fractionnaires et processus à DSI

La modélisation auto-similaire construite sur le calcul différentiel fractionnaire [GM97] (modèle de Barnes-Allan, FARIMA) est étendue au cas DSI avec :

$$\begin{cases} X_{BA}(t) = \displaystyle\int_0^t |t-u|^{H-1/2} h(u)\ \mathrm{d}u, \\ \mathbb{E}\left\{h(\lambda t)\overline{h(\lambda s)}\right\} = \lambda^{-1}\ \mathbb{E}\left\{h(t)\overline{h(s)}\right\}, \end{cases} \tag{IV.85}$$

où $h(t)$ un bruit d'entrée à DSI pour l'exposant $H=-1/2$ et le rapport en échelle privilégié $\lambda$. Un choix possible est le bruit blanc de variance log-périodique. Son expression sur la base de Mellin est : $h(t) = V(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^{i2\pi n/\log(\lambda)}$. Le modèle à temps continu est alors de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^{H+1/2}X_{BA}(t)}{\mathrm{d}t^{H+1/2}} = h(t) = V(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^{i2\pi n/\log(\lambda)}. \tag{IV.86}$$

Nous avons amplement commenté les deux possibilités pour transcrire sur les séquences à temps discret l'opérateur de dérivation fractionnaire et ici tant l'approche initiale en $(1-\mathbf{B})^d$ que la théorie de la transformation bilinéaire sont possibles.

Par exemple nous montrons en figure IV.18, ce que donne le modèle le plus simple, d'ordre 1, construit sur le filtre (II.320) en cascade avec un MA(1) log-périodique d'entrée un bruit blanc Gaussien et de coefficient :

$$l_2 = \left(\rho + \beta_r \cos\frac{2\pi\ln t}{\ln\lambda}\right) e^{i2\pi f_0(1+\beta_f\cos(2\pi\frac{\ln t}{\ln\lambda}))}. \tag{IV.87}$$

**Commentaire sur la structure des modèles paramétriques.** Au final les voies générales qui nous ont menées à des modèles à DSI conduisent toutes à des formes qui sont analogues, à temps discret, de la représentation générale que l'on connait pour les processus cyclostationnaires et que la Proposition IV.2 rappelait. Après lampertisation elle dit qu'un processus à DSI est représentable comme $X(t) \stackrel{d}{=} (\mathcal{U}_t P)(t)$ avec $\mathcal{U}_t$ des opérateurs « unitaires » pour les processus auto-affines (donc pour la norme en $t^{-2H-1}\mathrm{d}t$) et $P(t)$ une fonction maintenant log-périodique. C'est un peu ce que nous obtenons où les modèles combinent les deux éléments que sont l'auto-similarité et la signature log-périodique en reportant dans le bruit d'entrée ou dans le filtre appliqué l'une ou l'autre caractéristique sans nécessairement les mélanger.

## 3.3 Variations autour de la DSI

### 3.3.1 Implémentation numérique ; contrôle des pôles

Un souci constant doit être la possibilité de réaliser pratiquement les synthèses des modèles proposés. Sans attention particulière aux fonctions choisies, on risque en général d'obtenir des filtres qui ne restent pas stables au cours du temps et engendrent des séquences qui soit divergent rapidement, soit montrent plutôt des bouffées d'activités instables intermittentes au lieu du comportement dépendant effectivement du temps mais stable que la DSI modélise.

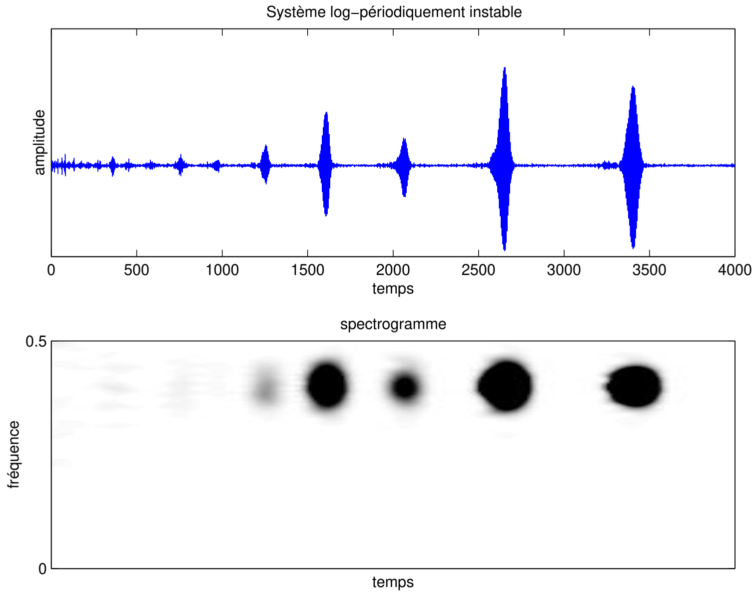



Fig. IV.15: Exemple de sortie d'un EC(2) instable log-périodiquement. Alors que l'allure du processus est proche de la DSI (avec des bouffées d'activité géométriquement espacées), il n'est pas à DSI telle que nous l'étudions ici puisque les statistiques du processus divergent autour des bouffées d'activité. Nous avons obtenu l'exemple en laissant le pôle aller jusqu'à un rayon égal à 1.025. Les périodes d'activité correspondent au moment où le système est instable et s'élargissent car il réside, du fait du ralentissment des oscillations log-périodiques, de plus en plus longtemps dans la zone instable ce qui amplifie son amplitude et demande ensuite plus longtemps à revenir vers les valeurs du système stable.

Il faut donc s'assurer en permanence de la stabilité à chaque instant et la meilleure méthode est vérifier le critère de stabilité portant sur la position des pôles des filtres. Ils doivent à tout instant être à l'intérieur du cercle unité et pour l'exemple du filtre d'ordre 1 de (IV.87) cela impose simplement que $\rho + \beta_r < 1$.

Nous présentons en figure IV.15 un comportement fréquent où les filtres employés passent dans des zones instables (ici sans excursion lointaine dedans). Quoique intéressant en soi dans certain cas, ces situations sortent du cadre que nous étudions (à cause de la divergence des quantités statistiques).

### 3.3.2 Modèle paramétrique de quasi-chirps aléatoires

Puisque le contrôle de la stabilité passe par l'examen de la position des pôles au cours du temps, nous pouvons aller une étape plus loin et définir directement des modèles par la position temporelle des pôles à un temps donné. L'interprétation est assez simple : c'est une manière d'imposer un spectre instantané modélisé par un ARMA non stationnaire (idée qui pour le problème de représentation et d'analyse temps-fréquence conduit au spectre évolutif de Priestley ou aux travaux de Tjostheim, Mélard et Grenier).

Pour la synthèse de DSI, les evolutions instantanées doivent être log-périodiques au cours

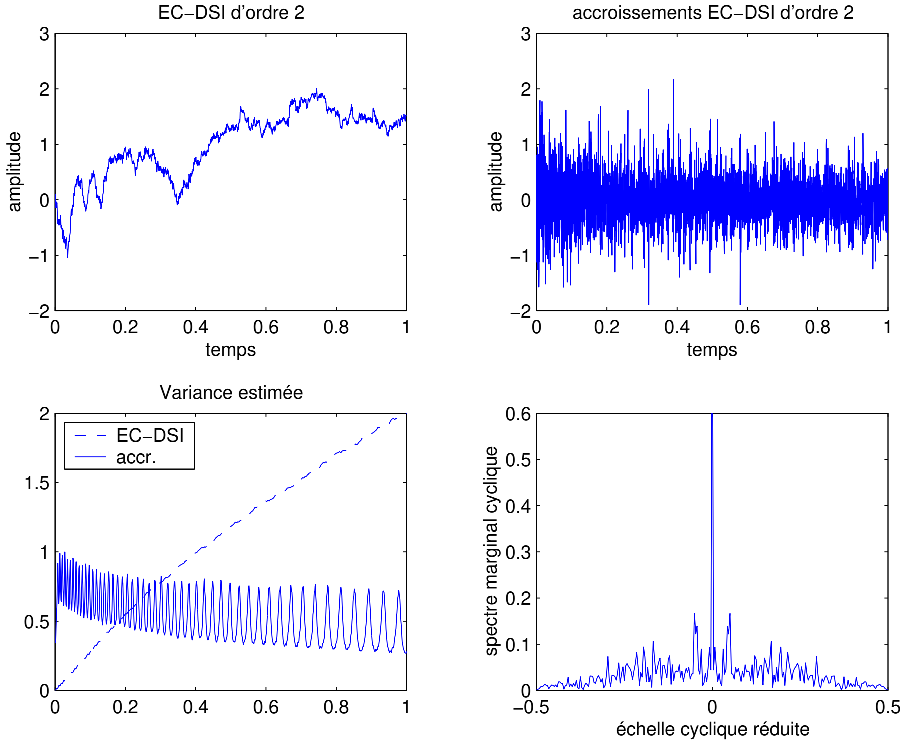



Fig. IV.16: Exemple de réalisation d'un processus d'Euler-Cauchy d'ordre 2 à DSI ; $H = 0.3, \lambda = 1.05$. On montre une réalisation du processus à gauche et de ses accroissements à droite. En dessous, une analyse numérique est conduite en deux étapes. À gauche l'estimation de la variance du processus en révèle la croissance générale (en $t^{2H}$) tandis que la variance des accroissements est plus sensible à l'invariance en échelle discrète que vérifie le processus. À droite l'estimation du spectre marginal cyclique sur une réalisation du processus confirme la propriété de DSI pour ce modèle.

du temps, tant en fréquence des pôles qu'en amplitude des résonances. C'est bien ce que réalise le modèle de (IV.87). Une autre possibilité renouant avec les séries de chirps aléatoires de l'exemple (IV.29) est de fixer les pôles et leur évolution autour de tendances à loi de fréquence instantanées en $1/t$. C'est ce que nous faisons pour synthétiser l'exemple de la figure IV.16 qui est une approximation d'un EC à DSI d'ordre 2, avec un bruit blanc multiplicatif d'exposant $H$ en entrée et deux pôles imaginaires conjugués controlés comme $\rho(t)e^{\pm i2\pi f(t)}$ ; a $\rho(t)$ et $f(t)$ sont deux fonctions log-périodiques, avec $|\rho(t)| \leq 1$ à tout temps pour assurer la stabilité du système. Le résultat est un processus à DSI.

Enfin nous pouvons dépasser la cadre de la DSI avec des modèles dont la loi de fréquence est fixée sur une courbe quelconque. À titre d'exemple la figure IV.17 représente le quasi-chirp de loi de fréquence en $1/\sqrt{t}$ donné par le modèle AR de second ordre avec les coefficients $a_1[k] = 2(1-(1+b/2)/k)$ et $a_2[k] = -(1-b/k)$ et un bruit blanc en entrée. Le nombre $b$ peut même être complexe pour combiner des effets sur la loi de fréquence instantanée, exactement en $1/\sqrt{k}$, et la largeur du pic de résonance.

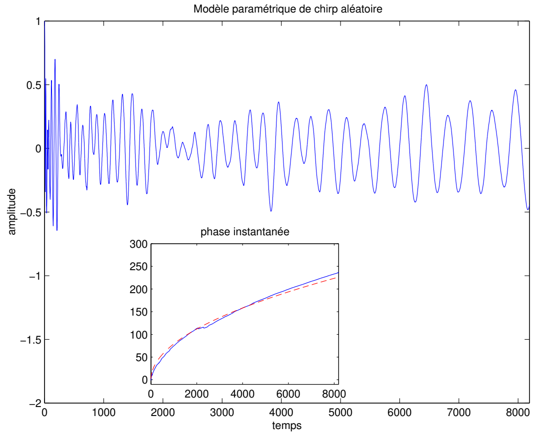



Fig. IV.17: Réalisation d'un chirp aléatoire à phase en $\sqrt{t}$ par contrôle de la position des pôles d'un AR non stationnaire. La phase instantanée mesurée est mise en encart (superposée au comportement théorique attendu). La construction est décrite dans le texte.

### Conclusion sur la DSI stochastique

Nous avons dans ce paragraphe passé en revue diverses manières de synthétiser de façon efficace et contrôlée des séquences aléatoires ayant la propriété de DSI. Le schéma général revient souvent à mettre les propriétés qui forment une auto-similarité approchée d'un côté (en imposant un bruit d'entrée en $t^H$, ou en adoptant des filtres – stationnaires ou non – qui engendrent des séquences $H$-ss, soit EC soit de type FARIMA) et les combiner avec des modulations log-périodiques en temps qui engendrent des modulations log-périodiques en échelle donc de la DSI.

La variété des méthodes de synthèse nous révèle aussi la richesse des comportements des séquences à DSI qui parfois résistent à certains types d'analyse (aux nombres desquels nous avons utilisé les ondelettes, les représentations mixtes, les estimateurs spectraux et les moyennes sur plusieurs réalisations).

## 4 Conclusion : DSI et Lamperti

Cette partie de la thèse a eu pour objectif de montrer que l'invariance en échelle discrète pouvait être étudiée par le biais de la transformation de Lamperti comme étant l'image de la propriété de cyclostationnarité.

C'est une contribution originale que nous avons présentée et nous avons essayé de replacer les possibilités ouvertes par ce point de vue dans la littérature générale sur la propriété de DSI, en particulier en montrant le lien avec certaines études de la DSI faites en physique statistique et mathématiques des fractales.

La transposition des méthodes d'analyse de processus cyclostationnaires s'est révélée possible ainsi que la construction de méthodes de synthèses de séquences à DSI dont nous avons mené l'étude. Il est clair que l'étape suivante sera de confronter les méthodes d'analyse à des situations expérimentales réelles où l'on suspecterait de la DSI. L'existence de ces différents modèles synthétiques ayant la propriété de DSI permettra de qualifier la pertinence statistique de toute DSI trouvée, les modèles servant de bancs d'essais.

Ce prolongement du travail vers des applications est une étude en cours que nous souhaitons appliquer au problème de croissance (comme les agrégats limités par diffusion) [SJA+96, JS98] et à celui des précurseurs de fracture de matériaux [JSS00, ZS02b] (avec les expériences de S. Ciliberto et collaborateurs [GGC98, GGC99, CGS01]) afin de pouvoir directement comparer les résultats obtenus par les analyses à la Lamperti à ceux obtenus par d'autres voies.

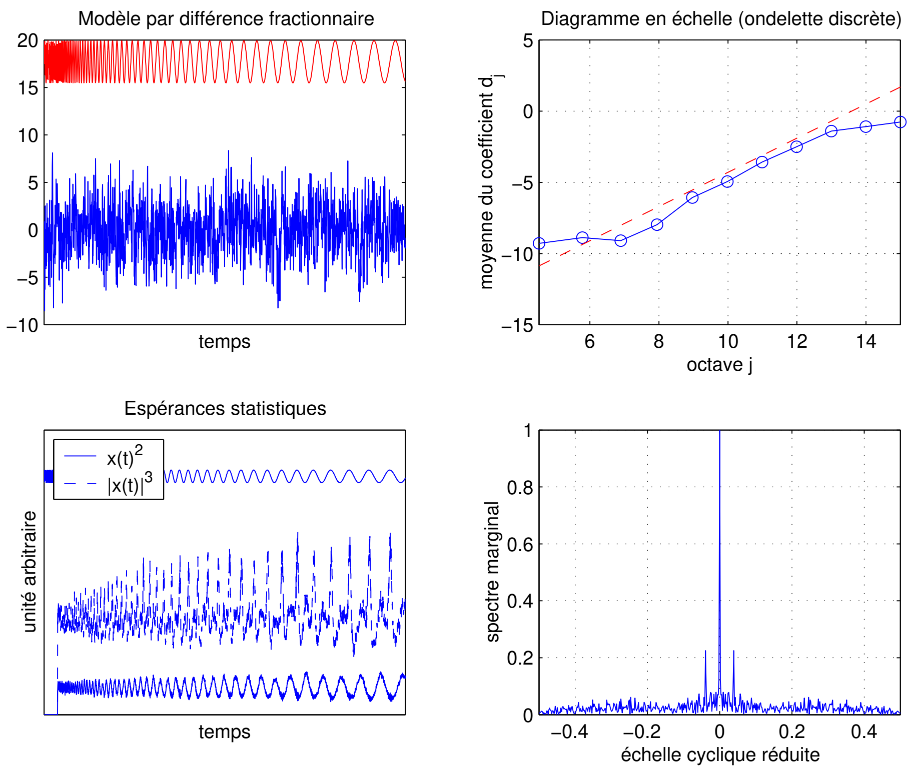



Fig. IV.18: Exemple de réalisation d'un processus à DSI engendré par différence fractionnaire ; $H = 0.1, \lambda = 1.05$. On a superposé au graphe du processus une évolution synchronisée avec le coefficient log-périodique pour référence. En haut à droite on montre le diagramme en échelle qui ici a une pente conduisant à une estimation juste de $H$ égale à 0.1 (processus stationnaire). En bas, nous montrons la DSI à l'aide d'une part de l'évolution de la variance du processus au cours du temps et de son momentxs d'ordre 3, d'autre part du résultat d'estimation du spectre marginal cyclique sur une réalisation. Les deux pics de part et d'autre du pic central sont bien à la fréquence correspondant à la log-période et sont dans ce cas bien plus repérables. La raison est que le processus ne croissant pas en $t^H$ a moins d'excursions longues loin de zéro et révèle plus facilement les périodicités en échelle.

# V. Turbulence : notes sur les modèles statistiques à base d'objets

*Cette dernière partie propose quelques contributions à l'étude de la turbulence des fluides pleinement développée. Le problème de modélisation et de description de la turbulence est ancien, vaste, et mélange des approches allant de la mécanique des fluides appliquée à des travaux phénoménologiques ou des développements mathématiques poussés.*

*Notre démarche en ce domaine sera d'envergure restreinte en se limitant principalement à une problématique : que dire des modèles de* ***turbulence*** *qui prédisent son comportement* ***statistique*** *en prenant en compte l'existence de* ***structures organisées*** *et en particulier que dire de la possibilité de caractériser l'effet ou la* ***signature spécifique*** *des structures dans les mesures ? Cette question ne sera elle-même étudiée que dans des cas particuliers en tentant de montrer des limites à certaines méthodes de mesure ou d'analyse pour rendre compte de la structure dynamique d'un écoulement turbulent, ou en examinant ce qu'on peut déduire de quelques modèles de la turbulence développée construits sur des objets cohérents.*

*Mais pour tenter d'avancer quelques contributions sur ce sujet, nous allons essayer de définir les mots-clefs de la question que sont la turbulence, ses propriétés statistiques et ce que l'on entend par les structures organisées que l'on trouve en turbulence.*

*Le V.1 est une présentation de la turbulence vue par les descriptions statistiques où l'on montre comment l'existence de vortex intervient dans le problème. Le paragraphe 2 survole des modèles proposés pour prendre en compte ces structures avant que nous ne donnions des détails au 3 sur l'approche que nous avons principalement étudiée : celle des collections d'objets qui sont des vortex. Enfin le V.4 ouvre quelques pistes d'étude que nous avons menées avant notre conclusion sur ce sujet.*

## 1 La turbulence et ses descriptions statistiques

### 1.1 Qu'est-ce que la turbulence ?

**Posons le problème.** On appelle turbulence l'état de certains écoulements chahutés des fluides, qui semblent perdre pour l'essentiel leur prédictabilité et toute organisation simple. Les mouvements des différents éléments du fluide y sont principalement erratiques, presque aléatoires. Le problème physique est à sa base bien connu [Bat67] puisque depuis Navier (en 1822) puis Stokes (1845), le cadre général de description de type milieu continu conduit à l'équation du mouvement pour les fluides, dite de Navier-Stokes (NS) :

$$D_t\vec{v} = \partial_t\vec{v} + (\vec{v}\ \cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{v}, \tag{V.1}$$

où $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est la vitesse d'un élément de fluide, $\rho$ sa densité, $p$ la pression et $\nu$ la viscosité. Cette équation est complétée par celle de conservation de la masse qui, dans le cas où l'écoulement est incompressible se réduit à $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

Connaître cette équation qui impose une évolution dynamique déterministe au champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$, nous laisse loin de savoir qualifier les propriétés de ses solutions dans tous les cas, ni même de savoir préciser si mathématiquement parlant l'équation (avec ses conditions aux limites et initiales) est convenablement posée. Le domaine de la turbulence développée s'intéresse au cas où le champ de vitesse devient le plus complexe, ce qui arrive quand le nombre de Reynolds, noté Re, devient grand :

$$\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu} \gg 1. \tag{V.2}$$

Ce nombre sans dimension, défini à l'aide d'une vitesse typique $U$ de l'écoulement, une longueur caractéristique $L$ et la viscosité $\nu$, suffit à donner la forme adimensionnelle de l'équation de (NS) et pilote en grande partie son comportement qualitatif ainsi que montré en 1895 par Reynolds. Quand $\mathrm{Re} \gg 1$, le terme non-linéaire $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ devient dominant devant celui dissipatif des efforts visqueux $\nu\Delta\vec{v}$ et permet aux écoulements d'être fortement instationnaires et irréguliers avec des grands gradients de vitesse.

**Utilité d'une approche statistique.** Si l'on observe l'eau d'un fleuve ou d'un torrent, le brassage d'un paquet d'eau tel que dans une machine à laver, les évolutions toujours changeantes dans l'atmosphère ou les volutes de fumée montant des cheminées, de cigarettes ou de bâtons d'encens, on remarque les variations rapides de mouvements d'apparence aléatoire et la distorsion constante de chaque structure qui émergerait de l'ensemble, tout en constatant la présence, même fugitive, de structurations. Tourbillons sans cesse renouvellés, fumées qui s'envole en s'étirant et en spiralant, c'est ce que L. de Vinci représentait déjà sur ses croquis avec talent [Fri95]. Nous sommes exactement en présence d'un problème où ce qu'on peut mesurer adopte, pour ce que l'on sait en dire, un caractère aléatoire. Ce caractère stochastique est renforcé par les mesures des vitesses, pressions, ou quantités scalaires d'un écoulement qui toutes sont très fluctuantes d'un point à l'autre ainsi qu'au cours du temps de mesure (idée acceptée depuis Taylor [Tay35] ; voir par exemple la figure V.1).

Le problème de la turbulence à grand Re et les premiers travaux à ce sujet s'inscrivirent ainsi avec succès dans une démarche de description **statistique**. La question est, étant donné qu'un flot turbulent à un instant donné est dans un état quasiment aléatoire, quelles sont ses propriétés statistiques et comment évoluent-elles au cours du temps [Bat53] ? Nous allons voir jusqu'où ont été développés les éléments de réponses à cette question.

## 1.2 De Kolmogorov '41 à l'intermittence statistique

Nous esquissons ici les résultats des descriptions statistiques de la tubulence stationnaire [Bat53, MY71, Fri95] avec comme objectif principal de comprendre où en sont les limitations, en particulier concernant les relations qu'elles entretiennent (ou pas) avec l'existence de structures géométriquement et dynamiquement organisées, évoluant au cours du temps mais souvent fugaces, qui existent dans un flot turbulent.

### 1.2.1 Une première description statistique – « Kolmogorov 41 »

Le formalisme à adopter est celui des processus stochastiques. Il suffit d'envisager son prolongement pour des champs décrits sur un espace à trois dimensions (ou à deux dans des géométries particulières). L'analyse se développe de deux manières : d'abord décrire complétement les éléments de base de description des champs aléatoires que sont les tenseurs de corrélation construits sur les $\{v_i(\vec{x}_i), i = 1 \dots n\}$ d'un champ défini sur un espace à $n$ dimensions. Au second ordre statistique, on utilise le tenseur de covariance à deux points du champ de vitesse :

$$R_{ij}(\vec{l}, \vec{r}; t) = \mathbb{E}\left\{ v_i(\vec{r}, t) v_j(\vec{r} + \vec{l}, t) \right\}, \tag{V.3}$$

puis ses composantes d'analyse spectrale (sa transformée de Fourier en particulier). Nous renvoyons à [Bat53] ou [MY71] pour des présentations complètes, ou encore à [BLF53] pour une approche plus mathématique. Nous utiliserons les formes contraintes de $R_{ij}(\vec{l}, \vec{r}; t)$ sous certaines hypothèses de symétrie (homogénéité et isotropie).

Le deuxième axe d'étude est de chercher des hypothèses physiques permettant de préciser complètement ces moments.

**Théorie de Kolmogorov auto-similaire (ou K41).** En 1941, le mathématicien Kolmogorov a ouvert la voie à plus de 60 ans d'études théoriques en proposant une solution stationnaire d'équilibre statistique décrivant les propriétés des champs turbulents homogènes, isotropes, en espace infini, si la turbulence est pleinement développée (à Re tendant vers l'infini) [Kol41a, Kol41b].

Les points principaux de l'argumentation portent sur les accroissements du champ de vitesse, définis comme :

$$\delta\vec{v}(\vec{l}, \vec{r}) = \vec{v}(\vec{l} + \vec{r}) - \vec{v}(\vec{r}) \tag{V.4}$$

Ils obéissent quand Re $\to \infty$ (équivalent à $\nu \to 0$) aux propriétés ci-dessous pour une gamme d'échelles entre la grande longueur $L$ et une échelle caractéristique dissipative $\eta$ (on l'appelle la zone inertielle) :

i) Les $\delta\vec{v}(\vec{l}, \vec{r})$ vérifient localement au sens statistique les **symétries** que (NS) accepte : homogénéité, isotropie, stationnarité, invariance par parité et invariance par similitude.

ii) Un **état d'équilibre statistique** est atteint tel que le taux moyen de dissipation d'énergie par unité de masse, $\overline{\epsilon} = -\mathbb{E}\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right\}$ reste constant et non nul. Les propriétés statistiques ne dépendent plus que de $\nu$, de $\overline{\epsilon}$ et de la taille $|\vec{l}|$ sur laquelle on les regarde.

iii) Dans cet état, les accroissements à petite échelle sont exactement **auto-similaires** avec un certain exposant $H$ :

$$\delta\vec{v}(\lambda\vec{l}, \vec{r}) \overset{d}{=} \lambda^H \delta\vec{v}(\vec{l}, \vec{r}). \tag{V.5}$$

Notons que l'échelle de Kolmogorov $\eta$ est la seule échelle de longueur que la théorie nous laisse construire (du fait de ii) pour limiter inférieurement la zone inertielle :

$$\eta = \left(\nu^3 / \overline{\epsilon}\right)^{1/4}. \tag{V.6}$$

**Les prédictions de K41.** De ces hypothèses, Kolmogorov déduit la forme complète des statistiques des accroissements qui sont stationnaires et donc suffisent à décrire le champ de vitesse [Yag87]. On a les trois résultats suivants que nous écrivons pour les accroissements longitudinaux, c'est-à-dire pour $\delta\vec{v}$ projeté sur l'axe de séparation entre les points : $\delta v(l,\vec{r}) = (\delta\vec{v}(\vec{l},\vec{r}))\cdot\vec{l}/l$ (on note $l = |\vec{l}|$) :

$$S_2(l) = \mathbb{E}\left\{(\delta v(l,\vec{r}))^2\right\} = C\,\overline{\epsilon}^{2/3}\,l^{2/3} \quad \text{pour} \quad \eta \lesssim l \lesssim L \tag{V.7}$$

$$S_3(l) = \mathbb{E}\left\{(\delta v(l,\vec{r}))^3\right\} = -\frac{4}{5}\,\overline{\epsilon}\,l \quad \text{pour} \quad \eta \lesssim l \lesssim L \tag{V.8}$$

$$S_q(l) = \mathbb{E}\{(\delta v(l,\vec{r}))^q\} = C_q\,\overline{\epsilon}^{q/3}\,l^{q/3}, \quad q\in\mathbb{N}, \quad \text{pour} \quad \eta \lesssim l \lesssim L \tag{V.9}$$

Derrière ces formes, le résultat est principalement une auto-similarité exacte et globale des accroissements, d'**exposant** $H = 1/3$, qui contrôle dimensionnellement les moments à tout ordre [Fri91]. Notons qu'un calcul dimensionnel cherchant à construire un taux de dissipation à la limite des viscosités nulles à l'aide des grandeurs dont on dispose à l'échelle $l$ impose que $\overline{\epsilon} \sim v(l)^2/(l/v(l))$ qui doit rester constant ; ainsi on a $v(l) \sim (\overline{\epsilon}l)^{1/3}$ et l'exposant privilégié est 1/3. Dernier argument, une équation exacte a été établie à partir de (NS) par Kármán et Howarth [KH38] qui relie les grandeurs statistiques d'ordre 2 et 3 des accroissements de vitesse (ici écrite sans injection) :

$$\partial_t\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{v}(\vec{r}+\vec{l})\right\} = \frac{1}{4}\vec{\nabla}\cdot\mathbb{E}\left\{|\delta\vec{v}(\vec{l})|^2\delta\vec{v}(\vec{l})\right\} + \nu\vec{\nabla}^2\mathbb{E}\left\{\vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{v}(\vec{l}+\vec{r})\right\} - \epsilon(\vec{l}). \tag{V.10}$$

En faisant usage des hypothèses de stationnarité, d'homogénéité et d'isotropie, Kolmogrov en déduit l'équation (V.8), dite loi des 4/5, qui donne la forme nécessaire du moment d'ordre 3 des accroissements longitudinaux de vitesse dans la zone inertielle et conforte à nouveau l'exposant 1/3 proposé [Kol41b].

### 1.2.2 Contraintes liées aux statistiques d'ordre 2.

**Propriétés spectrales de la turbulence.** Les hypothèses faites sur la vitesse contraignent le tenseur spectral. Il est défini (sous hypothèse d'indépendance par rapport à $\vec{r}$ du fait de l'homogénéité) comme étant la transformée de Fourier (à $n$ dimensions et les cas d'intérêt sont $n = 2$ et 3) de $R_{ij}$ portant sur la variable $\vec{l}$ :

$$\Gamma_{ij}(\vec{k};t) = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{l}}R_{ij}(\vec{l},\vec{r},t)\mathrm{d}\vec{l}. \tag{V.11}$$

Dans la suite nous nous intéressons à la turbulence usuelle, dans l'espace à trois dimensions. Cependant la dynamique des tourbillons que nous examinerons en tant qu'éléments de base d'un écoulement turbulent au V.3 et 4 sera essentiellement bidimensionnelle. Les équations utiliseront donc partiellement les résultats de dynamique des fluides dans un espace deux dimensions seulement.

En supposant l'isotropie et l'incompressibilité de la vitesse, la forme contrainte pour le tenseur spectral [Bat53] dépend de la dimension $n$ et s'écrit :

$$\Gamma_{ij}(\vec{k};t) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right)\frac{E(k)}{a_nk^{n-1}}, \tag{V.12}$$

où $a_2 = \pi$ et $a_3 = 4\pi$, et on a introduit le spectre isotrope $E(k)$ tel que $\int E(k)\mathrm{d}k = \mathbb{E}\{|\vec{v}|^2/2\}$.

