La Théorie des ensembles

Pierre Lescanne

4 janvier 2005 – 16 h 41

Plan

Les objectifs

Le but est de formaliser la relation d'appartenance $\in$,
c'est-à-dire de donner pour cette relation

- un **langage**,
- des **règles**
- et des **axiomes**

de façon à ce que l'on retrouve la **théorie des ensembles** dans le sens intuitif qu'on lui connaît.

Les objectifs

Le but est de formaliser la relation d'appartenance $\in$,
c'est-à-dire de donner pour cette relation

- un **langage**,
- des **règles**
- et surtout dans ce cas des **axiomes**

de façon à ce que l'on retrouve la **théorie des ensembles** dans le sens intuitif qu'on lui connaît.
Il faut *éviter les paradoxes*, qui ont perturbé les mathématiciens du début du 20ème siècle.

Le paradoxe de Richard

Le plus petit entier que l'on ne peut pas définir en moins de vingt mots.

Le paradoxe de Russell

L'ensemble $\mathcal{E}$ *des* e *tels que* $e \notin e$.

Le paradoxe de Russell

L'ensemble $\mathcal{E}$ *des* e *tels que* $e \notin e$.

En effet, a-t-on $\mathcal{E} \in \mathcal{E}$ ou $\mathcal{E} \notin \mathcal{E}$?

La métathéorie

La métathéorie est le langage des mathématiques[1] avec deux symboles de relations binaires

- L'**égalité** $=$ avec les propriétés habituelles
  que l'on suppose complètement axiomatisé
  par le calcul des prédicats du premier ordre avec égalité[2].
- L'**appartenance** $\in$ que l'on va axiomatiser.

[1] Plus précisément le calcul des prédicats avec égalités

[2] En particulier, si $a = b$ est prouvable si et seulement si $a = b$ est valide dans $\mathcal{U}$.

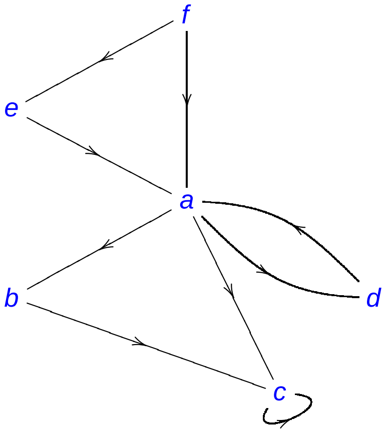
L'univers

On considère la relation $\in$ dans un ensemble $\mathcal{U}$.
Une question sera de savoir si deux éléments qui appartiennent à $\mathcal{U}$ sont reliés par $\in$.

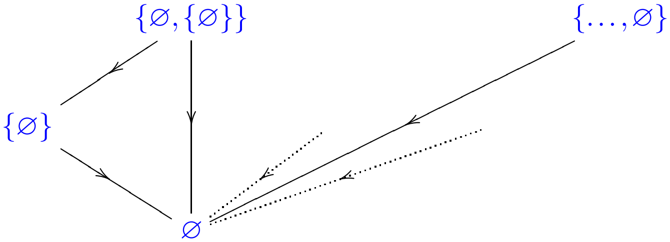
L'univers

On considère la relation $\in$ dans un ensemble $\mathcal{U}$.
Une question sera de savoir si deux éléments qui appartiennent à $\mathcal{U}$ sont reliés par $\in$.
Des questions possibles,

- Étant donné $a \in \mathcal{U}$ et $b \in \mathcal{U}$, a-t-on $a \in b$?
- Étant donné $a \in \mathcal{U}$ et $b \in \mathcal{U}$, a-t-on $a \notin b$?
- Existe-t-il $a \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $b \in \mathcal{U}$ on ait $a \in b$?



Un graphe d'appartenance possible.



Un graphe typique d’appartenance.

Quantificateurs, variables libres et variables liées

Les formules ou énoncés utilisent des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
Si une variable x apparaît dans une expression $\forall x A(x)$ (ou $\exists x A(x)$) on dit qu'elle est **liée**.
Si une variable x apparaît dans une expression $A(x)$ sans être liée on dit qu'elle est **libre**.
Si y variable n'apparaît pas libre dans $A(x)$, alors $\forall x A(x)$ et $\forall y A'(y)$ (où $A'(y)$ est obtenu en remplaçant toutes les occurrence de x par y) sont équivalentes.

