Sémantique dénotationnelle du lambda-calcul

Plan

Références

Ce cours s'appuie sur la section 3.2
du chapitre *Functional Programming and Lambda Calculus*
de Henk Barendregt
dans le *Handbook of Theoretical Computer Science*.

Le problème

Donner un modèle au lambda-calcul c'est donner un objet mathématique D

où l'espace des fonctions de D vers D
coïncide avec D lui-même.

Autrement dit, il faut construire un objet tel que $D \stackrel{?}{=} D^D$.

Pour des raisons de cardinalité, c'est impossible si l'on prend de pures fonctions.

Le problème

Mais doit-on décrire de pures fonctions ?

Le problème

Mais doit-on décrire de pures fonctions ?

Non.

On se restreint à des fonctions continues
pour une topologie fondée sur l'approximation.

Quand une fonction s'évalue, elle approxime son résultat

Le problème

Mais doit-on décrire de pures fonctions ?

Non.

On se restreint à des fonctions continues
pour une topologie fondée sur l'approximation.

Quand une fonction s'évalue, elle approxime son résultat
éventuellement indéfiniment!

Plan

Minimum et borne supérieure

Soit $(E, \sqsubseteq)$ un ensemble ordonné.

S'il existe, le minimum d'un sous-ensemble A de E est l'élément noté $\min A$ de E tel que

$$\min A \in A \quad \wedge \quad (\forall a \in A)\ \min A \sqsubseteq a.$$

Si elle existe, la borne supérieure d'un ensemble A est

$$\sup A = \min\{x \in E \mid (\forall a \in A)\ a \sqsubseteq x\}.$$

Maximum et borne inférieure

S'il existe, le maximum d'un sous-ensemble A de E est l'élément noté $\max A$ de E tel que

$$\max A \in A \quad \wedge \quad (\forall a \in A)\ a \sqsubseteq \max A.$$

Si elle existe, la borne inférieure d'un ensemble A est

$$\inf A = \max\{x \in E \mid (\forall a \in A)\ x \sqsubseteq a\}.$$

Produit cartésien d'ensembles ordonnés

Si $(A_1, \sqsubseteq_1)$ et $(A_2, \sqsubseteq_2)$ sont deux ensembles ordonnés.
Leur produit cartésien $A_1 \times A_2$ est ordonné en $(A_1 \times A_2, \sqsubseteq_1 \times \sqsubseteq_2)$ par

$$(a_1, a_2) \sqsubseteq_1 \times \sqsubseteq_2 (b_1, b_2) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \sqsubseteq_1 b_1 \wedge a_2 \sqsubseteq_2 b_2 .$$

Borne supérieure d'un produit cartésien

On remarque que

$$\begin{aligned}\sup(A_1 \times A_2) &= \sup\{(a_1, \sup A_2) \mid a_1 \in A_1\} \\ &= \sup\{(\sup A_1, a_2) \mid a_2 \in A_2\}\end{aligned}$$

Borne supérieure d'un produit cartésien

On remarque que

$$\begin{aligned}\sup(A_1 \times A_2) &= \sup\{(a_1, \sup A_2) \mid a_1 \in A_1\} \\ &= \sup\{(\sup A_1, a_2) \mid a_2 \in A_2\}\end{aligned}$$

Pour calculer la borne supérieure d'un produit cartésien on peut procéder composante par composante.

Avec d'autres notations:

$$\begin{aligned}\sup_{(a_1,a_2)\in A_1\times A_2}(a_1,a_2) &= \sup_{a_1\in A_1}\{(a_1, \sup_{a_2\in A_2} a_2)\} \\ &= \sup_{a_2\in A_2}\{(\sup_{a_1\in A_1} a_1, a_2)\}\end{aligned}$$

Plan

Treillis complet

Un ensemble ordonné $(D, \sqsubseteq)$ est un treillis complet si pour tout sous-ensemble $X \subseteq D$ la borne supérieure existe.

Par abus de notation on écrira parfois D au lieu de $(D, \sqsubseteq)$.

