Le calcul des séquents

Pierre Lescanne

29 novembre 2004 – 16 h 00

Rétablir la symétrie rompue

Dans la déduction naturelle classique, la symétrie **introduction-élimination** est rompue par la règle de réduction à l'absurde.
Le but du calcul des séquents est de rétablir cette symétrie.

Les séquents

Dans le calcul des séquents, les jugements sont de la forme :

$$\Gamma \vdash \Delta.$$

où Γ et Δ sont des multi-ensembles de propositions.
Le cas intuitionniste est le cas particulier où Δ est constitué d'une et une seule proposition.

Les règles

Les règles du calcul des séquents respectent une symétrie gauche/droite.
Il y a

- **les règles structurelles**,
- **les règles logiques**, il n'y a que des règles d'introduction,
- **l'axiome**,
- **la règle de coupure**.

L'axiome

Axiome

$$\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$$

Les règles structurelles

L'affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}$$

La contraction

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}$$

Les règles logiques (conjonction)

L'introduction d'une conjonction à gauche

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$$

L'introduction d'une conjonction à droite

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

Les règles logiques (disjonction)

L'introduction d'une disjonction à gauche

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$$

L'introduction d'une disjonction à droite

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$$

Les règles logiques (implication)

L'introduction d'une implication à gauche

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \Delta}$$

L'introduction d'une implication à droite

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \Rightarrow \psi}$$

Les règles logiques (négation)

L'introduction d'une négation à gauche

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$$

L'introduction d'une négation à droite

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$$

Les règles logiques (quantification universelle)

L'introduction d'une quantification universelle à gauche

$$\frac{\Gamma, \varphi[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta}$$

L'introduction d'une quantification universelle à droite

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}$$

Les règles logiques (quantification existentielle)

L'introduction d'une quantification existentielle à gauche

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}$$

L'introduction d'une quantification existentielle à droite

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[x := t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi}$$

La preuve de la formule de Pierce

$$
\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \dfrac{\varphi \vdash \psi, \varphi}{\vdash \varphi \Rightarrow \psi, \varphi}\ \text{introduction de} \Rightarrow \text{à droite}}{\dfrac{(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \vdash \varphi, \varphi}{\dfrac{(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \vdash \varphi}{\vdash ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi}\ \text{introduction de} \Rightarrow \text{à droite}}\ \text{contraction à droite}}\ \text{introduction de} \Rightarrow \text{à gauche}
$$

Le calcul des séquents sans coupure

La calcul qui ne contient que les règles précédentes :

axiomes, règles structurelles, règles logiques,

s'appelle **le calcul des séquents sans coupure**.

Proposition

Le calcul des séquents sans coupure satisfait la **propriété de la sous-formule***, à savoir que les formules figurant dans la preuve d'un séquent sont des sous-formules de ce séquent.*

La règle de coupure

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

En fait c'est l'utilisation d'un lemme dans une démonstration qui permet de faire une démonstration plus courte et plus «intelligente».

L'élimination des coupures 1 / 2

La règle de coupure n'augmente pas la puissance du calcul des séquents.

Gentzen a démontré le **théorème d'élimination des coupures**. Si une démonstration comporte des coupures, on peut la transformer en une démonstration équivalente qui ne comporte pas de coupures.

La démonstration du théorème d'élimination des coupures utilise la symétrie du calcul des séquents.

L'élimination des coupures 2 / 2

Ce théorème ne se généralise pas aux théories où l'on accepterait d'autres axiomes.
Dans ce cas, l'utilisation de coupure permet des démonstrations plus puissantes.