La théorie et la métathéorie 1 / 2

Il y a deux notions d'ensembles,

- $\mathcal{U}$ et ses sous-ensembles, si un élément a de $\mathcal{U}$ appartient à un des sous-ensembles $\mathcal{V}$ on le note ainsi, $a \in \mathcal{V}$.
- les éléments de $\mathcal{U}$ reliés par la relation $\in$, notée ainsi.

  Exemple

  Pour $a \in \mathcal{U}$ et $b \in \mathcal{U}$, on peut avoir $a \in b$.

La théorie et la métathéorie 2 / 2

Pour les daltoniens, on a des conventions de vocabulaire.

- $\mathcal{U}$ et ses sous-ensembles sont appelés des **«collections»**,
- et la relation $\in$ se dit **«est dans»**.

- Les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés des **«ensembles»**,
- la relation $\in$ se dit **«appartient à»**.

Plan

L'axiome d'extensionnalité

Axiome (d'extensionnalité)

Il n'existe pas dans $\mathcal{U}$ deux ensembles distincts qui ont les mêmes éléments.

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y]$$

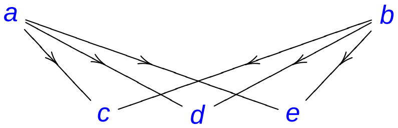
L'axiome d'extensionnalité

Axiome (d'extensionnalité)

Il n'existe pas dans $\mathcal{U}$ deux ensembles distincts qui ont les mêmes éléments.

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y]$$

On s'interdit le schéma suivant



L'axiome de la paire 1 / 2

Axiome (de la paire)

Étant donnés deux ensembles a et b, il existe un ensemble c qui contient a et b et eux seulement.

Axiome (de la paire)

Étant donnés deux ensembles a et b, il existe un ensemble c qui contient a et b et eux seulement.

Cet ensemble c est unique d'après l'axiome d'extensionnalité.
L'axiome de la paire est conséquence d'axiomes ultérieurs, mais il est commode de l'énoncer.

$$\forall x \forall y \exists z \forall t [t \in z \Leftrightarrow (t = x \vee t = y)].$$

L'ensemble c dont les seuls éléments sont a et b est noté $\{a, b\}$.

L'axiome de la paire 2 / 2

L'axiome de la paire impose qu'il existe un seul ensemble dont le seul élément est a.

Si $a \neq b$ l'ensemble $\{a, b\}$ est appelé une **paire**.

Si $a = b$ l'ensemble $\{a, b\}$ est appelé un **singleton**, on le note $\{a\}$.

L'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ est appelé un **couple**, on le note plutôt (a, b).

Les uples 1 / 2

Proposition

Si $(a,b) = (a',b')$ *alors* $a = a'$ *et* $b = b'$.

Démonstration.

Si $a = b$ alors (a,b) n'a qu'un élément, donc (a',b'), n'a qu'un élément, donc $a' = b'$. $(a,b) = (a',b')$ signifie $\{\{a\}\} = \{\{a'\}\}$.
Si $a \neq b$ alors alors (a,b) a deux éléments, donc (a',b'), a deux éléments,

comme $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\}$,

- les singletons sont égaux (soit $\{a\} = \{a'\}$)
- et les paires sont égales $\{a,b\} = \{a',b'\}$ (soit $b = b'$, puisqu'on sait déjà que $a = a'$). □

Les uples 2 / 2

Définition

Un **triplet** (a,b,c) est l'ensemble $(a,(b,c))$.

Définition

Un **quadruplet** (a,b,c,d) est l'ensemble $(a,(b,c,d))$.

Définition

Un ***n*-uplet** $(a_1,\ldots,a_n)$ est défini par récurrence comme l'ensemble $(a_1,(a_2,\ldots,a_n))$.

Proposition

Si $(a,b,c)=(a',b',c')$ *alors* $a=a'$, $b=b'$ *et* $c=c'$.

Proposition

Si $(a_1,\ldots,a_n)=(a'_1,\ldots,a'_n)$ *alors* $a_1=a'_1$, …, $a_n=a'_n$.

