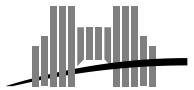
Différentes sémantiques d'un langage impératif

version du 13 octobre 2004 – 17 : 45

Présentation du langage



Les constituants d'IMP

IMP est associé aux ensembles suivants :

– les entiers $\mathbb{N}$ repérés par n, m,

– les emplacements (en anglais «locations») **Loc**, repérés par X, Y,

– les expressions arithmétiques, **Aexp** repérées par a, a_i,

– les expressions booléennes, **Bexp** repérées par b, b_i,

– les commandes (ou instructions), **Com** repérées par c, c_j.

La syntaxe d'IMP

Les expressions arithmétiques **Aexp**

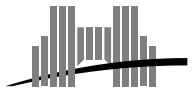
$$a \quad ::= \quad n \mid X \mid a_0 + a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0 \times a_1$$

Les expressions booléennes **Bexp**

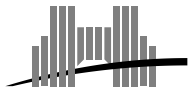
$$b \quad ::= \quad \textbf{true} \mid \textbf{false} \mid a_0 = a_1 \mid a_0 \leq a_1 \mid \neg b \mid b_0 \vee b_1 \mid b_0 \wedge b_1$$

Les Commandes **Com**

$$c \quad ::= \quad \textbf{skip} \mid X := a \mid c_0; c_1 \mid \textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1 \mid \textbf{while } b \textbf{ do } c$$



La sémantique opérationnelle



L'ensemble des états

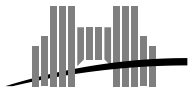
L'ensemble Σ : **Loc** $\longrightarrow \mathbb{N}$ des états associe un nombre à un emplacement.

Si $\sigma : \Sigma$ alors $\sigma(X)$ est le contenu de l'emplacement **Loc** dans l'état σ.

Une expression arithmétique a qui attend d'être évaluée dans l'état σ se note $\langle a, \sigma \rangle$

La relation d'évaluation entre paires associe un nombre à une paire. Elle est notée $\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n$.

C'est une sémantique «grande étape»..



Évaluation des expressions entières

Évaluation d'un nombre

$$\langle n, \sigma \rangle \quad \to \quad n$$

Évaluation d'un emplacement

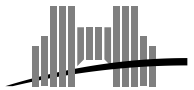
$$\langle X, \sigma \rangle \quad \to \quad \sigma(X)$$

Évaluation d'une somme

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to n_2}{\langle a_1 + a_2, \sigma \rangle \to n}$$

n est la somme de n_1 et de n_2

autrement dit $n = n_1 +_{\mathbb{N}} n_2$.



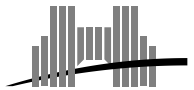
Évaluation des expressions entières

Évaluation d'une soustraction

$$\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \to n_1 \qquad \langle a_2, \sigma\rangle \to n_2}{\langle a_1 - a_2, \sigma\rangle \to n}$$ n est la soustraction de n_1 et de n_2

Évaluation d'un produit

$$\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \to n_1 \qquad \langle a_2, \sigma\rangle \to n_2}{\langle a_1 \times a_2, \sigma\rangle \to n}$$ n est le produit de n_1 et de n_2



Évaluation des expressions booléennes

Évaluation d'une valeur booléenne

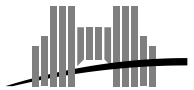
$$\langle \textbf{true}, \sigma \rangle \quad \rightarrow \quad \textbf{true}$$

⋮

Évaluation d'un test d'inégalité

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightarrow n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \rightarrow n_2}{\langle a_1 \leq a_2, \sigma \rangle \rightarrow t}$$

où t est **true** si n_1 est plus petit que n_2 et t est **false** autrement.



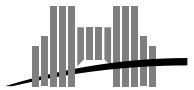
Évaluation des expressions booléennes

Évaluation d'une disjonction

$$\frac{\langle b_1, \sigma\rangle \to t_1 \qquad \langle b_2, \sigma\rangle \to t_2}{\langle b_1 \wedge b_2, \sigma\rangle \to t}$$

où t est **true** si $t_1 \equiv$ **true** et $t_1 \equiv$ **true** et t est **false**

autrement dit $t = t_1 \wedge_{\mathbb{B}} t_2$

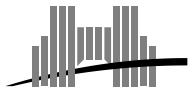


Évaluation des instructions

On suppose qu'au début de l'évaluation d'un programme, on se trouve dans l'état initial σ_0 qui tel que

$$(\forall X \in \mathbf{Loc})\, \sigma_0(X) \quad = \quad 0$$

Comme on sait l'évaluation d'une commande à partir d'un certain état peut se terminer ou diverger.



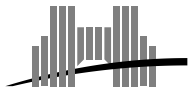
Évaluation des instructions

Nous allons définir une relation

$$\langle c, \sigma \rangle \quad \rightarrow \quad \sigma'$$

qui signifie que

1. dans l'état σ, l'instruction c se termine et
2. le couple $\langle c, \sigma \rangle$ rejoint (s'évalue en) l'état σ'.



Évaluation des instructions

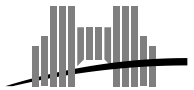
Par exemple, on s'imagine que

$$\langle X := X + 1, \sigma \rangle \quad \rightarrow \quad \sigma'$$

signifiera que σ' est l'état

– tel que $\sigma'(Y)$ est $\sigma(Y)$ pour $Y \neq X$

– et tel que $\sigma'(X)$ vaut $\sigma(X)$ augmenté de 1.