Sous condition de validité de la solution auto-similaire d'équilibre statistique de Kolmogorov, la forme imposée à la fonction de structure d'ordre 2 implique que le spectre isotrope (pour $n = 3$) se comporte dans la zone inertielle comme :

$$E(k) \sim \overline{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3}. \tag{V.13}$$

Cette loi est convenablement vérifiée par les mesures expérimentales (figure V.1). Plus généralement, la requête que les propriétés statistiques dépendent uniquement (même en-dehors de la zone inertielle) de $\nu$, de $\overline{\epsilon}$ et de l'échelle de longueur impose l'existence d'une fonction $f$ telle que le spectre isotrope s'écrive :

$$E(k) \sim \nu^{5/4} \overline{\epsilon}^{1/4} (k\eta)^{-5/3} f(k\eta). \tag{V.14}$$

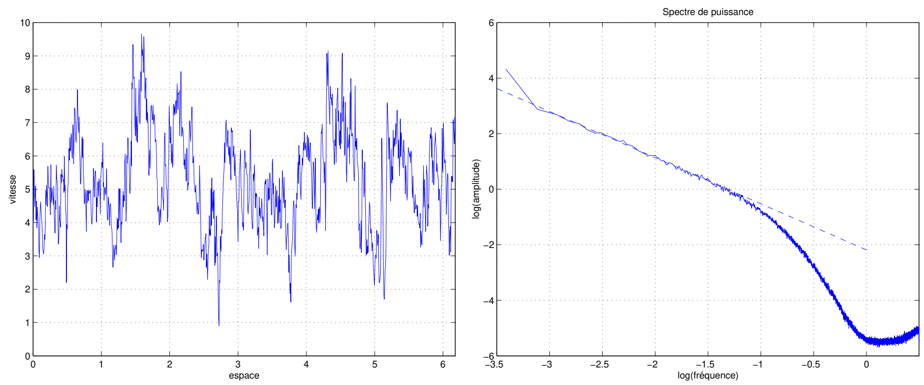



Fig. V.1: Extrait d'un signal de vitesse de turbulence, rééchantillonné en espace par hypothèse de Taylor locale. Les signaux viennent des expériences de C. Baudet et A. Naert (ENS Lyon). À droite, spectre de vitesse estimé par périodogramme. La régression linéaire dans la zone inertielle est en accord raisonnable avec (V.13) et a une pente proche de $-5/3$.

**Conséquences sur la régularité ou la structure mathématique de la vitesse.** Avant même de comparer la théorie de Kolmogorov aux expériences et d'en trouver les limites, notons que le spectre supposé universel (V.14) en $k^{-5/3}$ suppose déjà une forme singulière pour le champ de vitesse [Ons49, Mof84, HV91]. Le spectre isotrope $E(k)$ et les spectres de coupes unidimensionnelles doivent, si ils obéissent à des lois de puissance, se comporter avec le même exposant [Bat53]. Un signal unidimensionnel qui serait régulier dans ses dérivées (et de dérivées sommables) sauf à partir de l'ordre $p-1$, doit avoir un spectre décroissant en $k^{-2p}$ au plus quand $k \to \infty$. Ainsi l'exposant $-5/3$ du spectre isotrope de la turbulence impose un ordre de régularité maximal $p = 5/6$ pour les signaux mesurés qui est inférieur à 1 (et la dérivée de la vitesse est singulière pour les échelles inertielles) et non entier : la vitesse ne saurait être une fonction simple dans la zone inertielle [HV91].

Comme pour toute propriété mathématique, il existe de nombreuses façons de sortir du cadre qui contraint la régularité et plusieurs mécanismes pour obtenir un spectre en $k^{-2p}$ donné ont une certaine pertinence en turbulence.

**1 -** Le signal peut comporter des **singularités hölderiennes** d'exposant de régularité locale $h$, qui ont un spectre de décroissance en $k^{-2-2h}$. Si elles sont isolées, séparées les unes des autres, la régularité et le spectre ont bien le lien attendu et la singularité la plus forte impose la décroissance du spectre à l'infini. On en rappelle la définition suivante, déjà donnée au II.4.4.

Définition V.1: *Un processus continu $X(t)$ est de* ***régularité locale de Hölder*** *$h(t)$ en $t$ si*

$$h(t) = \sup\{h'/X \in C_t^{h'}\}, \tag{V.15}$$

*où on définit $C_t^{h'}$ comme l'ensemble des processus tels qu'il existe un polynôme $P_t$ et un voisinage de $t$ de manière à ce que pour tout $s$ proche de $t$ on ait ($A$ est une constante) :*

$$|X(s) - P_t(s)| \leq A|t-s|^{h'} \tag{V.16}$$

Cependant deux possibilités peuvent induire un comportement du spectre qui n'est pas directement dérivé de la régularité des singularités en pointes ou *cusps*, c'est-à-dire en $|t-t_0|^h$. Elles peuvent s'accumuler et dans ce cas le comportement peut émerger de la structure de l'accumulation et non d'une singularité isolée, comme par exemple le signal $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{H}(x - x_n)$. Si les $x_n$ se répartissent sur un ensemble fractal de dimension $D$, le spectre se comporte généralement en $k^{-D-1}$ [VH91].

Une interprétation locale de l'auto-similarité globale d'exposant $H$ est justement que la régularité est en tout point $h = H$ (ensemble monofractal) et on déduit du fait que $S_2(l) \propto l^{2H}$, que le spectre doit être en $k^{-1-2H}$ (c'est la théorie K41 pour la turbulence). Divergences isolés et singularités en tout point n'ont pas le même comportement. Pire, on peut envisager une répartition de singularités de régularité locale variable sur des ensembles denses, plus ou moins étendus (le spectre multifractal $D(h)$ – voir plus bas – en sera une mesure) et elles ne sont finalement séparables les unes des autres que statistiquement. C'est le cadre d'étude des théories multifractales [Fri95].

**2 -** Le lien entre régularité et spectre peut aussi être outrepassé si le signal comporte des **singularités oscillantes**. Le terme recouvre l'existence d'oscillations locales importantes autour d'un point qui induisent à cet endroit un comportement semblable à un chirp. Selon les travaux de Meyer et de Jaffard [JM96, Mey01], une singularité oscillante dans une fonction $f(x)$ autour de $x_0$ s'écrit de manière générale comme :

$$f(x) \simeq |x-x_0|^h \, g\left(\frac{1}{|x-x_0|^\beta}\right), \quad \text{pour} \quad x \to x_0, \tag{V.17}$$

où la fonction $g$ est infiniment oscillante [MX97, Aub99] et $\beta \in \mathbb{R}_*^+$. L'exemple simple, que l'on trouve dès les premières remarques sur le sujet (en particulier en turbulence [HV91, JKVF93]) est de regarder $x^h \sin(x^{-\beta})$ dont on montre que le spectre (unidimensionnel) se comporte comme :

$$E(k) \sim k^{-2p} \quad \text{avec} \quad p = (h+1+\beta/2)/(1+\beta). \tag{V.18}$$

Il est clair que la déviation à la relation régularité – spectre se complique d'autant si on permet des accumulations de ce type de singularités. Les singularités oscillantes nous intéressent ainsi à plus d'un titre. D'une part elles sont causes de limites de l'utilisation du cadre multifractal pour décrire la turbulence, ainsi que de la faillite dans certains cas des méthodes d'estimation qui furent construites [AM94, ABJM97, ABJM98, Jaf00a, Jaf00b]. D'autre part elles sont une approche mathématique possible de la signature de l'existence de structures organisées, avec une certaine cohérence transcrite ici en l'existence d'une loi de fréquence instantanée particulière autour du point de singularité [HV91, JKVF93].

### 1.2.3 L'intermittence et ses effets sur les statistiques

**Le point de vue expérimental.** Le résultat (V.9) de K41 ne tient pas devant les expériences. Les lois d'échelles mesurées sur les $S_q(l)$ n'obéissent pas à la l'auto-similarité globale en avec des exposants $q/3$. Ces déviations constatées viennent des fluctuations importantes des accroissements de vitesse d'un point à l'autre et au cours du temps. On les représente en termes statistiques en montrant que les lois de probabilité des $\delta v(l)$ ne sont pas Gaussiennes mais surtout changent quand $l$ varie en s'éloignant de plus en plus d'une loi normale pour $l \to \eta$. Elles développent des queues exponentielles pour les petites écarts $l$ de sorte que des événements avec des gradients de vitesse violents restent fréquents à petite distance.

On appelle intermittence alors la possibilité qu'a le champ de vitesse, et les diverses mesures en turbulence, d'avoir une activité fortement fluctuante d'un point à l'autre. Les deux effets appelés « intermittence » sont illustrés en figure V.2 à l'aide de données expérimentales.

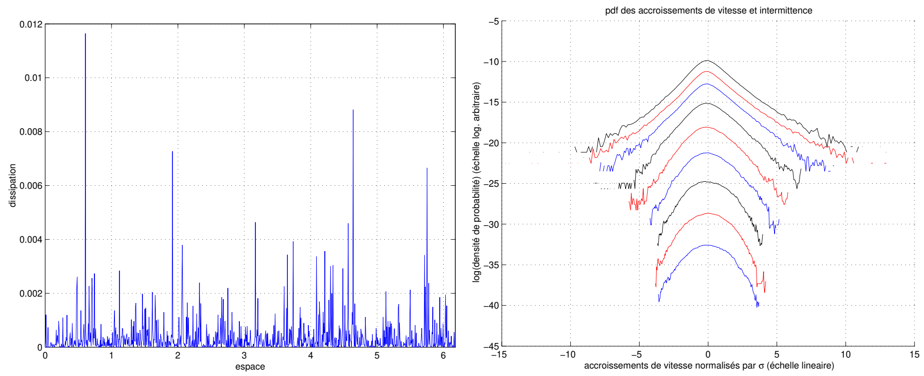



Fig. V.2: À gauche, estimation de la dissipation locale associée au signal de vitesse de la figure V.1. L'intermittence est ici associée à l'existence de bouffées d'activité irrégulières. À droite, l'estimation des densités de probabilité des accroissements de vitesse à difféřetes échelles est responsable d'une intermittence qualifiée de statistique. Le graphique est en semi-log, les courbes sont arbitrairement décalés pour la lisibilité et à grande échelle ressemblent à une distribution gaussienne pour développer des ailes exponentielles de plus en plus marquées quand l'échelle diminue (courbes du haut).

**L'intermittence statistique.** L'expérience est rejointe ici par une objection à la théorie K41 (traditionnellement attribuée à Landau) qui remarque que le raisonnement dimensionnel correct pour estimer les moments à n'importe quel ordre $q$ est d'élever à la puissance $q/3$ l'équation exacte pour la fonction de structure d'ordre 3. L'opération de moyenne n'arrive qu'ensuite et il faut partir d'une forme locale de la dissipation, moyennée sur une boule $B(\vec{r}, l)$ de rayon $l$ autour du point $\vec{r}$ :

$$\epsilon(\vec{r}, l) = \frac{1}{\pi l^3/6} \int_{B(\vec{r},l)} \epsilon(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}, \tag{V.19}$$

Une hypothèse de similitude améliorée est proposée par Kolmogorov et Obukhov en 1962 (théorie de KO62) [Obu62, Kol62] et suppose :

$$S_q(l) \simeq C_q \mathbb{E}\left\{\epsilon(\vec{r}, l)^{q/3}\right\} l^{q/3}. \tag{V.20}$$

Les accroissements de vitesse ne sont plus strictement auto-similaires. Il n'y a pas de raison pour que la moyenne dans cette expression coïncide avec $\overline{\epsilon}^{q/3}$ si $q \neq 3$ et redonne (V.9).

L'intermittence statistique, signature donc des fluctuations importantes des grandeurs mesurées d'un moment à l'autre, a comme conséquence que les exposants des lois de puissances ne suivent pas la loi dimensionnelle simple emn $q/3$ de l'auto-similarité exacte mais s'écrivent de façon générale :

$$S_q(l) \simeq C_q \overline{\epsilon}^{q/3} l^{q/3+\tau(q)} \simeq C_q \overline{\epsilon}^{q/3} l^{\zeta(q)} \quad \text{avec} \quad \zeta(q) \neq \frac{q}{3}. \tag{V.21}$$

Notons que la correction à la loi de Kolmogorov de 1941 s'interprète aussi comme l'existence d'une limite singulière (et non une constante), quand Re $\to \infty$, des quantités statistiques ; c'est un comportement en auto-similarité du deuxième type [Bar96b], c'est-à-dire une invariance en échelle incomplète car on ne sait pas dire finalement si Re $\to \infty$ se comporte réellement comme Re $= \infty$.

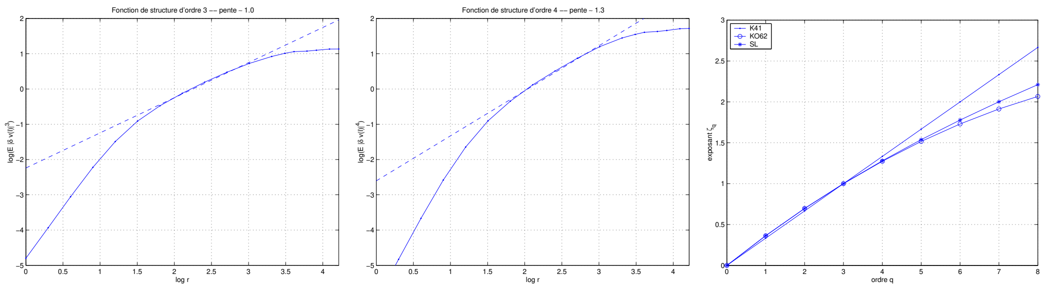



Fig. V.3: Estimations des fonctions de structures $S_3(l)$ (à gauche) et $S_4(l)$ (au centre) et regression linéaire dans la partie correspondant à la zone inertielle. Les lois de puissance sont à l'évidence des approximations seulement dans ce régime, et les exposants sont (au moins sommairement) en accord avec les modèles d'intermittences connus. Le graphe de droite montre les prédictions de différents modèles ; étant proches les unes des autres, elles ne sont pas faciles à discriminer (voir par exemple [Gag87]) – le point durablement établi est que la théorie K41 ne peut tenir et qu'une correction tenant en compte l'intermittence est nécessaire.

**Les modèles d'intermittence.** Divers modèles ont été proposés qui spécifient $\zeta(q)$, depuis celui de KO62 (supposant lui une distribution log-normale de la dissipation locale à l'échelle $l$). La littérature est déjà abondante à ce sujet. L'ouvrage de U. Frisch [Fri95], complété par exemple par les perspectives plus récentes dans [Cha01] proposent un état des théories à ce sujet : $\beta$-modèle, modèle multifractal [FP85, Fri95], modèle de She-Lévêque [SL94], modèle log-Poisson [Dub94], cascades de Mandelbrot [Man74] ou multiplicateurs de Novikov [Nov71] qui seront largement utilisées et développés dans l'approche des cascades statistiques multiplicatives de B. Castaing [Cas89, Cas96, Cas97]. La figure V.3 donne les exemples des fonctions de structure d'ordre 3 et 4 et indique certains des modèles pour les $\zeta_q$.

Deux approches sont à retenir pour la suite de notre exposé et aident à comprendre la description statistique de la turbulence : le cadre multifractal qui est un premier aboutissement de l'interprétation statistique des déviations intermittentes sous hypothèse que l'on conserve des lois de puissance [Fri95] ; le cadre des cascades multiplicatives qui, réexposé dans [Cha01], fondent un cadre théorique général des déviations intermittentes en abandonnant éventuellement les lois de puissances et en préférant l'hypothèse d'avoir des lois statistiques infiniment divisibles.

**La théorie multifractale.** L'*hypothèse multifractale* en turbulence [FP85, Fri91, Fri95] consiste à remplacer l'hypothèse d'auto-similarité globale proposée par Kolomogorov par des hypothèses d'auto-similarité statistique locale avec des exposants variables, $h \in [h_{\min} \;\; h_{\max}]$. On suppose ainsi qu'en chaque point $\vec{r}$ on a un exposant $h(\vec{r})$ tel que :

$$\delta\vec{v}(\lambda\vec{l},\vec{r}) = \lambda^{h(\vec{r})}\delta\vec{v}(\vec{l},\vec{r})i \quad \text{si} \quad \vec{l}| \to 0. \tag{V.22}$$

On appelle $D(h)$ la dimension fractale de l'ensemble des points $\{\vec{r} \;/\; h(\vec{r}) = h\}$ et $D(h)$ est appelé spectre multifractal du champ. Le relation (V.22) est en réalité une hypothèse portant sur les exposants de Hölder locaux, d'après la définition V.1.

L'hypothèse du *formalisme multifractal* [Jaf00a, Jaf00b] est de supposer qu'il existe une connexion inversible entre le spectre multifractal $D(h)$ et les exposants $\zeta(q)$ de description statistique des accroissements qui s'écrit comme une transformation de Legendre :

$$\zeta(q) = \min_{h\in[h_{\min} \;\; h_{\max}]}(qh + 3 - D(h)) \qquad \text{et} \qquad 3 - D(h) = \max_q(\zeta(q) - qh). \tag{V.23}$$

L'interprétation multifractale des déviations statistiques à l'auto-similarité globale trouve un prolongement du fait de (V.23) dans une lecture de thermodynamique statistique pour laquelle $D(h)$ est analogue à une entropie fonction d'une énergie (la « force » de la singularité). Combinée aux possibilités de mesures locales des exposants de régularité que les décompositions en ondelettes continues proposent, l'analogie permet de mettre en œuvre des méthodes pratiques de mesures des exposants et de $D(h)$ à partir des mesures unidimensionelles de la vitesse [AGH88, AMR97, Rou96, AAB$^+$95].

## 1.3 Dépasser le multifractal

Bien qu'attrayant, le cadre multifractal a plusieurs limites qui incitent à chercher à le dépasser de diverses manières.

**Abandonner les lois de puissance : le « multiscaling ».** Faisant le point sur les approches de l'intermittence en turbulence, P. Chainais remarque que, dans la majorité des théories qui la concerne, est toujours supposée à un moment ou un autre l'existence d'une relation en lois de puissance du type (V.21) sans justification ni en fait soutien expérimental [Cha01]. À regarder un peu des signaux mesurés dans des écoulements turbulents, la première difficulté est pourtant de trouver vraiment des lois de puissance qui ne se montrent au plus que d'une manière approximative sur une zone en échelle restreinte (voir la figure V.3).

Partant de l'idée auto-similarité étendue, ou *ESS*[1] (les moments se déduisent des uns des autres par les comportements en loi de puissance) [BCT+93], qui fut réinterprétée par B.Castaing et co-auteurs en abandonnant l'invariance en échelle et surtout les lois de puissance [CD95], P. Chainais et P. Abry montrent comment les modèles de cascades statistiques infiniment divisibles permettent de décrire les propriétés statistiques de la turbulence [Cha01, Abr01]. Ces travaux nous semblent un aboutissement actuel de la démarche prolongeant le multifractal. Le comportement généralisé étudié est, pour mémoire :

$$S_q(l) = \exp\left(-\zeta(q)n(r)\right) S_q(L), \tag{V.24}$$

où $L$ est la grande échelle de l'écoulement et $n(r) = \ln r$ si l'on suppose des lois de puissance, sinon $n(r)$ décrit la manière dont la cascade statistique se développe entre les échelles. Ce formalisme est équivalent à l'ESS, qui est expérimentalement une description acceptable des données.

**Limites mathématiques au formalisme multifractal.** Alors qu'il a été montré que pour certaines classes de fonctions (fonctions auto-similaires dans [Jaf97]) ou certains exemples spécifiques, le formalisme multifractal (V.23) est exact, les études mathématique ont aussi exhibé des limites à sa validité dès que le signal étudié incorpore des singularités autres que celles hölderiennes, en particulier des singularités oscillantes du type (V.17) [JM96, Mey01, Jaf00a, Jaf00b].

À la différence des singularités en *cusps*, les singularités oscillantes voient leur exposant de Hölder augmenter de $1+\beta$ pour chaque intégration successive [JM96]. C'est l'origine qui explique que la mesure de $D(h)$ dans le formalisme multifractal de fonctions avec des singularités oscillantes est en général fausse : l'estimation locale (même par les méthodes statistiques) des $h$ est perturbée par l'exposant $\beta$.

Un formalisme multifractal généralisé qui décrit un spectre de dimension $D(h,\beta)$, fonction des deux exposants de Hölder et de chirps, fut proposé et il admet une interprétation thermodynamique, développée dans [AM94, ABJM97]. Cependant les méthodes d'estimation conjointe en $h$ et en $\beta$ qui en furent déduites n'ont pas passées à l'heure actuelle avec succès l'épreuve de la mise en œuvre sur des signaux expérimentaux avec un peu de complexité[2].

**Les interprétations géométriques fractales.** Du fait que l'hypothèse multifractale (V.22) est principalement statistique, on peut en fait oublier la phénoménologie qui en donne une interprétation comme l'existence d'une hiérarchie continue de singularités dans le champ de

[1] pour *Extended self-similarity.*

[2] Cette remarque fait suite à la thèse de Stéphane Roux [Rou96].

vitesse, distribuées sur des géométries fractales. Bien que cette image permette de forger des modèles simples d'intermittence et d'en donner leur sens (du modèle $\beta$ aux tentatives plus récentes de [QC99] en passant par les travaux populaires de She-Lévêque [SL94]), la réalité des structures fractales qu'elles proposent n'est pas soutenue par les expériences [Sre91, Fri95].

Ni théoriquement à partir de l'équation de Navier-Stokes pour laquelle le débat sur l'existence (en temps fini) de singularités réelles (divergentes) dans la vitesse reste sans fin et est une des grandes questions mathématiques en attente [GS95, BNW95] ; ni expérimentalement par les visualisations des écoulements, on n'a su identifier des structures ayant une géométrie et une régularité cadrant avec le formalisme multifractal. Les seuls espoirs d'illustration des outils de géométrie fractale en turbulence semblent reportés sur le problème du scalaire [WV02], passif ou non ([Poc97] pour les fronts de flamme).

En définitive, il semble bien que la bonne interprétation de l'*intermittence* décrite ainsi, ou par les cascades log-infiniment divisibles, reste d'origine *statistique*.

**Statistique ou dynamique ?** Deux arguments poussent alors à chercher au-delà de l'interprétation statistique. Le premier est un faisceau de travaux en faveur de la réalité de structures cohérentes que nous allons survoler dans les lignes qui viennent. Le deuxième argument a été exposé dans ses grandes lignes : on peut chercher une justification du spectre singulier en $k^{-5/3}$ en partant des structures (ici au sens mathématique) seulement, avant de regarder plus loin la statistique.

Une voie alternative de modélisation de la turbulence serait alors de ne pas se concentrer sur la description statistique d'abord mais au contraire de spécifier les organisations ou les structures caractéristiques qui apparaissent en turbulence, de les décrire au choix avec une approche de mécanique des fluide ou à l'aide des théories sur les comportements singuliers possibles des mesures, et enfin d'en construire une collection statistique pour examiner le comportement d'ensemble.

## 1.4 Structures spatio-temporelles en turbulence expérimentale

### 1.4.1 Les expériences de mise en évidence.

L'interprétation uniquement statistique de la fluctuation locale des grandeurs mesurées (qui induit que $\zeta(q) \neq q/3$) oublie l'existence d'organisations locales de la vitesse, visibles au moins par les méthodes d'observations de flots turbulents que l'on connaît. Ce sont les tourbillons derrière un obstacle, les volutes de fumées qui restent groupées sous des formes précises avant de tout à coup se déformer et se disperser dans une région de distorsion importante.

L'apparence d'un champ de vitesse turbulent est loin d'être seulement un champ aléatoire avec des statistiques imposées par les fonctions de structure ; il existe une organisation d'origine géométrique (existence des vortex et des zones d'étirement fort) à un instant donné, et une structuration dynamique qui fait que les objets suivis des yeux ne perdent leur structure qu'au bout d'un certain temps. Des expériences se sont attachées à étudier avec rigueur ces structures possibles dans les écoulements.

• Dans un flot réel, les structures ont été observées principalement par un ensemencement du fluide par des traceurs. Des bulles en particulier migrent vers les zones de basse pressions qui sont aussi celles de forte vorticité (définie comme $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$). On observe alors des zones filamentaires qui persistent pendant un temps sensiblement égal au temps d'évolution à grande échelle, de longueur de l'ordre de l'échelle de Taylor $\lambda$, et de diamètre proche de $\eta$ et ce sont eux que l'on nomme vortex [DCB91, DC93, CDC95, BMTW96]. Ces études ont été confirmées et développées en utilisant la cavitation pour générer les bulles [LVMB00].

• Une visualisation est possible à l'aide de traceurs passifs comme des colorants ou de la fumée. On devine alors des structures mais plusieurs choses compliquent l'interprétation de ce qui se dessine ainsi. Dans des configurations simples, les vortex sont souvent trop sages pour permettre actuellement d'extrapoler les conclusions à la turbulence à haut Re [PRWK98]. Si l'expérience est de turbulence développée, il n'a pas été trouvé de méthode entièrement satisfaisante pour suivre ces objets. De plus les traceurs regardés globalement forment un scalaire passif qui n'a pas forcément le même comportement que la vitesse et le lien entre organisation d'un scalaire et statistiques de la vitesse n'est pas clair.

• Les études directes des mouvements de traceurs isolés, dans les expériences de mesures lagrangiennes récentes (qui accèdent à la vitesse [Mor01, MMMP01] ou à la position [LVC$^+$01] comme mesure principale), sont compatibles aussi avec la présence de zones où les trajectoires suivent des tourbillons, et d'autres où les trajectoires semblent subir des distorsions importantes. Ces zones sont espacées entre des plages de vol plutôt balistique, d'accélération faible (en particulier le module de la vitesse reste longuement corrélé).

• Les simulations numériques ne sont pas en reste et révèlent aussi des organisations des régions de forte vorticité en objets filamentaires, avec des régions de dissipation importantes qui semblent s'assembler plutôt en nappes [SJO90, Tsi98]. La présence de ces objets se constate dans les simulations numériques directes et est à la base aussi de méthodes plus élaborées qui mettent l'accent sur la persistence de structures de vorticité [FSK99, FPS01]. Notons enfin que des simulations légères de turbulence lagrangienne font aussi une part belle à l'existence de structures géométriques de durée de vie longue [FV98, MV99, KPV02].

• Les solutions exactes à l'advection turbulente révèlent aussi l'existence de structures préférentielles dans la dispersion des traceurs scalaires mais elles n'ont pas été reliées jusqu'ici aux organisations dynamiques des flots turbulents puisque les solutions concernent pour l'instant des modèles avec champ de vitesse de Kraichnan qui supprime les corrélations dynamiques [FGV01].

• Certains modèles de turbulence formulés spectralement révèlent des organisations structurées cette fois dans l'espace de Fourier (ou des échelles). Les modèles en couche ont révélé la possibilité de passages de sortes d'ondes cohérentes à travers les échelles qui pilotent alors les statistiques (instantons) [DG98, BDDL99, DDG00]. Une autre signature de l'existence de structures est recherchée dans les fonctions de structure par l'existence d'invariance en échelle discrète [Sor98a, ZS02a] qui serait associée au processus d'éclatement des tourbillons selon un mécanisme fondé sur un rapport d'échelle privilégié (un vortex se casse en 2 ou 3 autres mais pas en un nombre quelconque en moyenne [Nov71]).

Les deux derniers points sont des résultats que l'on peut relier intuitivement à la présence de structures dans les écoulements sans savoir forger un lien clair avec les structures cohérentes de type vortex.

Ce bilan laisse de plus de côté une littérature plus massive encore sur des structures cohérentes en présence de parois ou d'obstacles, pour la turbulence atmosphérique, et les travaux de mécanique des fluides sur les vortex, leur stabilité, leur contrôle, etc. On consultera par exemple [Can81, Liu89, DSW94, Wes02]. Nous ne regardons ici les tourbillons que pour leur place supposée dans la turbulence statistique loin des parois.

### 1.4.2 Recouvrer des vortex en intermittence statistique

Quelques travaux ont été consacrés à l'étude de la signature des vortex dans les grandeurs statistiques, en particulier savoir si l'intermittence est gouvernée par ces structures.

• La recherche dans les mesures à une ou deux dimensions des événements cohérents a été menée en cherchant les objets de grande énergie [CG97, CG99a, CG99b], de grande amplitude [Abr97, Rou96], les zones révélant des gradients importants [BMTW97, MJWT00, MWAT00] ou en corrélant la vitesse aux dépressions [AFFL94, Abr97, Cha97, CAP99]. Les conclusions ne sont jamais clairement en faveur de l'importance de ces structures pour l'intermittence statistique [Cha01].

Cependant ces méthodes recherchent des événements de signature forte et les vortex trouvés sont espacés (un tous les quelques temps de retournement grande échelle) et peu nombreux (on en visualise rarement plus de un ou deux en même temps dans les expériences). L'intérieur des vortex, nécessairement localisés du fait des méthodes de détection, n'a qu'une probabilité faible de rencontrer le point de mesure. La conclusion est donc plutôt que les grands objets cohérents ne sont pas directement responsables de l'intermittence mais ne dit rien sur des objets cohérents de plus faible échelle et/ou amplitude (les « vermisseaux » ou *worms* de la turbulence), ou encore de l'effet dynamique d'organisation dû à la présence des objets que rien n'empêcherait de contrôler le « fond » turbulent [FSK99, FPS01].

• Pour s'affranchir de la limitation qu'imposent les mesures en un point ou dans un plan pour sonder les structures tridimensionnelles, une méthode de mesure spectrale de la vorticité par diffusion acoustique d'ultrasons a été développé par C. Baudet [BMW99]. Les résultats actuels obtenus sont en faveur de l'existence de structures pour la vorticité qui persistent pendant plusieurs temps de retournement au moins et qui semblent migrer en moyenne vers les petites échelles. C'est une manière de visualiser une cascade directe dynamique (et non statistique) allant des grandes échelles vers les petites, qui est une figuration ancienne proposée par Richardson de la turbulence.

• Enfin, grâce aux progrès des simulations numériques d'une part [Bra91, VM91, JWSR93, KT94, Jim98], et des possibilités d'acquisition puis des traitement d'images d'écoulements réels, l'étude par des statistiques individuelles des objets visualisés (leur fréquence, leur taille, leur allure), des propriétés d'alignement entre ceux-ci, ou des interactions qu'ils développent entre eux ou avec leur entourage, est un vaste sujet dont le défrichement commence [Jim98, Tsi98, JMTW99, MJWT00]. Notons en particulier des travaux qui cherchent à retrouver directement la structure de la vitesse autour des filaments de basse pression et montrent une organisation en spirale de la vitesse [VB96, KM99, Kid00]. D'autres travaux favorisent le calcul des trajectoires lagrangiennes et montrent l'existence de mouvements en spirales qui rappelent les quelques mesures lagrangiennes existantes [Mor01, MMMP01, LVC$^+$01].

#### 1.4.3 Quelle importance des vortex ?

En réponse à la question soulevée par Tsinober [Tsi98], il semble en définitive que des vortex, que nous définissons dans ce travail comme les zones de forte vorticité (ou de fort tourbillonnement) et que les simulations numériques laissent à soupçonner qu'elles sont les structures filamentaires des expériences, existent bien. Leur importance, dès que l'on s'intéresse à une approche mécanique de la turbulence, semble établie : en description lagrangienne elles conditionnent le mouvement réel de traceurs, en description eulerienne elles peuvent organiser en moyenne le flot à une distance plus grande que leur taille seule.

En revanche, leur influence sur les statistiques de l'intermittence est fortement mise en doute : si elle existe, c'est par l'organisation dynamique ou géométrique à leur alentour et non directement du fait des événements isolés qu'ils peuvent représenter dans les signaux analysés. Puisque l'intermittente statistique et ses méthodes de mesure sont aveugles en quelque sorte à certaines structures cohérentes dans les signaux analysées, la question de l'existence d'une signature spécifique de ces objets n'a pas pour cadre naturel celui de l'intermittence statistique.