Axiome (de la réunion)

Étant donné un ensemble x, il existe un ensemble dont les éléments sont les éléments des éléments x.

$$\forall x \exists u \forall z [\exists y (z \in y \wedge y \in x) \Leftrightarrow z \in u].$$

Axiome (de la réunion)

Étant donné un ensemble x, il existe un ensemble dont les éléments sont les éléments des éléments x.

$$\forall x \exists u \forall z [\exists y (z \in y \wedge y \in x) \Leftrightarrow z \in u].$$

Cet ensemble est unique, on l'appelle la **réunion** des éléments de x et on le note :

$$\cup x \quad \text{ou} \quad \bigcup_{y \in x} y.$$

L'axiome de la somme ou de la réunion 2 / 3

La réunion des éléments de $\{a, b\}$ s'appelle la **réunion de a et de b**

on la note $a \cup b$.

Si a, b et c sont trois ensembles, il existe un ensemble dont les éléments sont a, b et c et eux seulement.

C'est la réunion des éléments de $\{\{a, b\}, \{c\}\}$.

Par extensionnalité, $\{a, b\} \cup \{c\}$ est unique et égale à $\{a\} \cup \{b, c\}$ et à $\{a, c\} \cup \{b\}$,

- on le note $\{a, b, c\}$
- et on l'appelle parfois un **trio**.

L'axiome de la somme ou de la réunion 3 / 3

En général, si on a un nombre fini d'ensembles a_1,. . ., a_n,
il existe un ensemble et un seul noté $\{a_1, \ldots, a_n\}$
qui a comme éléments $a_1, \ldots, a_n$ et eux seulement.

L'axiome de l'ensemble des parties

L'énoncé $\forall x\,(x \in a \Rightarrow x \in b)$ se note $a \subseteq b$
et se lit «a **est contenu dans** b».

Axiome (de l'ensemble des parties)

Pour tout ensemble x il existe un ensemble y dont les éléments sont les ensembles qui sont contenus dans x.

$$\forall x \exists y \forall z\,[z \subseteq x \Leftrightarrow z \in y].$$

Il n'y a qu'un seul ensemble qui a cette propriété, on le note $\mathcal{P}(x)$.

Définir des relations 1 / 3

Comment peut-on définir des relations entre les éléments de $\mathcal{U}$?
On a déjà deux relations de base $\in$ et $=$.
Si on a défini une relation $n+1$-aire $R(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ et si a est un objet de $\mathcal{U}$,

on a une relation n-aire $R(x_1,\ldots,x_n,a)$ qui est satisfaite par les objets b_1, …, b_n si est seulement si $R(b_1,\ldots,b_n,a)$ est satisfaite.

Si on a défini une relation $n+1$-aire $R(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$,

on a une relation n-aire $R(x_1,\ldots,x_n,x_n)$ qui est satisfaite par les objets b_1, …, b_n si est seulement si $R(b_1,\ldots,b_n,b_n)$ est satisfaite.

Définir des relations 2 / 3

Si on a défini une relation n-aire $R(x_1, \ldots, x_n)$, alors on définit la relation $\neg R(x_1, \ldots, x_n)$, qui est satisfaite par les objets b_1, . . ., b_n si et seulement si $R(b_1, \ldots, b_n)$ n'est pas satisfaite.

Si on a défini des relations l'une m-aire $R(x_1, \ldots, x_m)$ et l'autre n-aire $S(y_1, \ldots, y_n)$, alors on définit la relation $R(x_1, \ldots, x_m) \vee S(y_1, \ldots, y_n)$ qui est satisfaite par les objets a_1, . . ., a_m et b_1, . . ., b_n si et seulement si $R(a_1, \ldots, a_m)$ ou $S(b_1, \ldots, b_n)$ satisfaite.

Définir des relations 3 / 3

Si on a défini une relation $n+1$-aire $R(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$,

on a une relation n-aire $\exists y R(x_1, \ldots, x_n, y)$

qui est satisfaite par les objets b_1, . . ., b_n

si est seulement si

il existe un objet a tel que $R(b_1, \ldots, b_n, a)$ soit satisfaite.

Une relation $R(x)$ à un argument est appelée une **collection**.

Énoncés

Les relations qui sont construites à partir des deux relations binaires $\in$ et $=$ au moyen des règles ci-dessus sont ce qu'on appelle des **énoncés**.

