Traitement du signal :
TP n° 1 : variable aléatoire

Exercice 1 : Variable aléatoire

L'élément de base pour synthétiser des variables aléatoires est de disposer d'un générateur de nombre aléatoire. Dans matlab, la fonction `rand` remplit ce rôle.
Trouver une méthode pour générer une variable aléatoire (v.a.) de loi de probabilité $p(x)$ donnée (`rand` correspond à une loi uniforme dans [0, 1]).
Implémenter cette méthode pour une loi exponentielle $p(x) = \frac{1}{\mu} exp(-\frac{x}{\mu})$ de moyenne $\mu = 2$.
Comparer votre méthode avec la fonction `exprnd` de matlab.

Exercice 2 : Processus stationnaire non corrélé (bruit blanc)

Générer un ensemble de N variables aléatoires gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de variance σ^2 (bruit blanc gaussien).
Calculer la matrice de covariance du vecteur x correspondant et estimer la fonction de correlation de ce processus.
Comparer à la fonction de correlation théorique.

Exercice 3 : Génération de processus stationnaire corrélé

Soit $\{x_n\}_{n\in 1,\ldots,N}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2. Construire le processus y_n tel que

$$y_n = x_n + a y_{n-1}. \qquad (1)$$

On prendra par exemple $a = 0.8$.
Construire la matrice de covariance empirique $R_y(i,j) = \mathbb{E}\{y(i)\overline{y(j)}\} - \mathbb{E}\{y(i)\}\mathbb{E}\{\overline{y(j)}\}$ et estimer la fonction de corrélation de y (possible quand y est stationnaire).
On générera M réalisations différentes du processus y et on comparera les estimations à la forme théorique de la corrélation. Visualiser la covariance théorique et estimée.

Exercice 4 : Méthode par décomposition de Cholesky

Au lieu de partir d'un modèle temporel, on prescrit maintenant une covariance (ou une fonction de corrélation pour un processus stationnaire) donnée. La covariance d'un processus est une matrice symétrique définie non négative ; elle admet alors une décomposition de Cholesky de la forme $R = L^{\dagger}L$ où L est une matrice triangulaire supérieure.
Proposer une manière de générer un processus gaussien ayant une matrice de corrélation R imposée.

Soit w le processus stationnaire gaussien ayant pour fonction de corrélation : $r(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|^2)$. Prendre par exemple $\alpha = 0.1$ et générer des réalisation de ce processus à l'aide de la décomposition de Cholesky. Estimer la matrice de covariance et la fonction de corrélation et les comparer à ce qui a été prescrit.

Même travail pour la fonction de corrélation suivante : $r(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$. On prendra $\alpha = 0.223$.

Note : il existe des méthodes plus rapides, en particulier celle de Levinson, que vous trouverez dans votre bibliothèque préférée.

Exercice 5 : Génération de mouvement Brownien.

On rappelle que la covariance d'un mouvement Brownien est :

$$R_b(t,s) = \sigma^2 \min(t,s), \text{ si } t > 0, s > 0. \tag{2}$$

Par la méthode précédente, générer M réalisations définies sur N points $\{x_n\}_{n\in 1,\ldots,N}$ de ce processus. Interpréter le résultat de la décomposition de Cholesky.
Calculer la moyenne $m(t)$ et l'écart type $\sigma(t)$ de ce processus à tous les temps t.
Pourquoi ce processus est-il non stationnaire ?
Comment varient $m(t)$ et $\sigma(t)$?

Exercice 6 : Génération de mouvement Brownien fractionnaire.

Générer un processus aléatoire de covariance $R_{fbm}(t,s) = t^{2H} + s^{2H} + |t-s|^{2H}$, par exemple avec $H = 0.3$.
Estimer $m(t)$ et $\sigma(t)$? Comment varient-ils ?
Étudier le processus increment (appelé bruit gaussien fractionnaire). Est-il stationnaire ?
Répéter cette étude pour différentes valeurs de H entre 0 et 1.