## 2 Les structures organisées : survol des théories

Ce paragraphe développe les arguments et les études antérieures menées pour rendre compte de ces objets et de leur influence. Le point de vue est de fonder des modèles de turbulence sur des objets organisés pour rendre compte du comportement des signaux de turbulence. C'est dans ces cadres que nous espérions caractériser des vortex.

### 2.1 Description phénoménologique : les *eddies*

Une des premières descriptions imagées de la turbulence fut proposée par Richardson. Celui-ci avance que le mécanisme dynamique essentiel en turbulence est celui de tourbillons (les *eddies*), qui ne sont pas identifiés ou précisés plus qu'étant les zones de mouvement organisé, qui entrainent des petites tourbillons autour d'eux, eux-mêmes en faisant tourner de plus petits, ce processus se poursuivant à l'infini. C'est une première manière d'envisager une cascade dynamique d'énergie : les grandes échelles mettent en mouvement les petites échelles et leur transfèrent ainsi de l'énergie cinétique qui finit par être dissipée aux échelles (proches de $\eta$) où la dissipation visqueuse devient importante.

Cette vision de cascade dynamique est complétée par les phénomènes où les vortex se brisent du fait de l'interaction vorticité - déformation et deviennent alors un petit nombre vortex de plus faible taille, donc décalés vers des échelles plus petites. Elle est à l'origine d'interprétations statistiques de la cascade de turbulence qui n'exploitent pas directement en fait l'idée de cascade mécanique qui est derrière.

Deux discussions s'ajoutent à la description par les *eddies*. Quelle forme prennent-ils usuellement ? Townsend [Tow51] puis Kuo et Corrsin [KC72] ont cherché des réponses expérimentales à cela ; depuis les réponses sont fortement influencées par les simulations numériques [VM91, Jim98] qui montrent ces filaments associés à la vorticité.

Pour confronter l'idée de cascade dynamique de tourbillons aux mesures en turbulence, et aux modèles d'origine statistique, il faut trouver comment prédire les propriétés statistiques à partir de cette description qui portent sur des objets dynamiques.

## 2.2 Les modèles historiques : des collections d'objets

Le fil chaud et les mesures de vitesse ne se sont pas révélés de bons instruments pour sonder d'eventuelles structuration dans les écoulements. Les tentatives de Townsend [Tow51], puis de Kuo et Corrsin [KC72] montrent que les zones d'activité dominante sont plutôt réparties sur des nappes ou bien des constructions en bâtons (alignés selon un axe peu courbé) plutôt que dans des zones globalement sphériques. Mais il n'a pas été possible d'aller beaucoup plus loin.

La confrontation aux modèles construits sur des vortex simples n'a pas permis de clore la question puisque ces modèles ne prédisaient pas la loi de puissance en $k^{-5/3}$ pour le spectre isotrope en énergie. La collection de vortex axisymétriques et stationnaires de type Bugers supposée par Townsend [Tow51] a un spectre en $k^{-1}$ tandis que l'ensemble de feuillets de vorticité que privilégie les études de Corrsin se comporte en $k^{-2}$ dans la zone inertielle [Cor62]. Le modèle de turbulence à petite échelle de Tennekes qui organise la vorticité en filaments alongés n'est pas plus concluant [Ten68].

La difficulté pour déterminer la structure principale adoptée par les vortex, est que les expériences ou les simulations numériques montrent plutôt des vortex filamentaires tandis que l'on a des mécanismes connus pour engendrer plutôt des nappes de vorticité (par cisaillement près d'obstacles ou parois) [Bat67].

Finalement ces descriptions restent avec des objets de structure et de dynamique trop simples et les développements décisifs pour proposer des modèles statistiques fondés sur des objets furent d'une part de s'adresser à des géométries entièrement différentes, d'autre part de chercher un mécanisme de cascade d'énergie directement dans les équations de dynamique des fluides.

## 2.3 Modèles de spirales

Moffatt [Mof84, Mof93, MKO94] a ouvert la question de la topologie possible du champ de vitesse et du champ de vorticité d'un écoulement turbulent. Puisqu'il faut respecter les contraintes d'incompressibilité, des propriétés statistiques (celles décrites principalement par les théories que nous venons de rappeler) et d'allure des écoulements dans les expériences, il suggérait de développer des modèles fondés sur l'existence de structures en spirale [Mof84]. À la fois pour la turbulence à 2D et pour celle à 3D, ces structures ont été regardées sous beaucoup d'aspects, tant comme descriptions surtout géométriques (en faisant alors usage des outils de type géométrie fractale ou singulières) qu'en cherchant des solutions analytiques qui auraient cette forme.

La première voie a donné lieu à de nombreux calculs des propriétés spectrales des ensembles fractals avec accumulation autour d'un point, à l'exemple des spirales, en confrontation avec celles des ensembles où les discontinuité sont soit isolées, soit répartis sur des géométries réellement fractales (denses et uniformément réparties comme pour les hiérarchies fractales des modèles d'inspiration multifractale). Plus rarement les statistiques d'ordre supérieur sont estimées. Nous renvoyons à [Gil88, VH91, Vas92, Vas93].

L'avancée importante apportée par ces idées est qu'il fut montré que ces structures permettent de construire, en supposant une collection statistique de tels objets, un modèle de turbulence aux petites échelles qui est cohérent avec les mesures et les analyses des quantités spectrales [Lun82, Lun93] ou d'ordre supérieur [SP96, Vas93]. En revanche les approches géométriques n'ont pas connu de succès pour la description des mesures directes de vitesse et ne réussissent pas à discriminer entre les diverses géométries possibles sur la base d'outils construits sur les fractales [KV94, NV98, Bor99]. C'est pour le scalaire passif que ces travaux ont servi avec succès l'analyse, en exhibant des propriétés de diffusion anormale reliée à la dimension fractale du vortex, des propriétés de mélange chaotique dû à l'existence de vortex et enfin en caractérisant la dynamique de réactions chimiques ou les combustions par l'étude des interfaces [Poc97, Vas97, FV97, AV99a, WV01, BBG01].

Pour le problème de la vitesse, on ne sait pas actuellement caractériser la présence de telles géométries dans les signaux mesurés. Cela est dû à la grande sensibilité des méthodes proposées, et à une trop grande dépendance en fonction de la structure regardée des propriétés construites sur la géométrie fractale (c'est la géométrie singulière qui commande tout alors que si on tronque à une échelle finie – quelques bras de spirales ou oscillations de singularités oscillantes – on ne sait plus alors distinguer par les mesures ces géométries).

## 2.4 Modèles de mécanique des fluides

Parallèlement aux idées géométriques, Lundgren proposait d'expliquer les propriétés statistique de la turbulence en tant que celles d'une solution (asymptotique aux temps longs) des équations de la dynamique des fluides [Lun82, Lun93, PS98]. L'objectif est de donner un éclairage essentiellement mécanique à ce qu'est la cascade d'énergie en turbulence. Notre travail ayant été orienté fortement sur cette approche et des extensions possibles, nous détaillerons les hypothèses, le comportement qualitatif de la solution et les résultats que l'on peut déduire de ce modèle.

Le constat de départ est à nouveau qu'une géométrie simple et des objets stationnaires ne suffisent pas à expliquer un spectre en $k^{-5/3}$ et Lundgren propose alors de forger un modèle de vortex qui mette en jeu une géométrie plus complexe (proche des spirales géométriques) et dont l'évolution en temps est primordiale. Nous tentons de faire le point dans la suite sur l'importance relative de ces aspects.

## 2.5 Questionner les approches par des objets

### 2.5.1 Observer les objets

La première idée pour comprendre les modèles d'objets est de les comparer à des vortex expérimentaux. Nous avons ainsi mis en place une expérience de mesure de la vitesse dans le sillage d'un barreau de section cylindrique, schématisé sur le dessin V.4. En augmentant le Re, l'instabilité [Hue90] de von Kármán créé une allée de vortex alternés [Wil96] que nous avons cherché à caractériser comme des objets isolés.

**Conditions expérimentales.** L'expérience a été réalisée dans la soufflerie basse vitesse du laboratoire de physique de l'ÉNSL, construite par C. Baudet et J.-F. Pinton [BCP91]. Elle est constituée d'une veine carrée de 50 cm de côté et de 3 m de long. Seize ventilateurs couvrant toute la surface l'entrée de la soufflerie assurent un écoulement permament qui est laminarisé et rendu homogène avant la veine par des grilles et des nids d'abeille. L'écoulement d'air en dehors de la conduite de la soufflerie est libre et la circulation de retour a lieu alors dans toute la salle de l'expérience. Les vitesses accessibles pour l'écoulement uniforme amont donné par la soufflerie sont entre 30 cm/s et 1,20 m/s environ.

Le système adopté de mesure de la vitesse dans l'air est un fil chaud (voir par exemple [Com76] et [Gol83]). Le principe est que l'air emporte par échange convectif de la chaleur en passant sur le fil chauffé à une température supérieur à celle de l'écoulement. La mesure de la puissance fournie au fil et ainsi du flux convectif qu'il perd, se relie à la vitesse de l'air par la loi de King.

La calibration pour les petites vitesses du fil chaud (vitesses inférieures à 1 m/s) n'est pas aisée car la relation se complique entre la vitesse de l'air et la tension nécessaire pour fournir le flux de chaleur emporté par convection : elle n'obéit pas directement à la loi de King. Nous avons alors calibré le système de mesure pour les vitesses basses (inférieure à 1 m/s) de deux manières. Premièrement en mesurant le temps de vol d'impulsions thermiques dans l'écoulement. Elles sont principalement advectées (et diffusent trés peu) sur les distances de mesure (entre 50 cm et 2m) selon les résultats de [HP99] et servent ainsi de mobile repérable en vitesse. La deuxième méthode fut à l'inverse de déplacer le fil chaud à une vitesse connue sur un rail, tiré par un moteur à vitesse constante. Le dispositif a été réalisé par C. Laroche du laboratoire de physique, en inspiration du montage décrit dans [TJ90]. De ces deux mesures on en a déduit l'étalonnage conjoint à ces vitesse basses de la soufflerie (vitesse imposée en fonction de la tension fournie aux ventilateurs) et du système de mesure de vitesse par fil chaud.

**Observations expérimentales.** Nous avons alors étudié le sillage derrière des barreaux cylindriques de diamètres allant de 1 mm à 2 cm, suspendus (sans contact direct avec les parois de la soufflerie) dans l'écoulement perpendiculairement à la vitesse moyenne. Le fil chaud a été placé en aval de l'obstacle à différents positions dans le sillage.

Nous avons d'abord vérifié que l'allée de vortex alternés se développe efectivement telle qu'elle est connue [Wil96] en établissant la relation entre fréquence de passage des vortex et nombre de Reynolds (figure V.4) et par des visualisations directes en mettant un traceur scalaire (de la fumée) dans l'écoulement. L'expérience a consisté ensuite à se concentrer sur la structure du signal de vitesse en présence de ces objets qui passent répétitivement.

Du fait du couplage important des objets et de la difficulté de supprimer les instabilités dans la troisième dimension (qui interviennent en fait avant que leur évolution à 2D ne devienne sufisamment complexe pour convenir de modèle pour des objets à structure interne riche) [Wil96, MFP01], nous avons conclu que cette expérience ne permet pas d'accéder à des propriétés internes des vortex. En particulier les profils de vitesse, même une fois les instabilités autres que 2D éliminées le plus longtemps possibles, ne se brisent pas pour révéler des objets séparés mais passe d'une vitesse principalement sinusoïdale à une vitesse d'allure chahutée où les objets ne sont pas séparables (figure V.5).

**Commentaires.** Des pistes alternatives pour observer des objets isolés cette fois et à structure riche existent et les expériences devraient être reprises plutôt dans ces configurations. Les travaux sur les vortex derrière une marche [PRWK98], ou sur les vortex décrochés derrière des ailettes [ML00, ML01] étudient la dynamique d'objets uniques sur lesquels on gagne en résolution de leur complexité interne (en perdant cependant l'ingrédient d'interaction entre plusieurs objets). Les expériences de la thèse de R. Hernández qui a contrôlé l'instabilité de sillage d'un barreau pour ne décrocher qu'une paire de vortex unique et dont on peut alors établir la structure [HP99].

Dans ces expériences, les objets sont naturellement séparés des autres, et restent en place un temps assez grand ce qui permet leur observation précise et le développement en leur sein d'une évolution dynamique qui enrichit leur organisation (par exemple en formant des structures spiralées) ou qui permet l'étude des interactions entre les objets. Notons aussi que mesurer la vitesse apparaît au final une méthode bien moins efficace que les mesures de vorticité ou les visualisations de scalaire pour étudier les objets cohérents ; le principal problème est la localité des mesures au fil chaud alors que les deux autres permettent de saisir l'évolution globale des objets.

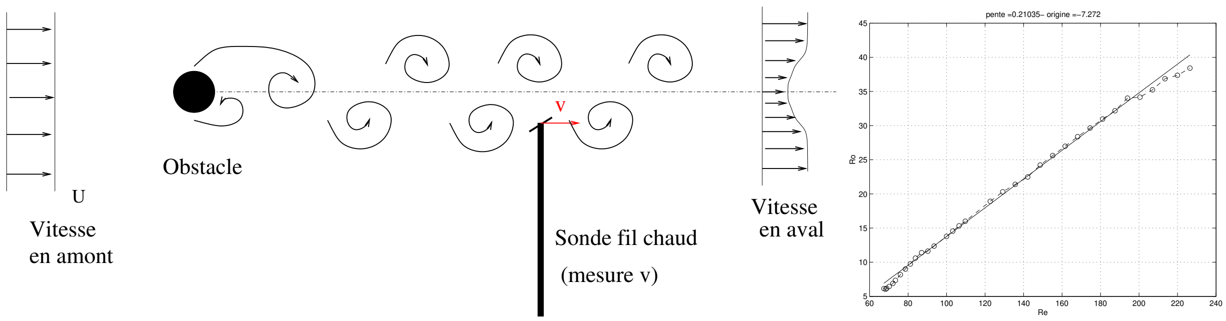



Fig. V.4: Schématisation de l'allée de vortex alternés de von Kármán [Wil96] que nous avons étudiée. Nous reportons à droite la caractéristique mesurée du nombre de Reynolds Re= $Ud/\nu$ en fonction du nombre de Roshko Ro= $fd^2/\nu$. $\nu$ est la viscosité, $d = 3$ mm le diamètre du barreau, et $f$ est la fréquence fondamentale des oscilations du sillage. L'accord avec la relation de Roshko, Ro=0.212 Re - 4.5 est acceptable.

### 2.5.2 Caractériser et mesurer les objets

Un objectif est de trouver des façons de mesurer la présence d'objets structurés en turbulence développée qui ne soit pas d'origine statistique. Sinon les chances sont fortes que le modèle ne soit qu'une explication compatible avec les données mais n'apprenne en fait rien de spécifique sur les objets.

Nous allons expliquer quelles propositions furent faites en se basant sur les vortex spiralés comme outils de caractérisation propres des objets, et comment elles émergent des modèles de vortex. Cependant ces méthodes ne se sont pas révélées des analyses fiables de signatures d'objets pour les expériences.

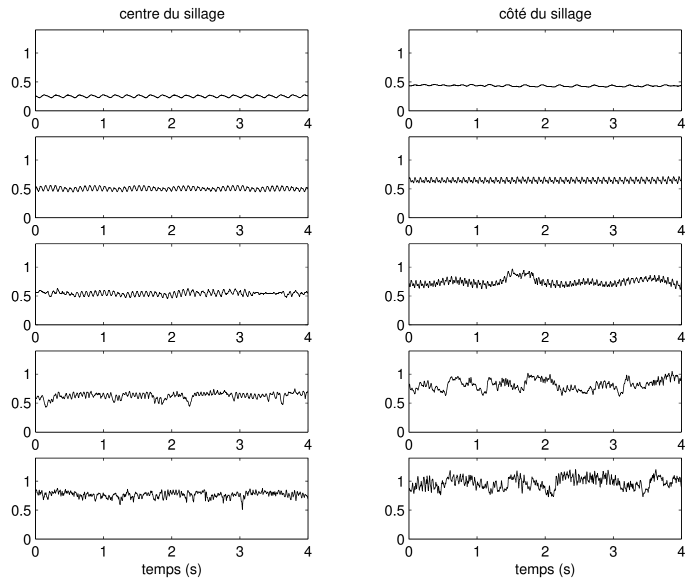



Fig. V.5: Exemples de profils de vitesse (en m/s) dans le sillage quand on augmente la vitesse moyenne en aval du barreau. Ici le $Re$ passe par les valeurs 80, 120, 135, 155 et 190. Les courbes à gauche sont la vitesse au milieu du sillage à 6 cm en aval de l'obstacle de 3 mm de diamètre, à droite le fil chaud a été déplacé perpendiculairement de 1 cm par rapport au centre.

### 2.5.3 Formation et stabilité des objets

Enfin la grande question que nous avons dès le départ laissé inabordée est celle de l'origine des objets. Nous sommes partis des constatations expérimentales en faveur des objets mais on ne sait pas bien expliquer pourquoi ils se forment, pourquoi ils font preuve d'une stabilité importante même dans des écoulements à turbulence importante ni même si ils se forment vraiment et ont une durée de vie suffisante pour les identifier comme structures quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini, cadre de la turbulence pleinement développée.

## 3 Revisiter les modèles de vortex pour la turbulence

Dans tout cet ensemble d'approches pour dépasser l'image séduisante des tourbillons, mais insuffisante en tant que description prédictive, deux voies ont retenu initialement nos efforts : le modèle mécanique de la solution de Lundgren et l'ensemble statistique que l'on construit dessus ; les modèles fondés sur des organisations géométriques reflétant des singularités oscillantes, principalement à l'aide de vortex spiralés. C'est la relation entre les deux qui donnait espoir de trouver une méthode pertinente d'estimation des caractéristiques des structures décrites par ces modèles.

Les paragraphes qui suivent sont une présentation jointe des modélisations issues des équations dynamiques et issues des réflexions plus géométriques qui se fondent sur des vortex à structure interne complexe pour expliquer les propriétés statistiques des petites échelles de la turbulence.

## 3.1 Introduction aux vortex spiralés et aux vortex de Lundgren

Lundgren a construit une solution en vortex faisant usage des astuces de projection sur une dynamique bidimensionnelle pour décrire un tourbillon qui soit instationnaire axisymétrique et puisse justifier une énergie en $k^{-5/3}$. Puisque ni une collection de vortex stationnaires simples, ni un ensemble de feuillets de vorticité ne suffisent à cela, il propose une situation intermédiaire : un feuillet de vorticité qui s'enroule sur lui-même jusqu'à se fondre dans un cœur de vorticité axisymétrique.

Depuis l'idée initiale de Lundgren [Lun82, Lun93] exhibant une forme de vortex instationnaire dans le temps, dont on peut déduire une statistique générale de champ de vitesse qui apparaît compatible avec celle de la turbulence développée, de nombreuses études ont examiné la solution proposée [BP89, Gil93, PS93, PS94, PBS94, SP94, Pul95, SP96, Seg95, VB96, AV99b, BG98, BG99, GFD99, PV00, BBG01, GPPL01]. Nous donnons les lignes directrices de la construction de la solution et de ce qui en fait son intérêt sans détailler les pages de calculs qui justifient certaines propriétés. On pourra se reporter à l'article de revue [PS98] qui couvre le modèle ou encore [Bor99] dans lequel nous faisions le point sur sa place en turbulence développée.

## 3.2 Rappels de dynamique de la vorticité

Nous avons argumenté que, selon une littérature assez large, structures cohérentes et ensembles organisés de vorticité sont en partie assimilables. Ainsi les descriptions des vortex passent par l'étude non pas directement du champ de vitesse mais plutôt de la vorticité. On notera que cela rapproche ces études théoriques des méthodes de mesures axées sur la vorticité de l'écoulement (diffusion acoustique, visualisation par des bulles).

**Équations pour la vorticité.** La vorticité est définie comme le rotationnel de la vitesse $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ ou encore $\omega_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_i v_j$. Elle représente la partie antisymétrique du tenseur des déformations, c'est-à-dire celle qui décrit les rotations locales (sans déformation) à l'intérieur du fluide. Par conséquent, pour décrire un tourbillon dont l'effet principal est une rotation, la vorticité est la composante naturelle à étudier pour caractériser la vitesse. Nous rappelons ici les équations pour la vorticité. Pour un espace à trois dimensions cette équation est :

$$D_t \vec{\omega} = \partial_t \vec{\omega} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) + \nu \Delta \vec{\omega}. \tag{V.25}$$

Le terme $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{v})_i$ se récrivant comme $\omega_j s_{ij}$ où $s_{ij} = (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)/2$ est le tenseur des déformations symétriques, la vorticité voit sa dynamique pilotée par les déformations. En particulier les ensembles de vorticité sont facilement étirés du fait de $s_{ij}$ et dans ce cas généralement amplifiés. La dynamique générale de la vorticité étant riche et complexe, on peut n'en chercher que des tendances générales en réduisant les situations envisagées.

En suivant l'idée que l'allure habituelle des vortex est celle de filaments allongés de courbure faible, une hypothèse peut être de chercher la dynamique bidimensionnelle de la vorticité, dans un plan qui coupe orthogonalement l'axe privilégié presque droit du vortex. Les équations ne concernent plus que la composante axiale $\omega_z$ et la vitesse dans le plan $\vec{v}_2$ telle que $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}_2 = \omega_z \vec{e}_z$ :

$$D_t \omega_z = \partial_t \omega_z + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \omega_z = \omega_z s_{zz} + \nu \Delta \omega_z. \tag{V.26}$$

Cette hypothèse limitée oublie une part importante de l'interaction $\omega_j s_{ij}$, en particulier celle qui est responsable de la torsion des vortex. En fait on oublie surtout la partie dont on ne sait pas préciser le comportement général.

**La vorticité en turbulence.** Pourquoi se fatiguer à mettre l'accent sur la vorticité alors que les descriptions statistiques en turbulence développée concernent la vitesse ? La réponse est que la vorticité, organisée en structures peut-être mieux identifiables que $\vec{v}$, permet aussi de calculer les grandeurs habituelles. En particulier on montre facilement l'approximation suivante pour la dissipation en régime stationnaire :

$$\overline{\epsilon} = 2\nu \mathbb{E}\left\{s_{ij}s_{ij}\right\} \simeq \nu \mathbb{E}\left\{|\vec{\omega}|^2\right\} \tag{V.27}$$

Sous hypothèses d'homogénéité et d'isotropie, on peut ensuite relier les grandeurs spectrales à celles pour la vitesse. En particulier on pose :

$$R_{\underset{\omega}{ij}}(\vec{l},\vec{r};t) = \mathbb{E}\left\{\omega_i(\vec{r},t)\omega_j(\vec{r}+\vec{l},t)\right\} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_{\underset{\omega}{ij}}(\vec{k},t) = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{l}} R_{\underset{\omega}{ij}}(\vec{l},\vec{r};t)\mathrm{d}\vec{l}. \tag{V.28}$$

On se reportera à [Bat53] pour toutes les relations entre ces tenseurs et ceux pour la vitesse, ainsi que pour les passages entre les coupes unidimensionnelles (les signaux que l'on suppose récupérer par des mesures à fil chaud), les modèles de dynamique bidimensionnelle, et la situation théorique 3D de départ. On utilisera par exemple :

$$\Gamma_{\underset{\omega}{ij}}(\vec{k},t) = |\vec{k}|^2 \Gamma_{ij}(\vec{k},t) \qquad \text{et} \qquad E(k) = \frac{1}{2k^2}E_\omega(k), \tag{V.29}$$

où l'indice $\omega$ désigne les quantités spectrales pour la vorticité. On dénomme en particulier enstrophie la densité spectrale associée à la vorticité, qui joue le rôle de l'énergie donc pour la vorticité. $E_\omega(k)$ est le spectre isotrope d'enstrophie tandis que $\Gamma_{\underset{\omega}{ij}}(\vec{k},t)$ est le tensur d'enstrophie instantané.

## 3.3 Phénoménologie et hypothèses du modèle de Lundgren

**Description imagée de la solution.** Avant de se lancer dans les équations de mécanique des fluides, un panorama de ce qu'on obtient est plus parlant. Dans le cadre des hypothèses d'un vortex filamentaire étiré le long de l'axe et, par incompressibilité, qui se resserre alors dans le plan orthogonal, Lundgren a exhibé comme solution un feuillet de vorticité qui s'enroule en spiralant autour de son axe. Cette situation est dans l'esprit proche de ce que l'instabilité de Kelvin-Helmholtz peut engendrer et ainsi jugée raisonnable. L'existence de bras spiralant semblait essentielle car ni le cœur, qui s'élargit par effet de la viscosité en un objet proche d'un vortex de Burgers et produit une rotation d'ensemble, ni un feuillet de vorticité seul ne conduisent à une énergie en $k^{-5/3}$ ; c'est la structure petite échelle associée à la répétition des bras qui a été souvent interprétée comme responsable du bon comportement spectral du modèle de Lundgren.

Les caractéristiques qui nous ont intéressés initialement dans cette approche sont d'abord que les vortex sont **instationnaires** mais surtout **migrent vers les petites échelles** au cours du temps du fait de l'étirement qui rapproche les bras des spirales. Ce mécanisme donne une image direct en terme d'une solution de l'équation dynamique de (NS) de la **cascade** d'énergie justifiée et interprétée sinon essentiellement par des arguments qualitatifs (les *eddies*) ou par des théories statistiques. Deuxièment, la structure en spirale offre l'avantage d'être explicitement lacunaire et organisée autour d'un centre si on extrapole la géométrie fractale sous-jacente (J. C. Vassilicos [VH91, KV94] parle de K-fractale pour un objet qui n'est pas fractal – auto-similaire ou singulier – en tout point mais autour de certains points) ainsi que reliée à des comportements de singularités oscillantes car une coupe dans le plan à travers les bras de la spirale donne naturellement des signaux de ce type (en fait, soit effectivement oscillant ou associé à des signaux *on-off*, soit avec des impulsions toujours du même signe qui engendrent des structures cumulatives). La figure V.6 est une illustration très libre du modèle.

Ces deux caractéristiques apparaissent idéales pour fonder une réflexion autour d'un modèle de cascade en énergie en dynamique des fluides dont l'image est soutenue par les expériences (visualisations ou diffusion d'ultrasons), et qui se glisse dans la zone d'ombre laissée en suspens pour l'intermittence statistique, dans laquelle se cachent les singularités oscillantes mathématiques. Nous passons maintenant aux hypothèses plus techniques.

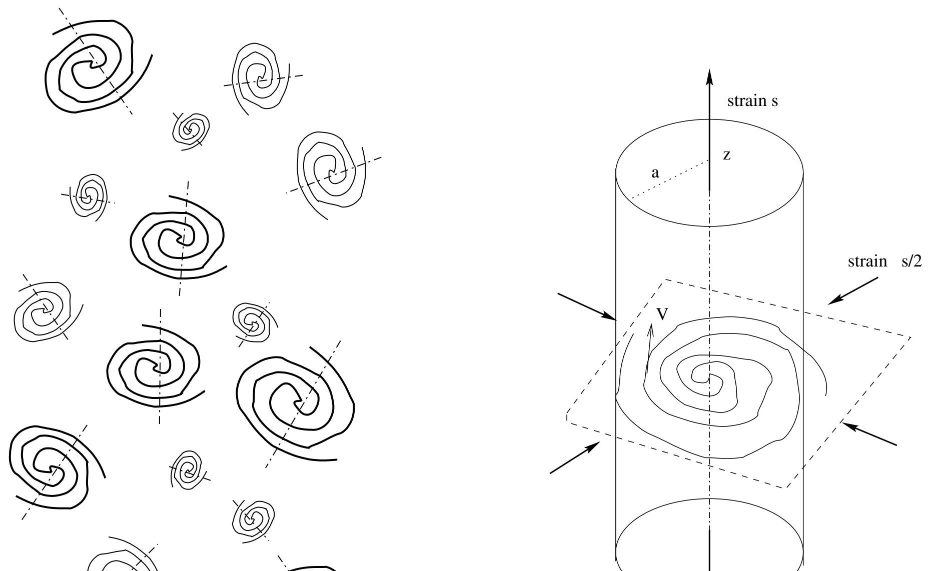



Fig. V.6: Figuration d'un ensemble statistique d'objets structurés ; c'est l'image intuitive du modèle que nous voulons étudier. Les objets sont à structure interne riche, vivent à toutes les échelles, sont instationnaires et ne se mélangent pas. À droite on a représenté le cadre que décrit la solution de Lundgren : un vortex spiralé, étiré selon un axe et dont l'évolution est quasi bidimensionnelle autrement.

**Une hypothèse de déformation moyenne.** En plus de restreindre la dynamique à une évolution bidimensionnelle selon (V.26), Lundgren modélise l'effet de l'étirement et l'amplification de $\vec{\omega}$ induite par la déformation, en supposant un tenseur de déformation moyen pour l'écoulement. On l'écrit en relation avec une vitesse de déformation $\vec{v}_d$ :

$$\vec{v}_d = az\vec{e}_z - ar\vec{e}_r/2 \qquad \text{et} \qquad s_d = \begin{pmatrix} -a/2 & 0 & 0 \\ 0 & -a/2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{V.30}$$

La compressibilité impose au tenseur $s_{ij}$ complet de déformation d'avoir des valeurs propres de somme nulle et numériquement ces valeurs s'ajustent en proportion $(-8, 6, 2)$, avec la valeur intermédiaire 2 alignée préférentiellement dans l'axe de la vorticité [AKKG87, GGH97], et non en rapports $(-1, -1, 2)$. Cette image n'est pas incompatible avec l'hypothèse moyenne du vortex puisque c'est la déformation totale liée à $\vec{v}_d + \vec{v}_2$ qu'il faut regarder et qu'on peut l'estimer comme :

$$s = \begin{pmatrix} (\tilde{\omega} - a)/2 & -\tilde{\omega}/2 & 0 \\ \tilde{\omega}/2 & -(\tilde{\omega} + a)/2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{V.31}$$

avec $\tilde{\omega}$ la partie de la vorticité non axisymétrique et 2D associée à la composante à 2D de la vitesse $\vec{v}_2$. L'hypothèse de champ moyen reste compatible [Gag87] à défaut d'être réellement justifiée avec la statistique moyenne de $s$ par rapport à $\vec{\omega}$. On peut par exemple supposer que la rotation différentielle du vortex ajoute une déformation selon $\vec{e}_\theta$ qui se traduirait par l'ajout de $(-7, 7, 0)$ aux valeurs propres pour retrouver la déformation moyenne en $(-8, 6, 2)$.

