# *La Déduction naturelle*

Pierre Lescanne

*29 novembre 2004 – 15 h 59*

# *Les séquents*

En **déduction naturelle**, on raisonne avec des hypothèses.
Au lieu du séquent $\vdash \varphi$, on utilise le séquent $\Gamma \vdash \varphi$ où

- $\Gamma$ est un **ensemble de propositions** appelés l'**antécédent**, qui sont les hypothèses
- On écrit $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ au lieu de $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$
  et $\vdash \varphi$ quand l'ensemble des hypothèses est vide.
- $\Gamma \vdash \varphi$ se lit
  - «de $\Gamma$ on déduit $\varphi$»
  - ou «$\Gamma$ **infère** $\varphi$» ou «$\Gamma$ **induit** $\varphi$»
  - ou «sous les hypothèses $\Gamma$ on a $\varphi$».

# *Les théorèmes*

Les **théorèmes** sont les séquents de la forme $\vdash \varphi$
qui peuvent être déduits des axiomes et des règles.
On les trouve donc à la **racine** d'un **arbre de preuve**.

# *Plan*

*La déduction naturelle pour la logique propositionnelle minimale*

*La présentation à la Prawitz*

*Des preuves à la Hilbert aux preuves en déduction naturelle*

*La logique propositionnelle*

# *L'axiome*

Il n'y a qu'un seul axiome :

**Axiome**

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$$

# *Les règles*

Il y a deux règles : **introduction** et **élimination** :

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi} \Rightarrow I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \Rightarrow E$$

# *Preuve de Hilbert_K*

$$\dfrac{\dfrac{\varphi, \psi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \psi \Rightarrow \varphi} \Rightarrow I}{\vdash \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi} \Rightarrow I$$

# *Preuve de* Hilbert_S

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi), (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi \quad (\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi), (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \varphi}{(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi), (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \psi \Rightarrow \chi} \quad \dfrac{(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi), (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad (\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi), (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \varphi}{(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi), (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \psi}}{(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi), (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \chi}}{(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi), (\varphi \Rightarrow \psi) \vdash \varphi \Rightarrow \chi}}{(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi}}{(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi}
$$

# *Preuve de B*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi), \chi \vdash \varphi \Rightarrow \psi \qquad \mathcal{D}}{(\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi), \chi \vdash \psi} \Rightarrow E}{(\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi) \vdash \chi \Rightarrow \psi}}{(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash (\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}}{\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\dfrac{(\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi), \chi \vdash \chi \Rightarrow \varphi \qquad (\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi), \chi \vdash \chi}{(\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi), \chi \vdash \varphi} \Rightarrow E$$

# Plan

# *La présentation à la Prawitz 1 / 3*

Prawitz donne une autre vision de la déduction naturelle.
Dans son approche, on dispose les hypothèses aux feuilles en même temps que les axiomes.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : \varphi_1}{\cdots} \qquad \dfrac{axiom_1}{\cdots}}{}\,(foo_1) \qquad \dfrac{\dfrac{axiom_2}{\cdots}}{\cdots}\,(bar)}{\cdots}\,(foo_2) \qquad \dfrac{h_2 : \varphi_2}{\cdots}}{\varphi}\,(foo_1)$$

# *La présentation à la Prawitz 2 / 3*

A certains moments dans une preuve, on supprime une ou des hypothèses au moment d'utiliser une règle.

Par exemple dans $\Rightarrow$I on remplace une proposition $\psi$ par $\varphi \Rightarrow \psi$ et on coche l'hypothèse $h : \varphi$ comme ayant été utilisée.
On dit que l'on a **déchargé** l'hypothèse $h$.

Cela donne $\cancel{h} : \varphi$.

# *La présentation à la Prawitz 2 / 3*

A certains moments dans une preuve, on supprime une ou des hypothèses au moment d'utiliser une règle.

Par exemple dans $\Rightarrow$I on remplace une proposition $\psi$ par $\varphi \Rightarrow \psi$ et on coche l'hypothèse $h : \varphi$ comme ayant été utilisée.
On dit que l'on a **déchargé** l'hypothèse $h$.