Exercice 7 : Convolution

Convoluer un processus brownien fractionnaire d'exposant $H = .3$ avec une fenêtre rectangulaire de taille 1, 5, 10 et 20. Qu'obtient-on (moyenne, variance,...) ?
La moyenne des signaux change peut-être ; que faut-il faire pour ne pas modifier la moyenne de ces signaux ?

Convoluer maintenant le processus avec une fenêtre gaussienne d'ecart type .05 puis .1 et comparer les trois signaux.

On rappelle qu'un manière d'estimer le spectre de puissance d'un signal est de passer par son périodogramme :

$$S_x(\nu) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N} x(n) e^{-i2\pi n\nu} \right|^2 . \tag{3}$$

On utilisera la `fft` pour calculer ceci.

Concluer sur l'effet de la convolution.

Exercice 8 : Synthèse spectrale de processus gaussiens
Pour un processus stationnaire, l'information donnée par la corrélation est équivalent à celle donnée par le spectre :

$$S_x(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_x(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} dt. \tag{4}$$

Si il est gaussien, cela suffit pour définir un processus, ce qui permet d'en envisager une synthèse spectrale :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\nu t} dZ(\nu), \tag{5}$$

avec $\mathbb{E}\{dZ(\nu_1)\overline{dZ(\nu_2)}\} = S_x(\nu_1)\delta(\nu_1 - \nu_2)\, d\nu_1 d\nu_2$. Quelles sont les propriétés des incréments spectraux $dZ(\nu)$?

Proposer une façon de synthétiser les incréments spectraux $dZ(\nu)$ d'un processus de spectre $S_x(\nu)$ donné et d'en déduire une réalisation du processus gaussien ayant ce spectre. Exemple : prendre $S_x(\nu) = \dfrac{a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$.

Exercice 9 : Synthèse spectrale de processus non gaussiens
On cherche à étendre la méthode en prescrivant maintenant une loi marginale pontuelle $p(x)$ non gaussienne et une fonction de corrélation $r_x(\tau)$. Ce problème est beaucoup plus difficile et une approche en trois étapes est parfois possible.
1) Savoir transformer une loi gaussienne en la loi ponctuelle $p(x)$ souhaitée. Au cas par cas, il faut trouver une telle transformation $x = f(w)$ avec w gaussien.
2) En déduire la transformation qui agit sur la fonction de corrélation de w pour donner celle de x : $r_x(k) = \mathbb{E}\{f(w_t)f(w_{t+k})\} - \mathbb{E}\{f(w_t)\}\mathbb{E}\{f(w_{t+k})\} = F(r_w(k))$ et la fonction inverse F^{-1}.
3) Synthétiser un processus gaussien w de corrélation $F^{-1}(r_x(k))$ par une des méthodes déjà vues et lui appliquer alors la transformation ponctuelle $f(w) = x$.

1) Nous allons regarder un exemple : x sera une loi log-normale, c'est-à-dire que $w = \ln x$ suit une loi normale. La transformation est directement $x = e^w$.

2) On pose $w_{t+k} = w_t r_w(k)/\sigma_w^2 + Z(t,k)$. Montrer que w_t et $Z(t,k)$ sont décorrélés et calculer $\mathbb{E}\{Z(t,k)^2\}$. Montrer ensuite que :
$r_x(k) = \mathbb{E}\{e^{w_t(1+r_w(k)/\sigma_w^2)}\}\, \mathbb{E}\{e^{Z(t,k)}\} - (\mathbb{E}\{x_t\})^2$.
Pour une variable gaussienne Y de moyenne nulle et de variance σ^2, calculer $\mathbb{E}\{e^{nY}\}$. Conclure le calcul pour obtenir que $r_x(k) = e^{\sigma_w^2 + r_w(k)} - e^{\sigma_w^2}$ et calculer l'inverse $F^{-1}(r_x(k))$.

3) Appliquer la méthode pour un processus AR(1), avec $r_x(k) = \sigma^2 a^k$, puis pour un processus à longue mémoire : $r_x(k) = C + |k|^{-2H}$, ayant donc un spectre $S_x(\nu) \sim \nu^{2H-1}$ pour ν assez grand.

Ce dernier exercice est adapté d'un travail d'Antoine Scherrer (LIP, ENSL) avec Patrice Abry.