

Magistère d'Informatique et Modélisation

Corrigé de sémantique

8 janvier 2003

Exercice 1

Il faut calculer $\llbracket \lambda x.xx \rrbracket^{DA} = G(\lambda d.F(d)(d))$. Tout d'abord on note que

$$F(d)(d) = \{b \mid (\exists \beta \subseteq d) (\beta, b) \in d\}$$

donc

$$\begin{aligned}\llbracket \lambda x.xx \rrbracket^{DA} &= G(\lambda d.F(d)(d)) \\ &= \{(\gamma, c) \mid c \in \{b \mid (\exists \beta \subseteq \gamma) (\beta, b) \in \gamma\}\} \\ &= \{(\gamma, c) \mid (\exists \beta \subseteq \gamma) (\beta, c) \in \gamma\}\end{aligned}$$

Finalement on a

$$\begin{aligned}F(\llbracket \lambda x.xx \rrbracket^{DA})(\llbracket \lambda x.xx \rrbracket^{DA}) &= \{d \mid (\exists \delta \subseteq \llbracket \lambda x.xx \rrbracket^{DA}) (\delta, d) \in \llbracket \lambda x.xx \rrbracket^{DA}\} \\ &= \{d \mid (\exists \delta \subseteq \llbracket \lambda x.xx \rrbracket^{DA}) (\exists \beta \subseteq \delta) (\beta, d) \in \delta\} \\ &= \{d \mid (\exists \delta \subseteq B)(\exists \beta \subseteq d) (\beta, d) \in \delta \wedge (d \text{ fini}) \\ &\quad \wedge [(\gamma, c) \in \delta \Rightarrow (\exists \zeta \subseteq \gamma) (\zeta, c) \in \gamma]\}.\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Le programme qui calcule le cube est \mathcal{P}_2 .
2. Une postcondition est $p = n^3$. Pour l'écrire dans le langage **Aexp** des expressions arithmétiques de IMP, on peut considérer $n \times n \times n$ au lieu n^3 .
3. Un invariant de la boucle est

$$p = (i \times i \times i) \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \leq n.$$

Les étapes de la figure 1 permettent de prouver

$$\begin{aligned}\mathbf{Pre} : p &= (i \times i \times i) \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \leq n \quad \wedge \quad i \langle n \\ p &:= p + q + 1; \\ i &:= i + 1; \\ q &:= q + (6 \times i)\end{aligned}$$

$$\mathbf{Post} : p = (i \times i \times i) \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \leq n$$

On voit que $\mathbf{Pre} \Rightarrow \mathbf{Pre}_0$, que $\mathbf{Pre}_0 \Rightarrow \mathbf{Pre}_1$, que $\mathbf{Post}_1 \Rightarrow \mathbf{Pre}_2$ et que $\mathbf{Post}_2 \Rightarrow \mathbf{Pre}_3$, ce qui permet d'appliquer trois fois la *règle de conséquence*. De plus $\mathbf{Post}_3 \equiv \mathbf{Post}$. Les conditions \mathbf{Pre}_i et \mathbf{Post}_i sont chaque fois des applications de la *règle d'affectation*.

En application de la *règle de la boucle*, on a

$$p = (i \times i \times i) \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \leq n \quad \wedge \quad \neg(i \langle n).$$