Cela donne $\cancel{h} : \varphi$.

Une preuve est complète quand toutes les hypothèses ont été déchargées.

# *La présentation à la Prawitz 3 / 3*

L'hypothèse $h_1$ est barrée parce qu'elle est **déchargée**.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{h}_1 : \psi}{\cdots} \qquad \dfrac{\mathit{axiom}_1}{\cdots}}{}\,(\mathit{foo}_1) \qquad \dfrac{\dfrac{\mathit{axiom}_2}{\cdots}}{\cdots}\,(\mathit{bar})}{\cdots}\,(\mathit{foo}_2) \qquad \dfrac{h_2}{\cdots}}{\varphi}\,(\mathit{foo}_1)}{\psi \Rightarrow \varphi}$$

# *La preuve de B dans la présentation à la Prawitz*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h:\varphi\Rightarrow\psi \qquad \dfrac{h':\chi\Rightarrow\varphi \qquad h'':\chi}{\varphi}}{\psi}}{\chi\Rightarrow\psi}\,h''}{(\chi\Rightarrow\varphi)\Rightarrow\chi\Rightarrow\psi}\,h'}{(\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow(\chi\Rightarrow\varphi)\Rightarrow\chi\Rightarrow\psi}\,h$$

J'ai noté ainsi les hypothèses quand elles sont créées et ainsi quand elles ont été déchargées.

# *La preuve de B dans la présentation à la Prawitz*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{h}:\varphi \Rightarrow \psi \qquad \dfrac{\cancel{h'}:\chi \Rightarrow \varphi \qquad \cancel{h''}:\chi}{\varphi}}{\psi}}{\chi \Rightarrow \psi}\,h''}{(\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}\,h'}{(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}\,h$$

On coche les hypothèses pour s'assurer qu'elles ont bien toutes été déchargées.

# Plan

Pour passer d'une preuve **à la Hilbert** à une preuve en **déduction naturelle**.

On remplace les invocations de *Hilbert_K* et *Hilbert_S* par leurs preuves.

Les preuves sont plus longues.

# *Preuve de* $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$ *1 / 3*

La preuve en déduction naturelle de $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$ est

$$\dfrac{\dfrac{\psi, \varphi \vdash \varphi}{\psi \vdash \varphi \Rightarrow \varphi}}{\vdash \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}$$

## *Preuve de* $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$ *2 / 3*

Alors que la preuve déduite de la preuve à la Hilbert est

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\varphi \Rightarrow \varphi), \psi, \varphi \vdash \varphi}{(\varphi \Rightarrow \varphi) \vdash \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}}{\vdash (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi} \qquad \dfrac{\mathcal{D} \qquad \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}{\vdash \varphi \Rightarrow \varphi}}{\vdash \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}'}{\vdash (\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi, (\varphi \Rightarrow \varphi) \vdash \varphi}{\varphi \vdash (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi}}{\vdash \varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi}}{\vdash (\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}$$

# *Preuve de* $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$ *3 / 3*

et $\mathcal{D}'$ est l'arbre de la preuve de *Hilbert_S* où l'on a substitué les variables de la façon suivante:

$$\begin{array}{lcl} \varphi & := & \varphi \\ \psi & := & \varphi \Rightarrow \varphi \\ \chi & := & \varphi \end{array}$$

# *Preuve de* $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$ *3 / 3*

et $\mathcal{D}'$ est l'arbre de la preuve de *Hilbert_S* où l'on a substitué les variables de la façon suivante:

$$\begin{array}{lcl} \varphi & := & \varphi \\ \psi & := & \varphi \Rightarrow \varphi \\ \chi & := & \varphi \end{array}$$

## Exercice

1. Dessiner l'arbre complet en déduction naturelle de la démonstration de $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$ déduite de la preuve à la Hilbert.
2. Comparer cette preuve avec la preuve «naturelle».