Quand on écrira $D, D', \ldots$ le lecteur devra comprendre sans plus de précision qu'il s'agit d'un treillis complet ordonné par $\sqsubseteq, \sqsubseteq', \ldots$.

Treillis complet

Dans un triellis complet, chaque treillis a

- un maximum top $\top = \sup D$
- et un minimum bottom $\bot = \sup \varnothing$.

Treillis complet

Dans un triellis complet, chaque treillis a

- un maximum top $\top = \sup D$
- et un minimum bottom $\perp = \sup \varnothing$.

$\perp$ est l'élément minimum de D.

En effet, D est l'ensemble des majorants de $\varnothing$.
Donc le minimum de D, qui est $\perp$,
est aussi le minimum des majorants de $\varnothing$.
$\perp$ est donc bien la borne supérieure de $\varnothing$.

Treillis complet

Dans un triellis complet D, chaque sous-ensemble X de D a une borne inférieure.

$$\inf X = \sup\{y \mid (\forall x \in X)\ y \sqsubseteq x\}.$$

Treillis complet

Dans un triellis complet D, chaque sous-ensemble X de D a une borne inférieure.

$$\inf X = \sup\{y \mid (\forall x \in X)\ y \sqsubseteq x\}.$$

Notons tout d'abord que si $(\forall a \in A)\ a \sqsubseteq x$ alors $\sup A \sqsubseteq x$.

Treillis complet

Dans un triellis complet D, chaque sous-ensemble X de D a une borne inférieure.

$$\inf X = \sup\{y \mid (\forall x \in X)\ y \sqsubseteq x\}.$$

Notons tout d'abord que si $(\forall a \in A)\ a \sqsubseteq x$ alors $\sup A \sqsubseteq x$.

C'est la définition de la borne supérieure qui le donne.

Treillis complet

Dans un triellis complet D, chaque sous-ensemble X de D
a une borne inférieure.

$$\inf X = \sup\{y \mid (\forall x \in X)\ y \sqsubseteq x\}.$$

Notons tout d'abord que si $(\forall a \in A)\ a \sqsubseteq x$ alors $\sup A \sqsubseteq x$.

Posons $\overline{X} \triangleq \{y \mid (\forall x \in X)\ y \sqsubseteq x\}$.
Donc, $(\forall x' \in X)\ \sup \overline{X} \sqsubseteq x'$ donc $\sup \overline{X} \in \overline{X}$.
Donc $\sup \overline{X} = \max \overline{X}$.

Dirigé

Un sous-ensemble $X \subseteq D$ est un dirigé

- si $X \neq \varnothing$
- et $(\forall x, y \in X) \quad (\exists z \in X) \quad [x \sqsubseteq z \wedge y \sqsubseteq z]$.

Fonctions continues

Une application $f : D \longrightarrow D'$ est continue si pour tout dirigé $X \subseteq D$ on a $f(\sup X) = \sup f(X) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$.

Cette notion de continuité coïncide avec une topologie.

Exercice: Tout fonction continue est croissante.

Exponentiation de treillis

L'espaces de fonctions $[D \longrightarrow D']$ est donné par

$$[D \longrightarrow D'] = \{f : D \longrightarrow D' \mid f \text{ continue}\}$$

Cet ensemble est muni d'un ordre dérivé de l'ordre sur D':

$$f \sqsubseteq g \quad \Leftrightarrow \quad (\forall d \in D) \quad f(d) \sqsubseteq' g(d)$$

Produit de treillis

Proposition: $D \times D'$ est un treillis complet où pour $X \subseteq D \times D'$.

$$\sup X = (\sup(X)_0, \sup(X)_1)$$

avec

$$(X)_0 = \{d \in D \mid (\exists d' \in D') \quad (d, d') \in X\}$$

$$(X)_1 = \{d' \in D' \mid (\exists d \in D) \quad (d, d') \in X\}$$

Exponentiation de treillis

Proposition: Soit $F \subseteq [D \to D']$ un ensemble de fonction continue.
On définit $f(x) = \sup\{g(x) \mid g \in F\}$.
Alors f est continue et dans $[D \to D']$ on a $f = \sup F$.
Donc $[D \to D']$ est un treillis complet.