La notation $\sigma[m/X]$

Si $\sigma \in \Sigma$ est un état, $m \in \mathbb{N}$ est un naturel et $X \in$ **Loc** est un emplacement, on écrit

$$\begin{aligned} \sigma[m/X](X) &= m \\ \sigma[m/X](Y) &= \sigma(Y) \qquad \text{si } Y \neq X. \end{aligned}$$

Ainsi on pourra écrire

$$\langle X := X + 1, \sigma \rangle \quad \rightarrow \quad \sigma[\sigma(X) +_{\mathbb{N}} 1/X]$$

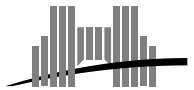
Les règles pour les instructions simples

Commande vide

$$\langle \textbf{skip}, \sigma \rangle \to \sigma$$

Affectation

$$\frac{\langle a, \sigma \rangle \to m}{\langle X := a, \sigma \rangle \to \sigma[m/X]}$$



Les règles pour les instructions composées

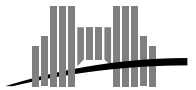
Composition séquentielle

$$\frac{\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma'' \qquad \langle c_1, \sigma''\rangle \to \sigma'}{\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

Composition conditionnelle

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{true} \qquad \langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{false} \qquad \langle c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

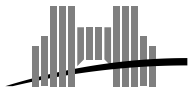


Les règles pour les instructions composées

Boucles while

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{false}}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma\rangle \to \sigma}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{true} \qquad \langle c, \sigma\rangle \to \sigma'' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma''\rangle \to \sigma'}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma\rangle \to \sigma'}$$



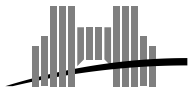
Les règles pour les instructions composées

Boucles while

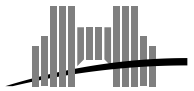
$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{false}}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma\rangle \to \sigma}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \textbf{true} \qquad \langle c, \sigma\rangle \to \sigma'' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma''\rangle \to \sigma'}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

Noter que la définition ne se fait pas par induction sur la longueur de la commande.



Une sémantique «petite étapes» des expressions

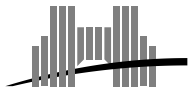


Une alternative

On veut être plus proche de l'évaluation des expressions.

La relation se fait entre paires expression–état du type

$$\langle a, \sigma \rangle \quad \xrightarrow{pe} \quad \langle a', \sigma' \rangle$$



Une alternative

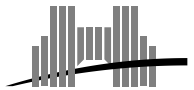
On aurait alors

$$\frac{\langle a_0, \sigma\rangle \xrightarrow{pe} \langle a_0', \sigma\rangle}{\langle a_0 + a_1, \sigma\rangle \xrightarrow{pe} \langle a_0' + a_1, \sigma\rangle}$$

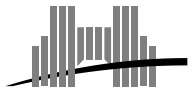
$$\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \xrightarrow{pe} \langle a_1', \sigma\rangle}{\langle n + a_1, \sigma\rangle \xrightarrow{pe} \langle n + a_1', \sigma\rangle}$$

$$\langle n + m, \sigma\rangle \xrightarrow{pe} \langle n +_{\mathbb{N}} m, \sigma\rangle$$

Cela formalise une évaluation de gauche à droite des expressions.



Points fixes, fonctionnelles et récursivité



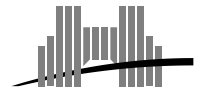
La fonction de McCarthy

Considérons la définition

let rec $m\ x \quad = \quad$ **if** $x > 100$ **then** $x - 10$ **else** $m\ (m\ (x + 11))$

A priori cela définit une fonction partielle (sauf pour les valeurs de $x > 100$ pour lesquelles on est certain de la valeur).

Laquelle ?



Un ordre sur les fonctions

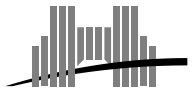
Nous dirons que $h \sqsubseteq g$ si h est moins définie que g[a]

et là où h et g sont définies ensembles elles prennent la même valeur.

Un dirigé F dans $(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ est un ensemble de fonctions partielles tel que s'il contient deux fonctions h et g il contient

– une fonction l encore plus définie que chacune d'elles,
  c'est-à-dire si $h(x)$ ou $g(x)$ est défini, alors $l(x)$ est défini,
– et telle que l coïncide avec chacune d'elles sur leurs domaines de définition.

[a] si h est défi nie en x, alors g est aussi défi nie en x



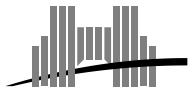
Un ordre sur les fonctions

Un majorant de E est un élément m tel que $(\forall x \in E)\, x \sqsubseteq m$..

La borne supérieure est le plus petit des majorants.

Une fonction est continue si elle préserve les bornes supérieures.

$$f(\sup E) = \sup f(E).$$



Fonction continue et point fixe

On note tout d'abord que si un ensemble est tel que que toute partie a une borne supérieure,

alors il a un plus petit élément qui est la borne supérieure $\bot$ de l'ensemble vide.

On peut montrer que toute fonction continue admet une point fixe :

$$\sup\{f^n(\bot) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Fonctionnelles et points fixes

Considérons la fonctionnelle F

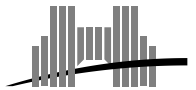
$$F(g) \quad = \quad \lambda x.\textbf{if } x > 100 \textbf{ then } x - 10 \textbf{ else } g\ (g\ (x + 11)).$$

La fonctionnelle F est continue. En effet,

– $\lambda g.\lambda x.g\ (g\ (x + 11))$ est continue par rapport à g.

– $\lambda g.\lambda x.\textbf{if } b(x) \textbf{ then } G(g)(x) \textbf{ else } H(g)(x)$ est continue par rapport à g si G et H sont continues.

F a donc un point fixe $Fix(F)$ tel que $F(Fix(F)) = Fix(F)$.



Fonctionnelles et points fixes

Le point fixe de F est obtenu en itérant F à partir de la fonction $\bot$ nulle part définie.

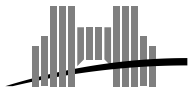
$$
\begin{aligned}
F(\bot)(x) &= \textbf{if } x > 100 \textbf{ then } x - 10 \\
F^2(\bot)(x) &= \textbf{if } x > 100 \textbf{ then } x - 10 \textbf{ else } F(\bot)\,(F(\bot)\,(x + 11)) \\
&\vdots \\
F^{n+1}(\bot)(x) &= \textbf{if } x > 100 \textbf{ then } x - 10 \textbf{ else } F^n(\bot)\,(F^n(\bot)\,(x + 11)) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Fonctionnelles et points fixes

$$Fix(F) = \sup_{n \in \mathbb{N}} F^n(\bot)$$

Comme F est continue on

$$F(Fix(F)) = Fix(F)$$



Le points fixe de F

$Fix(F)$ est la fonction m définie par

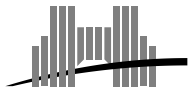
$$\text{let rec } m\ x \quad = \quad \textbf{if } x > 100 \textbf{ then } x - 10 \textbf{ else } m\ (m\ (x + 11))$$

C'est aussi la fonction

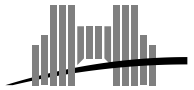
$$\text{let rec } m\ x \quad = \quad \textbf{if } x > 100 \textbf{ then } x - 10 \textbf{ else } 91$$

1. Encore faudrait-il le prouver !
2. En sémantique dénotationnelle on s'intéresse aux fonctions [a] dénotée par le programme.