Ils sont constitués

- à la base par les symboles $\in$, $=$, $\neg$ $\vee$, $\exists$, des variables, et des objets de l'univers,
- associés entre eux pour fabriquer des énoncés composés par les règles que l'on vient de définir.

Les objets de l'univers qui interviennent dans un énoncé sont appelés ses **paramètres**.

Relations fonctionnelles

Une relation $n+1$-aire $R(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ est une **relation fonctionnelle à n arguments** si on a

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \forall y' [R(x_1,\ldots,x_n,y) \wedge R(x_1,\ldots,x_n,y') \Rightarrow y = y'].$$

La relation $\exists y R(x_1,\ldots,x_n,y)$ est appelée le **domaine** de la relation fonctionnelle R.
La relation $\exists x_1 \ldots \exists x_n R(x_1,\ldots,x_n,y)$ est appelée l'**image** de la relation fonctionnelle R.

Schéma d'axiome de substitution ou de remplacement 1 / 2

Axiomes (de substitution)

Soit $E(x, y, a_1, \ldots, a_k)$ un énoncé dont les paramètres sont $a_1, \ldots, a_k$ qui définit une relation fonctionnelle f à un argument ; soit a un ensemble quelconque.

Il existe un ensemble b dont les éléments sont exactement les images par f des éléments de a qui se trouvent dans le domaine de f.

Schéma d'axiome de substitution ou de remplacement 2 / 2

Le **schéma de substitution** consiste en la liste infinie des énoncés suivants :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \Big(\forall x \forall y \forall y' ((E(x,y,x_1,\ldots,x_k) \wedge E(x,y',x_1,\ldots,x_k) \Rightarrow y = y') \\ \Rightarrow \\ \forall t \exists u \forall y [y \in u \Leftrightarrow \exists x (x \in t \wedge E(x,y,x_1,\ldots,x_k))])\Big)$$

où $E(x,y,x_1,\ldots,x_k)$ est n'importe quel énoncé sans paramètre qui a au moins deux variables libres x et y.

Schéma de compréhension 1 / 2

Axiomes (de compréhension)

Soient a un ensemble et $A(x, a_1, \ldots, a_n)$ un énoncé à une variable libre dont les paramètres sont a_1,. . ., a_n ;
alors il existe un ensemble b dont les éléments sont ceux de a qui satisfont l'énoncé A.

Le **schéma de compréhension** consiste donc en une liste infinie d'énoncés :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \ \forall x \exists y \forall z \left[z \in y \Leftrightarrow \left(z \in x \wedge A(z, x_1, \ldots, x_k) \right) \right]$$

dans laquelle $A(x, x_1, \ldots, x_n)$ est n'importe quel énoncé sans paramètres qui a au moins une variable libre x.

Schéma de compréhension 2 / 2

Le schéma de compréhension est un cas particulier du schéma de substitution dans le cas où $E(x,y,x_1,\ldots,x_k)$ est «$y = x \wedge A(x,x_1,\ldots,x_k)$» qui définit bien une relation fonctionnelle à un argument dont le domaine est la collection $A(x,x_1,\ldots,x_k)$.
D'après le schéma de substitution il existe bien un ensemble b formé des éléments de a qui sont dans la collection $A(x,x_1,\ldots,x_k)$.
On utilise la notation $\{x \in a \mid A(x,a_1,\ldots,a_k)\}$ pour représenter l'ensemble b.

L'existence de l'ensemble vide

Proposition

Il existe un ensemble et un seul qui n'a aucun élément.

Démonstration.

Soit a un ensemble quelconque. On applique le schéma de compréhension à a et à l'énoncé «$x \neq x$».

L'unicité est une conséquence de l'axiome d'extensionnalité. $\square$

L'ensemble qui n'a aucun élément est appelé l'**ensemble vide** et on le note $\varnothing$.

L'axiome de la paire comme conséquence

Exercice

Montrer que l'axiome de la paire est une conséquence du schéma de compréhension.

L'axiome de la paire comme conséquence

Exercice

Montrer que l'axiome de la paire est une conséquence du schéma de compréhension.

Indications:

Construire une paire «de référence» et une relation fonctionnelle injective de cette paire vers deux éléments a et b.