Preuve : Clairement f est le plus petit des majorants de F.

$$\begin{aligned} f(\sup X) &= \sup_{g \in F} g(\sup X) \\ &= \sup_{g \in F} \sup_{x \in X} g(x) \\ &= \sup_{x \in X} \sup_{g \in F} g(x) \\ &= \sup_{x \in X} f(x) \end{aligned}$$

Donc f est continue.

Commutation de sup et λ

Soit λx la λ-abstraction dans la théorie des ensembles.
Autrement dit, si $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ est le graphe d'une fonction, $\lambda x.f(x)$ est la fonction au sens ensembliste qui lui est associée.

$$\sup\{\lambda x.f(x) \mid f \in F\} = \lambda x.\sup\{f(x) \mid f \in F\}$$

Bottom

On voit que

$$\begin{aligned}\perp_{D \times D'} &= (\perp_D, \perp_{D'}) \\ \perp_{[D \to D']} &= \lambda d . \perp_{D'}\end{aligned}$$

Pour $\perp_{D \times D'}$ cela vient du fait que $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$.
D'autre part, $\lambda d . \perp_{D'}$ est une fonction continue et elle minore toutes les autres fonctions.

Points fixes

Proposition: Si $f \in [D \longrightarrow D]$ alors f a une point fixe défini par

$$Fix(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$$

Points fixes

Proposition: Si $f \in [D \to D]$ alors f a une point fixe défini par

$$Fix(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$$

On prouve par récurrence que $\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dirigé. Donc

$$f(Fix(f)) = f(\sup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f(f^n(\perp))) = Fix(f).$$

Si x est un autre point fixe de f alors $f(x) = x$ et $\perp \sqsubseteq x$,
donc par croissance de f, on a $f^n(\perp) \sqsubseteq f^n(x) = x$.
Donc $Fix(f) \sqsubseteq x$

Continuité sur un produit

Proposition: Soit $f : D \times D' \to D''$. f est continue si f est continue en chacune de ses composantes, autrement dit, si

- pour tout x'_0, $\lambda x.f(x, x'_0)$ est continue,
- pour tout x_0, $\lambda x.f(x_0, x)$ est continue.

Continuité de Ap

Proposition: La fonction $Ap : [D \rightarrow D'] \times D \quad \rightarrow D'$
définie par $Ap(f, x) = f(x)$ est continue.

Continuité de λ

Proposition: Soit $f : [D \times D' \to D'']$.
Pour tout $x \in D$, on a

- $\lambda y.f(x,y) \in [D' \to D'']$.
- $\lambda x.\lambda y.f(x,y) \in [D \to [D' \to D'']]$,
  autrement dit la fonction $x \mapsto \lambda y.f(x,y)$
  est une fonction continue.

Plan

Rétraction et réflexivité

D est une rétraction de D' (noté $D < D'$)
s'il existe des fonctions continues

- $F \in [D' \to D]$,
- $G \in [D \to D']$,
- $F \circ G = id_D$,

D est réflexif si $[D \to D] < D$

Rétraction

Si $D < D'$ par F et G alors F est surjective et G est injective.
On peut donc identifier D avec son image par G, c'est-à-dire $G(D) \subseteq D'$.
Alors F rétrécit (fait se rétracter) l'espace le plus grand D'
vers le plus petit D.

Nous allons voir maintenant comment un treillis réflexif peut-être utilisé pour modéliser le λ-calcul.