[a] Même si nous intéressons aux fonctions calculables plutôt qu'aux algorithmes !



Une sémantique dénotationnelle de IMP



Quelques remarques

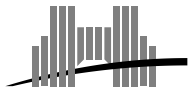
La sémantique opérationnelle mélange la syntaxe et les états dans sa définition.

Elle colle de très (trop) près à la syntaxe.

Et encore pas de la meilleure manière puisque la définition ne fait pas par induction sur la syntaxe.

Ce qu'on cherche à définir c'est une fonction (au sens mathématique du terme).

On pourra de cette manière considérer des programmes qui sont équivalents parce qu'ils définissent la même fonction mathématique.



Les fonctions de base

$\mathcal{A}[\![a]\!] : \Sigma \to \mathbb{N}$,

$\mathcal{B}[\![b]\!] : \Sigma \to \mathbb{T}$,

$\mathcal{C}[\![c]\!] : \Sigma \rightharpoonup \Sigma$

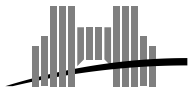
$\Sigma \rightharpoonup \Sigma$ représente l'ensemble des fonctions partielles de Σ vers Σ.

On a donc les fonctions d'interprétation sémantique

$\mathcal{A}[\![\ \ ]\!] : \mathbf{Aexp} \to \Sigma \to \mathbb{N}$,

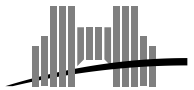
$\mathcal{B}[\![\ \ ]\!] : \mathbf{Bexp} \to \Sigma \to \mathbb{T}$,

$\mathcal{C}[\![\ \ ]\!] : \mathbf{Com} \to \Sigma \rightharpoonup \Sigma$



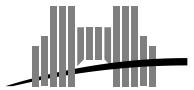
La dénotation des Aexp

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![n]\!]\sigma &= n \\
\mathcal{A}[\![X]\!]\sigma &= \sigma(X) \\
\mathcal{A}[\![a_0 + a_1]\!]\sigma &= \mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma +_{\mathbb{N}} \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma \\
\mathcal{A}[\![a_0 - a_1]\!]\sigma &= \mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma -_{\mathbb{N}} \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma \\
\mathcal{A}[\![a_0 \times a_1]\!]\sigma &= \mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma \times_{\mathbb{N}} \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma
\end{aligned}
$$



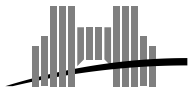
La dénotation des Aexp

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![n]\!] &= \lambda\!\!\lambda\sigma.n \\
\mathcal{A}[\![X]\!] &= \lambda\!\!\lambda\sigma.\sigma(X) \\
\mathcal{A}[\![a_0 + a_1]\!] &= \lambda\!\!\lambda\sigma.(\mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma +_{\mathbb{N}} \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma) \\
\mathcal{A}[\![a_0 - a_1]\!] &= \lambda\!\!\lambda\sigma.(\mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma -_{\mathbb{N}} \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma) \\
\mathcal{A}[\![a_0 \times a_1]\!] &= \lambda\!\!\lambda\sigma.(\mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma \times_{\mathbb{N}} \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma)
\end{aligned}
$$



La dénotation des Bexp

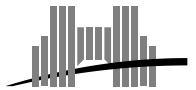
$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}[\![\textbf{true}]\!] &= \lambda\sigma.\textbf{true} \\
\mathcal{B}[\![\textbf{false}]\!] &= \lambda\sigma.\textbf{false} \\
\mathcal{B}[\![a_0 = a_1]\!] &= \lambda\sigma.(\mathcal{A}[\![a_0]\!]\sigma =_{\mathbb{N}} \mathcal{A}[\![a_1]\!]\sigma) \\
&\vdots \\
\mathcal{B}[\![b_0 \wedge b_1]\!] &= \lambda\sigma.(\mathcal{B}[\![b_0]\!]\sigma \wedge_{\mathbb{T}} \mathcal{B}[\![b_1]\!]\sigma) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$



La dénotation des instructions

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}[\![\textbf{skip}]\!] &= \lambda\!\!\lambda\sigma.\sigma \\
\mathcal{C}[\![X := a]\!] &= \lambda\!\!\lambda\sigma.\sigma[X/\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma] \\
\mathcal{C}[\![c_0; c_1]\!] &= \mathcal{C}[\![c_1]\!] \circ \mathcal{C}[\![c_0]\!]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1]\!]\sigma &= \mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma \quad \texttt{si} \quad \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma \\
\mathcal{C}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1]\!]\sigma &= \mathcal{C}[\![c_1]\!]\sigma \quad \texttt{si} \quad \neg\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma
\end{aligned}
$$



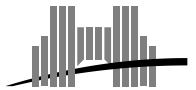
La dénotation de la boucle while

On cherche à dénoter la commande **while** b **do** c.

Soit $g \in \Sigma \rightharpoonup \Sigma$.