Les naturels

On peut représenter les naturels dans les ensembles[3].

$$\begin{array}{rcl} 0 & \triangleq & \varnothing \\ 1 & \triangleq & \{\varnothing\} \\ 2 & \triangleq & \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\ & \vdots & \\ n+1 & \triangleq & n \cup \{n\} \end{array}$$

[3] $\triangleq$ est le symbole «est égal par définition à»

L'axiome de l'infini

Axiome (de l'infini)

La collection des naturels correspond à un ensemble.

Les axiomes de Zermelo Fraenkel

- L’axiome d’extensionnalité,
- l’axiome de la somme ou axiome de la réunion,
- l’axiome de l’ensemble des parties,
- l’axiome de l’infini
- et le schéma d’axiomes de substitution

forment la **théorie des ensembles de Zermelo-Frænkel**, en abrégé ZF.

Collections et ensembles 1 / 3

Une collection correspond à un ensemble si il existe un ensemble a tel que

$$\forall x \left[x \in a \Leftrightarrow A(x) \right]$$

Collections et ensembles 2 / 3

Il y a des collections qui ne correspondent à aucun ensemble.

Exemple

La collection $x \notin x$.

En effet s'il existait a tel que $\forall x [x \in a \Leftrightarrow x \notin x]$ alors en particulier $a \in a \Leftrightarrow a \notin a$

Collections et ensembles 3 / 3

La collection $x = x$ (c'est-à-dire l'univers $\mathcal{U}$) ne correspond pas non plus à un ensemble.
S'il existait, un ensemble a tel que $\forall x (x \in a)$, d'après le schéma de compréhension, il existerait un ensemble b tel que

$$\forall x (x \in b \Leftrightarrow x \in a \wedge x \notin x)$$

et donc $\forall x [x \in b \Leftrightarrow x \notin x]$ autrement dit $x \notin x$ correspondrait à un ensemble.

Plan

Produit de deux ensembles

Soit a et b deux ensembles

et X la collection des couples (x, y) tels que $x \in a$ et $x \in b$.

Exercice

Donner la définition formelle complète de cette collection.

D'après le schéma de compréhension, la collection X est un ensemble car elle équivaut à $X(z) \wedge z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$.

Cet ensemble est le **produit** de a et b et est noté $a \times b$.

Application d'un ensemble dans un ensemble

Soit a et b deux ensembles.
L'énoncé «f est une application de a dans b»

$$f \subseteq a \times b \ \wedge \ \forall x \forall y \forall y' [(x,y) \in f \ \wedge \ (x,y') \in f \Rightarrow y = y'] \\ \wedge \forall x [x \in a \Rightarrow \exists y ((x,y) \in f)].$$

La collection A des applications de a dans b est un ensemble.
En effet, une application de a dans b appartient à $\mathcal{P}(a \times b)$ donc $A(f)$ équivaut à $A(f) \wedge f \in \mathcal{P}(a \times b)$.
C'est un ensemble d'après le schéma de compréhension.
On note cet ensemble b^a.

Réunion d'une famille d'ensembles

Soit a_i une famille d'ensembles indexée par un ensemble I.
On la note $(a_i)_{i\in I}$.
C'est une fonction a de domaine I.
La **réunion** de $(a_i)_{i\in I}$ notée $\bigcup_{i\in I} a_i$ est la réunion des éléments de l'image de a. C'est un ensemble et on a

$$\forall x\left[x \in \bigcup_{i\in I} a_i \Leftrightarrow \exists i(i \in I \land x \in a_i)\right]$$

Intersection d'une famille d'ensembles

L'**intersection** de la famille $(a_i)_{i\in I}$ est la collection définie par

$X(x) : \forall i(i \in I \Rightarrow x \in a_i)$.

Si $I = \varnothing$, X est la collection de tous les ensembles et n'est pas un ensemble.

Si $I \neq \varnothing$ on prend $i_0 \in I$.

Alors $X(x)$ est $x \in a_{i_0} \ \wedge \ \forall i(i \in I \Rightarrow x \in a_i)$.

D'après le schéma de compréhension cette collection est alors un ensemble et on la note $\bigcap_{i\in I} a_i$.