Quelques notations

Soit D réflexif via F et G.
F est une rétraction de D vers $[D \to D]$.
Donc pour $x \in D$ on a $F(x) \in [D \to D]$.
De cette façon les éléments de D deviennent des fonctions sur D

$$x \bullet_F y = F(x)(y) \qquad \in D$$

Inversement G fait d'une fonction continue sur D un élément de D.
On peut écrire pour chaque f continue.

$$\lambda^G x \cdot f(x) = G(f) \qquad \in D$$

Interprétation des λ-termes

Une valuation dans D est une application $\rho : Var \longrightarrow D$.
On peut modifier une valuation en un point:

$$\rho(x{:=}d) = \begin{cases} \rho(y) & \text{if } y \not\equiv x \\ d & \text{if } y \equiv x \end{cases}$$

Interprétation des λ-termes

On note $[\![M]\!]^D_\rho$ l'interprétation dans D sous la valuation ρ

M	$[\![M]\!]^D_\rho$
x	$\rho(x)$
$P\ Q$	$[\![P]\!]^D_\rho \bullet_F [\![Q]\!]^D_\rho$
$\lambda x.P$	$\lambda^G d \cdot [\![P]\!]^D_{\rho(x:=d)}$

Des exemples 1/2

$$
\begin{aligned}
[\![\lambda x.x]\!]^D_\rho &= \lambda^G d \cdot d \\
[\![\lambda x.\lambda y.x]\!]^D_\rho &= \lambda^G d \cdot [\![\lambda y.x]\!]^D_{\rho(x:=d)} \\
&= \lambda^G d \cdot \lambda^G d' \cdot [\![x]\!]^D_{\rho(x:=d)(y:=d')} \\
&= \lambda^G d \cdot \lambda^G d' \cdot d \\
&= G(\boldsymbol{\lambda} d.G(\boldsymbol{\lambda} d'.d))
\end{aligned}
$$

Des exemples 2/2

$$
\begin{aligned}
[\![\lambda x.xy]\!]^D_\rho &= \lambda^G d \cdot (d \bullet_F \rho(y)) \\
&= G(\lambda d.F(d)(\rho(y))) \\
[\![\lambda x.xx]\!]^D_\rho &= \lambda^G d \cdot (d \bullet_F d) \\
&= G(\lambda d.F(d)(d))
\end{aligned}
$$

Exercice

Exercice: Calculer $[\![(\lambda x.xy)(\lambda z.z)]\!]^{D}_{\rho}$.

Exercice

Exercice: Calculer $[\![(\lambda x.xy)(\lambda z.z)]\!]^D_\rho$.

$$\begin{array}{rcl}
[\![(\lambda x.xy)(\lambda z.z)]\!]^D_\rho & = & [\![(\lambda x.xy)]\!]^D_\rho \bullet_F [\![(\lambda z.z)]\!]^D_\rho \\
& = & F(G(\boldsymbol{\lambda} d.F(d)(\rho(y))))(G(\boldsymbol{\lambda} d'.d')) \\
& = & (\boldsymbol{\lambda} d.F(d)(\rho(y)))\ (G(\boldsymbol{\lambda} d'.d')) \\
& = & F(G(\boldsymbol{\lambda} d'.d'))(\rho(y)) \\
& = & (\boldsymbol{\lambda} d'.d')(\rho(y)) \\
& = & \rho(y) \\
& = & [\![y]\!]^D_\rho
\end{array}$$

Notations

Clairement $[\![M]\!]^D_\rho$ ne dépend que des valeurs de ρ sur $FV(M)$.
Soit $\upharpoonright$ la restriction d'une fonction à un domaine.
On a

$$\rho \upharpoonright FV(M) = \rho' \upharpoonright FV(M) \quad \Rightarrow \quad [\![M]\!]^D_\rho = [\![M]\!]^D_{\rho'}$$

En particulier pour les termes sans variables libres (aussi appelés termes clos ou combinateurs),

- $[\![M]\!]^D_\rho$ ne dépend pas de ρ
- et on peut écrire $[\![M]\!]^D$.

De plus, si D est clair par le contexte, on écrira $[\![M]\!]$.

