Systèmes de types

version du 14 décembre 2004 – 09 : 08

Types avec intersection

Les types avec intersection

On part du λ-calcul avec types simples et on l'enrichit par un opérateur intersection $\wedge$,

– pour servir de support à des modèles, (comme nous l'avons vu),

– pour caractériser les termes fortement normalisables.

Les types avec intersection

On part du λ-calcul avec types simples et on l'enrichit par un opérateur intersection $\wedge$,

– pour servir de support à des modèles, (comme nous l'avons vu),

– pour caractériser les termes fortement normalisables.

Nous allons essentiellement nous intéresser à la normalisation forte.

Les types avec intersection : système D

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\,(Var) \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau.}\,(Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\ N : \tau}\,(App)$$

Les types avec intersection : système D

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\,(Var) \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \longrightarrow \tau.}\,(Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \longrightarrow \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\ N : \tau}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}\,(\wedge\, I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma}\,(\wedge\, E_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M : \tau}\,(\wedge\, E_d)$$

On n'a plus de correspondance de Curry-Howard

Le système **D** ne satisfait plus la correspondance de Curry-Howard.

Les règles $(\wedge\ E_g)$, $(\wedge\ E_g)$ et $(\wedge\ I)$

ne «parlent» que du même terme.

On perd la connexion terme et preuve.

Contraction et affaiblissement

Lemme : Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si x n'apparaît pas dans Γ

alors $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$.

Lemme : Si $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ et si $x \notin FV(M)$ alors $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Types de quelques termes

$$
\dfrac{
\dfrac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \rightarrow \tau}\,{\color{red}(\wedge I_g)}
\qquad
\dfrac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma}\,{\color{red}(\wedge I_d)}
}{
\dfrac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x\, x : \tau}{\vdash \lambda x.x\, x : (\sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)) \rightarrow \tau}\,{\color{red}(App)}
}\,{\color{red}(Abs)}
$$

$$\dfrac{\dfrac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \rightarrow \tau}\,(\wedge I_g) \qquad \dfrac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma}\,(\wedge I_d)}{\dfrac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x\, x : \tau}{\vdash \lambda x.x\, x : (\sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)) \rightarrow \tau}\,(App)}\,(Abs)$$

On n'arrivera pas à typer $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$.

$$\dfrac{\dfrac{y:\alpha \vdash y:\alpha}{\vdash \lambda y.y:\alpha \to \alpha}\,(Abs) \qquad \dfrac{y:\alpha \to \alpha \vdash y:\alpha \to \alpha}{\vdash \lambda y.y:(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)}\,(Abs)}{\vdash \lambda y.y:(\alpha \to \alpha) \wedge ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha))}\,(\wedge I)$$

$$\dfrac{\dfrac{y : \alpha \vdash y : \alpha}{\vdash \lambda y.y : \alpha \to \alpha}\,(Abs) \qquad \dfrac{y : \alpha \to \alpha \vdash y : \alpha \to \alpha}{\vdash \lambda y.y : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)}\,(Abs)}{\vdash \lambda y.y : (\alpha \to \alpha) \wedge ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha))}\,(\wedge I)$$

donc

$$\vdash (\lambda x.x\, x)\,(\lambda y.y) : \alpha \to \alpha$$

en posant $\sigma := \alpha \to \alpha$ et $\tau := \alpha \to \alpha$.

Donc d'après le théorème que l'on va montrer tous ces termes sont fortement normalisables.

Les typables sont fortement normalisables

Quelques définitions

Soit $\mathcal{N}$ une partie de Λ.

Définition : Un partie $\mathcal{X}$ de Λ est $\mathcal{N}$-saturée si

pour tous $M, P_1, ..., P_n \in \Lambda$ et tout $N \in \mathcal{N}$

$$M[x := N]\, P_1 ... P_n \in \mathcal{X} \quad \Longrightarrow \quad (\lambda x.M)\; N\; P_1 ... P_n \in \mathcal{X}$$

Définition : $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y} \quad \triangleq \quad \{M \in \Lambda \mid (\forall N \in \mathcal{X}) \quad M\; N \in \mathcal{Y}\}$.