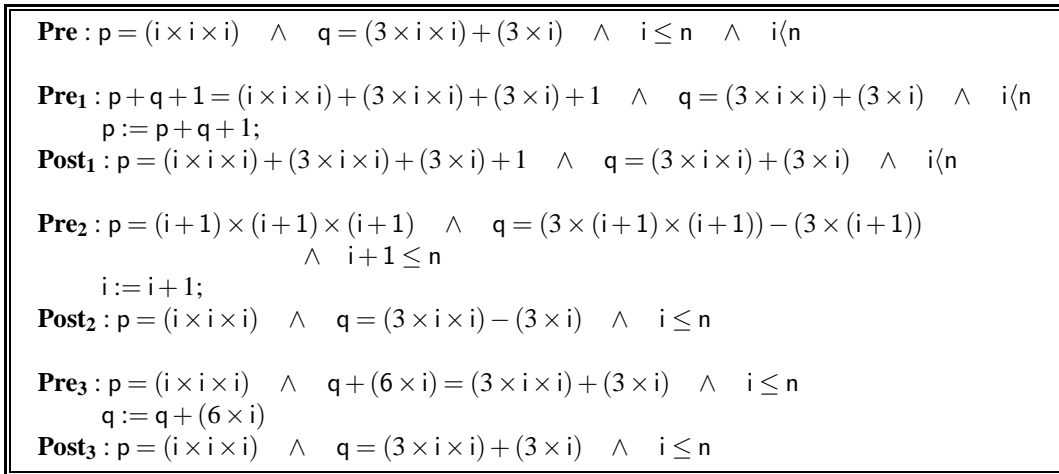


FIG. 1 – Les trois affectations de la boucle

ce qui implique clairement

$$q = n \times n \times n.$$

Reste à prouver que l'invariant est une postcondition des trois premières instructions (voir figure 2). La précondition de ces trois affectations qui correspond à $p = (i \times i \times i) \wedge q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \wedge i \leq n$ est $0 = (0 \times 0 \times 0) \wedge 0 = (3 \times 0 \times 0) + (3 \times 0) \wedge 0 \leq n$ qui est clairement vraie.

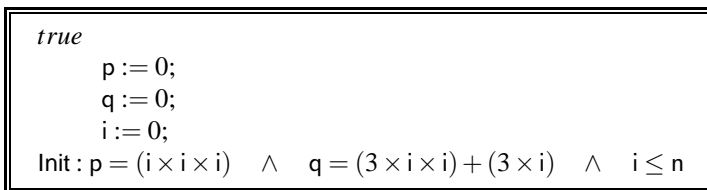


FIG. 2 – Les trois premières affectations

Exercice 3

Pour la question 1, un système possible est :

- SERVEUR = Rien | A | B | C
- Rien = $\text{requete}(x).\bar{x}\langle \text{rapide1}, \text{libere1} \rangle.R1$
- R1 = $\text{requete}(x).\bar{x}\langle \text{rapide2}, \text{libere2} \rangle.\text{Tout} \mid \overline{\text{rapide1}}.\overline{\text{libere1}}.Rien$
- R2 = $\text{requete}(x).\bar{x}\langle \text{rapide1}, \text{libere1} \rangle.\text{Tout} \mid \overline{\text{rapide2}}.\overline{\text{libere2}}.Rien$
- Tout = $\overline{\text{rapide1}}.\overline{\text{libere1}}.R1 \mid \overline{\text{rapide2}}.\overline{\text{libere2}}.R2$
- A = $\overline{\text{requete}}\langle a \rangle.a(y,z).y.z$
- B = $\overline{\text{requete}}\langle b \rangle.b(y,z).y.z$
- C = $\overline{\text{requete}}\langle c \rangle.c(y,z).y.z$

Pour la question 2,

SERVEUR $\rightarrow \bar{a}\langle \text{rapide1}, \text{libere1} \rangle . R1 \mid a(y, z) . y . z \mid B \mid C$
 $\rightarrow R1 \mid \text{rapide1} . \text{libere1} \mid B \mid C$
 $\rightarrow \bar{b}\langle \text{rapide2}, \text{libere2} \rangle . \text{Tout} \mid \text{rapide1} . \text{libere1} \mid b(y, z) . y . z \mid C$
 $\rightarrow \text{Tout} \mid \text{rapide1} . \text{libere1} \mid \text{rapide2} . \text{libere2} \mid C$
 $= \overline{\text{rapide1} . \text{libere1}} . R1 \mid \overline{\text{rapide2} . \text{libere2}} . R2 \mid \text{rapide1} . \text{libere1} \mid \text{rapide2} . \text{libere2} \mid C$
 $\rightarrow \overline{\text{rapide1} . \text{libere1}} . R1 \mid \overline{\text{libere2}} . R2 \mid \text{rapide1} . \text{libere1} \mid \text{libere2} \mid C$
 $\rightarrow \overline{\text{rapide1} . \text{libere1}} . R1 \mid R2 \mid \text{rapide1} . \text{libere1} \mid C$