Théorème de correction

Théorème: Si D est réflexif,

alors D est un modèle du lambda calcul.

$$M \underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \quad \Rightarrow \quad D \models M = N$$

où $D \models M = N$ signifie que pour toute valuation ρ, $[\![M]\!]_\rho = [\![N]\!]_\rho$

Théorème de correction, démonstration 1/3

On démontre tout d'abord

$$[\![M[x := N]]\!]_\rho \quad = \quad [\![M]\!]_{\rho(x:=[\![N]\!]_\rho)}$$

Posons $P^* \equiv P[x := N]$ et $\rho^* \equiv \rho(x:=[\![N]\!]_\rho)$.

M	$[\![M^*]\!]_\rho$	$[\![M]\!]_{\rho^*}$	
x	$[\![N]\!]_\rho$	$[\![N]\!]_\rho$	
y	$\rho(y)$	$\rho(y)$	
PQ	$[\![P^*]\!]_\rho \bullet_F [\![Q^*]\!]_\rho$	$[\![P]\!]_{\rho^*} \bullet_F [\![Q]\!]_{\rho^*}$	par induction
$\lambda y.P$	$\lambda^G d.[\![P^*]\!]_{\rho(y:=d)}$	$\lambda^G d.[\![P]\!]_{\rho^*(y:=d)}$	$(\rho(y:=d))^* = \rho^*(y:=d)$

Théorème de correction, démonstration 2/3

Pour la preuve de la règle (β):

$$
\begin{array}{rcl}
[\![(\lambda x.M)N]\!]_\rho & = & (\lambda^G d.[\![M]\!]_{\rho(x:=d)}) \bullet_F [\![N]\!]_\rho \\
& = & F(G(\boldsymbol{\lambda} d.[\![M]\!]_{\rho(x:=d)}))([\![N]\!]_\rho) \\
& = & (\boldsymbol{\lambda} d.[\![M]\!]_{\rho(x:=d)})([\![N]\!]_\rho) \\
& = & [\![M]\!]_{\rho(x:=[\![N]\!]_\rho)} \\
& = & [\![M[x := N]]\!]_\rho
\end{array}
$$

Théorème de correction, démonstration 3/3

Pour la règle (ξ) on a à montrer que

$M \underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\twoheadrightarrow} N \quad \Rightarrow \lambda x.M \underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\twoheadrightarrow} \lambda x.N$ se traduit en la même règle au niveau de D, c'est-à-dire

$$D \models M = N \quad \Rightarrow \quad D \models \lambda x.M = \lambda x.N.$$

$$\begin{array}{rll}
 & (\forall \rho \in Var \to D) & [\![M]\!]_\rho = [\![N]\!]_\rho \\
\Rightarrow & (\forall \rho \in Var \to D) & [\![M]\!]_{\rho(x:=d)} = [\![N]\!]_{\rho(x:=d)} \\
\Rightarrow & (\forall \rho \in Var \to D) & \boldsymbol{\lambda} d.[\![M]\!]_{\rho(x:=d)} = \boldsymbol{\lambda} d.[\![N]\!]_{\rho(x:=d)} \\
\Rightarrow & (\forall \rho \in Var \to D) & \lambda^G d.[\![M]\!]_{\rho(x:=d)} = \lambda^G d.[\![N]\!]_{\rho(x:=d)} \\
\Rightarrow & (\forall \rho \in Var \to D) & [\![\lambda x.M]\!]_\rho = [\![\lambda x.N]\!]_\rho
\end{array}$$

Plan

Le support

A est un ensemble.

$$\begin{aligned} B_0 &= A \\ B_{n+1} &= B_n \cup \{(\beta, b) \mid b \in B_n \wedge \beta \subseteq B_n \wedge \beta \text{ est fini}\}, \\ B &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n. \end{aligned}$$

$D_A = \mathcal{P}(B) = \{x \mid x \subseteq B\}$ est un treillis complet pour l'inclusion $\subseteq$.

Le support

B est obtenu en itérant la formation des paires (β, b) à partir de $(\varnothing, a)$ pour $a \in A$.

On suppose que A ne contient que des éléments «primitifs», c-à-d pas d'éléments $(\beta, b) \in B$.