Considérons la «fonctionnelle» $\Gamma_g : (\Sigma \rightharpoonup \Sigma) \to (\Sigma \rightharpoonup \Sigma)$.

$$\begin{array}{lcll} \Gamma_g(f)\sigma & = & (f \circ g)\sigma & \texttt{si } \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma \\ \Gamma_g(f)\sigma & = & \sigma & \texttt{si } \neg\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma \end{array}$$



La fonctionnelle Γ_g

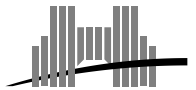
La fonctionnelle Γ_g est continue pour la relation $\sqsubseteq$.

$$\begin{array}{lcll} (\sup\limits_{h\in F} \Gamma_g(h))\sigma & = & ((\sup\limits_{h\in F} h)\circ g)\sigma & \texttt{si } \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma \\ (\sup\limits_{h\in F} \Gamma_g(h))\sigma & = & \sigma & \texttt{si } \neg\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma \end{array}$$

La fonctionnelle Γ_g a un point fixe $Fix(\Gamma_g)$

qui est une fonction partielle de Σ vers Σ.

$$Fix(\Gamma_g) \quad : \quad \Sigma \rightharpoonup \Sigma.$$



La dénotation de la boucle while

Remarquons que $\Gamma_g(\bot)$ n'est défini que sur les états σ tels que $\neg\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma$ et qu'alors

$$\Gamma_g(\bot)\sigma \quad = \quad \sigma$$

et que $\Gamma_g^{n+1}(\bot)$ est défini sur les états σ tels que

– $g^i\sigma$ est défini pour $i \leq n+1$

– et $\mathcal{B}[\![b]\!]g^i\sigma$ pour $i \leq n$, tandis que $\neg\mathcal{B}[\![b]\!]g^{n+1}\sigma$.

Et on a

$$\Gamma_g^{n+1}(\bot)(\sigma) \quad = \quad g^{n+1}(\sigma).$$

La dénotation de la boucle while

Le point fixe de Γ_g est donc défini pour tous les σ tels qu'il existe un n avec

– $g^i(\sigma)$ défini et $\mathcal{B}[\![b]\!]g^i(\sigma)$ pour $i < n$

– et $g^n(\sigma)$ défini et $\neg\mathcal{B}[\![b]\!]g^n(\sigma)$.

La dénotation de la boucle while

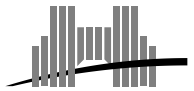
En fait, on s'intéresse à la fonctionnelle

$$\Gamma_{\mathcal{C}[\![c]\!]}(f)\sigma = (f \circ \mathcal{C}[\![c]\!])\sigma \quad \texttt{si } \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma$$
$$\Gamma_{\mathcal{C}[\![c]\!]}(f)\sigma = \sigma \quad \texttt{si } \neg\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma$$

On pose

$$\mathcal{C}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!] = Fix(\Gamma_{\mathcal{C}[\![c]\!]}).$$

Une sémantique axiomatique de IMP



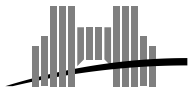
Qu'est-ce que l'annotation d'un programme par des assertions ?

A départ, il s'agit de prouver la correction des programmes en examinant des instantanés [a] successifs de l'état pendant le déroulement du programme.

Les concepteurs voulaient seulement prouver des propriétés des programmes.

Aujourd'hui c'est utilisé *aussi* pour décrire leur signification.

[a] L'expression snapshot et due à Floyd.



La notation des assertions

On va énoncer des assertions de corrections sur des instructions.

Puis des des règles d'inférence sur ces assertions de correction.

Les assertions de corrections s'écriront

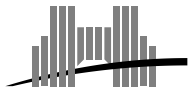
$$\{A\}\ c\ \{B\}$$

A est la précondition de c.

B est la postcondition de correction partielle de c.

L'assertion doit se lire

«Si A est satisfaite avant l'exécution de c et si l'exécution de c se termine alors B est satisfaite après l'exécution de c».



L'annotation d'un programme

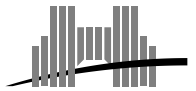
Si l'on veut annoter un programme par des propriétés, on utilise une notation comme celle-ci

Pre : $Condition_1$

```
Texte
...
    du
...
programme
```

Post : $Condition_2$

C'est très commode pour la mise au point.



L'annotation d'un programme

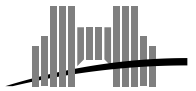
Pre : $Condition_1$

```
Texte
...
    du
...
programme
```

Post : $Condition_2$

est équivalent à

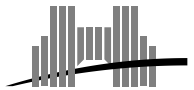
$\{Condition_1\}$ `Texte ... du ... programme` $\{Condition_2\}$



Un exemple

Considérons

```
q := 0;
r := x;
while r >= y do
    {r := r - y;
    q := q +1}
```

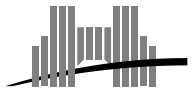
Un exemple

On annote le programme

Pre : $x \geq 0$

```
q := 0;
r := x;
while r >= y do
    {r := r - y;
    q := q +1}
```

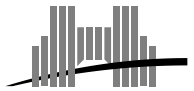
Post : $0 \leq r < y \quad \wedge \quad x = q \times y + r$



Pre Post

Pre représente l'instantané avant l'exécution du programme.

Post représente l'instantané après.



Un exemple

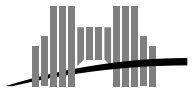
Compte tenu de ce qu'on a dit, on a aussi

Pre : $x \geq 0$

```
q := 0;
r := x;
while r >= y do
    {r := r + y;
    q := q +1}
```

Post : $0 \leq r < y \quad \wedge \quad x = q \times y + r$

Car comme la boucle ne va jamais s'arrêter, la définition est satisfaite.



Collection de quelques propriétés

Puisque la condition d'exécution de la boucle est $r \geq y$

après la boucle on a $\neg(r \geq y)$ donc $r < y$.

Comme on exécute la boucle sous la condition $r \geq y$, la soustraction $r - y$ produira toujours une valeur positive et r sera toujours positif [a].

On introduit donc naturellement la notion d'invariant de boucle, c'est-à-dire une propriété qui reste satisfaite du début à la fin de l'exécution de la boucle.

– $r \geq 0$ est un invariant de la boucle.

– $x = q \times y + r$ est un autre invariant.

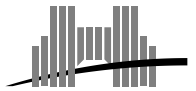
[a] A condition que ?

