Magistère d'Informatique et Modélisation

Corrigé de sémantique

8 janvier 2003

Exercice 1

Il faut calculer $[\![\lambda x.xx]\!]^{D_A} = G(\lambda dF(d)(d))$. Tout d'abord on note que

$$F(d)(d) \quad = \quad \{b \mid (\exists \beta \subseteq d)\ (\beta, b) \in d\}$$

donc

$$\begin{aligned}
[\![\lambda x.xx]\!]^{D_A} &= G(\lambda d.F(d)(d)) \\
&= \{(\gamma, c) \mid c \in \{b \mid (\exists \beta \subseteq \gamma)\ (\beta, b) \in \gamma\}\} \\
&= \{(\gamma, c) \mid (\exists \beta \subseteq \gamma)\ (\beta, c) \in \gamma\}
\end{aligned}$$

Finalement on a

$$\begin{aligned}
F([\![\lambda x.xx]\!]^{D_A})([\![\lambda x.xx]\!]^{D_A}) &= \{d \mid (\exists \delta \subseteq [\![\lambda x.xx]\!]^{D_A})\ (\delta, d) \in [\![\lambda x.xx]\!]^{D_A}\} \\
&= \{d \mid (\exists \delta \subseteq [\![\lambda x.xx]\!]^{D_A})\ (\exists \beta \subseteq \delta)\ (\beta, d) \in \delta\} \\
&= \{d \mid (\exists \delta \subseteq B)(\exists \beta \subseteq d)\ (\beta, d) \in \delta \wedge (d \text{ fini}) \\
&\qquad \wedge [(\gamma, c) \in \delta \Rightarrow (\exists \zeta \subseteq \gamma)\ (\zeta, c) \in \gamma]\}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Le programme qui calcule le cube est $\mathcal{P}_2$.
2. Une postcondition est $\mathsf{p} = \mathsf{n}^3$. Pour l'écrire dans le langage **Aexp** des expressions arithmétiques de IMP, on peut considérer $\mathsf{n} \times \mathsf{n} \times \mathsf{n}$ au lieu n^3.
3. Un invariant de la boucle est

   $$\mathsf{p} = (\mathsf{i} \times \mathsf{i} \times \mathsf{i}) \quad \wedge \quad \mathsf{q} = (3 \times \mathsf{i} \times \mathsf{i}) + (3 \times \mathsf{i}) \quad \wedge \quad \mathsf{i} \leq \mathsf{n}.$$

   Les étapes de la figure 1 permettent de prouver
   Pre : $\mathsf{p} = (\mathsf{i} \times \mathsf{i} \times \mathsf{i}) \quad \wedge \quad \mathsf{q} = (3 \times \mathsf{i} \times \mathsf{i}) + (3 \times \mathsf{i}) \quad \wedge \quad \mathsf{i} \leq \mathsf{n} \quad \wedge \quad \mathsf{i} \langle \mathsf{n}$
   $\mathsf{p} := \mathsf{p} + \mathsf{q} + 1;$
   $\mathsf{i} := \mathsf{i} + 1;$
   $\mathsf{q} := \mathsf{q} + (6 \times \mathsf{i})$
   Post : $\mathsf{p} = (\mathsf{i} \times \mathsf{i} \times \mathsf{i}) \quad \wedge \quad \mathsf{q} = (3 \times \mathsf{i} \times \mathsf{i}) + (3 \times \mathsf{i}) \quad \wedge \quad \mathsf{i} \leq \mathsf{n}$
   On voit que **Pre** $\Rightarrow$ $\mathbf{Pre_0}$, que $\mathbf{Pre_0} \Rightarrow \mathbf{Pre_1}$, que $\mathbf{Post_1} \Rightarrow \mathbf{Pre_2}$ et que $\mathbf{Post_2} \Rightarrow \mathbf{Pre_3}$, ce qui permet d'appliquer trois fois la *règle de conséquence*. De plus $\mathbf{Post_3} \equiv$ **Post**. Les conditions $\mathbf{Pre_i}$ et $\mathbf{Post_i}$ sont chaque fois des applications de la *règle d'affectation*.
   En application de la *règle de la boucle*, on a

   $$\mathsf{p} = (\mathsf{i} \times \mathsf{i} \times \mathsf{i}) \quad \wedge \quad \mathsf{q} = (3 \times \mathsf{i} \times \mathsf{i}) + (3 \times \mathsf{i}) \quad \wedge \quad \mathsf{i} \leq \mathsf{n} \quad \wedge \quad \neg(\mathsf{i} \langle \mathsf{n}).$$

Pre : $p = (i \times i \times i) \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \leq n \quad \wedge \quad i \langle n$

Pre₁ : $p + q + 1 = (i \times i \times i) + (3 \times i \times i) + (3 \times i) + 1 \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \langle n$
$p := p + q + 1;$
Post₁ : $p = (i \times i \times i) + (3 \times i \times i) + (3 \times i) + 1 \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \langle n$