Un exemple

Soit $B_0 = \{0, 1\}$.

Alors

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(\emptyset, 0), (\{0\}, 0), (\{1\}, 0), (\{0, 1\}, 0), \\ &\quad (\emptyset, 1), (\{0\}, 1), (\{1\}, 1), (\{0, 1\}, 1)\} \\ B_2 &= \{(\emptyset, (\emptyset, 0)), \ldots, (\{(\{1\}, 0), (\{0, 1\}, 1)\},\ (\{0\}, 0)), \ldots\} \end{aligned}$$

La rétraction et l'antirétraction de D_A

On définit $F : D_A \longrightarrow [D_A \longrightarrow D_A]$ et $G : [D_A \longrightarrow D_A] \longrightarrow D_A$

$$\begin{aligned} F(x)(y) &= \{b \mid (\exists \beta \subseteq y) \quad (\beta, b) \in x\} \\ G(f) &= \{(\beta, b) \mid b \in f(\beta)\}. \end{aligned}$$

Théorème de réflexivité de D_A

Théorème: D_A est réflexif via F et G.

Théorème de réflexivité de D_A

Théorème: D_A est réflexif via F et G.

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
(F \circ G)(f)(c) &= F(\{(\delta, d) \mid d \in f(\delta)\})(c) \\
&= \{b \mid (\exists \beta \subseteq c) \quad (\beta, b) \in \{(\delta, d) \mid d \in f(\delta)\}\} \\
&= \{b \mid (\exists \beta \subseteq c) \quad b \in f(\beta)\} \\
&= \bigcup_{\beta \subseteq c} f(\beta) \qquad \text{par continuité de } f \\
&= f\Big(\bigcup_{\beta \subseteq c} \beta\Big) \\
&= f(c)
\end{aligned}
$$

Images de **I** et de **K**

$$[\![\mathbf{I}]\!]^{D_A} \quad = \quad G(\lambda x.x) = \{(\beta, b) \mid b \in \beta\}$$

Images de **I** et de **K**

$$
\begin{aligned}
[\![\mathbf{I}]\!]^{D_A} &= G(\lambda x.x) = \{(\beta, b) \mid b \in \beta\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(\lambda d'.d) &= \{(\beta, b) \mid b \in d\} \\
[\![\mathbf{K}]\!]^{D_A} &= G(\lambda d.G(\lambda d'.d)) \\
&= \{(\gamma, c) \mid c \in \{G(\lambda d'.d) \mid d \in \gamma\} \\
&= \{(\gamma, c) \mid c \in \{(\beta, b) \mid (\exists d)\ b \in d \wedge d \in \gamma\}\} \\
&= \{(\gamma, (\beta, b)) \mid (\exists d)\ b \in d \wedge d \in \gamma\}
\end{aligned}
$$

Image de **S**

Exercice: Donnez dans D_A l'image de **S** par $[\![\cdot]\!]^{D_A}$.

Théorème de cohérence du lambda calcul

Théorème: Le lambda-calcul est cohérent.

Théorème de cohérence du lambda calcul

Théorème: Le lambda-calcul est cohérent.

Démonstration : On a vu que $[\![\mathbf{K}]\!]^{D_A}$ et $[\![\mathbf{S}]\!]^{D_A}$ sont différents.

Plan

Introduction

Bornes supérieures

Treillis complet

Rétractions

Construction de réflexifs

- 1ère construction: le modèle d'Engeler
- 2ème construction: le modèle de Scott

Un exemple de construction par limite

Soit p un nombre premier.
Les entiers p-adiques (*Jean-Pierre Serre* Cours d'arithmétique (1970)), sont construits ainsi.

Un exemple de construction par limite

Soit p un nombre premier.
Les entiers p-adiques (*Jean-Pierre Serre* Cours d'arithmétique (1970)), sont construits ainsi.

Posons $A_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
C'est l'anneau des classes d'entiers (mod p^n).
Un élément de A_n définit un élément de A_{n-1}.
On obtient un homomorphisme surjectif

$$\varphi_n : A_n \longrightarrow A_{n-1}$$

de noyau $p^{n-1}A_n$.