**Instationnarité – le miracle du champ moyen.** Le champ moyen de (V.30) permet de résoudre la dynamique non stationnaire de l'étirement pour la coupe à 2D grâce à un petit miracle dû à sa forme. Même si $a(t)$ varie dans le temps, on obtient la dynamique à 2D à l'aide de relations de similitude entre $\omega_z$ et un écoulement uniquement 2D. On note $S(t) = \exp(\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau)$ l'étirement cumulé jusqu'au temps $t$, et $T(t) = \int_0^t S(\tau)\mathrm{d}\tau$ le temps transformé, et on les relations suivantes [BP89] :

$$\omega_z(r, \theta; t) = S(t)\ \omega_2\left(r\sqrt{S(t)}, \theta\ ; T(t)\right) \qquad \text{avec} \qquad D_t\omega_2 = \nu\Delta\omega_2, \tag{V.32}$$

et donc $\omega_2$ obéit à une dynamique uniquement 2D, sans l'étirement $a(t)$. La pratique incite à travailler en coordonnées polaires $(r, \theta)$ dans le plan et avec le potentiel de courant $\psi_2$ tel que $\omega_2 = -\Delta\psi_2$. Les vitesses associées sont $u_{2r} = r^{-1}\partial_\theta\psi_2$ et $u_{2\theta} = -\partial_r\psi_2$, et on retrouve les vitesses du champ étiré comme

$$u_{2r} = \sqrt{S(t)}\ u_{2r}\left(r\sqrt{S(t)}, \theta\ ; T(t)\right) \qquad \text{et} \qquad u_{2\theta} = \sqrt{S(t)}\ u_{2\theta}\left(r\sqrt{S(t)}, \theta\ ; T(t)\right). \tag{V.33}$$

L'équation pour la vorticité est alors :

$$\partial_t\omega_2 + r^{-1}\left(\partial_\theta\psi_2\partial_r\omega_2 - \partial_r\psi_2\partial_\theta\omega_2\right) = \nu\Delta\omega_2. \tag{V.34}$$

Les situations connues d'évolution de la vorticité en 2D (et la loi de Biot qui s'y utilise facilement) permet de construire des classes de solutions de vortex étirés. On montre que le détail de la dépendance en temps $a(t)$ de l'étirement ne joue pas beaucoup tant qu'il reste globalement au voisinage d'une même valeur.

**Dépasser le champ moyen.** Il est difficile de dépasser l'astuce qui découple entièrement la dynamique de vorticité dans le plan de coupe et la déformation. On peut montrer [BP89] que seule la forme (V.30) pour $s_{ij}$ le permet. Une tentative plus élaborée [GFD99] permet d'ajouter une composante azimuthale à la vorticité en séparant le champ de vitesse en trois éléments : $\vec{v}_d$ associé à l'étirement selon $\vec{e}_z$ (par exemple comme en (V.30)), $\vec{v}_2$ la vitesse dans le plan de coupe orthogonal, donnant la vorticité axiale $\omega_z$, et enfin $W\vec{e}_z$ vitesse qui décrit l'évolution d'une vorticité dans le plan $(r^{-1}\partial_\theta W, -\partial_r W, 0)$.

On établit, sous hypothèse que le gradient des forces de pression axial, $\partial_{zz}p(t)$, reste uniforme dans l'espace (et cette hypothèse est intimement lié à ce qu'on regarde un vortex filamentaire, droit le long de l'axe et de comportement identique d'un bout à l'autre), et de symétrie axiale (les trois champs décrits dépendent de $(r, \theta; t)$ seulement), que les évolutions de $\omega_z$, de $W$ et de l'étirement $a$ sont alors découplées et obéissent aux équations :

$$\begin{cases} D_t\omega_z = a\omega_z + \nu\Delta\omega_z \\ D_t W = -aW + \nu\Delta W \\ D_t a + a^2 + \partial_{zz}p(t) = \nu\Delta a \end{cases} \tag{V.35}$$

Dans ces conditions $\omega_z$ et $W$ sont remplacés à l'aide de la relation de similitude de Lundgren par $S(t)\omega_2$ et $S(t)^{-1}W_2$, les variables $t$ par $T(t)$ et $r$ par $r\sqrt{S(t)}$ de telle sorte que $W_2$ et $\omega_2$ suivent la dynamique à 2D, respectivement de la vorticité et d'un scalaire passif. L'équation pour $a(t)$ demande des solution spécifiques ; il en existe des formes bornées, évoluant peu dans le temps.

Ainsi, on a une méthode générique pour chercher des solutions de vortex définis par leur coupe bidimensionnelle, avec un axe d'étirement privilégié qui sera aussi le cœur du vortex, telle que la dynamique est décrite à partir de solution de mécanique des fluides à 2D. Notons que ce modèle a été transposé à des écoulements compressibles [GPPL01] où, à la zoologie de la solution générale, s'ajoute l'existence de quasi chocs dans les bras spiralés (bras dont nous allons parler dans la suite).

## 3.4 Les équations simplifiées décrivant la solution de Lundgren

**L'approximation de rotation axisymétrique.** La dynamique réellement étudiée par Lundgren et ses successeurs est principalement celle associée à l'équation ne gardant que l'interaction entre la vitesse azimuthale moyenne stationnaire et la vorticité aux temps longs :

$$\partial_t\omega_2 + \Omega(r)\partial_\theta\omega_2 = \nu\Delta\omega_2 \quad \text{et} \quad r\omega_0(r) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(r,\theta;t)\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}(r\Omega(r))}{\mathrm{d}r}. \tag{V.36}$$

On a noté $\Omega(r)$ donc la vitesse de rotation angulaire alors que $\omega_0(r)$ est la vorticité moyenne à la distance $r$ de l'axe. La vorticité totale est en fait $\omega_2 = \tilde{\omega} + \omega_0$ si $\tilde{\omega}$ est la partie dépendant de $\theta$.

**Développement asymptotique aux temps longs et solution en spirale.** L'analyse phénoménologique conduit à regarder plus spécifiquement une nappe de vorticité qui s'enroule et s'écrit, en négligeant la viscosité en $\tilde{\omega}(r,\theta;t) = 2\pi f(t)\delta(\theta - \Omega(r)t)$.

Le calcul originel de la dynamique 2D du vortex spiralé passe par une décomposition de Fourier en fonction de $\theta$ (variable $2\pi$-périodique) avant de montrer qu'un développement en puissance de $t^{-1}$ permet d'écrire la vorticité comme étant :

$$\omega_2(r,\theta;t) = \omega_0(r) + \sum_{n\neq 0} f_n(r) e^{in(\theta-\Omega(r)t)} e^{-n^2\nu|\Omega'(r)|^2 t^3/3}. \qquad \text{(V.37)}$$

L'amortissement par viscosité des modes non axisymétriques et le fait que la vitesse de ces modes à $n \neq 0$ est encore plus rapidement amortie laisse la place à une évolution restreinte en 2D qui rejoint l'intuition que seul l'enroulement moyen, du fait de la rotation différentielle $\Omega(r)$, est important.

**Zoologie des solutions en spirale.** Il n'est pas possible de raisonner plus avant, en gardant un point de vue général, sur la structure des vortex que suppose la solution de Lundgren. En fait le choix d'une nappe de vorticité comme condition initiale est en soi déjà une hypothèse restreinte supplémentaire. Elle sert de prototype cependant au comportement du vortex puisque si $\Omega(r)$ est monotone (en général décroissant), la rotation différentielle que cela suppose construit assez naturellement des formes spiralées même si la condition initiale est différente [Lun93].

Nous ne donnerons pas les détails des diverses solutions qui ont été envisagées (on en trouvera amplement dans [Bor99]). Un aspect majeur est souvent le choix de $\Omega(r)$ qui engendre parfois des comportements bien particuliers. Parmi les choix principaux dans les travaux sur ce sujet, on trouve d'abord le modèle construit sur des Gaussiennes de Lundgren [Lun82, PS93]. Le choix porte plutôt sur des structures à enroulement algébrique dans [VB96, AV99b] où $\Omega(r) \propto r^{-\alpha}$ et le détail de l'enveloppe reste libre. Notons que le choix spécifique d'un enveloppe elle ausssi en loi de puissance, $f(r) \propto r^{-\alpha}$ [MV96], est dangereux car il conduit à une solution qui fait disparaître la dépendance en $\alpha$ des propriétés spectrales à un instant fixé (on trouve $E(k,t) \propto k^{-2}$) et complique l'étude comparée des statistiques spatiales et temporelles pour les vortex [MV96]. Pullin et Saffman combinent lois de puissance et Gaussiennes dans leur modèle analytique afin d'imposer une circulation totale du vortex, calculée loin du centre, nulle [PS93, PBS94]. Le vortex décrit se dissipe alors tout seul à temps longs (sans recourir à des mécanismes extérieurs au modèle).

Nous avons examiné les possibilités de caractériser les propriétés en échelle des objets à l'aide des outils « à la Mellin », dont nous avons vu qu'ils s'appuient une base de singularités oscillantes. Ils définissent l'échelle naturelle (*via* la transformation de Lamperti) pour décrire le comportement en échelle. La comparaison des propriétés spectrales des vortex spiralés logarithmiquement et obéissant à la solution de Lundgren avec les autres solutions ne permet cependant pas de favoriser l'une ou l'autre description [Bor99]. Le comportement spectral général moyenné dans le temps est le même (voir dessous sur la collection statistique) tandis que la variabilité des comportements individuels à l'intérieur de chaque modèle comparée à la variabilité des structures de vortex dans les expériences n'impose pas de choisir une approche plutôt qu'une autre.

## 3.5 Les vortex en spirales géométriques

**Approche géométrique des solutions.** Deuxième manière de décrire les vortex qui vont servir de brique de bases aux modèles statistiques d'objets, les travaux de Gilbert [Gil88] ou de Moffatt [Mof84, MKO94], Hunt, Vassilicos et co-auteurs [HV91, Vas92, Vas97] proposent de simplifier les descriptions en les réduisant à la géométrie. Il est alors envisagé conjointement les structures en spirale (dont la vorticité est exactement localisée sur la nappe singulière en $\delta(r-\Omega(r)t)$) et les signaux qui représentent des coupes unidimensionnelles de la forme :

$$g(x)=\sum_n a_n\delta(x-x_n). \tag{V.38}$$

Ces signaux sont des mesures typiques de vitesse, de vorticité ou leurs dérivées. Les $a_n$ sont les facteurs d'amplitude (et on regarde les cas où il gardent le même signe et celui ou le signe est alterné) ; une simplification est de supposer des sauts brutaux constants ($|a_n|=\mathrm{Cste}$) au lieu d'une amplitude changeante. Les discontinuité sont situées aux points $x_n$, positionnés sur un peu tout type de répartition géométrique particulière : fractale usuelle (pleine), série organisée autour d'un point (équivalent à des singularités oscillantes pour la description géométrique) en $q^n$, ou en loi de puissance avec $x_n\sim n^{-a}$.

Dans ce dernier cas, la géométrie se caractérise par $D'_K=1/(1+a)$, si $D'_K$ est la dimension de capacité des coupes unidimensionnelles typiques passant dans les bras du vortex. Les arguments géométriques simples relient ces coupes à l'organisation bidimensionelle dont on obtient la dimension de capacité dans le plan par $D_K=1+D'_K$ en général.

**Méthodes de calcul des fonctions de structure ou spectres.** On trouvera diverses organisations spatiales étudiées dans [VH91, AV99a]. L'enjeu est de fixer le comportement statistique des signaux issus de ces géométries et deux méthodes de calcul principales sont possibles : faire usage d'analyses de Fourier sur les coupes 1D en examinant la sommation de séries du type $\sum_n a_n e^{ikx_n}$ dont le résultat est fonction de coupures imposées à la région spatiale d'extension des vortex [Gil88] ; estimer la fonction de structure d'ordre 2 à l'aide d'arguments géométriques qui connectent la construction de recouvrement à une échelle de longueur donnée (et donc les propriétés liées à la dimension fractale) à la probabilité de se trouver entre deux points de discontinuité d'un signal [VH91].

Le résultat général pour les géométries en spirales (organisation singulière autour d'un point) est que, dans les régions où l'on sonde effectivement cette structure en quasi-fractale locale (qui est une singularité oscillante géométrique), le spectre d'énergie suit une loi en $k^{-2+D'_K}$ où $D'_K$ est la dimension des coupes 1D typiques. Un résultat plus avancé sur le modèle de spirale de Moffatt repris en modèle multispirale par Vassilicos [Vas92], est l'équivalent en ce langage géométrique de la propriété des singularités oscillantes définies par une forme analytique (V.18) puisqu'il mélange structure géométrique (la façon dont les sauts s'accumulent autour d'un point précis) et amplitude des sauts (éventuellement en se comportant comme une singularité en pointe) dans le résultat du calcul du spectre. On prouve que si $a_n\sim n^{-(1+a)\sigma-1}$ et que les points des sauts sont sur une série géométrique en $x_n\sim n^{-a}$ (cas où la spirale associée est algébrique), on a :

$$E(k)\sim k^{-2\sigma-2+D'_K}\quad\text{avec}\quad D'_K=\frac{1}{1+a}. \tag{V.39}$$

**Distinguer les différents modèles.** La simplification des vortex bidimensionnels à leurs caractéristiques géométriques essentielles avait pour objectif de réussir à contraindre les modèles à considérer en fonction de ce qu'on observe effectivement. Actuellement cependant rien ne permet de privilégier une géométrie sur une autre (spirale algébrique sur logarithmique par exemple), ni aucune méthode d'analyse d'origine géométrique n'a pu mettre en évidence une signature effective des enroulements ou des vortex géométriques (les méthodes aboutissent à des conclusions plutôt incertaines) [Bor99].

Les calculs de contributions géométriques aux propriétés spectrales des objets organisés à 2D ont pour mérite de montrer que, finalement, le modèle envisagé par Lundgren n'est pas très dépendant de la structure exacte du vortex. Malgré la diversité des structures géométrique nous allons montrer que la collection statistique de Lundgren impose un spectre qui va obéir au comportement en $k^{-5/3}$, et ce même si le spectre spatial à un instant fixé change entre deux formes spécifiques de vortex.

## 3.6 Propriétés spectrales des vortex spiralés à 2D

Pour résumer, les diverses manières de spécifier la géométrie des vortex spiralés permet de fixer leur comportement spectral. Les modèles d'inspiration géométrique (et qui ne fixent pas la dynamique des solutions) suggèrent des lois en $k^{-\sigma}$ de manière générale en reliant l'exposant à la géométrie spécifique étudiée (comme dans l'exemple (V.39)).

La forme analytique générale de Lundgren en (V.37) permet aussi d'estimer un spectre spatial à un instant donné $t$ (on regarde le vortex 2D sans étirement). Nous ne faisons pas ici ce calcul, qui se termine par l'évaluation, à l'aide de la méthode de la phase stationnaire, de la transformation de Hankel qui définit le spectre à 2D, et dont on trouvera des versions détaillées dans [Lun82, Lun93] ou encore [Bor99]. La relation de départ est le passage 2D à 3D suivant :

$$\begin{aligned} E_\omega(k,t) &\propto k\int_0^{2\pi} \Gamma_{\underset{\omega}{zz}}(k,\theta_k,k_z=0;t)\,\mathrm{d}\theta_k, && \text{(V.40)}\\ &\propto k\int_0^{2\pi} \left|\mathbf{F}_{2\mathrm{d}}\left[\omega(\vec{r},t);\vec{k}\right]\right|^2 \mathrm{d}\theta_k. && \text{(V.41)}\end{aligned}$$

La condition de phase stationnaire dans ce calcul quand on injecte pour $\omega$ une forme précise obéissant à (V.37) se résume, pour chaque mode de la décomposition azimuthale en $e^{in\theta}$, à la relation $k=-nt\Omega'(r_n)$. Fixant une forme particulière pour la rotation moyenne et pour la fonction d'enveloppe $f(r)$ permet l'évaluation de l'énergie du vortex en fonction de $k$ de façon instantanée à $t$ :

$$E(k,t)=E_\omega(k,t)/2k^2=\frac{\pi}{k}\left[E_0(k,t)+\sum_{n\neq 0}\frac{r_n}{nkt\Omega''(r_n)}|f_n(r_n)|^2e^{-2\nu k^2t/3}\right], \qquad \text{(V.42)}$$

où $E_0$ est la contribution du cœur axisymétrique du vortex (que définit la rotation d'ensemble $\Omega(r)$ et donc $\omega_0$).

**Évolution dynamique comparée à évolution passive.** Si on laisse de côté la contribution $E_0$ du cœur (qui est très dépendante de la forme exacte de $\omega_0$, est stationnaire mais ne domine qu'aux temps longs), l'évolution dynamique que l'on construit par la solution à partir de l'équation de rotation (V.36) pour $\vec{\omega}_2$, a un comportement essentiellement différent de celui d'un scalaire passif. Le spectre (V.42) se réécrit sous une forme générale (sans le cœur) en :

$$E(k,t) \sim \pi k^{-1} \left| \mathbf{F}_{2\mathrm{d}} \left[ \omega(\vec{r},t); \vec{k} \right] \right|^2 \sim \pi k^{-1} \frac{1}{kt} G\left(\frac{k}{t}\right) e^{-2\nu k^2 t/3}. \tag{V.43}$$

Remarquons que la zoologie des solutions revient à faire varier la fonction $G$ qui selon (V.42) dépend des $f_n$, des $r_n$ et donc de $\Omega(r)$. Les approximations géométriques reviennent elles-aussi à spécifier une forme particulière pour $G$. Par exemple, le calcul de Gilbert [Gil88] induit une spectre pour une spirale définie à 2D en :

$$E(k,t) \sim (\Gamma t)^{2/(1+\alpha)} k^{-4+(\alpha-1)/(1+\alpha)} = k^{-2} (\Gamma t)^{-1} \left(\frac{k}{t}\right)^{-1-\frac{2}{1+\alpha}}, \tag{V.44}$$

où $\Gamma$ est la vitesse angulaire typique du vortex (en fait $\Omega(r) = \Gamma r^{-\alpha}$). Ceci est valable dans la gamme d'échelles où c'est la structure spiralée qui est réellement sondée.

L'effet principal que l'on regarde est celui de l'existence d'une **rotation différentielle autour d'un point**. La dynamique qu'implique l'équation (V.36) est valable que ce soit pour la vitesse à 2D, la vorticité $\omega_2$ mais aussi un scalaire, noté $\theta$. En particulier il est montré que l'existence d'un centre local de rotation en $\Omega(r)$ induit la formation d'une spirale de scalaire et accélère sa dissipation par rapport au comportement purement diffusif en $|\mathbf{F}\theta(\vec{k};t)|^2 \propto g(k)e^{-2\nu k^2 t}$ qu'une évolution selon $\partial_t \theta = \nu \Delta \theta$ donne. La **dynamique en spirale** (imposée par le mécanisme extérieur que constitue $\Omega(r)$, ou $\omega_0(r)$ de façon équivalente) conduit à cette évolution en $|\mathbf{F}\theta(\vec{k};t)|^2 \propto t^{-1} g(k/t) e^{-2\nu k^2 t/3}$.

## 3.7 L'ensemble statistique de Lundgren

L'hypothèse physique de Lundgren est un prolongement de l'ensemble proposé dans le modèle de Townsend [Tow51]. Les propriétés statistiques sont supposées émerger d'une collection d'objets ayant chacun une structure précise, n'interagissant pas si ce n'est par l'existence des objets isolés, et donc de l'effet d'enroulement différentiel autour d'un axe, et d'un champ moyen de déformation qui modifie la dynamique d'un seul objet en amplifiant la vorticité au cours du temps. Les propriétés spectrales de la collection d'objets et, au-delà, l'ensemble des propriétés statistiques, ignorent dans ce cadre toute interaction directe entre les vortex qui ne se voient finalement pas les uns les autres. On suppose ainsi que les statistiques de l'ensemble sont calculables en moyennant les grandeurs calculées sur un seul objet.

Le calcul combine deux étapes : préciser les propriétés spectrales spatiales d'un objet typique et ceci vient d'être l'objet du paragraphe précédent ; construire la manière de moyenner ces propriétés pour rendre compte de la collection d'objets.

**Comportement temporel des vortex étirés.** Un vortex, isolé dans sa dynamique propre, est supposé décrit par une solution de Lundgren ou, au choix, par son approximation en vortex spiralé géométrique. Le spectre à un instant fixé est par exemple donné pour un vortex uniquement 2D par l'équation (V.43) ou (V.44), selon le modèle de solution.

Le comportement d'un vortex étiré par le champ de déformation moyen se retrouve ensuite à l'aide de (V.32) pour la vorticité, de (V.33) pour les vitesses. On rappelle qu'on introduit $S(t) = \exp(\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau)$ et $T(t) = \int_0^t S(\tau)\mathrm{d}\tau$ pour calculer l'évolution spectrale pour le vortex étiré :

$$|\mathbf{F}\omega(\vec{k};t)| = \sqrt{S(t)}\left|\mathbf{F}\omega_2(\vec{k}/\sqrt{S(t)};T(t))\right|. \tag{V.45}$$

Le spectre en énergie du vortex étiré à un instant donné se déduit de cette transformation en utilisant le calcul spatial qui conduit à (V.43). On a donc :

$$E(k,t) \sim k^{-1}\, S\frac{S^{1/2}}{kT}G\left(\frac{k}{TS^{1/2}}\right)e^{-2\nu k^2 T/3S}. \tag{V.46}$$

Notons que si on veut ajouter une vorticité dans le plan orthogonal à l'axe du vortex selon la proposition de [GFD99] décrite par (V.35), $W_2$ obéit à l'évolution pilotée par la rotation, la forme générale de la solution de Lundgren est valide et la contribution au spectre en énergie s'écrit aussi avec l'étirement sous une forme analogue à (V.46).

**Construire une moyenne d'ensemble sur la collection.** Nous disposons alors de modèles de vortex instationnaires, à différents âges possibles et de diverses géométries. Nous allons montrer qu'en fait le détail de la géométrie disparaît derrière l'effet temporel.

Les symétries complètes de l'équation de (NS) sont retranscrites dans l'homogénéité et l'isotropie de la collection d'objets (au lieu de l'être dans le champ de vitesse à petites échelles selon les approches statistiques de la turbulence) qui eux-mêmes ne sont pas homogènes et isotropes (puisqu'ils ont un axe privilégié). La relation constitutive de l'ensemble statistique est ensuite déduite de la supposition que les objets ont une répartition uniforme en âge. La moyenne sur ces différents objets peut alors être transformée en une moyenne sur l'évolution temporelle d'un objet, en une sorte d'hypothèse ergodique.

$$\sum_{\text{objet } j}(\cdots) = N_c\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\cdots)\mathrm{d}t. \tag{V.47}$$

$N_c$ est le taux moyen de création de vortex par unité de temps, $\tau_1$ et $\tau_2$ sont les limites en temps de l'évolution de l'objet. Il est essentiel en fait de supposer cette répartition uniforme en âges des vortex instationnaires : sans elle, le comportement en $k^{-5/3}$ ne serait pas obtenu.

**Estimation du spectre de la collection instationnaire.** En combinant l'hypothèse ergodique du modèle statistique d'objets (V.47) et les calculs instantanés des spectres spatiaux des vortex étirés en (V.46), on montre que le spectre en énergie isotrope de l'ensemble des objets est [Lun93] :

$$E(k) \sim k^{-2+1/3}e^{-2\nu k^2/3a}\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\frac{a}{u}}G\left(\frac{u^{-3/2}}{\sqrt{a}}\right)\mathrm{d}u. \tag{V.48}$$

L'intégrale ne dépend plus de $k$ et contient tous les détails géométriques ou de forme analytique exacte de la solution que l'on a pu injecter dans les modèles de vortex. Ainsi le spectre de la collection obéit à (V.14) et est un modèle admissible de turbulence décrite dynamiquement aux petites échelles. On renoue avec l'interprétation de Gilbert [Gil93] qui retrouve ce $k^{-5/3}$ par analyse dimensionnelle de l'évolution dynamique de la vorticité qui s'enroule autour d'un axe en étant étiré.

## 3.8 Revue de résultats sur la solution de Lundgren

**Scalaire passif, pression, modèle sous-maille.** Nous laissons volontairement de côté un ensemble de résultats obtenus sur ces modèles de vortex. Premièrement, rappelons que le problème du mélange des scalaires en présence des structures de vortex fait l'objet d'analyses propres en terme de mélange chaotique ou d'accélération de la diffusion [Vas97, FV97, AV99a, WV01, WV02, BBG01]. Une autre étude calcule le tenseur de déformation dans les vortex pour estimer les grandeurs sous-maille de simulations numériques grande échelle [PS94, Pul00]. Les approches de vortex ont servi enfin de modèles au comportement de la pression en turbulence où l'on trouve alors un spectre en $k^{-7/3}$ qui est la prédiction pour la pression dynamique associée à K41.

**Statistiques d'ordre supérieur à deux.** En développement de l'idée de Lundgren, des tentatives furent faites pour estimer les fonctions de structure d'ordre supérieur des modèles. Segel [Seg95] avance des arguments dimensionnels, Pullin et Saffman proposent des fermetures statistiques ou évaluent par des méthodes numériques subtiles les intégrales [PBS94, SP96], Vassilicos s'appuie sur les descriptions géométriques pour calculer les statistiques à tout ordre des modèles multi-spirales [Vas92].

Les conclusions sont que les résultats de ces calculs se comparent convenablement aux propriétés décrites par (V.21) pour les lois d'échelle déviant de K41. Malheureusement la limite à la précision à la fois des estimations des exposants pour les modèles de vortex et des mesures de ces exposants en turbulence expérimentale ne permet pas d'obtenir plus que cette compatibilité apparente.

**Partie axisymétrique du vortex.** Notons finalement que le cœur du vortex, celui qui est responsable de la rotation d'ensemble par $\Omega(r)$ (qui dérive de $\omega_0(r)$) est un ingrédient extérieur au modèle. Le vortex implique le spectre de Kolmogorov parce qu'il est instationnaire avec une décroissance (hors viscosité) en $1/t$ selon (V.42), ce que ne vérifie pas le cœur aux temps longs.

La précision à apporter est que la cascade dynamique que le vortex décrit vient essentiellement de l'interaction entre les deux ingrédients que sont la structure extérieure ($\Omega(r)$ et étirement selon un axe) avec les petites échelles instationnaires qui constituent la partie spiralée qui cascade. Ceci est bien analysé dans [PV00] qui calcule le taux de transfert en énergie dans les bras du vortex et montre qu'il est déterminé par $\Omega(r)$. Le transfert est principalement local dans le spectre, sa portée augmente quand la vitesse de rotation est d'inhomogénéité plus forte. En fait il est dû à une interaction non locale des grandes échelles vers deux petites échelles voisines puisque sans rotation d'ensemble différentielle ($\Omega(r)$ non uniforme), le transfert s'annule.

**Analyse de l'évolution instantanée en échelle des vortex.** Au lieu de regarder le transfert spectral, la solution de Lundgren a été analysée directement par ses propriétés de cascade en temps. On trouvera l'analyse en ondelettes par exemple du vortex qui déploie ses composantes en échelle (de Fourier) en fonction du temps [AV99b]. Des études numériques ont été menées sur différentes solutions particulières de la classe de Lundgren (nous en donnons des exemples ci-dessous) mais la variété possible des comportements ne permet au final que d'illustrer la migration générale vers les petites échelles qui est contenue dans la relation $k/\sqrt{S} = -nT\Omega'(r_n\sqrt{S})$. Nous n'avons pas dégagé d'autre mécanisme et en particulier la lacunarité du modèle de vortex (la structure répétitive des bras de la spirale mais qui présente des trous) n'est pas obligatoire.

## 3.9 Ce que nous apprend (ou pas) le modèle de Lundgren

La présentation générale des modèles dynamiques ou géométriques de vortex en spirale qui vient d'être faite appelle à une conclusion générale sur ce que l'on peut obtenir, ou non, de ces modèlisations théoriques.

**Contraindre la structure géométrique des vortex.** La première espérance était de trouver des structures nécessaires des vortex à petite échelle pour contraindre les caractéristiques que l'on s'attendrait à mesurer dans les expériences. Une de nos conclusions sur les modèles de vortex est qu'au contraire ils sont très souples et admettent des variations importantes d'une solution particulière à une autre et que les quelques évidences expérimentales dont on dispose ne permettent pas de décider cela.

Nous avons cité les mesures expérimentales entreprises sur l'allée de von Kármán qui, du fait de l'inadaptation de la configuration choisie, ne permet pas de caractériser les objets comme des objets sufisamment isolés. Les expériences sur des vortex spiralés se déployant seuls constitueraient un champ d'investigation plus utile.

**Utiliser des outils issus des modèles.** Reformulés géométriquement, les vortex se prètent à des études en terme de dimension de recouvrement en fonction de l'échelle puisque des spirales s'accumulent localement et donnent lieu à des accumulations de gradients forts autour de certains points tandis que les modèles multifractals normaux prédisent des gradients partout variables. Des méthodes de mesure ont été construites sur cette interprétation mais se révèlent extrêmement sensibles au bruit, à l'accumulation de singularités et leur application à des données expérimentales ou à des faux signaux synthéthiques montre qu'il est en pratique impossible de distinguer des singularités locales par ces voies géométriques [KV94, NV98, Bor99].

**Chercher des caractérisations locales en échelle.** Notre première intruition était de dépasser les méthodes géométriques pour explorer les caractérisations locales en échelle. Comme les coupes de vortex sont dans l'ensemble proche de singularités oscillantes, nous avons tenté de reformuler les modèles de vortex de cette manière en les décomposant sur la base de Mellin. On veut ensuite préciser leur évolution temporelle dans cette échelle. Nous reportons ces tentatives dans le paragraphe suivant.

**Vers des modèles statistiques de singularités oscillantes ?** Enfin les modèles de vortex n'ont pas permis non plus de caractériser directement les signaux de vitesse en termes de singularités oscillantes. Nous allons présenter un signal synthétique très naïf qui permet de jouer avec la présence de singularités oscillantes et montre que des comportements complexes peuvent être obtenus. La figure V.7 illustre l'idée qui nous guide : les mesures de vitesse associées aux vortex à structure en spirale sont globalement de type singularités oscillantes.

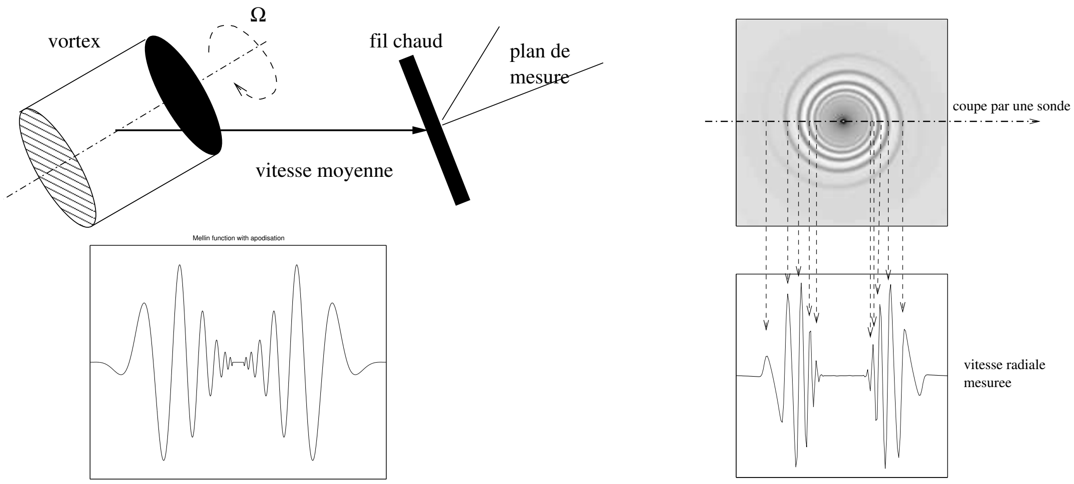



Fig. V.7: L'étude des modèles statistiques d'objet est supposée être à la confrontation des descriptions de vortex (géométriques ou de type dynamique) (en haut), des mesures par des coupes unidimensionnelles qui donnent des fonctions qui ressemblent à des *chirps* (en bas à droite) et des descriptions mathématiques par des singularités oscillantes qui sont les limites de ces *chirps* (en bas à gauche, une fonction de Mellin multipliée par une fonction d'apodisation).