Les deux premières instructions

Pre : $x \geq 0$

```
q := 0;
r := x;
```

Post : $x \geq 0 \quad \wedge \quad q = 0 \quad \wedge \quad r = x$



Les deux premières instructions

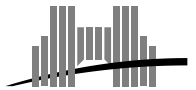
Pre : $x \geq 0$

```
q := 0;
r := x;
```

Post : $x \geq 0 \quad \wedge \quad q = 0 \quad \wedge \quad r = x$

Duquel on déduit qu'après ces deux instructions on a

$$r \geq 0 \quad \wedge \quad x = q \times y + r$$



Le corps de la boucle

On souhaite

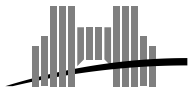
Pre : $r \geq 0 \quad \wedge \quad x = q \times y + r$

```
r := r - y;
q := q +1
```

Post : $r \geq 0 \quad \wedge \quad x = q \times y + r$

car c'est l'invariant de la boucle.

Ça ne suffit pas.



Le corps de la boucle

Il faut

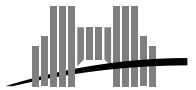
Pre : $r \geq y \quad \wedge \quad r \geq 0 \quad \wedge \quad x = q \times y + r$

```
r := r - y;
q := q +1
```

Post : $r \geq 0 \quad \wedge \quad x = q \times y + r$

Mais en fait $r \geq y$ est la condition de la boucle,

donc elle est satisfaite, comme précondition.



Les boucles

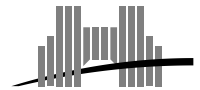
La règle concernant les boucles peut s'énoncer ainsi

> On rentre dans le corps avec Pre : $b \quad \wedge \quad I$.
>
> On sort de toute la boucle [a] avec Post : $\neg b \quad \wedge \quad I$.

où b est la condition de la boucle

et I est l'invariant de la boucle

[a] Si toutefois on en sort !

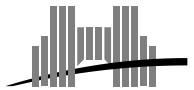


Les boucles

Plus formellement on écrit

$$\frac{\{b \wedge I\}\ c\ \{I\}}{\{I\}\ \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c\ \{\neg b \wedge I\}}$$

et l'on espère avoir tout dit !



Les boucles

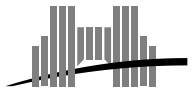
$$\frac{\{b \wedge I\}\ c\ \{I\}}{\{I\}\ \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c\ \{\neg b \wedge I\}}$$

dit que

– si I est satisfaite avant l'exécution de la boucle

– et si la boucle se termine

alors $\neg b \wedge I$ est satisfaite.



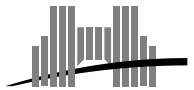
Les affectations

On a

Pre : ?

```
q := q +1
```

Post : $r \geq 0 \quad \wedge \quad x = q \times y + r$



Les affectations

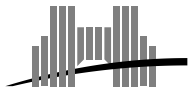
En fait

Pre : $r \geq 0 \quad \wedge \quad x = (q + 1) \times y + r$

```
q := q +1
```

Post : $r \geq 0 \quad \wedge \quad x = q \times y + r$

Et



Les affectations

Pre : $r - y \geq 0 \quad \wedge \quad x = (q+1) \times y + r - y$

```
r := r - y
```

Post : $r \geq 0 \quad \wedge \quad x = (q+1) \times y + r$

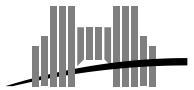
Pre : $r \geq 0 \quad \wedge \quad x = (q+1) \times y + r$

```
q := q +1
```

Post : $r \geq 0 \quad \wedge \quad x = q \times y + r$

ce qui est bien ce qu'on veut parce que

$(q+1) \times y + r - y = q \times y + r$ et $r - y \geq 0 \Leftrightarrow r \geq y$.



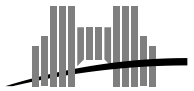
Les affectations

La règle de l'affectation est donc

$$\{B[X \leftarrow a]\}\ X := a\ \{B\}$$

Remarquer l'intérêt d'aller «en marche arrière»

plutôt qu'«en marche avant».

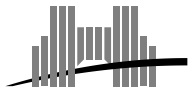


La signification d'une assertion de correction

$\sigma \vDash A$ signifie que A est satisfaite dans l'état σ.

$\{A\}\, c\, \{B\}$ signifie

$$\forall \sigma : \Sigma.(\sigma \vDash A \quad \& \quad \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \text{ est défini}) \Rightarrow \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \vDash B$$



La signification d'une assertion de correction

En fait au lieu de est défini on étend $\mathcal{C}[\![c]\!]$ en une fonction totale qui vaut $\perp$ là où $\mathcal{C}[\![c]\!]$ devrait ne pas être définie et l'on pose

$$\perp \vDash A$$

pour toute assertion A.

Avec cette convention on peut dire que $\{A\}\ c\ \{B\}$ signifie

$$\forall \sigma : \Sigma.\quad \sigma \vDash A \Rightarrow \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \vDash B$$

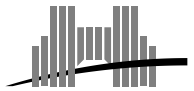
Le langage d'assertions

Pour pouvoir affirmer des propriétés de l'état,

il nous faut un langage assez riche.

On veut

– tous les prédicats booléens du langage IMP,
– des quantifications sur des valeurs entières,
– ce qui induit qu'il faut introduire des variables libres destinées à être quantifiées.



Le langage enrichi des expressions **Aexpv**

On définit tout d'abord le langage enrichi de variables libres **Aexpv** :

$$a \quad ::= \quad n \mid X \mid i \mid a_0 + a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0 \times a_1$$

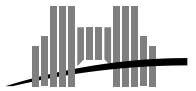
où i sont des variables entières formant **Intvar**.

Le langage enrichi d'assertions **Bexpv**

Les assertions portent sur ces expressions arithmétiques enrichies et on y ajoute des implications et des quantifications sur les variables de **Intvar**.

On définit **Bexpv** :

$$A \quad ::= \quad \textbf{true} \mid \textbf{false} \mid a_0 = a_1 \mid a_0 \leq a_1 \mid \neg A \mid A_0 \vee A_1 \mid A_0 \wedge A_1$$
$$\mid A_0 \Rightarrow A_1 \mid \forall i.A \mid \exists i.A$$

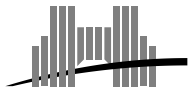


Le langage d'assertions : substitutions

On peut faire des substitutions dans le langage d'assertions.