Un exemple de construction par limite

La suite $\ldots \to A_n \to A_{n-1} \to \ldots A_2 \to A_1$ forme un «cône».

$\mathbb{Z}_p$ est la limite du cône (A_n, φ_n).
$\mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques.
Un élément a de $\mathbb{Z}_p$ est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

- $a_n \in A_n$,
- $\varphi_n(a_n) = a_{n-1}$ si $n \geq 2$.

L'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}_p$ sont définies «coordonnées par coordonnées».

Un exemple de construction par limite

$\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau du produit $\prod_{n\geq 1} A_n$.
Pour qu'un élément de $\mathbb{Z}_p$ ne soit pas inversible, il suffit qu'il ne soit pas divisible par p.
Etc.

Cône et limite d'un cône

Un cône est une suite $\ldots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \ldots A_2 \rightarrow A_1$ où chaque $\rightarrow$ est une surjection.

La limite d'un cône est une objet A tel que le diagramme ci-dessus commute pour tous $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd} A_n & A \arrow[l] \arrow[d] \\ & A_{n+1} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Cône et limite d'un cône

Si B est une autre solution

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dll] \arrow[dl] \\
A_n & & \\
 & A_{n+1} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

alors il existe un morphisme (une application) $B \longrightarrow A$ tel que

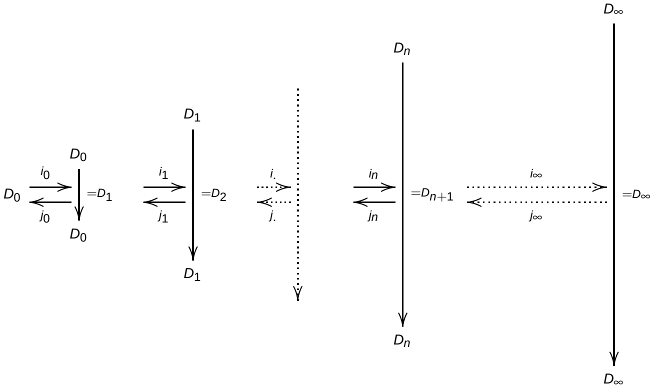
$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
A_n & A \arrow[l] \arrow[d] & \\
 & A_{n+1} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Un passage à la limite

On souhaite passer à la limite non plus des ensembles d'entiers mais des espaces de fonctions.

Plus précisément

Un passage à la limite



D_n

On prend pour D_0 un treillis complet, par exemple $\{\perp, \top\}$.
On pose

- $D_1 = [D_0 \longrightarrow D_0]$,
- $D_2 = [D_1 \longrightarrow D_1]$,
- $\vdots$
- $D_{n+1} = [D_n \longrightarrow D_n]$,
- $\vdots$

i_0 et j_0

Soit l'injection $\boxed{i_0 : D_0 \longrightarrow D_1 \quad i_0(d) = \lambda d'.d}$

et la surjection $\boxed{j_0 : D_1 \longrightarrow D_0 \quad j_0(f) = f(\perp)}$.

- i_0 et j_0 sont continues
- $i_0(\perp_{D_0}) = \perp_{[D_0 \to D_0]} = \perp_{D_1}$,
- $j_0(\perp_{D_1}) = j_0(\lambda d'.\perp_{D_0}) = (\lambda d'.\perp_{D_0})(\perp_{D_0}) = \perp_{D_0}$
- $j_0 \circ i_0 = id_0$
- $i_0 \circ j_0 \sqsubseteq id_1$

$j_0 \circ i_0$

On a $j_0 \circ i_0 = id_{D_0}$, en effet,

$$\begin{aligned} j_0 \circ i_0(d) &= j_0(\lambda d'.d) \\ &= (\lambda d'.d)(\perp_{D_0}) \\ &= d \end{aligned}$$