## 4 Analyses alternatives des vortex spiralés

Le bilan des études initiales sur le modèles de vortex de Lundgren ou spiralés brise deux espérances. Nous n'avons pas su contraindre suffisamment les vortex pour qu'une signature universelle s'en dégage, ni construire à partir du modèle une nouvelle méthode d'analyse de ces structures (celles d'origine géométrique ne donnant finalement rien pour les signaux de vitesse). Deuxièmement, la situation expérimentale que nous avons initialement testée, reportée au 2.5, ne révèle finalement pas une *collection* d'objets organisés restant séparés qui libre des mesures pour aborder expérimentalement le problème.

Nous esquissons ici d'autres voies qui furent explorées et laissent surtout une image de la complexité de la question initiale concernant la signature expérimentale des vortex, sans déboucher sur des possibilité neuves d'analyser les signaux de turbulence en relation avec le modèles de vortex.

### 4.1 Évolution instantanée en échelle des vortex

La première idée explorée fut de regarder les évolutions dynamiques possibles des vortex. Des simulations numériques de la forme des solutions de Lundgren dans diverses configurations (enroulement algébrique ou logarithmique ou causé par un cœur en vortex de Burgers) ont été programmées.

**Spectres spatiaux instantanés.** Les figures V.14, V.15, V.16 et V.17 (mises en fin de chapitre) proposent trois modèles qui diffèrent essentiellement par la vitesse de rotation moyenne que l'on impose. Le premier suppose $\omega_0(r) \propto (1+r^2)e^{-r^2}$ et finit par se fondre en un vortex de Burgers. Le second est une spirale logarithmique avec $\Omega(r) \propto (\ln r)e^{-r^2}$ et le dernier est en spirale algébrique avec $\Omega(r) \propto r^{-\alpha}$.

Chaque figure montre l'évolution en temps de l'enstrophie décomposée spectralement (à gauche à certains temps, à droite dans un plan où est reporté l'intensité de l'enstrophie en fonction du temps et de la fréquence). En dessous est tracé le spectre isotrope moyenné au cours du temps.

**Comportement moyenné en temps.** Nous avons étudié numériquement les propriétés moyennées dans le temps des vortex de deux manières. La première est le calcul spatial qui est à peu près une vérification directe des méthodes analytiques de calcul spectral. La seconde est une simulation supposée proche de ce que donnent les mesures. Dans ce cadre les vortex passent, plus ou moins figés à un instant de leur dynamique, sur une sonde de vitesse qui ne mesurerait qu'une composante et dont l'allure dépend énormement de l'orientation du vortex par rapport à la sonde et de l'âge de ce vortex. Cette méthode basée sur une moyenne d'ensemble a l'avantage de s'écarter du calcul qui conduit à (V.48) et peut tester la dépendance de l'ensemble statistique avec l'orientation du vortex par rapport à la sonde et avec les distributions en âges des vortex. On peut aussi vérifier que les mesures spatiales et temporelles coïncident en général pour le vortex.

Le résultat est qu'il finit par émerger une zone inertielle dans le spectre isotrope en énergie où l'on peut deviner une comportement s'approchant du $k^{-5/3}$, et ce pour les deux façons d'estimer les statistiques. Cette zone a été vérifiée comme correspondant à la portion des échelles où la migration en échelle s'opère au cours du temps.

**Variabilité du comportement instantané.** Il est à noter cependant que la structure instantanée spatiale dépend énormément de la forme analytique de $\Omega(r)$ et des $f_n(r)$. On pourrait penser, en regardant la figure V.14 (celle pour la forme étudiée par Lundgren [Lun82]), que les bras séparés en temps-fréquence sont essentiels et c'est ce que nous avons voulu examiner.

Les deux autres exemples montrent qu'il n'y a pas de structure universelle des bras. À nouveau la répétition inhérente aux spirales est moins importante que l'évolution temporelle qu'induit l'étirement.

Le cas algébrique est même inverse car la viscosité semble ici provoquer un déplacement inverse, vers les grandes échelles, des petites « bosses » sur le spectre d'enstrophie (caractères associés à la lacunarité). En fait l'enstrophie se déplace en moyenne vers les petites échelles et cela suffit à donner le spectre moyen de K41.

**Estimation de la loi d'évolution temporelle des maxima d'enstrophie.** Le vecteur d'onde local du maximum d'enstrophie pour chaque mode de Fourier azimuthal est donné par l'écartement entre deux bras de la spirale :

$$k_n(r,t) = \frac{2\pi}{\delta r_n(r,t)} = -n\sqrt{S}\Omega'(r\sqrt{S})T. \tag{V.49}$$

L'estimation de la position à un instant donné des maxima d'enstrophie dépend alors du choix du modèle, en particulier de $\Omega(r)$. Avant cela, la relation locale qui donne le nombre d'onde principal à une distance $r$ permet de montrer qu'aux grands temps $k_n \propto e^{cat}$ où $c$ est une constante dépendant du modèle (aux grands temps $T \sim S/a$ et il ne faut pas oublier que $r_n$ dépend du temps). L'existence de cette courbure exponentielle des bras est confortée par le fait que si $a = 0$ (pas d'étirement), $T = t$ et $S = 1$ et les bras sont linéaires pour $k_n$ fonction de $t$.

En fixant ensuite $\Omega(r) = \Gamma r^{-\alpha}$ qui impose un enroulement algébrique dans une zone que l'on limite à une taille $R$, on peut moyenner sur tous les angles $\theta$ et resommer sur les positions possibles des bras de la spirale pour arrivee à une forme générale en :

$$< k_n(t) >_\theta \sim -n\Gamma^{-1/\alpha}\sqrt{S}T^{-1/\alpha}R^{2+1/\alpha}. \tag{V.50}$$

Les maxima de l'enstrophie sont alors espacés linéairement en vecteur d'onde à un instant donné et suivent des courbes exponentielles en fonction de $t$. Cependant alors que l'accord qualitatif est correct sur les figures V.14 et V.15, il est mis en défaut sur la figure V.17 qui est celle du modèle regardé ! L'inadéquation entre la figure et l'équation (V.50) s'interprète en remarquant comme dans [AV99b] qu'en fait l'énergie est concentrée dans le mode $n = 1$ et qu'ici les bosses dans l'enstrophie ne sont pas associée simplement à la structure répétitive spatiale.

Ce cas algébrique suit même une évolution apparente inverse par un déplacement contraire à la cascade directe attendue, vers les grandes échelles, des petites « bosses » sur le spectre d'enstrophie (caractères associés à la lacunarité). En fait la cascade pertinente est celle de l'enstrophie complète (le spectre en son ensemble) qui se déplace (son centre de gravité en particulier) vers les petites échelles.

**Conséquence.** C'est la cascade globale, sans géométrie lacunaire, qui engendre un spectre moyen obéissant à K41. Nous avons une nouvelle indication que la structure spatiale répétitive des spirales est moins importante pour le modèle que l'évolution temporelle qu'induit l'étirement.

## 4.2 La solution de Lundgren sur la base de Mellin

### 4.2.1 Formalisation mathématique

Pour continuer à examiner l'évolution temporelle à travers les échelles de la classe des vortex de Lundgren et la relier aux mesures locales en échelles, la solution a été écrite sur la base des fonctions de Mellin, en une décomposition de Mellin radiale et de Fourier azimuthale (analogue aux décompositions proposées en traitement des images [BG86]).

Nous notons ici $E^\alpha_\beta(r) = r^{-\alpha-1}e^{i2\pi\beta\ln r}$ les fonctions de Mellin. Les décompositions cherchées pour l'évolution dynamique bidimensionnelle de la vorticité $\omega_2$ et de la fonction de courant $\psi_2$ sont de la forme :

$$\begin{cases} \omega_2(r,\theta;t) = \displaystyle\sum_n \int \mathrm{d}\beta Z_n(\beta,t)E^\alpha_\beta(r)e^{in\theta} \\ \psi_2(r,\theta;t) = \displaystyle\sum_n \int \mathrm{d}\beta Y_n(\beta,t)E^\sigma_\beta(r)e^{in\theta}. \end{cases} \tag{V.51}$$

Les fonctions $Y_n(\beta,t)$ et $Z_n(\beta,t)$ sont les modes de décomposition en Mellin de la vorticité et de la vitesse. Cette décomposition permet une analyse directe en fonction de l'échelle et du temps. Les équations qui relient ces deux grandeurs sont :

$$\omega_2 = -\Delta\psi_2 \qquad \text{et} \qquad \partial_t\omega_2 + r^{-1}\left(\partial_\theta\psi_2\partial_r\omega_2 - \partial_r\psi_2\partial_\theta\omega_2\right) = \nu\Delta\omega_2. \tag{V.52}$$

En combinant deux propriétés des fonctions de Mellin : $r^{-m}E_\beta^\alpha = E_\beta^{\alpha+m}$ et $\partial_r E_\beta^\alpha = -(1+\alpha+i2\pi\beta)E_\beta^{\alpha+1}$, un mode de la fonction de courant peut s'exprimer en fonction du même mode de Fourier-Mellin de la vorticité si on fixe $\alpha = -1$ et $\sigma = -3$ (sinon les équations mélangent les modes de Mellin). Dans ces conditions la première équation sépare les différents modes de Mellin et donne une relation directe entre la vitesse et la vorticité :

$$Y_n(\beta,t) = \frac{Z_n(\beta,t)}{n^2-(2+i2\pi\beta)^2}. \tag{V.53}$$

Il suffit alors d'injecter cette expression qui donne la vitesse (en fait la fonction de courant) en fonction de la vorticité et permet d'obtenir l'équation d'évolution des modes de Fourier-Mellin de la vorticité. En se focalisant sur l'évolution inviscide ($\nu = 0$), l'équation d'évolution des modes de Fourier-Mellin est :

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_n(\beta,t) = i\sum_k \int \mathrm{d}\gamma Z_k(\gamma,t)Z_{n-k}(\beta-\gamma,t)\frac{-in4\pi\beta+in2\pi\gamma-2(n-k)}{k^2-(i2\pi\gamma+2)^2}. \tag{V.54}$$

Remarquons que dans la décomposition (V.51), chaque terme d'ordre $n$ de la série de Fourier décrit une spirale logarithmique à $n$ branches.

**Rôle de la viscosité ; dynamique à 3D.** L'effet de la viscosité et de la dynamique à 3D se traitent de la même façon que dans le calcul originel de Lundgren. Sans faire la démonstration explicite ici [Lun82], l'amortissement visqueux s'écrit comme $Z_n(\beta,t) = Z_n^{\mathrm{inv}}(\beta,T)e^{-n^2(\Omega'(r))^2t^3/3}$.

Le passage à l'évolution 3D, en y intégrant l'étirement de champ de moyen de la forme (V.30) se fait à l'aide d'opérateurs de dilatations : $\omega(r,\theta;t) = S(t)\mathcal{D}_{0,\sqrt{S(t)}}\omega_2(r,\theta;T(t))$ et $\psi(r,\theta;t) = S(t)\mathcal{D}_{2,\sqrt{S(t)}}\psi_2(r,\theta;T(t))$. Un intérêt donc de la formulation de la solution en Fourier-Mellin est que cet effet 3D n'entraîne pas de migration en $\beta$, seulement l'introduction d'un facteur multiplicatif dépendant du temps. Nous voulons maintenant étudier la cascade dynamique à 2D qui selon l'équation (V.54) couple les modes de Mellin.

**Le mode $n = 0$.** Le mode axisymétrique joue un rôle particulier pour les vortex puisque c'est lui qui met en rotation l'ensemble de la structure et induit la dynamique de transfert en échelle. La symétrie $Z_{-n}(\beta,t) = \overline{Z_n(-\beta,t)}$ (qui assure que $\omega$ reste à valeurs réelles) impose que ce mode du cœur est stationnaire puisqu'alors les termes dans (V.54) pour $n = 0$ s'annulent 2 à 2 (celui de $k$ avec celui de $-k$).

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_0(\beta,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad Z_0(\beta,t) = \int_0^\infty \omega_2(r,\theta;t)r^{i2\pi\beta}\frac{\mathrm{d}r}{r}\mathrm{d}\theta. \tag{V.55}$$

L'équivalence est directe entre la description en $Z_0(\beta,t)$, en $\omega_0(r,t)$ ou en $\Omega(r)$ pour la partie axixymétrique et elle est un paramètre du modèle qui fixe le comportement grande échelle. La forme $Z_0(\beta,t)$ est calculable analytiquement dans de nombreux cas à l'aide des calculs classiques de transformées de Mellin.

### 4.2.2 Étude du transfert entre les échelles

L'équation de couplage entre les différentes échelles permet de préciser quel est le transfert entre échelles de Mellin. Le transfert d'un mode à l'autre prend même le sens que le transfert d'énergie entre les échelles puisque nous avons vu dans les pages précédentes que, en plus d'offrir une définition possible de ce qu'est une échelle, l'analyse de Mellin conduit à une analyse spectrale alternative complète.

**Évolution simplifiée : géométrie en spirale.** Nous avons regardé comment se faisait ce transfert entre les échelles. En combinant le fait que le noyau qui intervient dans (V.54) est maximum pour $k = 0$ ou $k = 2$ et que la viscosité affaibli plus rapidement les modes de $n$ grand, une évolutions simplifiée légitime est de ne garder que l'interaction entre le mode $n = 0$ et les autres. Implicitement cela revient à étudier l'équation d'évolution $\partial_t \omega + (\vec{v_0} \cdot \vec{\nabla})\omega = 0$ seulement.

Le mode $k = 2$ est celui de la spirale à deux branches et, puisque les modes sont tous principalement couplés à $k = 2$ et au mode axisymétrique, la géométrie en spirale impose sa dynamique. Nous regardons ainsi le transfert principal entre les échelles de Mellin qui est celui induit sur $Z_n(\beta, t)$ par la rotation d'ensemble $Z_0(\beta, t)$. L'équation d'évolution est déduite de (V.54) :

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_n(\beta, t) = \int \mathrm{d}\gamma Z_n(\gamma, t) Z_0(\beta - \gamma, t) \frac{n(2\pi\gamma + 2\pi\beta - 2i)}{(2 - i2\pi(\beta - \gamma))^2}. \tag{V.56}$$

**Localité du transfert en échelle.** En précisant une forme pour $Z_0$, on peut tracer le noyau dans l'intégrale pour examiner, dans le cadre de cette formulation sur la base de Mellin, quel est le transfert en échelle dans le vortex. Par exemple, si $\omega_0(r) = (1 + hr^2)e^{-r^2}$ selon l'exemple suggéré dans [Lun82], on a $Z_0(\beta) = (1 + ih\pi\beta)\mathbf{\Gamma}(i\pi\beta)/2$. En figure V.8, on a tracé pour $n = 2$ la partie sans $Z_0$ puis celle avec $Z_0$ (pour ce modèle) qui se multiplie à $Z_n$ sous l'intégrale dans (V.56). Le transfert est principalement local en échelle de Mellin.

On peut retrouver une conclusion de [PV00] en examinant le noyau de transfert pour différents enroulements algébriques. Comme il est argumenté dans [PV00], si $\Omega(r) \propto r^{-1/\alpha}$, la rotation différentielle et l'étirement azimutal est d'autant moins prononcée que $\alpha$ est grand. Les noyaux dessinés en figure V.9 pour $\alpha = 0.5$, 2 et 8 révèlent que le transfert est de plus en plus local quand $\alpha$ augmente, ce qui est analogue au résultat de [PV00] obtenu avec les nombres d'onde (ou échelle de Fourier).

**Non persistence sur des modes restreints.** L'exploitation plus poussée de cette évolution décrite par la décomposition en échelle de Mellin est poursuivie en cherchant à voir si le vortex reste localisé sur un nombre de modes restreints. Il n'en est rien en fait et un vortex spiralé construit initialement sur un mode unique s'étale en un paquet d'onde petit à petit.

Comme de plus cet étalement dépend beaucoup des hypothèses sur la répartition initiale et de la rotation axisymétrique supposée, nous ne savons pas établir de loi théorique d'évolution d'une échelle de Mellin principale d'une solution type Lundgren en fonction du temps.

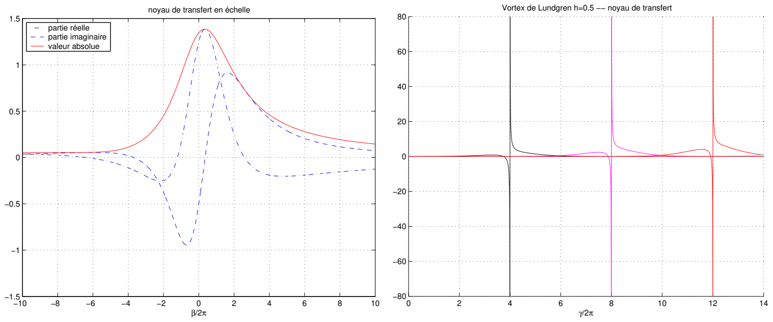



Fig. V.8: Graphe des noyaux de transfert en échelle. À gauche n'est représentée que la fraction $\frac{n(2\pi\gamma+2\pi\beta-2i)}{(2-i2\pi(\beta-\gamma))^2}$, tandis qu'à droite on a pris $Z_0(\beta) = (1 + ih\pi\beta)\mathbf{\Gamma}(i\pi\beta)/2$. Sur ce deuxième graphe on montre les cas pour $\beta = n2\pi$ avec $n$ allant de 1 à 3. On constate que le transfert est principalement local (autour de $\beta = 0$ sur la graphe de gauche et de $\gamma = \beta$ à droite) en échelle.

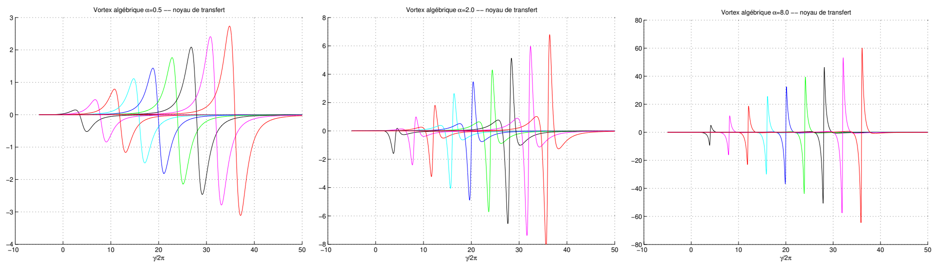



Fig. V.9: Graphe des noyaux de transfert en échelle de l'équation (V.56) pour $\Omega(r) \propto r^{-1/\alpha}$ et $\alpha = 0.5$, 2 et 8. On montre dans chaque cas les courbes pour $\beta = n2\pi$ avec $n$ allant de 1 à 9. On constate que le transfert est principalement local en échelle et que ceci est plus prononcé quand $\alpha$ augmente, donc quand la rotation tend vers un comportement plus uniforme dans l'espace (moins d'étirement azimuthal).

### 4.2.3 Constatation numérique

Des essais numériques furent menés pour caractériser empiriquement une évolution approchée des vortex spiralés en cherchant une équation pour un paramètre de Mellin principal en fonction du temps $\beta(t)$ (réduction de la dynamique à une mode principal).

L'estimation du paramètre de Mellin a été faite à l'aide de la transformée de Mellin discrète, appliquée aux profils 1D de vitesse (calculés numériquement avec l'évolution complète et la viscosité) qui furent moyennés sur les différentes orientations possibles. Un exemple de mesure sur une coupe de vitesse est montré sur la figure V.18 (fin de chapitre), en utilisant les estimations non paramétriques d'échelle de Mellin glissant en temps présentées au chapitre III.2.4.

L'évolution en échelle est compatible ainsi avec une migration continue de la structure vers les petite échelles. La forme exacte dépend de la solution spécifique choisie dans la classe de Mellin mais se finit de manière générale par une saturation qui est associée, quand on résout (V.56), à une dispersion sur un spectre large des coefficients en échelle de Mellin. Elle indique aussi l'apparition de la domination aux temps ultérieurs de la viscosité qui finit par détruire les bras spiralés. Au-delà de cette saturation l'estimation de l'échelle de Mellin n'est plus fiable car la structure spiralée à 2D, ou en singularité oscillante à 1D, disparaît.

**Conclusion de l'étude en fonction des échelles de Mellin.** Contrairement à ce qu'on pouvais escompter à priori, il n'a pas été possible de formuler un modèle économe en échelle de Mellin des vortex spiralés. Même si un seul mode de Fourier-Mellin décrit une spirale, elle ne reste pas suffisamment proche d'une solution de la dynamique en spirale à 2D pour que la décomposition $Z_n(\beta, t)$ (regardée surtout pour $n = 2$ de la spirale à deux branches) demeure de faible étalement en échelle.

L'étape suivante, la figure V.18, montre cependant que l'estimation de la caractéristique approchée qui est l'échelle de Mellin principale est possible (à l'aide de méthodes de « chasse aux chirps ») et contient une évolution explicite (mais partielle) en échelle de Mellin des objets. Le dernier axe a été de chercher à savoir si de telles estimations restaient possibles quand le signal est généré par une collection d'objets plus ou moins mélangés et dispersés en caractéristiques.

## 4.3 Modélisation statistique à base d'objets

**Fondements de l'approche : ensemble de singularités oscillantes** Un signal très simplifié par rapport à ce que les expériences fournissent a été utilisé en exploration des possibilités de mener une analyse d'un signal complexe, à l'aide des décompositions locales en temps et échelle de Mellin. L'idée était d'utiliser la variation 2 décrite en III.2.2.6 (proposition III.3) qui est une décomposition de Mellin glissante, en fonction d'une échelle $\beta$ et d'un temps central $t_0$. Cette partie qui rassemble surtout des résultats négatifs en expose les raisons mais se veut rester assez qualitative.

Si les objets dans les signaux restent sufisamment structurés en phase, il est possible de les repérer par leur projection en échelle de Mellin. Les signaux synthétiques envisagés furent construits avec le modèle le plus simple envisageable qui fait appel à deux ingrédients :

- un motif de base, possédant une distribution potentiellement large de paramètres, qui représente la mesure qu'induit le passage d'un objet cohérent du flot près de la sonde ;
- une répartition en un ensemble statistique de tels objets.

**Motifs de base.** Nous avons vu que les modèles théoriques de turbulence fondés sur des objets ne permet pas de proposer des réductions précises des signaux de vitesse attendus. Nous décidons alors de choisir la base des fonctions de Mellin sur des critères de simplicité. En plus de leurs propriétés de base, celles liées à l'échelle et leur caractère de singularité oscillante, elles peuvent être contrôlées de sorte à imposer leur spectre. On a en effet :

$$\left|(\mathbf{F}|t|^{i2\pi\beta-\alpha-1}e^{-a|t|})(\nu)\right|^2 = \left|\mathbf{\Gamma}(-\alpha-1+i2\pi\beta)\frac{2}{|i2\pi\nu+a|^{i2\pi\beta-\alpha-1}}\right|^2. \quad \text{(V.57)}$$

Le terme $e^{-a|t|}$ est introduit pour régulariser l'intégration aux fréquences grandes ($\nu \gg a$).

Le spectre de puissance de cette singularité se comporte comme :

$$\left|(\mathbf{F}|t|^{i2\pi\beta-\alpha-1}e^{-a|t|})(\nu)\right|^2 \propto \frac{1}{(4\pi^2\nu^2+a^2)^{-\alpha}e^{-4\pi\beta\operatorname{atan}(2\pi\nu/a)}} \propto \nu^{2\alpha}. \tag{V.58}$$

Contrairement aux singularités dont la loi de fréquence est une puissance (selon (V.18)), ici l'enveloppe seule (et non les oscillations) contrôle les propriétés spectrales et les statistiques d'ordre 2. Nous contrôlons ensuite les propriétés à tout ordre à l'aide des paramètres d'oscillations $\beta$, qui sont les échelles ici.

**Une collection d'objets.** À nouveau les hypothèses le plus simples suffiront à illustrer ce que nous voulons montrer. Les objets de base sont mélangés sans interaction les uns avec les autres, en supposant une répartition aléatoire de densité uniforme. Nous regardons ainsi $\sum_n f(t-t_n)$ où les $t_n$ sont des instants poissoniens et chaque $f$ est obéit à la forme générale prise par les objets, avec des paramètres pris aléatoirement :

$$f(t) = c\,\mathrm{Re}\{t^{-\alpha-1+i2\pi\beta}\} \tag{V.59}$$

Nous imposons que $\mathbb{E}\{\alpha\} = -5/6$ (qui implique un spectre en $k^{-5/3}$) et $\beta$ a une répartition large quelconque (les calculs numériques suivants ont été faits avec diverses répartitions et ne dépendent que peu du choix effectué). De la même manière, $c$ est une amplitude de répartition un peu quelconque qui ne joue pas pour la suite.

Trois arguments disent qu'en turbulence la densité attendue d'objets qui expliquent les propriétés des signaux doit être assez grande. Le premier argument est que les analyses numériques de type multifractal des signaux [AAB+95, AMR97] montrent que les points singuliers sont presque denses dans le signal ; peu d'objets simples (comme sur la figure V.12 à droite) ne suffisent pas à engendrer ces signaux complexes. Deuxièment ceci est renforcé par les estimations qui s'appuient sur des concepts géométriques dans [KV94] et [NV98]. Si les signaux sont obtenus par combinaison d'objets à structure interne, alors ils remplissent presque entièrement le support temporel. Enfin, en s'appuyant sur les modèles théoriques de vortex, on sait qu'il faut une collection étendue d'objets pour obtenir les propriétés statistiques souhaitées proches de la turbulence ; si elle est restreinte, l'opération de moyenne sur l'évolution temporelle des objets ne suffit pas à cacher les variations d'un objet à l'autre et on a vu qu'on ne sait pas dire si les structures précises des vortex est déterminante alors que le comportement global en temps l'est pour les modèles.

**Caractérisation statistique de la collection.** Les courbes numériques qui suivent ont pour but de montrer la complexité des signaux obtenus par ces simples méthodes de synthèse et expliquent que les méthodes de mesure échouent à retrouver dans le cas général les propriétés des objets singuliers. Nous présentons les deux cas limites d'intérêt : les signaux générés avec peu d'objets (qui sont donc nettement séparés) et les signaux avec beaucoup d'objets (donc l'allure les rapproche plus du comportement de la vitesse de la turbulence).

La figure V.10 caractérise les propriétés spectrales puis statistiques des collections de la forme $\sum_n f_n(t-t_n)$. Un exemple de série obtenue, son spectre, les densités de probabilité des incréments et les lois d'échelle que l'on pourrait trouver dans $S_3$ et $S_4$ y sont montrées.

Le signal regardé, qui n'a en l'état rien à voir avec un quelconque modèle physique, a les propriétés suivantes :

- son spectre est en $\nu^{-5/3}$ si $\nu$ est la fréquence (le signal a été construit pour cette propriété à l'aide (V.58)) ;
- il révèle une intermittence (fluctuations locales de la dérivée et évolution avec $r$ des lois du processus incrément) ;
- il est construit uniquement par addition d'objets localisés et de structure interne riche (les motifs de base).

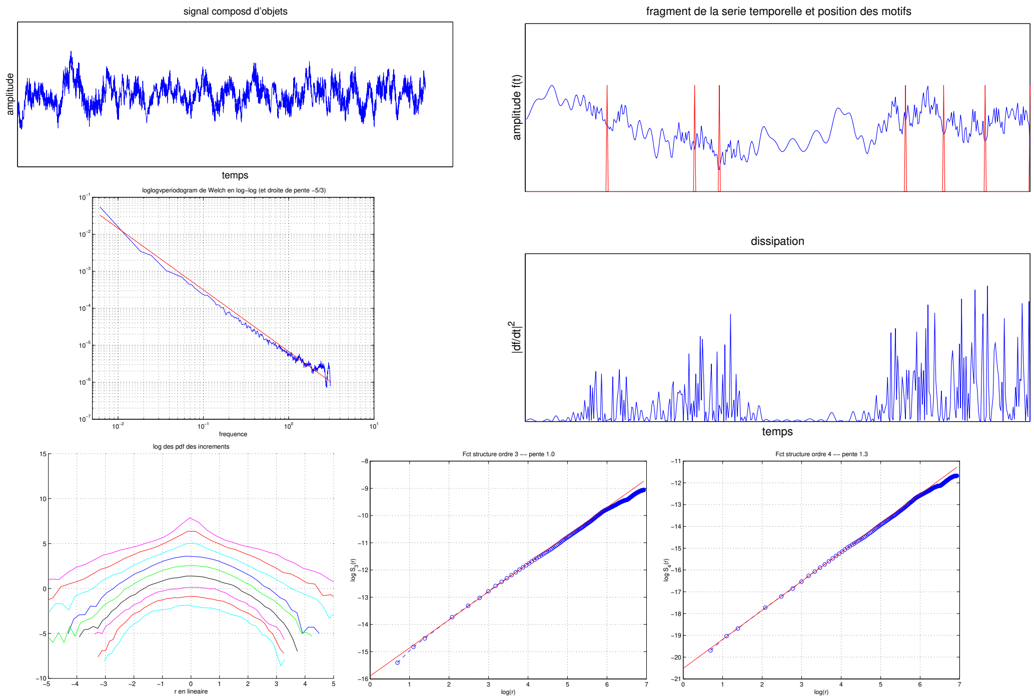



Fig. V.10: Présentation du signal synthétique utilisé pour tester des méthodes d'analyse. Une trace étendue est figurée en haut, tandis qu'un zoom est montré à droite où l'existence de structures autour de certains points est plus visible ; en particulier l'équivalent de ce qu'est la dissipation est grande autour de ces points. Ce modèle faux (sans contenu physique) est un bon signal test du fait que son spectre est en $k^{-5/3}$ (spectre au milieu à gauche) et qu'il est intermittent. On montre les distributions des accroissements en bas à gauche et les fonctions $S_3(r)$ et $S_4(r)$ en log-log dont les pentes peuvent être ajustées (en jouant sur les distributions des $\alpha$) pour générer l'intermittence voulue.

**Revenir vers les méthodes d'analyse ?** Pour avoir une chance d'identifier une structuration des signaux de vitesse causés par des vortex, il faudrait déjà savoir revenir aux motifs mis dans un signal synthétique tel que le précédent. Nous montrons ici qu'il n'en est rien en regardant diverses manières d'analyser les données.

**Méthodes par tranformations en ondelette.** Des méthodes d'analyse proposée pour rendre compte d'existence d'objets structurés dans des signaux sont fondées sur leurs représentations temps-fréquence ou temps-échelle ; elle est donnée en figure V.11. On consultera

[CM98] pour les réassignements, [CHT98] pour l'extraction des maxima locaux, [AAB$^+$95, ABJM98] sur le lien avec les singlarités ocsillantes, et enfin [KV94, NV98] pour les approches par dimension de capacité dans un espace d'ondelettes. Alors que ces méthodes permettent de capturer soit les évolutions en fréquences instantanées d'un nombre faible d'objets, soit la variabilité statistique des singularités locales (par exemple pour la multifractalité), il manque la possibilité d'obtenir les deux en même temps.