# Plan

# *Les règles*

Les règles sont deux types :

- **règles d'introduction** : un connecteur qui n'était pas présent apparaît dans la proposition conséquente sous la barre d'inférence.
- **règles d'élimination** : la proposition conséquente sous la barre d'inférence est construite en enlevant le connecteur principal d'un des connecteurs conséquents d'un séquent au dessus de la barre.

# *La syntaxe*

Il y a trois nouveaux connecteurs $\perp$, $\wedge$ et $\vee$.

- $\perp$ est nullaire et représente l'absurde,
- $\wedge$ et $\vee$ sont bien connus et représentent la conjonction et la disjonction.

# *L'axiome pour $\perp$*

Il n'y a qu'une règle et c'est **une règle d'élimination :**

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} \perp E$$

# *Les règles du* $\wedge$

Il y a une règle d'**introduction** et deux règles d'**élimination**.

# *Les règles du* $\wedge$

Il y a une règle d'**introduction** et deux règles d'**élimination**.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} \wedge I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \wedge E_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} \wedge E_d$$

# *Les règles du* $\vee$

Il y a deux règles d'**introduction** et une règle d'**élimination.**

# *Les règles du* $\vee$

Il y a deux règles d'**introduction** et une règle d'**élimination.**

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \vee I_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \vee I_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ \vee E$$

# *Un exemple*

$$
\dfrac{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\varphi \vee \psi, \varphi \vdash \varphi}{\varphi \vee \psi, \varphi \vdash \psi \vee \varphi}\,\vee I_d \qquad \dfrac{\varphi \vee \psi, \psi \vdash \psi}{\varphi \vee \psi, \varphi \vdash \psi \vee \varphi}\,\vee I_g}{\dfrac{\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi}{\vdash \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi \vee \varphi}\,\Rightarrow I}\,\vee E
$$

# *Les hypothèses déchargées dans $\vee E$*

Dans la règle

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, h_1 : \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma, h_2 : \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi} \vee E$$

Les hypothèses $h_1 : \varphi$ et $h_2 : \psi$ sont déchargées.

# $\vee$ *à la Prawitz*

L'utilisation de $\vee E$ et des décharges apparaissent mieux sur un exemple.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\cancel{h}_1 : (\varphi \vee \psi) \vee \chi
\qquad
\dfrac{
\cancel{h}_2 : \varphi \vee \psi
\quad
\dfrac{\cancel{h}_3 : \varphi}{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,\vee I_g
\quad
\dfrac{\dfrac{\cancel{h}_4 : \psi}{\psi \vee \chi}\,\vee I_g}{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,\vee I_d
}{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,\vee E, h_3 \text{ et } h_4
\qquad
\dfrac{\dfrac{\cancel{h}_5 : \chi}{\psi \vee \chi}\,\vee I_d}{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,\vee I_d
}{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,\vee E, h_2 \text{ et } h_5
}{(\varphi \vee \psi) \vee \chi \Rightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,\Rightarrow I \text{ et } h_1
$$

# $\vee$ *à la Prawitz*

L'utilisation de $\vee E$ et des décharges apparaissent mieux sur un exemple.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\cancel{h}_1 : (\varphi\vee\psi)\vee\chi
\qquad
\dfrac{\cancel{h}_2 : \varphi\vee\psi \qquad \dfrac{\cancel{h}_3 : \varphi}{\varphi\vee(\psi\vee\chi)}\vee I_g \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{h}_4 : \psi}{\psi\vee\chi}\vee I_g}{\varphi\vee(\psi\vee\chi)}\vee I_d}{\varphi\vee(\psi\vee\chi)}\vee E, h_3 \text{ et } h_4
\qquad
\dfrac{\dfrac{\cancel{h}_5 : \chi}{\psi\vee\chi}\vee I_d}{\varphi\vee(\psi\vee\chi)}\vee I_d
}{\varphi\vee(\psi\vee\chi)}\vee E, h_2 \text{ et } h_5
}{(\varphi\vee\psi)\vee\chi\Rightarrow\varphi\vee(\psi\vee\chi)}\Rightarrow I \text{ et } h_1
$$

## Exercice

Faire la même démonstration en utilisant des séquents.