On les note $A[i \leftarrow a]$.

Une valuation est une fonction ρ : **Intvar** $\longrightarrow \mathbb{N}$.

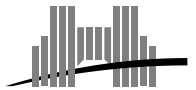


Sémantique des expressions arithmétiques enrichies

On définit une fonction

$\mathcal{A}v[\![\ ]\!] : \textbf{Aexpv} \to (\textbf{Intvar} \to \mathbb{N}) \to \Sigma \to \Sigma$:

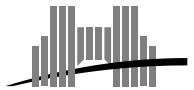
$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}v[\![n]\!]\rho\sigma &= n \\
\mathcal{A}v[\![X]\!]\rho\sigma &= \sigma(X) \\
\mathcal{A}v[\![i]\!]\rho\sigma &= \rho(i) \\
\mathcal{A}v[\![a_0 + a_1]\!]\rho\sigma &= \mathcal{A}v[\![a_0]\!]\rho\sigma +_{\mathbb{N}} \mathcal{A}v[\![a_1]\!]\rho\sigma \\
\mathcal{A}v[\![a_0 - a_1]\!]\rho\sigma &= \mathcal{A}v[\![a_0]\!]\rho\sigma -_{\mathbb{N}} \mathcal{A}v[\![a_1]\!]\rho\sigma \\
\mathcal{A}v[\![a_0 \times a_1]\!]\rho\sigma &= \mathcal{A}v[\![a_0]\!]\rho\sigma \times_{\mathbb{N}} \mathcal{A}v[\![a_1]\!]\rho\sigma
\end{aligned}
$$



Sémantique des assertions

La sémantique des expressions booléennes

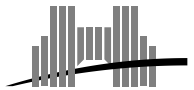
$\sigma \models^\rho$ **true**	if *rien*
$\sigma \models^\rho a_0 = a_1$	if $\mathcal{A}v[\![a_0]\!]\rho\sigma =_{\mathbb{N}} \mathcal{A}v[\![a_1]\!]\rho\sigma$
$\sigma \models^\rho a_0 \leq a_1$	if $\mathcal{A}v[\![a_0]\!]\rho\sigma \leq_{\mathbb{N}} \mathcal{A}v[\![a_1]\!]\rho\sigma$
$\sigma \models^\rho A \wedge B$	if $\sigma \models^\rho A$ et $\sigma \models^\rho B$
$\sigma \models^\rho A \vee B$	if $\sigma \models^\rho A$ ou $\sigma \models^\rho B$
$\sigma \models^\rho \neg A$	if $\sigma \not\models^\rho A$



Sémantique des assertions

La sémantique des expressions booléennes

$\sigma \models^{\rho} A \Rightarrow B$	if de $\sigma \models^{\rho} A$ on peut déduire $\sigma \models^{\rho} B$
$\sigma \models^{\rho} \forall i.A$	if $\sigma \models^{\rho(i:=n)} A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
$\sigma \models^{\rho} \exists i.A$	if $\sigma \models^{\rho(i:=n)} A$ pour un $n \in \mathbb{N}$
$\bot \models^{\rho} A$	if *rien*



Quelques résultats

On peut prouver que pour n'importe quelle valuation ρ

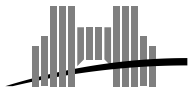
– $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \textbf{true}$ si et seulement si $\sigma \models^{\rho} b$

– $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \textbf{false}$ si et seulement si $\sigma \not\models^{\rho} b$

– $\mathcal{A}v[\![a]\!]\rho(i{:=}n)\sigma = \mathcal{A}v[\![a[i \leftarrow n]]\!]\rho\sigma$

Satisfaction d'une assertion de correction

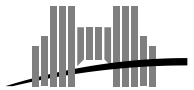
$$\models^{\rho} \{A\}\, c\, \{B\} \quad \text{iff} \quad \forall \sigma : \Sigma . \sigma \models^{\rho} A \Rightarrow \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \models^{\rho} B$$



Validité d'une assertion de correction

$\models \{A\}\, c\, \{B\}$ iff pour toute valuation ρ et tout état σ

$$\sigma \models^{\rho} \{A\}\, c\, \{B\}$$



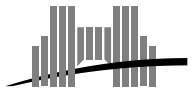
Les règles de correction partielle 1/4

Règle de l'instruction vide :

$$\{A\}\ \textbf{skip}\ \{A\}$$

Règle de l'affectation :

$$\{B[X \leftarrow a]\}\ X := a\ \{B\}$$



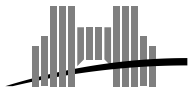
Les règles de correction partielle 2/4

Règle de la composition séquentielle

$$\frac{\{A\}\ c_0\ \{C\} \quad \{C\}\ c_1\ \{B\}}{\{A\}\ c_0; c_1\ \{B\}}$$

Règle de la composition conditionnelle :

$$\frac{\{A \wedge b\}\ c_0\ \{C\} \quad \{\neg b \wedge C\}\ c_1\ \{B\}}{\{A\}\ \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\ \{B\}}$$



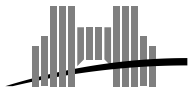
Les règles de correction partielle 3/4

Règle de la boucle :

$$\frac{\{b \wedge I\}\, c\, \{I\}}{\{I\}\ \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c\ \{\neg b \wedge I\}}$$

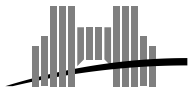
Règle de conséquence :

$$\frac{\vDash A \Rightarrow A' \quad \{A'\}\, c\, \{B'\} \quad \vDash B' \Rightarrow B}{\{A\}\, c\, \{B\}}$$



Les règles de correction partielle 4/4

Remarquer que la règle de conséquence s’appuie sur des propriétés «valides».