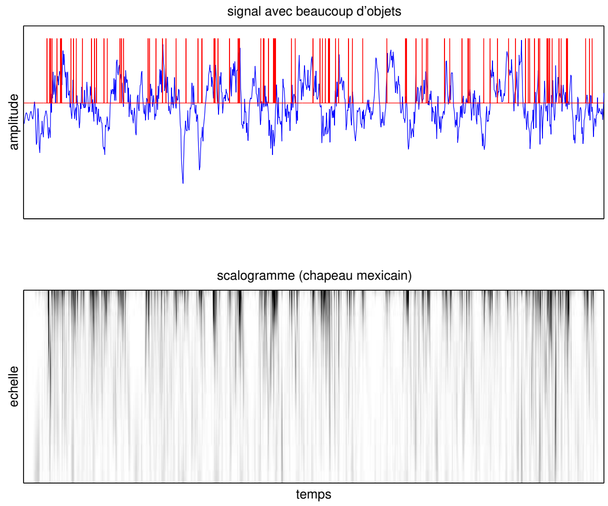



Fig. V.11: Modèle statistique construit sur des objets qui sont des fonctions de Mellin. Sur la trace temporelle du haut on a ajouté des marques positionnant les centres des objets. En dessous la transformée en ondelettes du signal pointe sur certaines singularités mais ne permet pas de retrouver toutes les organisations locales.

**Représentations temps-échelle de Mellin glissantes.** La méthode que nous avions annoncée et qui se réduit à un problème de chasse aux chirps a la même limite qui la rend dans ce contexte inutile. Nous montrons sur la figure V.12 comment l'augmentation du nombre d'objets supposés dans la collection d'objets qui engendrent le signal, complique tellement la lecture qu'il n'est plus possible de voir les objets comme séparés, même par leurs traces dans une représentation temps-fréquence. Les interférences sont trop nombreuses.

En quelque sorte on a le même problème qu'en analyse de l'invariance d'échelle discrète au chapitre IV où, alors que la théorie dit que les propriétés se décomposent exactement sur des chirps de Mellin arithmétiquement répartis sur le paramètre d'échelle fondamental $1/\ln\lambda$, les cas généraux ne révèlent pas simplement cette structure dans une représentation mixte (cas de la figure IV.13). Il faut passer par des analyses plus précises pour les trouver plus explicitement (cas de la figre IV.11 pour l'analyse de la fonction de Weierstrass).

**Projection sur la base de Mellin : transformation de Hough pour les hyperboles.** Comme discuté au III.2.4.2, la projection des représentations temps-fréquence permet de préciser le contenu en chirps d'un signal. Cependant, il est assez clair, et l'illustration en est donnée sur la figure V.13, que cette méthode de chasse au chirp ne marche que pour des atomes de base sufisamment séparés en temps ou en fréquence. La lecture des transformées de Hough (ou de la sortie d'un détecteur de loi de fréquence instantanée en $1/f$) ne permet pas de revenir aux positions des objets dès qu'ils sont nombreux (au contraire de la figure

V.12 à gauche ou de la transformée de Hough utilisée en figure V.18 pour caractériser un modèle de vortex isolé).

## 5 Conclusion sur les modèles statistiques de vortex

Ce dernier chapitre a rapporté des études (des errements aussi), et un point de vue global sur les modèles de turbulence construits à partir de l'existence dans les écoulements de vortex structurés. Ces modèles et leur intérêt en tant qu'approches débordant des théories principalement statistiques de la turbulence ont été replacés dans le contexte général des travaux sur la turbulence développée.

Il reste que nous avons principalement obtenu des réponses négatives aux développements que nous avons tentés. Ils se réduisent aux points suivants.

- À la question de préciser les propriétés irréductibles des modèles de vortex qu'il faut supposer pour construire un modèle de turbulence, la réponse est qu'on a le droit de supposer un évantail large d'organisations géométriques et que la lacunarité n'est pas le caractère à retenir. Les deux ingrédients de ces modélisations sont la possibilité d'avoir de fortes rotations locales, autour d'un point origine, qui engendrent naturellement des organisations complexes locales, et la migration à travers les échelles des objets dynamiques identifiés aux vortex.
- Puisque le caractère de géométrie fractale locale (en spirale par exemple) ne semble pas essentiel, il n'est pas étonnant que les outils construits sur la géométrie ne permettent pas de conclure à la présence d'objets dans les signaux.
- Nous ne savons actuellement pas mettre en œuvre une méthode d'analyse qui permette de retrouver des motifs isolés dans un signal de complexité proche de celle des signaux de turbulence, ni donc à partir de la géométrie, ni en partant de leur caractère de singularité oscillante et donc de leur organisation locale en fréquence instantanée.

Ces conclusions, comme nos études à propos des vortex, portent principalement sur les mesures de vitesse en turbulence. Nous n'excluons pas la possibilité de trouver des signatures spécifiques des vortex de la turbulence par des méthodes différentes de mesure physique.

Nous avons évoqué les mesures des quantités scalaires qui peuvent se prêter à cela (visualisations ou mesures sur des zones étendues), les mesures lagrangiennes dont l'intermittence apparaît largement liées aux vortex [MMMP01, LVC$^+$01], et les mesures acoustiques globales de la vorticité [BMW99] qui restent un outil privilégié pour sonder les structures en leur entier.

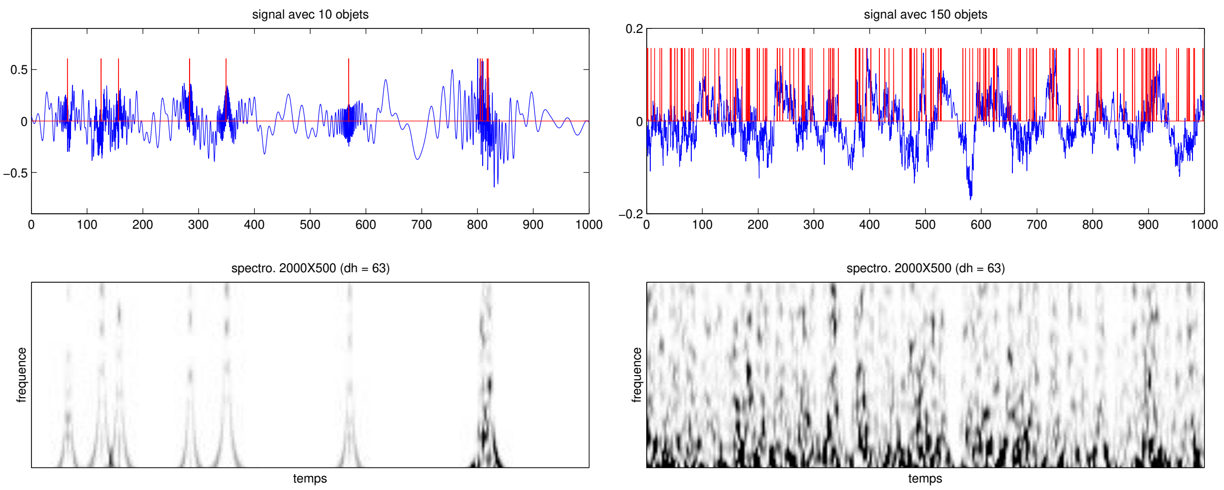



Fig. V.12: Modèle statistique construit sur des fonctions de Mellin, à gauche avec une faible densité d'objets, à droite avec une forte densité. Les positions centrales des fonctions sont indiquées par les barres verticales. Les décompositions temps-fréquence du dessous montrent que seuls les cas avec peu d'objets vont permettre de retrouver les chirps qui ont été mis dans le signal.

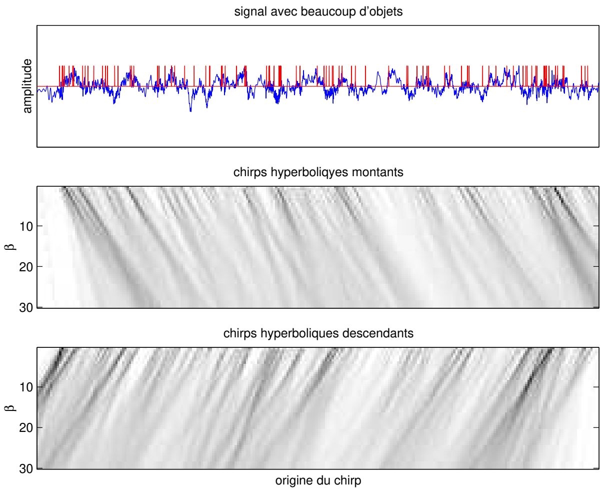



Fig. V.13: Cette figure présente le résultat de la transformation de Hough pour les hyperboles sur une représentation temps-fréquence analogue à la figure précédente V.12 à droite. La densité importante d'objets ne nous autorise pas à les identifier et à les séparer dans l'analyse.

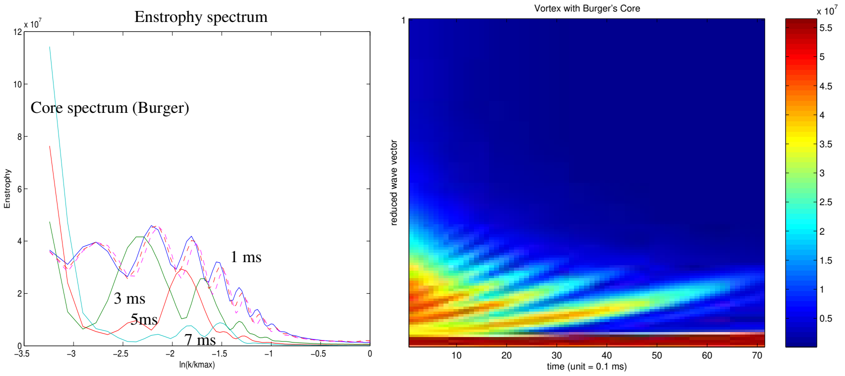



Fig. V.14: Évolution instantanée de l'enstrophie d'un vortex de la classe de Lundgren, à cœur en vortex de Burgers $\omega_0(r) \propto (1+hr^2)e^{-r^2}$. On notera que le spectre d'enstrophie semble au cours du temps se répartir sur des bras qui migrent vers les petites échelles (de Fourier).

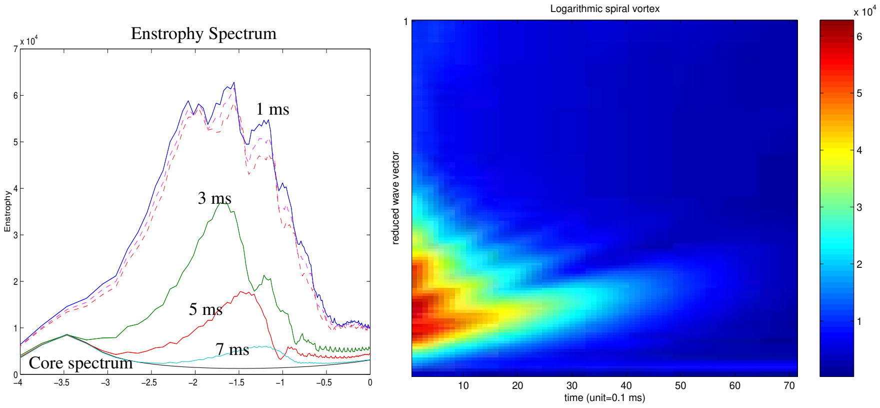



Fig. V.15: Évolution instantanée de l'enstrophie d'un vortex de la classe de Lundgren, dont l'enroulement est en spirale logarithmique ($\Omega(r) \propto (\ln r)e^{-r^2}$).

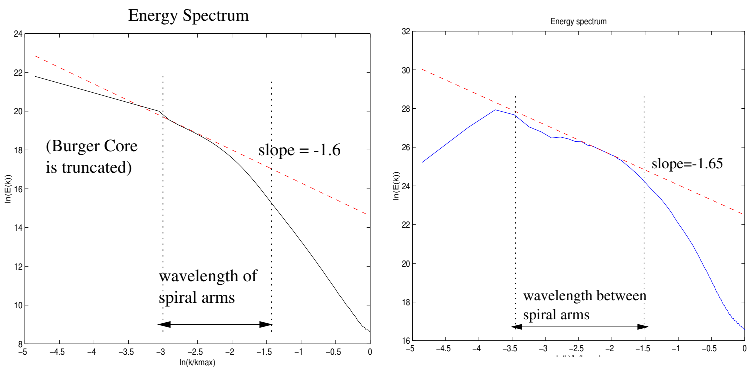



Fig. V.16: Spectre d'énergie moynné dans le temps, à gauche pour le modèle de la figure V.14, à droite pour celui de V.15

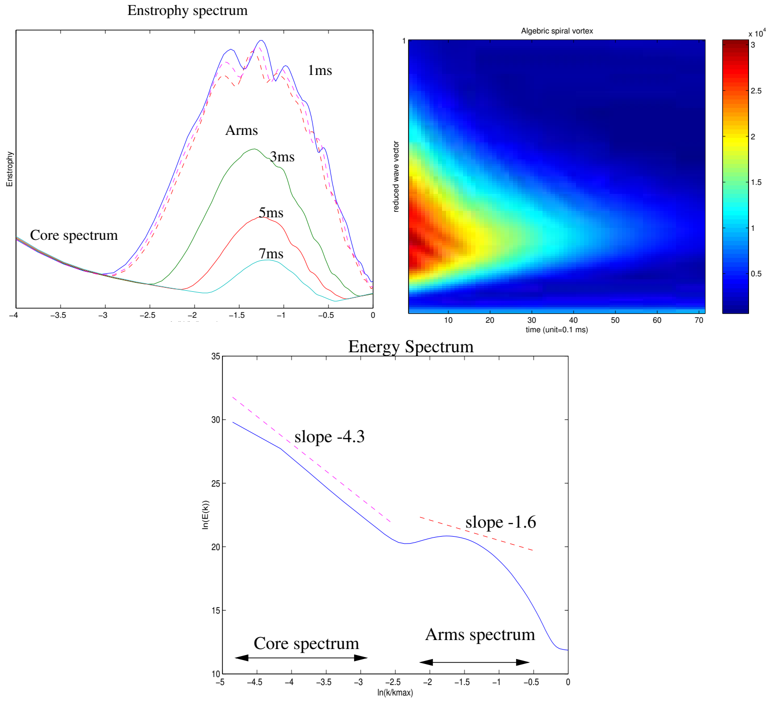



Fig. V.17: Évolution instantanée de l'enstrophie d'un vortex de la classe de Lundgren, dont l'enroulement est en spirale algébrique, $\Omega(r) \propto r^{-\alpha}$.

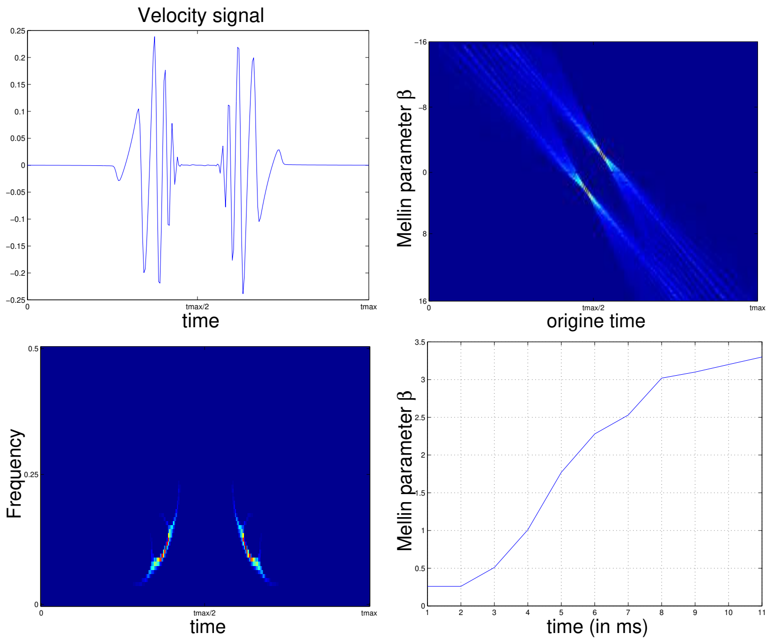



Fig. V.18: Estimation du paramètre de Mellin sur une coupe de vitesse typique d'un vortex de Lundgren représentée en haut à gauche. Le spectrogramme réalloué [CMF99] est donné en bas à gauche, la transformée de Hough correspondante est en haut a droite et montre un pic assez localisé à une orgine en temps et une échelle de Mellin. En bas à droite cette échelle de Mellin principale du vortex (mesurée donc sur le signal de vitesse) est indiquée en fonction du temps.

# Conclusions et perspectives

Arrivant à la fin de ce manuscrit, nous pouvons lancer un regard en arrière sur l'ensemble de travaux qui ont été décrits ici. Le thème central à la thèse était la propriété d'invariance d'échelle complète ou brisée, étudiée au confluent des méthodes de traitement du signal, des descriptions mathématiques de la propriété, et des modèles ou situations physiques qui l'exhibent.

La conjonction des outils d'analyse de signal et des mathématiques associés aux invariances d'échelle nous a amené à défendre l'utilisation des possibilités de stationnarisation qu'offre une transformation de Lamperti d'un signal, à la fois pour étudier théoriquement des systèmes à invariance d'échelle, pour proposer de nouveaux outils de descriptions et de mesures, et pour construire des modèles de synthèses. Les contributions qui nous semblent les plus importantes à ce sujet sont les suivantes.

• Le II.3 et le II.4 présentent avec beaucoup de détails la théorie d'analyse des signaux auto-similaires qui se développe en parallèle du traitement du signal stationnaire en temps. Le point majeur est que cette analyse du signal est utilisable en pratique du fait de la possibilité de calculer numériquement les transformées introduites, comme argumenté au II.5.

Il est ensuite possible de continuer à construire l'analyse du signal auto-similaire et le prolongement vraisemblablement le plus fructueux à envisager concerne la modélisation et l'estimation paramétrique auto-similaire. En particulier, il faudra se demander dans quel cadre la modélisation auto-similaire apporte une meilleure connaissance que les analyses traditionnelles d'un signal donné. Une autre perspective est donnée par la possibilité de comparer les analyses stationnaires aux analyses auto-similaires et alors d'avancer sur la construction de tests pour décider si un signal a des propriétés pertinentes d'invariance en échelle.

• Le deuxième apport est de montrer comment la réflexion de « stationnarisation » qui fonde l'utilisation de la transformée de Lamperti trouve des prolongements pour s'intéresser aux situations plus riches où la symétrie d'invariance d'échelle est brisée. Tandis que les études portant sur la brisure de la stationnarité temporelle offrent beaucoup de solutions connues d'analyse, celles portant sur les brisures de l'invariance en échelle sont plus récentes. L'approche que nous proposons dans les chapitres III et IV, à travers des exemples ou des contributions théoriques, parfois formelles, permet de multiplier les outils utiles aux invariances d'échelle brisées.

À nouveau les prolongements de cette idée sont nombreux et doivent s'attacher maintenant à des situations plus spécifiques. L'estimation paramétrique pour les processus à invariance d'échelle discrète est un exemple qui demande un travail algorithmique réel pour être possible. Un autre est d'étudier les propriétés en échelle de champs définis à deux dimensions, et qu'il faut caractériser avec d'autres transformations que les seules dilatations. Construire des méthodes d'analyse pour les auto-similarités bidimensionnelles incomplètes a un intérêt reconnu dans plusieurs domaines (en physique des nuages ou de la turbulence par exemples, ou traitement des images).

Le mélange des outils étudiés dans ce manuscrit avec la physique a pour l'instant amené des résultats moins aboutis. La question des propriétés en échelle a été examinée dans deux situations physiques principalement.

• La turbulence des fluides et ses propriétés en échelle très riches a constitué le point de départ du travail – mais ne se marie que mal à l'approche des échelles ensuite développée. La question que nous posions attend toujours une réponse : quelle est la part de la dynamique (et de ses structurations) dans la complexité des propriétés en échelle de la turbulence ? Le travail que nous avons rapporté à ce sujet montre surtout les limitations des modèles statistiques de vortex pour analyser ce problème. Il indique aussi que les réponses sur l'importance ou non des vortex sont à chercher ailleurs, c'est-à-dire vraisemblablement en partant de méthodes alternatives de mesures, de turbulence lagrangienne par exemple ou sur une zone étendue et non en étudiant la vitesse en un point.

• Une application plus directe en physique des méthodes en échelle développées à l'aide de la transformation de Lamperti concerne l'étude de l'invariance en échelle discrète. À la suite des études théoriques et méthodologiques autour de la transformation de Lamperti, nous avons peu à peu proposé une vision neuve de l'invariance en échelle discrète, de sa formalisation, de ses conséquences sur les processus stochastiques et de ses méthodes d'analyse. Nous avons montré de plus comment les outils de DSI stochastique que nous avançons se placent dans les travaux sur cette propriété.

Les méthodes d'analyse sont maintenant en quelque sorte mûres, complétées par les modèles de synthèse de processus à DSI qui serviront de points de comparaison solides à toute analyse statistique de la DSI dans des données réelles. La suite directe de notre travail, et elle commence dès maintenant, est d'appliquer les outils développés à l'analyse des données physiques et nous avons mentionné le problème des précurseurs de fracture et les phénomènes de croissance comme les champs d'application en cours.

Il est attendu, au moins espéré, que la confrontation des outils d'analyse à des situations physiques précises donnera aussi lieu à de nouveaux développements autour de la modélisation et des outils pour certaines brisures d'invariances d'échelle. Par exemple, regarder la DSI en fracture pose comme prochaine étape les théories construites spécifiquement sur les processus ponctuels.

En guise de point final à ce rapport, une remarque qui a été écartée très tôt dans le manuscrit mérite d'être soulevée à nouveau. L'ensemble de nos travaux concernent les propriétés d'échelle pour les processus physiques. La première difficulté est de définir ce qu'est une échelle tandis que d'autres quantités, temps, espace ou fréquence offrent des définitions naturelles simples. Quand on parle d'échelle, de quelle échelle parle-t-on ? Il est de mon avis que de nombreuses questions sont encore à poser à ce sujet, alors que le manuscrit réduit tout de suite l'échelle à celle que les changements d'échelle (les dilatations) met en avant. La notion intuitive d'échelle n'est en rien épuisée par l'échelle asociée aux dilatations, de même qu'elle ne l'était pas par la notion d'échelle que l'on associe aux ondelettes.

# Bibliographie


[AAB+95] ARNEODO (A.), ARGOUL (F.), BACRY (E.), ELEZGARAY (J.) et MUZY (J.), *Ondelettes, multifractales et turbulences*. Diderot Éditeur, Paris, 1995.

[ABJM97] ARNEODO (A.), BACRY (E.), JAFFARD (S.) et MUZY (J.), « Oscillating singularities on Cantor sets : A grand-canonical multifractal formalism », *J. of Stat. Phys.*, vol. 87, n° 1/2, 1997, p. 179–209.

[ABJM98] ARNEODO (A.), BACRY (E.), JAFFARD (S.) et MUZY (J.), « Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities », *J. Four. Anal. Appl.*, vol. 4, n° 2, 1998, p. 159–174.

[Abr97] ABRY (P.), *Ondelettes et Turbulence*. Diderot Éditeur, Paris, 1997.

[Abr01] ABRY (P.). « Lois d'échelle, multirésolutions et ondelettes. Applications au télétrafic informatique et à la turbulence développée ». Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard Lyon I, mars 2001.

[ACL00] AYACHE (A.), COHEN (S.) et LÉVY VÉHEL (J.), « The covariance structure of multifractional Brownian motion, with applications to long range dependence », dans *Proc. IEEE ICASSP-00*, 2000.

[AFFL94] ABRY (P.), FAUVE (S.), FLANDRIN (P.) et LAROCHE (C.), « Analysis of pressure fluctuations in swirling turbulent flows », *J. de Physique II France*, vol. 4, 1994, p. 725–733.

[AFSS95] ANIFRANI (J.-C.), FLOC'H (C. L.), SORNETTE (D.) et SOUILLARD (B.), « Universal log-periodic correction to renormalization group scaling for rupture stress prediction from acoustic emissions », *J. Phys. I France*, vol. 5, n° 6, juin 1995, p. 631–638.

[AFTV00] ABRY (P.), FLANDRIN (P.), TAQQU (M.) et VEITCH (D.), « Wavelets for the analysis, estimation, and synthesis of scaling data », dans PARK (K.) et WILLINGER (W.), éditeurs, *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*. Wiley, 2000.

[AGF95] ABRY (P.), GONÇALVES (P.) et FLANDRIN (P.), « Wavelets, spectrum analysis and $1/f$ processes », dans *Wavelets and Statistics, Lecture Notes in Statistics*, vol. 103, p. 15–29, 1995.

[AGH87] ARNEODO (A.), GRASSEAU (G.) et HOLSCHNEIDER (M.), « Wavelet transform analysis of invariant measures of some dynamical systems », dans COMBES (J. M.), GROSSMANN (A.) et TCHAMITCHIAN (P.), éditeurs, *Wavelets*, p. 182–196. Springer-Verlag, 1987.

[AGH88] Arneodo (A.), Grasseau (G.) et Holschneider (M.), « Wavelet transform of multifractals », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, 1988, p. 2281–2284.

[AGK87] Arneodo (A.), Grasseau (G.) et Kostelich (E. J.), « Fractal dimensions and $f(\alpha)$ spectrum of the Hénon attractor », *Phys. Lett. A*, vol. 124, nº 8, octobre 1987, p. 426–432.

[AKKG87] Ashurst (W.), Kerstein (A.), Kerr (R.) et Gibson (G.), « Alignement of vorticity and scalar gradient with strain rate in simulated Navier-Stokes turbulence », *Physw. Fluids*, vol. 30, 1987, p. 2343–2353.

[AL99] Ayache (A.) et Lévy Véhel (J.), « Generalized multifractional Brownian motion : Definition and preliminary results », dans Dekking (M.), Lévy Véhel (J.), Lutton (E.) et Tricot (C.), éditeurs, *Fractals : Theory and applications in engineering*, p. 17–32. Springer-Verlag, 1999.

[Alb98] Albin (J.), « On extremal theory for self-similar processes », *Annals of Probability*, vol. 26, nº 2, 1998, p. 743–793.

[Alt90] Altes (R.), « Wide-band, proportional bandwidth Wigner-Ville analysis », *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*, vol. 38, nº 6, 1990, p. 1005–1012.

[AM94] Arneodo (A.) et Muzy (E. B. J.), « Oscillating singularities in locally self-similar functions », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, nº 24, 1994, p. 4823–4826.

[AM99a] Amblard (P.-O.) et Michel (O.), « On higher-order affine distributions », dans *Proc. IEEE ICASSP-99*, 1999.

[AM99b] Amblard (P.-O.) et Michel (O.), « Vers des distributions affines multilinéaires », dans *Colloque GRETSI-99*, p. 19–22, 1999.

[Ami84] Amit (D.), *Field theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena.* World Scientific, Singapore, 1984.

[AMR97] Arneodo (A.), Muzy (J.) et Roux (S.), « Experimental analysis of self-similarity and radom cascade processes : applications to fully developped turbulence data », *J. Phys. France II*, vol. 7, 1997, p. 363–370.

[AS96] Abry (P.) et Sellan (F.), « The wavelet-based synthesis for fractional Brownian motion », *Applied and Comp. Harm. Analysis*, vol. 3, 1996, p. 377–383.

[Aub99] Aubry (J.), « Representation of the singularities of a function », *Appl. Comp. Harm. Anal.*, vol. 6, 1999, p. 282–286.

[Aug99] Auger (F.), *Introduction à la théorie du signal et de l'information.* Technip, 1999.

[AV99a] Angilella (J.) et Vassilicos (J.), « Spectral, diffusive and convective properties of fractal and spiral fields », *Physica D*, vol. 124, 1999, p. 23–57.

[AV99b] Angilella (J.) et Vassilicos (J.), « Time-dependent geometry and energy distribution in a spiral vortex layer », *Phys. Rev. E*, vol. 59, nº 5, 1999, p. 5427–5439.

[BA66] Barnes (J.) et Allan (A.), « A statistical model of flicker noise », *Proc. IEEE*, vol. 54, 1966, p. 176–178.

[Bar93] Baraniuk (R.), « A signal transform covariant to scale changes », *IEEE Electronic Letters*, vol. 29, nº 19, septembre 1993, p. 1675–1676.

[Bar95] Baraniuk (R.), « Marginals vs. covariance in joint distribution theory », dans *Proc. IEEE ICASSP-95*, mai 1995.

[Bar96a] Baraniuk (R.), « A limitation of the kernel method for joint distributions of arbitrary variables », *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 3, nº 2, février 1996, p. 51–53.

[Bar96b] Barenblatt (G.), *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics.* CUP, Cambridge, 1996.

[Bar98] Baraniuk (R.), « Joint distributions of arbitrary variables made easy », *Multidim. Systems and Signal Processing*, octobre 1998.

[Bat53] Batchelor (G.), *The theory of homogeneous turbulence.* Cambridge University Press, 1953.

[Bat67] Batchelor (G.), *An introduction to fluid dynamics.* Cambridge University Press, 1967.

[BB84] Bertrand (J.) et Bertrand (P.), « Représentations des signaux dans le plan temps-fréquence », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 299, 1984, p. 635.

[BB88] Bertrand (J.) et Bertrand (P.), « Time-frequency representations of broadband signals », dans *Proc. IEEE ICASSP-88*, p. 2196–2199, New York (NY), 1988.

[BB92] Bertrand (J.) et Bertrand (P.), « A class of affine Wigner functions with extended covariance properties », *J. Math. Phys.*, vol. 33, nº 7, juillet 1992, p. 2515–2527.

[BBG01] Bajer (K.), Bassom (A.) et Gilbert (A.), « Accelerated diffusion in the center of a vortex », *J. Fluid Mech.*, vol. 437, 2001, p. 395–411.

[BBO90] Bertrand (J.), Bertrand (P.) et Ovarlez (J.), « Discrete Mellin transform for signal analysis », dans *Proc. IEEE ICASSP-90*, p. 1603–1606, 1990.

[BBO96] Bertrand (J.), Bertrand (P.) et Ovarlez (J.), « The Mellin transform », dans Poularikas (A.), éditeur, *The Transforms and Applications Handbook.* CRC Press, 1996.

[BC95] Baraniuk (R.) et Cohen (L.), « On joint distributions for arbitrary variables », *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 2, nº 1, octobre 1995, p. 10–12.

[BCIJ97] Benassi (A.), Cohen (S.), Istas (J.) et Jaffard (S.), « Gaussian processes and pseudo-differential elliptic operators », *Revista Mathematica Iberoamericana*, vol. 13, nº 1, 1997, p. 19–89.

[BCP91] Baudet (C.), Ciliberto (S.) et Pinton (J.), « Spectral analysis of the von Kármán flow using ultrasound scattering », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, nº 2, 1991, p. 193–195.

[BCT+93] Benzi (R.), Ciliberto (S.), Tripicione (R.), Baudet (C.) et Massaioli (F.), « Extended self-similarity in turbulent flows », *Phys. Rev. E*, vol. 48, 1993, p. R29–R32.

[BDDL99] BIFERALE (L.), DAUMONT (I.), DOMBRE (T.) et LANOTTE (A.), « Coherent structures in random shell models for passive scalar advection », *Phys. Rev. E*, vol. 60, nº 6, decembre 1999, p. R6299–R6302.

[Ben58] BENNETT (W.), « Statistics of regenerative digital transmissions », *Bell System Tech.*, vol. 37, 1958, p. 1501–1542.

[Ber94a] BERAN (J.), *Statistics for Long-memory processes*. Chapman & Hall, New York, 1994.

[Ber94b] BERTHON (A.), « Représentations et changements d'horloge », dans *Temps-fréquence, ondelettes et multirésolution*, p. 19.1–19.4. Journées thématiques du GDR TdSI et colloque, mars 1994.

[BFA02] BORGNAT (P.), FLANDRIN (P.) et AMBLARD (P.-O.), « Stochastic discrete scale invariance », *Signal Processing Lett.*, vol. 9, nº 6, juin 2002, p. 181–184.