Produit d'une famille d'ensembles

Soit X la collection des applications f de I dans $\bigcup_{i \in I} a_i$ telle que $\forall i (i \in I \Rightarrow f(i) \in a_i)$.
Une telle application est un élément de l'ensemble $(\bigcup_{i \in I} a_i)^I$.
$X(f)$ est équivalent à $X(f) \ \wedge \ f \in (\bigcup_{i \in I} a_i)^I$
La collection $X(f)$ est donc un ensemble d'après le schéma de compréhension.
Cet ensemble est le **produit** de la famille $(a_i)_{i \in I}$ et est noté $\Pi_{i \in I} a_i$.

L'axiome du choix

Axiome (du choix)

Pour chaque ensemble a dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble dont l'intersection avec chaque élément de a est un singleton.

$$\forall a \Big\{ \big[\forall x (x \in a \Rightarrow x \neq \varnothing) \ \wedge \ \forall xy (x \in a \wedge y \in a \ \Rightarrow \ x = y \vee x \cap y = \varnothing) \big]$$

$$\Rightarrow \exists b \forall x \exists u (x \in a \Rightarrow b \cap x = \{u\}) \Big\}.$$

L'axiome du choix : deux énoncés équivalents

Axiome (du choix (énoncé 1))

Pour tout ensemble a, il existe une application h de l'ensemble des parties non vides de a dans a, telle que $h(x) \in x$ pour toute partie x non vide de a.

Une telle fonction est appelée **fonction de choix** sur l'ensemble a.

Axiome (du choix (énoncé 2))

Le produit d'une famille d'ensembles non vides est non vide.

Ensembles bien ordonnés

Un ensemble est dit **bien ordonné** par $\sqsubseteq$, si tous ses sous-ensembles non vides possèdent un plus petit élément pour $\sqsubseteq$.

Le lemme de Zermelo

La proposition suivante est logiquement équivalente à l'axiome du choix.

Lemme (Zermelo)

Sur tout ensemble on peut définir un bon ordre.

Le lemme de Zorn

La proposition suivante est logiquement équivalente à l'axiome du choix.

Lemme (Zorn)

Soit u un ensemble ordonné dont toute partie bien ordonnée est majorée. Alors u admet un élément maximal[4]*.*

---

[4] **maximal** par **maximum**.

Plan

L'axiome de bonne fondation 1 / 2

Soit R une relation, la collection $BF_R(x)$ des **éléments bien fondés pour R** est définie par

$$\frac{\forall z \ (\forall y \ z R y \Rightarrow BF_R(y)) \Rightarrow BF_R(z)}{\forall x \ BF_R(x)}$$

L'axiome de bonne fondation 1 / 2

Soit R une relation, la collection $BF_R(x)$ des **éléments bien fondés pour** R est définie par

$$\frac{\forall z\ (\forall y\ z\,R\,y \Rightarrow BF_R(y)) \Rightarrow BF_R(z)}{\forall x\ BF_R(x)}$$

Cela signifie qu'il n'existe pas dans la collection BF_R
de suite infinie $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $x_i\,R\,x_{i+1}$.

L'axiome de bonne fondation   1 / 2

Soit R une relation, la collection $BF_R(x)$ des **éléments bien fondés pour** R est définie par

$$\frac{\forall z\ (\forall y\ z\,R\,y \Rightarrow BF_R(y)) \Rightarrow BF_R(z)}{\forall x\ BF_R(x)}$$

Cela signifie qu'il n'existe pas dans la collection BF_R
de suite infinie $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $x_i\,R\,x_{i+1}$.

Une relation est bien fondée sur une collection $\mathcal{C}$ si $BF_R = \mathcal{C}$.

L'axiome de bonne fondation 2 / 2

Axiome

La relation $\in$ est **bien fondée** sur l'univers $\mathcal{U}$.

L'axiome de bonne fondation 2 / 2

Axiome

La relation $\in$ est **bien fondée** sur l'univers $\mathcal{U}$.

Donc il n'y pas de suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'senmbles telle que $x_{i+1} \in x_i$.

L'axiome de bonne fondation 2 / 2

Axiome

La relation $\in$ est **bien fondée** sur l'univers $\mathcal{U}$.

Donc il n'y pas de suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'senmbles telle que $x_{i+1} \in x_i$.

En particulier, on ne peut pas avoir $x \in x$.