L'exemple

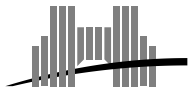
Remarquons que l'on utilise la règle de conséquence, car

$$\vDash r \geq y \wedge r \geq 0 \wedge x = q \times y + r \Rightarrow r - y \geq 0 \wedge x = (q+1) \times y + r - y$$

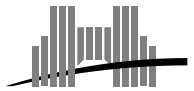
$$\{r - y \geq 0 \wedge x = (q+1) \times y + r - y\}\ r := r - y; q := q + 1\ \{r \geq 0 \wedge x = q \times y + r\}$$

$$\vDash r \geq 0 \wedge x = q \times y + r \Rightarrow r \geq 0 \wedge x = q \times y + r$$

$$\{r \geq y \wedge r \geq 0 \wedge x = q \times y + r\}\ r := r - y; q := q + 1\ \{r \geq 0 \wedge x = q \times y + r\}$$



Correction de la sémantique axiomatique



Correction (cas des expressions arithmétiques)

Lemme : Soient ρ une valuation, $a \in$ **Aexpv**, $a_0 \in$ **Aexpv**, $X \in$ **Loc**, $\sigma \in \Sigma$

$$\mathcal{A}v[\![a_0[a/X]]\!]\rho\sigma \quad = \quad \mathcal{A}v[\![a_0]\!]\rho(\sigma[\mathcal{A}v[\![a]\!]\rho\sigma/X])$$

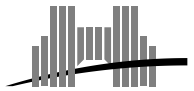
Correction (cas des expressions booléennes)

Lemme : Soient ρ une valuation, $a \in$ **Aexp**, $X \in$ **Loc**, $\sigma \in \Sigma$ et B une expression booléenne de **Bexpv**

$$\sigma \models^{\rho} B[X \leftarrow a] \quad \text{ssi} \quad \sigma[\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma / X] \models^{\rho} B$$

Correction (cas des instructions)

Théorème : Si $\vdash \{A\}\ c\ \{B\}$ alors $\models \{A\}\ c\ \{B\}$.



Correction (cas des instructions)

Théorème : Si $\vdash \{A\}\ c\ \{B\}$ alors $\models \{A\}\ c\ \{B\}$.

Démonstration :

La démonstration se fait par induction sur la preuve de $\vdash \{A\}\ c\ \{B\}$.

– *Correction de* ***skip***. Dans ce cas, $A \equiv B$

et on a $\vdash \{A\}$ **skip** $\{A\}$.

Comme $\mathcal{C}[\![\textbf{skip}]\!]\sigma = \sigma$, clairement

$$\sigma \models^{\rho} A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}[\![\textbf{skip}]\!]\sigma \models^{\rho} A$$

donc $\models \{A\}$ **skip** $\{A\}$.

Correction (cas des instructions)

– *Correction de l'affectation*. Si c est $X := a$ alors $A \equiv B[X \leftarrow a]$.

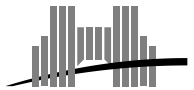
Comme on a $\sigma \vDash^{\rho} B[X \leftarrow a]$ ssi $\sigma[\mathcal{A}[\![a]\!]\sigma / X] \vDash^{\rho} B$,

(par le lemme précédent).

alors clairement

$$\sigma \vDash^{\rho} B[X \leftarrow a] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}[\![X := a]\!]\sigma \vDash^{\rho} B$$

donc $\vDash \{B[X \leftarrow a]\}\ X := A\ \{B\}$.



Correction (cas des instructions)

– *Correction de la composition séquentielle*.

Supposons $\vdash \{A\}\ c_0; c_1\ \{B\}$, alors il existe C

telle que $\vdash \{A\}\ c_0\ \{C\}$ et $\vdash \{C\}\ c_1\ \{B\}$

et par induction, $\vDash \{A\}\ c_0\ \{C\}$ et $\vDash \{C\}\ c_1\ \{B\}$.

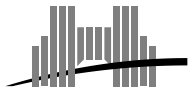
Soit ρ une valuation quelconque et σ un état tel que $\sigma \vDash^\rho A$.

Parce que $\vDash^\rho \{A\}\ c_0\ \{C\}$, on a $\mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma \vDash^\rho C$

duquel associé à $\vDash^\rho \{C\}\ c_1\ \{B\}$ on tire $\mathcal{C}[\![c_1]\!](\mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma) \vDash^\rho B$,

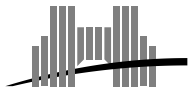
c'est-à-dire $\mathcal{C}[\![c_0; c_1]\!]\sigma \vDash^\rho B$ (par définition de $\mathcal{C}[\![\_]\!]$).

Donc $\vDash \{A\}\ c_0; c_1\ \{B\}$.



Correction (cas des instructions)

– *Correction de la composition conditionnelle*. En exercice !



Correction (cas des instructions)

– *Correction de la boucle*.

Supposons que $\vdash \{A\}$ **while** b **do** $c' \{B\}$.

On a forcément $B \equiv A \wedge \neg b$.

On a aussi $\vdash \{A \wedge b\}\ c' \{A\}$.

Donc $\vDash \{A \wedge b\}\ c' \{A\}$.

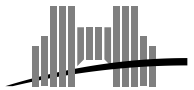
On va démontrer $P(n)$ par induction sur n, où

$$P(n) \quad \triangleq \quad (\forall \sigma \in \Sigma) \quad \sigma \vDash^{\rho} A \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{n}_{\mathcal{C}[\![c']\!]}(\bot)(\sigma) \vDash^{\rho} A \wedge \neg b.$$

Il s'ensuivra que

$$\sigma \vDash^{\rho} A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c']\!](\sigma) \vDash^{\rho} A \wedge \neg b.$$

et donc $\vDash \{A\}$ **while** b **do** $c' \{A \wedge \neg b\}$



Correction (cas des instructions)

Preuve de $(\forall \sigma \in \Sigma) \quad \sigma \models^{\rho} A \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{n}_{\mathcal{C}[\![c']\!]}(\bot)(\sigma) \models^{\rho} A \wedge \neg b.$

- Si $n = 0$ alors $\Gamma^{n}_{\mathcal{C}[\![c']\!]}(\bot)(\sigma) = \bot(\sigma) = \bot$

donc $\Gamma^{n}_{\mathcal{C}[\![c']\!]}(\bot)(\sigma) \models^{\rho} A \wedge \neg b$.