[BFS+87] BESSIS (D.), FOURNIER (J.-D.), SERVIZI (G.), TURCHETTI (G.) et VAIENTI (S.), « Mellin transforms of correlation integrals and generalized dimension of strange sets », *Phys. Rev. A*, vol. 36, nº 2, juillet 1987, p. 920–928.

[BG86] BRACCINI (C.) et GAMBARDELLA (G.), « Form-invariant filtering : Theory and applications », *IEEE Trans. on Acoustics, speech and signal processing*, vol. 34, nº 6, decembre 1986, p. 1612–1627.

[BG98] BASSOM (A.) et GILBERT (A.), « The spiral wind-up of vorticity in an inviscid planar vortex », *J. Fluid Mech.*, vol. 371, 1998, p. 109–140.

[BG99] BASSOM (A.) et GILBERT (A.), « The spiral wind-up and dissipation of vorticity and a passive scalar in a strained planar vortex », *J. Fluid Mech.*, vol. 398, 1999, p. 245–270.

[BI02] BENASSI (A.) et ISTAS (J.), « Processus auto-similaires », dans ABRY (P.), GONÇALVES (P.) et LÉVY VÉHEL (J.), éditeurs, *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, vol. 2, p. 233–265. Hermès, mars 2002.

[BJ93] BARANIUK (R.) et JONES (D.), « Shear madness : New orthogonal bases and frames using chirp functions », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, nº 12, decembre 1993, p. 3543–3549.

[BJ95] BARANIUK (R.) et JONES (D.), « Unitary equivalence : a new twist on signal processing », *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 43, nº 11, octobre 1995, p. 2269–2282.

[BL80] BERRY (M.) et LEWIS (Z.), « On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function », *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 370, 1980, p. 459–484.

[BLF53] BLANC-LAPIERRE (A.) et FORTET (R.), *Théorie des fonctions aléatoires*. Masson, Paris, 1953.

[BLP81] BLANC-LAPIERRE (A.) et PICINBONO (B.), *Fonctions aléatoires*. Masson, Paris, 1981.

[BMTW96] BELIN (F.), MAURER (J.), TABELING (P.) et WILLAIME (H.), « Observation of intense filaments in fully developed turbulence », *J. Phys. II france*, vol. 6, 1996, p. 573–583.

[BMTW97] Belin (F.), Maurer (J.), Tabeling (P.) et Willaime (H.), « Velocity gradient distributions in fully developped turbulence : experimental study », *Phys. Fluids*, vol. 9, 1997, p. 3843–3850.

[BMW97] Burnecki (K.), Maejima (M.) et Weron (A.), « The Lamperti transformation for self-similar processes », *Yokohama Math. J.*, vol. 44, 1997, p. 25–42.

[BMW99] Baudet (C.), Michel (O.) et Williams (W.), « Detection of coherent vorticity structures using time-scale resolved acoustic spectroscopy », *Physica D*, vol. 128, 1999, p. 1–17.

[BNW95] Bhattacharjee (A.), Ng (C.) et Wang (X.), « Finite-time vortex singularity and Kolmogorov spectrum in a symmetric three-dimensional spiral model », *Phys. Rev. E*, vol. 52, n° 5, 1995, p. 5110–5123.

[Boa02] Boashash (B.), éditeur, *Time-Frequency Signal Analysis and Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ), 2002.

[Bor99] Borgnat (P.). « Turbulence et structures cohérentes : une approche par les vortex de Lundgren ». Rapport de DEA, 1999.

[BP84a] Badii (R.) et Politi (A.), « Hausdorff dimension and uniformity factor of strange attractors », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 52, 1984, p. 1661–1664.

[BP84b] Badii (R.) et Politi (A.), « Intrinsic oscillations in measuring the fractal dimension », *Phys. Lett.*, vol. 104A, n° 6,7, septembre 1984, p. 303–305.

[BP89] Buntine (J.) et Pullin (D.), « Merger and cancellation of strained vortices », *J. Fluid Mech.*, vol. 205, 1989, p. 263–295.

[BPTV88] Bessis (D.), Palidini (G.), Turchetti (G.) et Vaienti (S.), *J. of Stat. Phys.*, vol. 51, 1988, p. 109.

[Bra91] Brachet (M.), « Direct numerical simulation of three-dimensional turbulence in the Taylor-Green vortex », *Fluid Dyn. Res.*, vol. 8, 1991, p. 1–8.

[BSTV87] Bessis (D.), Servizi (G.), Turchetti (G.) et Vaienti (S.), « Mellin transforms and correlation dimensions », *Phys. Lett. A*, vol. 119, n° 7, janvier 1987, p. 345–347.

[Can81] Cantwell (L.), « Organized motion in turbulent flow », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 13, 1981, p. 457–515.

[CAP99] Chainais (P.), Abry (P.) et Pinton (J.-F.), « Intermittency and coherent structures in a swirling flow : a wavelet based analysis of joint pressure and velocity measurements », *Phys.Fluids*, vol. 11, n° 11, novembre 1999.

[Cas89] Castaing (B.), « Conséquence d'un principe d'extrémum en turbulence », *J. Phys. France*, vol. 50, 1989, p. 147–156.

[Cas96] Castaing (B.), « The temperature of turbulent flows », *J. Physique France II*, vol. 6, 1996, p. 105–114.

[Cas97] Castaing (B.), « Turbulence : Statistical approach », dans Dubrulle (B.), Graner (F.) et Sornette (D.), éditeurs, *Scale Invariance and Beyond*, p. 225–234. Springer, 1997.

[CB94] Cohen (L.) et Baraniuk (R.), « Joint distributions for arbitrary variables », dans *IEEE-SP Int. Sympos. Time-Frequency Time-Scale Analysis*, p. 520–523, octobre 1994.

[CD95] Castaing (B.) et Dubrulle (B.), « Fully developped turbulence : a unifying point of view », *J. Phys. France II*, vol. 5, 1995, p. 895–899.

[CDC95] Cadot (O.), Douady (S.) et Couder (Y.), « Characterization of the low-pressure filaments in a three dimensional turbulent shear flow », *Phys. Fluids*, vol. 7, 1995, p. 630.

[CG97] Camussi (C.) et Guj (G.), « Orthonormal wavelet decomposition of turbulent flows », *J. Fluid Mech.*, vol. 348, 1997, p. 177.

[CG99a] Camussi (C.) et Guj (G.), « Experimental analysis of intermittent coherent strcuctures in the near filed of a high Re turbulent jet flow », *Phys Fluids*, vol. 11, n° 2, 1999, p. 423–431.

[CG99b] Camussi (C.) et Guj (G.), « Statistical analysis of local turbulent energy fluctuations », *J. Fluid Mech.*, vol. 382, 1999, p. 1–26.

[CGS01] Ciliberto (S.), Guarino (A.) et Scorretti (R.), « The effect of disorder on the fracture nucleation process », *Physica D*, vol. 158, 2001, p. 83–104.

[Cha97] Chainais (P.). « Étude des structures de basse pression dans un écoulement turbulent ». Rapport de DEA, 1997.

[Cha01] Chainais (P.), *Cascades log-infiniment divisibles et analyse multirésolution. Aplication à l'étude des intermittences en turbulence*. PhD thesis, École normale supérieure de Lyon, 2001.

[CHT98] Carmona (R.), Hwang (W.) et Torrésani (B.), *Practical Time-Frequency analysis*. Academic Press, San Diego, 1998.

[CM98] Chassande-Mottin (E.), *Méthodes de réallocation dans le plan temps-fréquence pour l'analyse et le traitement de signaux non stationnaires*. PhD thesis, Université de Cergy-Pontoise, 1998.

[CMF99] Chassande-Mottin (E.) et Flandrin (P.), « On the time-frequency detection of chirps », *Appl. and Comp. Harm. Anal.*, vol. 6, 1999, p. 252–281.

[Cœu00] Cœurjolly (J.-F.), *Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires*. PhD thesis, Univ. Joseph Fourier, Grenoble, decembre 2000.

[Coh66] Cohen (L.), « Generalized phase-space distribution functions », *J. Math. Phys.*, vol. 7, n° 5, mai 1966, p. 781–786.

[Coh93] Cohen (L.), « The scale representation », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 41, n° 12, decembre 1993, p. 3275–3292.

[Coh95] Cohen (L.), *Time-Frequency analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[Coh98] Cohen (L.), « Generalization of the Wiener-Khinchin theorem », *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 5, n° 11, novembre 1998, p. 392–294.

[Coh99] COHEN (S.), « From self-similarity to local self-similarity : the estimation problem », dans DEKKING (M.), LÉVY VÉHEL (J.), LUTTON (E.) et TRICOT (C.), éditeurs, *Fractals : Theory and applications in engineering*, p. 1–16. Springer-Verlag, 1999.

[Coh02] COHEN (S.), « Champs localement auto-similaires », dans ABRY (P.), GONÇALVES (P.) et LÉVY VÉHEL (J.), éditeurs, *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, vol. 2, p. 107–139. Hermès, mars 2002.

[Com76] COMTE-BELLOT (G.), « Hot-wire anenometry », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 8, 1976, p. 209–231.

[Cor62] CORRSIN (S.), « Turbulent dissipation fluctuations », *Phys. Fluids*, vol. 5, 1962, p. 1301–1302.

[Cra40] CRAMÉR (H.), « On the theory of stationary random processes », *Ann. of Math.*, vol. 41, 1940, p. 215.

[Cra42] CRAMÉR (H.), « On harmonic analysis in certain functional spaces », *Arkiv. Math. Astr. Fysik*, vol. 28, 1942, p. 1.

[Dao96] DAOUDI (K.), *Généralisations des systèmes de fonctions itérées. Applications au traitement du signal.* PhD thesis, Univ. Paris IX Dauphine, 1996.

[Dav84] DAVIES (B.), *Integral transforms and their applications.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[DBGP98] DUBRULLE (B.), BRÉON (F.-M.), GRANER (F.) et POCHEAU (A.), « Towards an universal classification of scale invariant processes », *Eur. Phys. J. B*, vol. 4, 1998, p. 89–94.

[DC93] DOUADY (S.) et COUDER (Y.), « On the dynamical structures observed in 3D turbulence », dans BENZI (R.), BASDEVANT (C.) et CILIBERTO (S.), éditeurs, *Turbulence in extended systems*, p. 3–17. Nova Science Commack NY, 1993.

[DCB91] DOUADY (S.), COUDER (Y.) et BRACHET (M.), « Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, 1991, p. 983–986.

[DDG00] DAUMONT (I.), DOMBRE (T.) et GILSON (J.). « Instanton calculus in shell models of turbulence ». arXiv :chao-dyn/9905017v2, 2000.

[DDI83] DERRIDA (B.), DE SEZE (L.) et ITZYKSON (C.), « Fractal structure of zeros in hierarchical models », *J. of Stat. Phys.*, vol. 33, n° 3, 1983, p. 559–569.

[DG96a] DUBRULLE (B.) et GRANER (F.), « Possible statistics of scale invariant systems », *J. Phys. II France*, vol. 6, mai 1996, p. 797–816.

[DG96b] DUBRULLE (B.) et GRANER (F.), « Scale invariance and scaling exponents in fully developped turbulence », *J. Phys. II France*, vol. 6, mai 1996, p. 817–824.

[DG97] DUBRULLE (B.) et GRANER (F.), « Analogy between scale symmetry and relativistic mechanics. II. electric analog of turbulence », *Phys. Rev. E*, vol. 56, n° 6, decembre 1997, p. 6435–6442.

[DG98] DOMBRE (T.) et GILSON (J.), « Intermittency, chaos and singular fluctuations in the mixed Obukhov-Novikov shell model of turbulence », *Physica D*, vol. 111, 1998, p. 265–287.

[DGS97] Dubrulle (B.), Graner (F.) et Sornette (D.), *Scale Invariance and Beyond*. EDP Sciences - Springer, 1997.

[DH94] Dehay (D.) et Hurd (H.), « Representation and estimation for periodically and almost periodically correlated random processes », dans Gardner (W.), éditeur, *Cyclostationarity in communications and signal processing*. IEEE Press, 1994.

[DH00] Dubrulle (B.) et He (G.), « Possible statistics of two couples random fields : application to passive scalar ». Rapport technique, NASA, ICASE, novembre 2000.

[DIL84] Derrida (B.), Itzykson (C.) et Luck (J. M.), « Oscillatory critical amplitudes in hierarchical models », *Commun. Math. Phys.*, vol. 94, 1984, p. 115–132.

[DN97] Dietrich (C.) et Newsam (G.), « Fast and exact simulation of stationary Gaussian process through circulant embedding of the covariance matrix », *J. of Sci. Comput.*, vol. 18, 1997, p. 1088–1107.

[Don97] Donescu (I.), *Modélisation de textures invariantes par transformation plane. Codage sur des supports de forme arbitraire*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1997.

[DSW94] Doligalski (T.), Smith (C.) et Walker (J.), « Vortex interactions with walls », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 26, 1994, p. 573–616.

[Dub94] Dubrulle (B.), « Intermittecy in fully developped turbulence : log-Poisson statistics and generalized scale-covariance », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73, 1994, p. 959–962.

[Dub97] Dubrulle (B.), « Statistical scale symmetry breaking », dans Dubrulle (B.), Graner (F.) et Sornette (D.), éditeurs, *Scale Invariance and Beyond*, p. 275–286. Springer, 1997.

[Dub00] Dubrulle (B.), « Finite size scale invariance », *Eur. Phys. J. B*, vol. 14, 2000, p. 757–771.

[EE97] Erzan (A.) et Eckmann (J.), « $q$-analysis of fractal sets », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, n° 17, avril 1997, p. 3245–3248.

[Erz97] Erzan (A.), « Finite $q$-differences and the discrete renormalization group », *Phys. Lett. A*, vol. 225, février 1997, p. 235–238.

[Fal86] Falconer (K.), « Random fractals », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 100, 1986, p. 559–582.

[Fal90] Falconer (K.), *Fractal geometry*. Wiley, 1990.

[FBA02] Flandrin (P.), Borgnat (P.) et Amblard (P.-O.). « From stationarity to self-similarity, and back : Variations on the Lamperti transformation ». to appear in "Long Range Dependent Stochastic Processes : Theory and applications", G. Rangarajan Editor, février 2002.

[FGV01] Falkovich (G.), Gawędzki (K.) et Vergassola (M.). « Particles and fields in fluid turbulence ». arXiv :cond-mat/0105199, mai 2001.

[FHV93] Farge (M.), Hunt (J.) et Vassilicos (J.), éditeurs. *Wavelets, Fractals and Fourier transforms*, Oxford, 1993. Clarendon Press.

[Fis83] Fisher (M.), « Scaling, universality and renormalization group theory », dans Hahne (F.), éditeur, *Lectures Notes in Physics – Critical Phenomena*, vol. 186, p. 1–139. Springer-Verlag, 1983.

[Fla88] Flandrin (P.), « A time-frequecy formulation of optimum detection », dans *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, vol. ASSP-36 (9), p. 1377–1384, 1988.

[Fla90] Flandrin (P.), « Scale-invariant Wigner spectra and self-similarity », dans Torres (L.) et *al.*, éditeurs, *Signal Processing V : Theories and Applications*, p. 149–152. Elsevier, 1990.

[Fla93] Flandrin (P.), *Temps-Fréquence (1ère ed.)*. Hermes, 1993.

[Fla98] Flandrin (P.). « Inequalities in Mellin-Fourier signal analysis ». Newton Institute Preprint NI98030-NSP, Cambridge, UK, novembre 1998.

[Fla99] Flandrin (P.), *Time-Frequency / Time-Scale Analysis*. Academic Press, 1999.

[Fla01] Flandrin (P.), « The many roads to time-frequency », dans *et al.* (A. W.), éditeur, *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing*, p. 275–291. Isaac Newton Institute Series, Cambridge University Press, 2001.

[FP85] Frisch (U.) et Parisi (G.), « On the singularity structure of fully developped turbulence », dans Ghil (M.), Benzi (R.) et Parisi (G.), éditeurs, *Proc. of Int. School of Phys. on Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics*, p. 84–87, Amsterdam, 1985. North-Holland.

[FPS01] Farge (M.), Pellegrino (G.) et Schneider (K.), « Coherent vortex extraction in 3D flows using orthogonal wavelets », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, nº 5, 2001, p. 30–34.

[Fri91] Frisch (U.), « From global scaling, *à la* Kolmogorov, to locale multifractal scaling in fully developped turbulence », *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 434, 1991, p. 89–99.

[Fri95] Frisch (U.), *Turbulence*. CUP, Cambridge, 1995.

[Fro35] Frostman (O.), « Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions », *Meddel. Lunds Univ. Math. Sem.*, vol. 3, 1935, p. 1–118.

[FSK99] Farge (M.), Schneider (K.) et Kevlahan (N.), « Non-gaussianity and coherent votex simulation for two-dimensional turbulence using adaptative orthogonal wavelet basis », *Phys. Fluids*, vol. 11, nº 8, 1999, p. 2187–2201.

[FTV89] Fournier (J.-D.), Turchetti (G.) et Vaienti (S.), « Singularity spectrum of generalized energy integrals », *Phys. Lett. A*, vol. 140, nº 6, octobre 1989, p. 331–335.

[FV97] Flohr (P.) et Vassilicos (J.), « Accelerated scalar dissipation in a vortex », *J. Fluid Mech.*, vol. 3498, 1997, p. 295–317.

[FV98] Fung (J.) et Vassilicos (J.), « Two-particle dispersion in turbulentlike flows », *Phys. Rev. E*, vol. 57, 1998, p. 1677–1690.

[Gab46] Gabor (D.), « Theory of communication », *J. IEE*, vol. 93, n° III, 1946, p. 429–457.

[Gag87] Gagne (Y.), *Étude expérimentale de l'intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence développée.* PhD thesis, INP Grenoble, 1987.

[Gar86] Gardner (W.), « The spectral correlation theory of cyclostationary time-series », *Signal Processing*, vol. 11, 1986, p. 13–36.

[Gar87] Gardner (W.), *Introduction to random processes.* McGraw-Hill, New York, 1987.

[GD97] Graner (F.) et Dubrulle (B.), « Analogy between scale symmetry and relativistic mechanics. I. lagrangian formalism », *Phys. Rev. E*, vol. 56, n° 6, decembre 1997, p. 6427–6434.

[GF75] Gardner (W.) et Franks (L.), « Characterization of cyclostationary random signal processes », *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. IT-21, n° 1, janvier 1975, p. 4–14.

[GFD99] Gibbon (J.), Fokas (A. S.) et Doering (C.), « Dynamically stretched vortices as solutions of the 3D Navier-Stokes equations », *Physica D*, vol. 132, 1999, p. 497–510.

[GGC98] Guarino (A.), Garcimartin (A.) et Ciliberto (S.), « An experimental test of the critical behaviour of fracture precursors », *Eur. Phys. J. B*, vol. 6, 1998, p. 13–17.

[GGC99] Guarino (A.), Garcimartin (A.) et Ciliberto (S.), « Failure time and microcrack nucleation », *Europhys. Lett.*, vol. 47, n° 4, 1999, p. 456–461.

[GGH97] Galenti (B.), Gibbon (J.) et Heritage (M.), « Vorticity alignement results for the 3D Euler and Navier-Stokes equations », *Nonlinearity*, vol. 10, 1997, p. 1675.

[Gil88] Gilbert (A.), « Spiral structures and spectra in two-dimensional turbulence », *J. Fluid Mech.*, vol. 193, 1988, p. 737–743.

[Gil93] Gilbert (A.), « A cascade interpretation of Lundgren's stretched spiral vortex model for turbulent fine structure », *Phys. Fluids*, vol. 25, 1993, p. 2831–2834.

[GJ80] Granger (C.) et Joyeux (R.), « An introduction to long-memory time series models and fractional differencing », *J. of time series analysis*, vol. 1, n° 1, 1980, p. 15–29.

[Gla61] Gladyshev (E.), « Periodically correlated random sequences », *Sov. Math.*, vol. 2, 1961, p. 385–388.

[Gla63] Gladyshev (E.), « Periodically and almost periodically correlated random processes with continuous time parameter », *Theory Prob. and Appl.*, vol. 8, 1963, p. 173–177.

[GM97] GORENFLO (R.) et MAINARDI (F.), « Fractional Calculus : Integral and differential equations of fractional order », dans CARPINTERI (A.) et MAINARDI (F.), éditeurs, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, p. 223–276. Springer Verlag, 1997.

[Gol83] GOLDSTEIN (R.), *Fluid Mechanics Measurements*. Hemisphere, New York, 1983.

[GP83] GRASSBERGER (P.) et PROCACCIA (I.), « Characterization of stange attractors », *Phys. Rev. Lette.*, vol. 50, nº 5, janvier 1983, p. 346–349.

[GPPL01] GOMEZ (T.), POLITANO (H.), POUQUET (A.) et LARCHEVÊQUE (A.), « Spiral vortices in compressible turbulent flows », *Phys. Fluids*, vol. 13, nº 7, 2001, p. 2065–2075.

[Gre87] GRENIER (Y.), « Parametric time-frequency representations », dans LACOUME (J.), DURRANI (T.) et STORA (R.), éditeurs, *Les Houches 1985 Session XLV - Signal processing*, vol. 1, p. 339–397. North-Holland, 1987.

[GS94] GARDNER (W.) et SPOONER (C.), « The cumulant theory of cyclostationary time-series, part I : Foundation », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 42, nº 12, decembre 1994, p. 3387–3408.

[GS95] GRAUER (R.) et SIDERIS (T.), « Finite time singularities in ideal fluids with swirl », *Physica D*, vol. 88, 1995, p. 116–132.

[GS02] GLUZMAN (S.) et SORNETTE (D.), « Log-periodic route to fractal functions », *Phys. rev. E*, vol. 6503, nº 3, 2002, p. T2A :U418–U436.

[Gug92] GUGLIELMI (M.), « Transfer function of linear continuous time-varying systems via non-commutative algebra », dans VANDEWALLE (J.), BOITE (R.), MOONEN (M.) et OOSTERLINK (A.), éditeurs, *Signal processing VI : Theories and applications*, p. 891–895. Elsevier Science, 1992.

[GV89] GHEZ. (J.-M.) et VAIENTI (S.), « On the wavelet analysis for multifractal sets », *J. of Stat. Phys.*, vol. 57, nº 1–2, 1989, p. 415–420.

[GV92a] GHEZ. (J.-M.) et VAIENTI (S.), « Integrated wavelets on fractal sets : I. The correlation dimension. », *Nonlinearity*, vol. 5, 1992, p. 777–791.

[GV92b] GHEZ. (J.-M.) et VAIENTI (S.), « Integrated wavelets on fractal sets : II. The generalized dimension. », *Nonlinearity*, vol. 5, 1992, p. 791–804.

[GZ88] GRAY (H. L.) et ZHANG (N. F.), « On a class of nonstationary processes », *Journal of Time Series Analysis*, vol. 9, nº 2, 1988, p. 133–154.

[Han65] HANNAN (E.), « Group representations and applied probability », dans GANI (J.), éditeur, *Suuplementary Review series in applied probability*, vol. 3. Methuien & Co., 1965.

[HB95] HLAWATSCH (F.) et BÖLCSKEI (H.), « Displacement-covariant time-frequency energy distributions », dans *Proc. IEEE ICASSP-95*, p. 1025–1028, Detroit, MI, May 1995.

[HB96] HLAWATSCH (F.) et BÖLCSKEI (H.), « Covariant time-frequency distributions based on conjugate operators », *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 3, nº 2, Feb. 1996, p. 44–46.

[HJL$^+$00] Huang (Y.), Johansen (A.), Lee (M. W.), Saleur (H.) et Sornette (D.), « Artifactual log-periodicity in finite-size data : Relevance for earthquake aftershocks », *J. Geophysical Research*, vol. 105, 2000, p. 25451–25471.

[Hol88] Holschneider (M.), « On the wavelet transformation of fractal objects », *J. of Stat. Phys.*, vol. 50, n° 5–6, 1988, p. 963–993.

[Hos81] Hosking (J.), « Fractional differencing », *Biometrika*, vol. 68, 1981, p. 165–176.

[HOSS97] Huang (Y.), Ouillon (G.), Saleur (H.) et Sornette (D.), « Spontaneous generation of discrete scale invariance in growth models », *Physical Review E*, vol. 55, juin 1997, p. 6433–6447.

[HP99] Hernández-Pellicer (R.), *Comportements dynamiques et contrôle de la vorticité dans les sillages.* PhD thesis, École normale supérieure de Lyon, 1999.

[HPSBB97] Hlawatsch (F.), Papandreou-Suppappola (A.) et Boudreaux-Bartels (G. F.), « The hyperbolic class of quadratic time-frequency representations—Part II : Subclasses, intersection with the affine and power classes, regularity, and unitarity », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, n° 2, Feb. 1997, p. 303–315.

[HR00] Hutchinson (J.) et Ruschendorf (L.), « Self-similar fractals and self-similar random fractals », dans Bandt (C.), Graf (S.) et Zähle (M.), éditeurs, *Fractal geometry and stochastics*, p. 109–123. Birkhauser, 2000.

[HSS00] Huang (Y.), Saleur (H.) et Sornette (D.), « Reexamination of log-periodicity observed in the seismic precursors of the 1989 Loma Prieta earthquake », *J. Geophysical Research*, vol. 105, n° B12, 2000, p. 28111–28123.

[HT96] Hlawatsch (F.) et Twaroch (T.), « Covariant $(\alpha, \beta)$, time-frequency, and $(a, b)$ representations », dans *Proc. IEEE-SP Int. Sympos. Time-Frequency Time-Scale Analysis*, p. 437–440, Paris, France, June 1996.

[HT97] Hlawatsch (F.) et Twaroch (T.), « Extending the characteristic function method for joint *a-b* and time-frequency analysis », dans *Proc. IEEE ICASSP-97*, vol. 3, p. 2049–2052, Munich, Germany, April 1997.

[HTB96] Hlawatsch (F.), Twaroch (T.) et Bölcskei (H.), « Wigner-type *a-b* and time-frequency analysis based on conjugate operators », dans *Proc. IEEE ICASSP-96*, vol. 3, p. 1395–1398, Atlanta, GA, May 1996.

[HTT02] Hlawatsch (F.), Tauböck (G.) et Twaroch (T.), « Covariant time-frequency analysis », dans Debnath (L.), éditeur, *Wavelets and Signal Processing.* Birkhäuser, Boston (MA), 2002.

[Hue90] Huerre (P.), « Local and global instabilities in spatially developing flows », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 22, 1990, p. 473–537.

[Hur69] Hurd (H.), *An investigation of periodically correlated stochastic processes.* PhD thesis, Duke Univ. dept. of Electrical Engineering, novembre 1969.

[Hur73] Hurd (H.), « Testing for harmonizability », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 19, n° 3, mai 1973, p. 316–320.

[Hur89a] Hurd (H.), « Nonparametric time series analysis for periodically correlated processes », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 35, 1989, p. 350–359.

[Hur89b] HURD (H.), « Representation of strongly harmonizable periodically correlated processes and their covariances », *J. Multivariate Anal*, vol. 29, n° 1, 1989, p. 53–67.

[Hur97] HURD (H.). « A brief introduction to periodically correlated (cyclostationary) random sequences ». `http ://www.stat.unc.edu/faculty/hurd.html`, novembre 1997. Livre en préparation.

[HV91] HUNT (J.) et VASSILICOS (J.), « Kolmogorov's contributions to the physical understanding of small-scale turbulence and recent developments », *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 434, 1991, p. 183–210.

[IS01] IDE (K.) et SORNETTE (D.), « Oscillatory finite-time singularities in finance, population and rupture », *Physica A*, 2001. In press.

[Jac89] JACKSON (L.), *Digital filters and signal processing*. Kluwer, 1989.

[Jaf97] JAFFARD (S.), « Multifractal formalism for functions, part 1 and 2 », *SIAM J. of Math. Anal.*, vol. 28, n° 4, 1997, p. 944–998.

[Jaf00a] JAFFARD (S.), « Conjecture de Frish et Parisi et généricité des fonctions multifractales », *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, vol. 330, 2000, p. 265–270.

[Jaf00b] JAFFARD (S.), « On the Frisch-Parisi conjecture », *J. Math. Pures Appl.*, vol. 79, n° 6, 2000, p. 525—552.

[JHJ96] JENNANE (R.), HARBA (R.) et JACQUET (G.), « Estimation de la qualité des méthodes de synthèse du mouvement Brownien fractionnaire », *Traitement du Signal*, vol. 13, n° 4, 1996.

[Jim98] JIMÉNEZ (J.), « Small scale intermittency in turbulence », *Eur. J. Mech. B/Fluids*, vol. 17, n° 4, 1998, p. 405–419.

[JKVF93] J.C.R. HUNT, KEVLAHAN (N.), VASSILICOS (J.) et FARGE (M.), « Wavelets, fractals and fourier transforms : detection and analysis of structures », dans FARGE (M.), HUNT (J.) et VASSILICOS (J.), éditeurs, *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*, p. 1–38. Oxford : Clarendon Press, 1993.

[JM96] JAFFARD (S.) et MEYER (Y.), « Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions », *Memoirs of the A.M.S.*, vol. 123, n° 587, 1996.

[JMTW99] JIMÉNEZ (J.), MOISY (F.), TABELING (P.) et WILLAIME (H.), « Scaling and structure in isotropic turbulence », dans VASSILICOS (J.), éditeur, *Intermittency in turbulent flows*, p. 193–212. CUP, 1999.

[JS97] JOHANSEN (A.) et SORNETTE (D.), « Large financial crashes », *Physica A*, vol. 245, n° 3–4, 1997, p. 411–422.

[JS98] JOHANSEN (A.) et SORNETTE (D.), « Evidence of discrete scale invariance in DLA and time-to-failure by canonical averaging », *Int. J. Mod. Phys. C*, vol. 9, n° 3, 1998, p. 433–447.

[JS00] JOHANSEN (A.) et SORNETTE (D.), « The Nasdaq crash of April 2000 : Yet another example of log-periodicity in a speculative bubble ending in a crash », *Eur. Phys. J. B*, vol. 17, 2000, p. 319–328.

[JSB99] Jögi (P.), Sornette (D.) et Blank (M.), « Fine structure and complex exponents in power law distributions from random maps », *Phys. Rev. E*, vol. 57, 1999, p. 120–134.

[JSS00] Johansen (A.), Saleur (H.) et Sornette (D.), « New evidence of earthquake precursory phenomena in the 17 Jan. 1995 Kobe earthquake, Japan », *Eur. Phys. J. B*, vol. 15, 2000, p. 551–555.

[JSW+96] Johansen (A.), Sornette (D.), Wakita (H.), Tsunogai (U.), Newman (W.) et Saleur (H.), « Discrete scaling in earthquake precursory phenomena : evidence in the kobe earthquake, japan », *J. Phys. I France*, vol. 6, octobre 1996, p. 1391–1402.

[JWSR93] Jiménez (J.), Wray (A.), Saffman (P.) et Rogallo (R.), « The structures of intense vorticity in isotropic turbulence », *J. Fluid Mech.*, vol. 255, 1993, p. 65–90.

[KC72] Kuo (A.) et Corrsin (S.), « Experiment on the geometry of the fine-structure regions in fully turbulent fluids », *J. Fluid Mech.*, vol. 56, nº 3, 1972, p. 447–479.