$i_0 \circ j_0$

Inversement $i_0 \circ j_0 \sqsubseteq id_{D_1}$, en effet

$$\begin{array}{rcl} i_0 \circ j_0(d) & = & i_0(d(\perp_{D_0})) \\ & = & \lambda d'.d(\perp_{D_0}) \\ & \sqsubseteq & d \end{array}$$

La fonction constamment égale à la valeur de d sur $\perp_{D_0}$ est plus petite que d, car d est croissante.

i_{n+1} et j_{n+1}

On définit

$$\boxed{i_{n+1}(g) = i_n \circ g \circ j_n} \qquad \boxed{j_{n+1}(g) = j_n \circ g \circ i_n}$$

On voit que

$$\begin{aligned}
i_{n+1} : [[D_n \longrightarrow D_n] \longrightarrow [D_{n+1} \longrightarrow D_{n+1}]] &\equiv [D_{n+1} \longrightarrow D_{n+2}] \\
j_{n+1} : [[D_{n+1} \longrightarrow D_{n+1}] \longrightarrow [D_n \longrightarrow D_n]] &\equiv [D_{n+2} \longrightarrow D_{n+1}] \\
j_{n+1} \circ i_{n+1} &= id_{D_{n+1}} \\
i_{n+1} \circ j_{n+1} &\sqsubseteq id_{D_{n+2}}
\end{aligned}$$

$j_{n+1} \circ i_{n+1}$

On a $j_{n+1} \circ i_{n+1} = id_{D_{n+1}}$, en effet,

$$\begin{aligned} j_{n+1} \circ i_{n+1}(g) &= j_{n+1}(i_n \circ g \circ j_n) \\ &= j_n \circ i_n \circ g \circ j_n \circ i_n \\ &= g \end{aligned}$$

$$i_{n+1} \circ j_{n+1}$$

Inversement $i_{n+1} \circ j_{n+1} \sqsubseteq id_{D_{n+2}}$, en effet

$$\begin{aligned} i_{n+1} \circ j_{n+1}(g) &= i_{n+1}(j_n \circ g \circ i_n) \\ &= i_n \circ j_n \circ g \circ i_n \circ j_n \\ &\sqsubseteq g \end{aligned}$$

D_∞

Le support de D_∞ et $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in D_n \wedge x_n = j_n(x_{n+1})\}$.

Son ordre est $\mathbf{x} \sqsubseteq_\infty \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \sqsubseteq y_n$.

De $D_\infty \longrightarrow D_\infty$ vers D_∞

Soit $f : [D_\infty \longrightarrow D_\infty]$. Posons $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.
Cela définit une suite de fonctions $f_n : [D_n \longrightarrow D_n]$.
On voit que

$$\begin{aligned} f_n(j_n(x_{n+1})) &= f_n(x_n) \\ &= y_n \\ &= j_n(y_{n+1}) \\ &= j_n(f_{n+1}(x_{n+1})) \end{aligned}$$

Donc $f_n \circ j_n = j_n \circ f_{n+1}$,.

Soit encore

$$\begin{aligned} f_n &= f_n \circ j_n \circ i_n \\ &= j_n \circ f_{n+1} \circ i_n \\ &= j_n(f_{n+1}). \end{aligned}$$

Posons $d_0 = j_0(f_0)$ et $d_{n+1} = f_n$.
La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à D_∞.
Posons donc $j_\infty : [[D_\infty \to D_\infty] \to D_\infty] : (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
j_∞ est surjective.

De D_∞ vers $[D_\infty \to D_\infty]$

Réciproquement, on définit l'injection $i_\infty : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui associe à une suite $\mathbf{x}$ de D_∞ une fonction de $[D_\infty \to D_\infty]$.

La fonction $f(\mathbf{y}) = i_\infty(\mathbf{x})(\mathbf{y})$ est définie par

$$f_n(y_n) = x_{n+1}(y_n)$$

On voit que $j_\infty \circ i_\infty = id_{D_\infty}$ et donc que j_∞ est une rétraction de D_∞.

Donc D_∞ est un modèle du lambda-calcul.