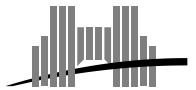
- Rappelons que $\Gamma^{n+1}_{\mathcal{C}[\![c']\!]}(\bot)$ est défini sur les états σ tels que

– $\mathcal{C}[\![c']\!]^{i}\sigma$ est défini pour $i \leq n+1$

– et $\mathcal{B}[\![b]\!](\mathcal{C}[\![c']\!]^{i}\sigma) =$ **true** pour $i \leq n$, tandis que $\mathcal{B}[\![b]\!](\mathcal{C}[\![c']\!]^{n+1}\sigma) =$ **false**.

Et on a

$$\Gamma^{n+1}_{\mathcal{C}[\![c']\!]}(\bot)(\sigma) \quad = \quad \mathcal{C}[\![c']\!]^{n+1}\sigma.$$



Correction (cas des instructions)

D'où on tire $\mathcal{C}[\![c']\!]^{n+1}(\sigma) \models^{\rho} \neg b$, par définition de $\mathcal{C}[\![\_]\!]$.

D'autre part par induction

$$\mathcal{C}[\![c']\!](\sigma) \models^{\rho} A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}[\![c']\!]^{n+1}(\sigma) \models^{\rho} A$$

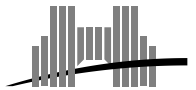
Or par hypothèse $\models \{A \wedge b\}\ c'\ \{A\}$,

donc $\sigma' \models^{\rho} A$ et $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma'$ impliquent $\mathcal{C}[\![c']\!](\sigma') \models^{\rho} A$.

Donc $\sigma \models^{\rho} A \Rightarrow \mathcal{C}[\![c']\!]^{n+1}(\sigma) \models^{\rho} A$.

D'autre part, $\neg\mathcal{B}[\![b]\!]\mathcal{C}[\![c']\!]^{n+1}\sigma$ signifie $\mathcal{C}[\![c']\!]^{n+1}(\sigma) \models^{\rho} \neg b$.

Donc $\sigma \models^{\rho} A \Rightarrow \mathcal{C}[\![c']\!]^{n+1}(\sigma) \models^{\rho} A \wedge \neg b$.



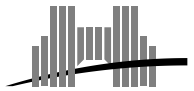
Correction (cas des instructions)

– *Correction de la règle de conséquence*. Supposons qu'on ait
  – $\models A \Rightarrow A'$,
  – $\vdash \{A'\}\, c\, \{B'\}$ donc par induction $\models \{A'\}\, c\, \{B'\}$
  – et $\models B' \Rightarrow B$.

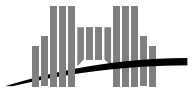
  Soit une valuation ρ. Supposons qu'on ait $\sigma \models^{\rho} A$, alors $\sigma \models^{\rho} A'$.

  Donc $\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \models^{\rho} B'$, donc aussi $\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \models^{\rho} B$.

  Par conséquent $\models \{A\}\, c\, \{B\}$.



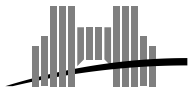
Complétude de la sémantique axiomatique



Précondition la plus faible

Quand on veut prouver $\{A\}\ c_0; c_1\ \{B\}$, la question se pose de savoir si on peut trouver une assertion C à mettre au milieu c'est-à-dire tel que $\{A\}\ c_0\ \{C\}$ et $\{C\}\ c_1\ \{B\}$.

L'idée c'est de la construire comme la précondition la plus faible associée à B et à l'instruction c_1.



Précondition la plus faible

Tout d'abord on définit un ensemble d'états (pas une assertion !) :

$$wp^{\rho}[\![c, B]\!] =^{def} \{\sigma \in \Sigma_{\perp} \mid \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \models^{\rho} B\}.$$

C'est-à-dire l'image inverse par la fonction $\mathcal{C}[\![c]\!]$ de l'ensemble

$$\{\sigma' \in \Sigma_{\perp} \mid \sigma' \models^{\rho} B\}.$$

Précondition la plus faible

Supposons qu'il existe une assertion A_0 telle que pour toute valuation ρ, on ait $\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \models^\rho A_0\} = wp^\rho[\![c, B]\!]$.

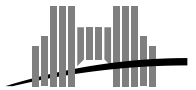
Alors

$$\models^\rho \{A\}\, c\, \{B\} \quad \text{ssi} \models^\rho A \Rightarrow A_0$$

autrement dit

$$\models \{A\}\, c\, \{B\} \quad \text{ssi} \models A \Rightarrow A_0$$

Avec la règle de conséquence on devrait pouvoir construire les preuves de correction partielle d'un programme.



Expressivité

Un langage d'assertions est expressif si

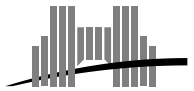
pour toute instruction c et toute assertion B

il existe une assertion, notée $w[\![c, B]\!]$, telle que

pour toute valuation ρ on ait

$$\{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \models^{\rho} w[\![c, B]\!]\} = wp^{\rho}[\![c, B]\!]$$

Attention : $w[\![c, B]\!]$ est une expression du langage, alors que $wp^{\rho}[\![c, B]\!]$ est un sous-ensemble de Σ.



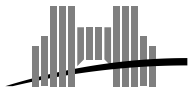
Expressivité

Théorème : **Aexpv** est expressif.

Démonstration :

On l'obtient au prix de codages à la Gödel.

Voyez le livre de Glynn Winskel The Formal semantics of programming language.



Complétude

Les règles de la sémantique axiomatique forment un système complet.

Théorème : (Cook) Si $\models \{A\}\ c\ \{B\}$ alors $\vdash \{A\}\ c\ \{B\}$.

Complétude

Démonstration : En gros on arrive à montrer que

$$\models \{A\}\, c\, \{B\}$$

implique

$$\vdash \{w[\![c, B]\!]\}\, c\, \{B\}$$

où $w[\![c, B]\!]$ est une assertion qui exprime la précondition la plus faible, associée à B et à c.

On peut aussi montrer $\models A \Rightarrow w[\![c, B]\!]$.

Et donc on conclut par la règle de conséquence.