[Kes82] Keshner (M.), « $1/f$ noise », *Proc. of the IEEE*, vol. 70, nº 3, mars 1982, p. 212–2188.

[KH38] von Kármán (T.) et Howarth (L.), « On the statistical theory of isotropic turbulence », *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 164, 1938, p. 192–215.

[KH93] Koyama (J.) et Hara (H.), « Fractional Brownian motion described by scaled Langevin equation », *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 3, nº 4, 1993, p. 467–480.

[Kid00] Kida (S.), « Low-presure vortex : the role of turbulence dynamics », dans Dopazo (C.), éditeur, *Advances in Turbulence VIII*, p. 647–652. CIMNE, 2000.

[KM99] Kida (S.) et Miura (H.), « Identification and analysis of vortical structures », *Eur. J Mech. B/Fluids*, vol. 17, 1999, p. 471–488.

[Kol41a] Kolomogorov (A.), « The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers », *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 30, 1941, p. 9–13.

[Kol41b] Kolomogorov (A.), « On degeneration of isotropic turbulence in a incompressible viscous liquid », *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 31, 1941, p. 538–540.

[Kol62] Kolmogorov (A.), « A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number », *J. Fluid Mech.*, vol. 13, 1962, p. 82–85.

[KPV02] Khan (M.), Pumir (A.) et Vassilicos (J.), « Geometry of multipoint turbulent dispersion », dans Castro (I.), Hancock (P.) et Thomas (T.), éditeurs, *Advances in turbulence IX*, p. 621–624. CIMNE, 2002.

[KT94] Kida (S.) et Takaoka (M.), « Vortex reconnection », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 26, 1994, p. 169–189.

[KV94] Kevlahan (N.) et Vassilicos (J.), « The space and scale dependencies of the self-similar structure of turbulence », *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 447, 1994, p. 341–363.

[LAC97] LACOUME (J.), AMBLARD (P.) et COMON (P.), *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*. Masson, Paris, 1997.

[Lam62] LAMPERTI (J.), « Semi-stable stochastic processes », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 104, 1962, p. 62–78.

[Las02] LASHERMES (B.). « Contribution à l'étude des effets de taille finie dans les phénonèmes d'invariance d'échelle ». Rapport de DEA, 2002.

[Liu89] LIU (J.), « Coherent structures in transitional and turbulent free shear flows », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 21, 1989, p. 285–315.

[LL76] LEVY-LEBLOND (J.), « One more derivation of the Lorentz transformation », *Am. J. Phys.*, vol. 44, n° 3, 1976, p. 271–277.

[LL98] LAMBERT-LACROIX (S.), *Fonctions d'autocorrélation partielle des procesus à temps discret non stationnaires et applications*. PhD thesis, Université J. Fourier - Grenoble I, 1998.

[LL00] LAMBERT-LACROIX (S.), « On periodic auro-regressive processes estimation », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 48, n° 6, 2000, p. 1800–1803.

[Loè62] LOÈVE (M.), *Probability theory*. D. von Nostrand Company, Princeton, 1962.

[LR01] LEE (S.) et RAO (R.), « Kernel approach to discrete-time linear scale-invariant systems », dans *IEEE Workshop on Stat. Signal Proc. SSP01*, p. 62–65, 2001.

[LS00] LEE (M.) et SORNETTE (D.), « Novel mechanism for discrete scale invariance in sandpile models », *Eur. Phys. J. B*, vol. 15, 2000, p. 193–197.

[Lun82] LUNDGREN (T.), « Strained spiral vortex model for turbulent fine structure », *Phys. Fluids*, vol. 25, n° 12, 1982, p. 2193–2203.

[Lun93] LUNDGREN (T.), « A small-scale turbulence model », *Phys. Fluids A*, vol. 5, n° 6, 1993, p. 1472–1483.

[LVC+01] LA PORTA (A.), VOTH (G.), CRAWFORD (A.), ALEXANDER (J.) et BODENSCHATZ (E.), « Fluid particle accelerations in fully developped turbulence », *Nature*, vol. 409, 2001, p. 1017–1019.

[LVMB00] LA PORTA (A.), VOTH (G.), MOISY (F.) et BODENSCHATZ (E.), « Using cavitation to measure statistics of low-pressure events in large-reynolds-number turbulence », *Phys. Fluids*, vol. 12, n° 6, 2000, p. 1485–1496.

[Mag96] MAGRÉ (O.), *Mouvement Brownien fractionnaire : contribution à la modélisation, à la synthèse et à l'analyse*. PhD thesis, Université de Nantes, janvier 1996.

[Mai85] MAITRE (H.), « Un panorama de la transformation de Hough », *Traitement du signal*, vol. 2, n° 4, 1985, p. 305–317.

[Man74] MANDELBROT (B.), « Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence oh high moments and dimension of the carrier », *J. Fluid Mech.*, vol. 62, 1974, p. 331–358.

[Man82] MANDELBROT (B.), *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, 1982.

[Mar86] MARINOVIC (N.), *The Wigner distribution and the ambiguity function : Generalization, enhancement, compression and some applications.* PhD thesis, City University of New York, 1986.

[Mei95] MEIRING (W.), *Estimation of heterogeneous space-time covariance.* PhD thesis, University of Washington, Seattle, 1995.

[Mey90] MEYER (Y.), *Ondelettes et opérateurs.* Hermann, 1990.

[Mey01] MEYER (Y.). « Oscillating patterns in image processing and in some nonlinear evolution equations ». The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lecture, mai 2001.

[MFP01] M.BRAZA, FAGHANI (D.) et PERSILLON (H.), « Successive stages and the role of natural vortex dislocation in three-dimensional wake transition », *J. Fluid Mech.*, vol. 439, 2001, p. 1–41.

[MH97] MECKLENBRÄUKER (W.) et HLAWATSCH (F.), éditeurs, *The Wigner Distribution – Theory and Applications in Signal Processing.* Elsevier, Amsterdam (The Netherlands), 1997.

[MJWT00] MOISY (F.), JIḾENEZ (J.), WILLAIME (H.) et TABELING (P.), « Organisation des structures intenses en turbulence », *Rencontres du non-linéaire 2000*, 2000.

[MKO94] MOFFATT (H.), KIDA (S.) et OHKITANI (K.), « Stretched vortices – the sinews of turbulence ; large-Reynolds-number asymptotics », *J. Fluid Mech.*, vol. 259, 1994, p. 241–264.

[ML96] MAX (J.) et LACOUME (J.), *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, tome 1.* Masson, Paris, 1996.

[ML00] MEUNIER (P.) et LEWEKE (T.), « Unstable vortex merger », *Phys. Fluids*, vol. 12, n° 9, 2000, p. S6.

[ML01] MEUNIER (P.) et LEWEKE (T.), « Three-dimensional instability during vortex merging », *Phys. Fluids*, vol. 13, n° 10, 2001, p. 2747–2750.

[MMMP01] MORDANT (N.), METZ (P.), MICHEL (O.) et PINTON (J.), « Scaling and intermittency of Lagrangian velocity in fully developped turbulence », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, 2001, p. 21–24.

[Mof84] MOFFATT (H.), « Simple topological aspects of turbulent velocity dynamics », dans TATSUMI (T.), éditeur, *Turbulence and chaotic phenomena in fluids*, p. 223–230. Elsevier, 1984.

[Mof93] MOFFATT (H.), « Spiral structures in turbulent flows », dans FARGE (M.), HUNT (J.) et VASSILICOS (J.), éditeurs, *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*, p. 317–324. Oxford : Clarendon Press, 1993.

[Mor01] MORDANT (N.), *Mesure lagrangienne en turbulence : mise en œuvre et analyse.* PhD thesis, École normale supérieure de Lyon, 2001.

[MPSBB98] MURRAY (R.), PAPANDREOU-SUPPAPPOLA (A.) et BOUDREAUX-BARTELS (F.), « New higher order affine time-frequency representations », dans *IEEE-SP Int. Sympos. Time-Frequency Time-Scale Analysis*, p. 325–328, 1998.

[MV68] Mandelbrot (B.) et Van Ness (J. W.), « Fractional Brownian motions, fractional Brownian noises and applications », *SIAM review*, vol. 10, 1968, p. 422–437.

[MV96] Malik (N.) et Vassilicos (J.), « Eulerian and Lagrangian scalnig properties of randomly advected vortex tubes », *J. Fluid Mech.*, vol. 326, 1996, p. 417–436.

[MV99] Malik (N.) et Vassilicos (J.), « A Lagrangian model for turbulent dispersion with turbulent-like flow structure : Comparsion with direct numerical simulation for two-particle statistics », *Phys. Fluids*, vol. 11, nº 6, 1999, p. 1572–1580.

[MWAT00] Moisy (F.), Willaime (H.), Andersen (J.) et Tabeling (P.), « Passive scalar intermittency : Statistics of the cliffs », dans Dopaso (C.), éditeur, *Advances in Turbulence VIII*, p. 835–838. CIMNE, 2000.

[MX97] Meyer (Y.) et Xu (H.), « Wavelet analysis and chirps », *Appl. Comp. Harm. Anal.*, vol. 4, 1997, p. 366–379.

[MY71] Monin (A.) et Yaglom (A.), *Statistical fluid mechanics (vol. 1 and 2).* The MIT Press, 1971.

[NG99] Noret (E.) et Guglielmi (M.), « Modélisation et synthèse d'une classe de signaux auto-similaires et à mémoire longue », dans *Proc. Conf. Delft (NL) : Fractals in Engineering*, p. 301–315. INRIA, 1999.

[Nic02] Nicolas (J.). « Introduction aux statistiques de deuxième espèce : Applications aux lois d'images SAR ». Rapport interne, ENST, Paris, février 2002.

[Nor99] Noret (E.), *Contribution à l'étude de signaux auto-similaires et à mémoire longue au moyen de systèmes linéaires non-stationnaires.* PhD thesis, Université de Nantes, decembre 1999.

[Not89] Nottale (L.), « Fractals and the theory of quantum space-time », *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 4, nº 19, 1989, p. 5047–5117.

[Not92] Nottale (L.), « The theory of scale relativity », *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 7, nº 20, 1992, p. 4899–4936.

[Not93] Nottale (L.), *Fractal space-time and microphysics : Towards a theory of scale relativity.* World Scientific, Singapore, 1993.

[Not96] Nottale (L.), « Scale relativity and fractal space-time : Applications top quatum physics, cosmology and chaotic systems », *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 7, nº 6, 1996, p. 877–936.

[Not98] Nottale (L.), *La relativité dans tous ses états.* Hachette, 1998.

[Not02] Nottale (L.), « Relativité d'échelle, non-différentiabilité et espace-temps fractal », dans Abry (P.), Gonçalves (P.) et Lévy Vehel (J.), éditeurs, *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, vol. 2, p. 233–265. Hermès, mars 2002.

[Nov71] Novikov (E.), « Intermittency and scale-similarity in the structure of a turbulent flow », *P.M.M. Appl. Math. Mech.*, vol. 45, 1971, p. 231–241.

[NP99] Nuzman (C.) et Poor (V.), « Transformed spectral analysis of self-similar processes », dans *Proc. CISS'99*, mai 1999.

[NP00a] Nuzman (C.) et Poor (V.), « Linear estimation of self-similar processes via Lamperti's transformation », *J. of Applied Probability*, vol. 37, n° 2, juin 2000, p. 429–452.

[NP00b] Nuzman (C.) et Poor (V.), « On the linear structure of self-similar processes », dans *Proc. Int. Symp. on IT*, juin 2000.

[NP00c] Nuzman (C.) et Poor (V.). « Reproducing kernel Hilbert space methods for self-similar processes ». Article soumis, 2000.

[NV98] Nicolleau (F.) et Vassilicos (J. C.), « Wavelets for the study of intermittency and its topology », *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1998.

[Obu62] Obukhov (A.), « Some specific features of atmospheric turbulence », *J. Fluid Mech.*, vol. 13, 1962, p. 77–81.

[Ons49] Onsager (L.), « Statistical hydrodynamics », *Nuovo Cimento (Suppl. Ser. IX)*, vol. 6, n° 2, 1949, p. 279–287.

[OSGC96] Ouillon (G.), Sornette (D.), Genter (A.) et Castaing (C.), « The imaginary part of rock jointing », *J. Phys. I France*, vol. 6, août 1996, p. 1127–1139.

[OTT93] Orlandini (E.), Tesi (M. C.) et Turchetti (G.), « Corrections to the scaling laws of integrated wavelets from singularities of Mellin transforms », *Europhys. Lett.*, vol. 21, n° 7, mars 1993, p. 719–722.

[Ova92] Ovarlez (J.), *La transformation de Mellin : un outil pour l'analyse des signaux à large-bande.* PhD thesis, Université Paris 6, 1992.

[OWY83] Oppenheim (A.), Willsky (A.) et Young (I.), *Signals and systems.* Prentice-Halll, 1983.

[Pag78] Pagano (M.), « On periodic and multiple autoregressions », *The Annals of Stat.*, vol. 6, n° 6, 1978, p. 1310–1317.

[Pap84] Papoulis (A.), *Probability, random variables, and stochastic processes, 2nd ed.* McGraw-Hill, 1984.

[PBS94] Pullin (D.), Buntine (D.) et Saffman (P.), « On the spectrum of a stretched spiral vortex », *Phys. Fluids*, vol. 6, n° 9, 1994, p. 3010–3027.

[Per97] Perrin (O.), *Modeling covariance of a non-stationary process by space deformation and statistics.* PhD thesis, University of Paris I, 1997.

[PHBB92] Papandreou (A.), Hlawatsch (F.) et Boudreaux-Bartels (G.), « A unified framework for the Bertrand distribution and the Altes distribution : the new hyperbolic class of quadratic time-frequency distributions », dans *IEEE-SP Int. Sympos. Time-Frequency Time-Scale Analysis*, p. 27–30, Victoria (BC), Canada, 1992.

[PHBB93] Papandreou (A.), Hlawatsch (F.) et Boudreaux-Bartels (G. F.), « The hyperbolic class of quadratic time-frequency representations—Part I : Constant-Q warping, the hyperbolic paradigm, properties, and members », *IEEE Trans. Signal Processing, Special Issue on Wavelets and Signal Processing*, vol. 41, n° 12, Dec. 1993, p. 3425–3444.

[PHBJ+01] Perrin (E.), Harba (R.), Berzin-Jospeh (C.), Iribarren (I.) et Bonami (A.), « $n$th-order fractional Brownian motion and fractional Gaussian noises », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 49, n° 5, mai 2001, p. 1049–1059.

[PHJI01] Perrin (E.), Harba (R.), Jennane (R.) et Iribarren (I.), « Synthèse exacte et efficace du mouvement brownien fractionnaire 1d », dans *Colloque GRETSI-01*, Toulouse, 2001.

[Pic74] Picinbono (B.), « Properties and applications of stochastic processes with stationary $n$th-order increments », *Adv. Appl. Prob.*, vol. 6, 1974, p. 512–523.

[Pic97] Picinbono (B.), « On instantaneous amplitude and phase of signals », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 45, n° 3, mars 1997, p. 552–560.

[PL95] Peltier (R.) et Lévy Véhel (J.). « Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results ». Inria research report No. 2645, 1995.

[PM99] Perrin (O.) et Meiring (W.), « Identifiability for non-stationary spatial structures », *J. of Appl. Prob.*, vol. 36, n° 4, 1999, p. 1244–1250.

[Poc97] Pocheau (A.), « From scale-invariance to scale-covariance in out-of-equilibrium systems », dans Dubrulle (B.), Graner (F.) et Sornette (D.), éditeurs, *Scale Invariance and Beyond*, p. 209–223. Springer, 1997.

[Pri81] Priestley (M.), *Spectral analysis and times series*. Academic Press, San Diego, 1981.

[Pri88] Priestley (M.), *Non-linear and non-stationary time series analysis*. Academic Press, San Diego, 1988.

[PRWK98] Petitjeans (P.), Robres (J.), Wesfreid (J.) et Kevlahan (N.), « Experimental evidence for a new type of stretched vortex », *Eur. J. Mech. B/Fluids*, vol. 17, n° 4, 1998, p. 549–560.

[PS93] Pullin (D.) et Saffman (P.), « On the Lundgren-Townsend model of turbulent fine-scale », *Phys. Fluids A*, vol. 5, n° 1, 1993, p. 126–145.

[PS94] Pullin (D.) et Saffman (P.), « Reynolds stresses and one-dimensional spectre for a vortex model of homogeneous anisotropic turbulence », *Phys. Fluids*, vol. 6, n° 5, 1994, p. 1787–1796.

[PS98] Pullin (D.) et Saffman (P.), « Vortex dynamics in turbulence », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 30, 1998, p. 31–51.

[PS99] Perrin (O.) et Senoussi (R.), « Reducing non-stationary stochastic processes to stationarity by a time deformation », *Statistics & Probability Letters*, vol. 43, 1999, p. 393–397.

[PS00] Perrin (O.) et Senoussi (R.), « Reducing non-stationary random fields to stationarity and isotropy using a space deformation », *Statistics & Probability Letters*, vol. 48, 2000, p. 23–32.

[Pul95] Pullin (D.), « Pressure spectra for vortex models of fine-scale homogeneous turbulence », *Phys. Fluids*, vol. 7, n° 4, 1995, p. 849–856.

[Pul00] Pullin (D.), « A vortex-based model for the subgrid flux of a passive scalar », *Phys. Fluids*, vol. 12, n° 9, 2000, p. 2311–2319.

[PV00] Pedrizzetti (G.) et Vassilicos (J.), « Interscale transfer in two-dimensional cpact vortices », *J. fluid Mech.*, vol. 406, 2000, p. 109–120.

[PW00] Park (K.) et Willinger (W.), éditeurs. *Self-similar network traffic and performance evaluation.* Wiley, 2000.

[QC99] Queiros-Condé (D.), « Géométrie de l'intermittence en turbulence développée », *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II b*, vol. 327, 1999, p. 1385–1390.

[RBL91] Roberts (R.), Brown (W.) et Loomis (H.), « Computationally efficient algorithms for cyclic spectral analysis », *IEEE SP Magazine*, avril 1991, p. 38–49.

[RF92] Rioul (O.) et Flandrin (P.), « Time-scale energy distributions : a general class extending wavelet transform », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. SP-40, n° 7, juillet 1992, p. 1746–1757.

[Rou96] Roux (S.), *Wavelet analysis of the self-similarity of signals in fully developped turbulence.* PhD thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, 1996.

[Say97] Sayeed (A.), « On the equivalence of the operator and kernel methods for joint distributions of arbitrary variables », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, n° 4, avril 1997, p. 1067–1070.

[Sch65] Schwartz (L.), *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann, Paris, 1965.

[Seg95] Segel (D.), « The higher moments in the Lundgren model conform with kolmogorov scaling », *Phys. Fluids*, vol. 7, n° 12, 1995, p. 3072–3077.

[SFS86] Smith (L. A.), Fournier (J.-D.) et Spiegel (E. A.), « Lacunarity and intermittency in fluid turbulence », *Phys. Lett.*, vol. 114A, n° 8–9, mars 1986, p. 465–468.

[SG92] Sampson (P.) et Guttorp (P.), « Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structure », *J. of Am. Stat. Association*, vol. 87, 1992, p. 108–119.

[SI02] Sornette (D.) et Ide (K.), « Theory of self-similar oscillatory finite-time singularities in finance, population and rupture », *Phys. Rev. Lett.*, 2002. Submitted.

[Sil57] Silverman (R.), « Locally stationary random processes », *IRE Trans. on Information Theory*, vol. 3, 1957, p. 182–187.

[SJ01] Sornette (D.) et Johansen (A.), « Significance of log-periodic precursors to financial crashes », *Quantitative Finance*, vol. 1, n° 4, 2001, p. 452–471.

[SJA+96] Sornette (D.), Johansen (A.), Arneodo (A.), Muzy (J.) et Saleur (H.), « Complex fractal dimensions describe the hierarchical structure of diffusion-limited-aggregate clusters », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, n° 2, janvier 1996, p. 251–254.

[SJO90] She (Z.-S.), Jackson (E.) et Orszag (S.), « Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence », *Nature*, vol. 344, 1990, p. 226–228.

[SL87] Schertzer (D.) et Lovejoy (S.), *J. Geophys, Res.*, vol. 92, 1987, p. 9693.

[SL94] She (Z.-S.) et Lévêque (E.), « Universal scaling laws in fully developed turbulence », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, n° 3, 1994, p. 336–339.

[Sor97] Sornette (D.), « Discrete scale invariance », dans Dubrulle (B.), Graner (F.) et Sornette (D.), éditeurs, *Scale Invariance and Beyond*, p. 235–247. Springer, 1997.

[Sor98a] Sornette (D.), « Discrete scale invariance and complex dimensions », *Physics Reports*, vol. 297, 1998, p. 239–270.

[Sor98b] Sornette (D.), « Discrete scale invariance in turbulence ? », dans Frisch (U.), éditeur, *Advances in Turbulence VII*, p. 251–254. Kluwer Academic, 1998.

[Sor00] Sornette (D.), *Critical phenomena in Natural Sciences*. Springer, 2000.

[SP94] Saffman (P.) et Pullin (D.), « Anisotropy of the Lundgren-Townsend model of fine-scale turbulence », *Phys. Fluids*, vol. 6, n° 2, 1994, p. 802–807.

[SP96] Saffman (P.) et Pullin (D.), « Calculation of velocity structure fonctions for vortex models of isotropic turbulence », *Phys. Fluids*, vol. 8, n° 11, 1996, p. 3072–3077.

[Sre91] Sreenivasan (K.), « Fractals and multifractals in fluid turbulence », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 23, 1991, p. 539–600.

[SS95] Sornette (D.) et Sammis (C.), « Complex critical exponents from renormalization group theory of earthquakes : Implications for earthquakes predictions », *J. Phys. I France*, vol. 5, n° 5, mai 1995, p. 607–619.

[SS96] Saleur (H.) et Sornette (D.), « Complex exponents and log-periodic corrections in frustrated systems », *J. Phys. I France*, vol. 6, 1996, p. 327–355.

[SS98] Stauffer (D.) et Sornette (D.), « Log-periodic oscillations for biased diffusion on 3d random lattice », *Physica A*, vol. 252, avril 1998, p. 271–277.

[SSS96] Saleur (H.), Sammis (C.) et Sornette (D.), « Discrete scale invariance, complex fractal dimensions and log-periodic corrections in earthquakes », *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*, vol. 101, 1996, p. 17661–17677.

[ST94] Samorodnitsky (G.) et Taqqu (M.), *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman&Hall, 1994.

[ST97] Solis (F. J.) et Tao (L.). « Lacunarity of random fractals ». Preprint arXiv :cond-mat/9703051, mars 1997. Subm. to Elsevier Preprint.

[Tay35] Taylor (G.), « Statistical theory of turbulence. parts 1-4 », *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 151, 1935, p. 421.

[Ten68] Tennekes (H.), « Simple model for the small-scale structure of turbulence », *Phys. Fluids*, vol. 11, n° 3, 1968, p. 669–671.

[TH98] Twaroch (T.) et Hlawatsch (F.), « Modulation and warping operators in joint signal analysis », dans *Proc. IEEE-SP Int. Sympos. Time-Frequency Time-Scale Analysis*, p. 9–12, Pittsburgh, PA, Oct. 1998.

[TJ90] Tewari (S.) et Jaluria (Y.), « Calibration of constant-temperature hot-wire anenometers for very low velocities in air », *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 61, n° 12, decembre 1990, p. 3834–3845.

[Tow51] TOWNSEND (A.), « On the fine-scale structure of turbulence », *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, vol. 208, 1951, p. 534–542.

[Tri93] TRICOT (C.), *Courbes et dimension fractale.* Springer-Verlag, 1993.

[Tsi98] TSINOBER (A.), « Is concentrated vorticity that important ? », *European J. of Mech. B/Fluids*, vol. 17, n° 4, 1998, p. 421–449.

[Twa99] TWAROCH (T.), *Signal Representations and Group Theory.* PhD thesis, TU Wien, 1999.

[Vai91] VAIENTI (S.), « A Frostman-like theorem for the wavelet transform on fractal sets », *Nonlinearity*, vol. 4, 1991, p. 1241.

[Van01] VANDAMME (L.), « Noise in materials », dans PU (M.), HONGLER (M.-O.), LIEDERMANN (J.-P.), LOUDE (J.-F.) et DROZ (M.), éditeurs, *Fluctuations et bruit*, p. 67–96. Frontier Group, 2001.

[Vas92] VASSILICOS (J.), « The multispiral model of turbulence and intermittency », dans MOFFAT (H.), éditeur, *Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas*, p. 427–442. Kluwer, 1992.

[Vas93] VASSILICOS (J.), « Fractals in turbulence », dans FARGE (M.), HUNT (J.) et VASSILICOS (J.), éditeurs, *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*, p. 325–340. Oxford : Clarendon Press, 1993.

[Vas97] VASSILICOS (J.), « Anomalous diffusion of isoled flow singularities and of fractal or spiral structures », *Phys. Rev. E*, vol. 52, n° 6, 1997, p. R5753–R5756.

[VB96] VASSILICOS (J.) et BRASSEUR (J.), « Self-similar spiral flow structure in low Reynolds number isotropic and decaying turbulence », *Phys. Rev. E*, vol. 54, n° 1, 1996, p. 467–485.

[Ver87] VERVAAT (W.), « Properties of general self-similar processes », *Bull. of International Statistical Inst.*, vol. 52, 1987, p. 199–216.

[VH91] VASSILICOS (J.) et HUNT (J.), « Fractal dimensions and spectra of interfaces with application to turbulence », *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 435, 1991, p. 505–534.

[Vil69] VILENKIN (N.), *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes.* Dunod, Paris, 1969.

[VM91] VINCENT (A.) et MENEGUZZI (M.), « The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence », *J. Fluid Mech.*, vol. 225, 1991, p. 1–20.

[VV99] VIDÁCS (A.) et VIRTAMO (J.), « ML estimation of the parameters of fBm traffic with geometrical sampling », dans *IFIP TC6, Int. Conf. on Broadband communications '99*. Hong-Kong, novembre 1999.

[WC94] WOOD (A.) et CHAN (G.), « Simulation of stationary process in $[01]^d$ », *J. of Computational and Graphical Stat.*, vol. 3, 1994, p. 409–432.

[Wes02] WESFREID (E.). « Coherent structures in turbulence : Phenomenology ». Cargese, Summer school in physics, mai 2002.

[Wie01] WIESENFELD (K.), « Ressource letter : Scl-1 : Scaling laws », *Am. J. Phys.*, vol. 69, n° 9, septembre 2001, p. 938–942.

[Wil96] WILLIAMSON (C.), « Vortex dynamics in the cylider wake », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 28, 1996, p. 477–539.

[Wor96] WORNELL (G.), *Signal processing with fractals : a wavelet-based approach.* Prentice Hall, 1996.

[WV01] WONHAS (A.) et VASSILICOS (J.), « Mixing in frozen and time-periodic two-dimensional vortical flows », *J. Fluid Mech.*, vol. 442, 2001, p. 359–385.

[WV02] WONHAS (A.) et VASSILICOS (J.), « Diffusivity dependence of ozone depletion over the midnorthern latitudes », *Phys. Rev. E*, vol. 65, 2002, p. 051111.

[Yag87] YAGLOM (A.), *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions.* Springer-Verlag, 1987.

[YK97] YAZICI (B.) et KASHYAP (R. L.), « A class of second-order stationary self-similar processes for $1/f$ phenomena », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 45, n° 2, 1997, p. 396–410.

[Zem87] ZEMANIAN (A.), *Generalized integral transforms.* Dover, 1987.

[ZR98] ZHAO (W.) et RAO (R.), « On modeling self-similar random processes in discrete-time », dans *Proc. IEEE Time-Frequency and Time-Scale*, p. 333–336, octobre 1998.

[ZS02a] ZHOU (W.-X.) et SORNETTE (D.), « Evidence of intermittent cascades from discrete hierarchical dissipation in turbulence », *Physica D*, vol. 165, 2002, p. 94–125.

[ZS02b] ZHOU (W.-X.) et SORNETTE (D.), « Generalized q-analysis of log-periodicity : applications to critical ruptures », *Phys. Rev. E*, 2002. Submitted.

# Table des matières

**Résumé.** **Modèles et outils pour les invariances d'échelle brisées :**
variations sur la transformation de Lamperti et
contributions aux modèles statistiques de vortex en turbulence

La transformation de Lamperti, connue pour mettre en correspondance les processus stationnaires et les processus auto-similaires, nous permet d'aborder de manière générale la description des propriétés en échelle de problèmes physiques ou de signaux stochastiques. La notion d'échelle pertinente est montrée être celle construite sur les décompositions de Mellin et nous utilisons l'idée de la correspondance de Lamperti pour étudier les propriétés des processus auto-similaires à l'aide des outils de l'analyse du signal stationnaire. D'autre part l'outil est généralisé aux situations non invariantes en échelle ou avec des invariances brisées, et offre une correspondance généralisée avec les problèmes d'analyse de signaux non stationnaires.

Des méthodes de représentation, de modélisation et d'analyses sont construites de cette manière, en particulier les classes de représentations mixtes temps-échelle. Nous étudions des situations spécifiques de brisure de l'invariance en échelle incorporant les effets de taille finie, ou une invariance seulement locale, et nous mettons l'accent sur la propriété d'invariance en échelles discrètes stochastique que nous introduisons comme correspondant en échelle à la cyclostationarité.

Parallèlement, la turbulence développée, dont les propriétés en échelle sont un ingrédient important, a été abordée par l'angle des modèles fondés sur des collections statistiques d'objets cohérents comme des vortex. Nous avançons quelques réflexions sur la caractérisation de la signature de ces objets structurés et avons spécifiquement examiné le modèle de vortex de Lundgren, en cherchant à le formuler à l'aide des outils en échelle de Mellin.

**Mots clefs :** invariance d'échelle, temps-fréquence, temps-échelle, transformation de Lamperti, décomposition de Mellin, invariance d'échelle discrète, turbulence, modèles de vortex, vortex de Lundgren.

**Abstract.** **Models and methods for broken scale invariance :**
Variations on the Lamperti transformation and contributions
on vortices collections for turbulence modeling.

Lamperti transformation is a known means to connect stationary processes and self-similar processes. We enlarge its use to deal in a general way with the description of scale properties in physics problems or for stochastic processes. The proper notion of scale according to this transformation is found to be based on the Mellin intregral transform and we first use it to study the general properties of self-similar processes by converting stationary results or methods. Second, we generalize the Lamperti transformation to broken scale invariance and introduce an enlarged connection for those problems with nonstationary signal processing.

We propose results on representation, modelization and analysis for complete or broken scale invariance, with a focus on mixed time-Mellin scale representations. Specific kind of broken invariance are envisaged : finite size scale invariance, local self-similarity and a major part is devoted to stochastic discrete scale invariance that we define and study as the image in the scale domain of cyclostationarity.

The scale properties are central to the problem of fluid turbulence and we study turbulence by means of the fine-structure models of turbulence based on collections of coherent structures or vortices. We propose some reflexions on the characterization of coherent structures and we specifically focus on the Lundgren strained spiral vortex model by means of the (Mellin) scale representations.

**Key-words :** scale invariance, time-frequency, time-scale, Lamperti transformation, Mellin transformation, discrete scale invariance, turbulence, Lundgren vortex, spiral vortex model.

**Thèse de physique.** Laboratoire de Physique ÉNS Lyon, 46 allée d'Italie 69007 Lyon