Pre₂ : $p = (i+1) \times (i+1) \times (i+1) \quad \wedge \quad q = (3 \times (i+1) \times (i+1)) - (3 \times (i+1))$
$\wedge \quad i + 1 \leq n$
$i := i + 1;$
Post₂ : $p = (i \times i \times i) \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) - (3 \times i) \quad \wedge \quad i \leq n$

Pre₃ : $p = (i \times i \times i) \quad \wedge \quad q + (6 \times i) = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \leq n$
$q := q + (6 \times i)$
Post₃ : $p = (i \times i \times i) \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \leq n$

FIG. 1 – Les trois affectations de la boucle

ce qui implique clairement

$$q = n \times n \times n.$$

Reste à prouver que l'invariant est une postcondition des trois premières instructions (voir figure 2). La précondition de ces trois affectations qui correspond à $p = (i \times i \times i) \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \leq n$ est $0 = (0 \times 0 \times 0) \quad \wedge \quad 0 = (3 \times 0 \times 0) + (3 \times 0) \quad \wedge \quad 0 \leq n$ qui est clairement vraie.

true
$p := 0;$
$q := 0;$
$i := 0;$
Init : $p = (i \times i \times i) \quad \wedge \quad q = (3 \times i \times i) + (3 \times i) \quad \wedge \quad i \leq n$

FIG. 2 – Les trois premières affectations

Exercice 3

Pour la question 1, un système possible est :

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{SERVEUR} & = & \mathsf{Rien} \mid \mathsf{A} \mid \mathsf{B} \mid \mathsf{C} \\
\mathsf{Rien} & = & \mathsf{requete}(x).\overline{x}\langle \mathsf{rapide1}, \mathsf{libere1} \rangle.\mathsf{R1} \\
\mathsf{R1} & = & \mathsf{requete}(x).\overline{x}\langle \mathsf{rapide2}, \mathsf{libere2} \rangle.\mathsf{Tout} \mid \overline{\mathsf{rapide1}}.\overline{\mathsf{libere1}}.\mathsf{Rien} \\
\mathsf{R2} & = & \mathsf{requete}(x).\overline{x}\langle \mathsf{rapide1}, \mathsf{libere1} \rangle.\mathsf{Tout} \mid \overline{\mathsf{rapide2}}.\overline{\mathsf{libere2}}.\mathsf{Rien} \\
\mathsf{Tout} & = & \overline{\mathsf{rapide1}}.\overline{\mathsf{libere1}}.\mathsf{R1} \mid \overline{\mathsf{rapide2}}.\overline{\mathsf{libere2}}.\mathsf{R2} \\
\mathsf{A} & = & \overline{\mathsf{requete}}\langle a \rangle.a(y,z).y.z \\
\mathsf{B} & = & \overline{\mathsf{requete}}\langle b \rangle.b(y,z).y.z \\
\mathsf{C} & = & \overline{\mathsf{requete}}\langle c \rangle.c(y,z).y.z
\end{array}$$

Pour la question 2,

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{SERVEUR} & \rightarrow & \overline{a}\langle \mathsf{rapide1}, \mathsf{libere1}\rangle.\mathsf{R1} \mid a(y,z).y.z \mid \mathsf{B} \mid \mathsf{C} \\
& \rightarrow & \mathsf{R1} \mid \mathsf{rapide1}.\mathsf{libere1} \mid \mathsf{B} \mid \mathsf{C} \\
& \rightarrow & \overline{b}\langle \mathsf{rapide2}, \mathsf{libere2}\rangle.\mathsf{Tout} \mid \mathsf{rapide1}.\mathsf{libere1} \mid b(y,z).y.z \mid \mathsf{C} \\
& \rightarrow & \mathsf{Tout} \mid \mathsf{rapide1}.\mathsf{libere1} \mid \mathsf{rapide2}.\mathsf{libere2} \mid \mathsf{C} \\
& = & \overline{\mathsf{rapide1}}.\overline{\mathsf{libere1}}.\mathsf{R1} \mid \overline{\mathsf{rapide2}}.\overline{\mathsf{libere2}}.\mathsf{R2} \mid \mathsf{rapide1}.\mathsf{libere1} \mid \mathsf{rapide2}.\mathsf{libere2} \mid \mathsf{C} \\
& \rightarrow & \overline{\mathsf{rapide1}}.\overline{\mathsf{libere1}}.\mathsf{R1} \mid \overline{\mathsf{libere2}}.\mathsf{R2} \mid \mathsf{rapide1}.\mathsf{libere1} \mid \mathsf{libere2} \mid \mathsf{C} \\
& \rightarrow & \overline{\mathsf{rapide1}}.\overline{\mathsf{libere1}}.\mathsf{R1} \mid \mathsf{R2} \mid \mathsf{rapide1}.\mathsf{libere1} \mid \mathsf{C}
\end{array}
$$