Remarque : $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$ et $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}'$ impliquent $\mathcal{X}' \hookrightarrow \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}'$.

Proposition : Si $\mathcal{Y}$ est $\mathcal{N}$-saturé, alors $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ est $\mathcal{N}$-saturé.

Proposition : Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont $\mathcal{N}$-saturés,
alors $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ est $\mathcal{N}$-saturé.

Proposition : Plus généralement, si les $\mathcal{X}_i$ sont $\mathcal{N}$-saturés,
alors $\bigcap_i \mathcal{X}_i$ est $\mathcal{N}$-saturé.

$\mathcal{N}$-interprétation

Définition : Une $\mathcal{N}$-interprétation est par définition une application, qui, à chaque type de base o, associe une partie $\mathcal{N}$-saturée de Λ,

notée $\mathcal{I}[\![o]\!]$.

On étend les interprétations aux types.

- $\mathcal{I}[\![\sigma \to \tau]\!] = \mathcal{I}[\![\sigma]\!] \hookrightarrow \mathcal{I}[\![\tau]\!]$.
- $\mathcal{I}[\![\sigma \wedge \tau]\!] = \mathcal{I}[\![\sigma]\!] \cap \mathcal{I}[\![\tau]\!]$.

Pour tout type σ, $\mathcal{I}[\![\sigma]\!]$ est $\mathcal{N}$-saturé.

Par induction sur la structure des types.

Lemme d'adéquation : Soit $\mathcal{I}$ une interprétation telle que pour tout type σ du système **D**, on ait $\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!] \subseteq \mathcal{N}$.

Si $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$ et $P_1 \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_1]\!]$,... , $P_k \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_k]\!]$,

alors $M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]$.

Commentaire : Pour les termes clos le théorème dit que

si $\vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$ alors $M \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]$.

Si on prouve que M est de type σ alors on montre que M appartient au modèle de σ.

Terminologie : La terminologie adéquation est celle de Krivine.

Certains appellent ce lemme, lemme de correction comme en logique.

La démonstration est par induction sur la preuve du typage de M.

On examine la dernière règle utilisée.

- La dernière règle utilisée est (Var).

  Alors M est l'une des variables x_i.

  Donc on a $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} x_i : \sigma_i$

  et par hypothèse

$$
\begin{aligned}
M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] & \equiv x_i[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \\
& \equiv P_i \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_i]\!]
\end{aligned}
$$

- La dernière règle est (Abs), donc
  - $M \equiv \lambda x.M'$
  - et $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} \lambda x.M' : \sigma \to \tau$.

  Par conséquent, $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k, x : \sigma \vdash_{\mathbf{D}} M' : \tau$.

  Soit un N quelconque tel que $N \in \mathcal{I}[\![\sigma]\!]$.

  Par induction, $M'[x_1 := P_1]...[x_k := P_k][x := N] \in \mathcal{I}[\![\tau]\!]$.

  Puisque $\mathcal{I}[\![\tau]\!]$ est $\mathcal{N}$-saturé et que $\mathcal{I}[\![\sigma]\!] \subseteq \mathcal{N}$ donc que $N \in \mathcal{N}$,

  on peut appliquer la définition de $\mathcal{N}$-saturation et l'on obtient $(\lambda x.M')[x_1 := P_1]...[x_k := P_k]\ N \in \mathcal{I}[\![\tau]\!]$.

  Comme N est quelconque, cela signifie que $(\lambda x.M')[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\![\sigma]\!] \hookrightarrow \mathcal{I}[\![\tau]\!]$.

  Or $\mathcal{I}[\![\sigma]\!] \hookrightarrow \mathcal{I}[\![\tau]\!] = \mathcal{I}[\![\sigma \to \tau]\!]$.

Donc $(\lambda x.M')[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma \rightarrow \tau]\!]$.

- La dernière règle est (App), donc
  - $M \equiv M_1\ M_2$,
  - $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M_1 : \tau \to \sigma$,
  - et $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M_2 : \tau$.

  Par induction $M_1[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\tau \to \sigma]\!]$ et $M_2[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\tau]\!]$.

  Puisque $\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!] \hookrightarrow \mathcal{I}\,[\![\tau]\!] = \mathcal{I}\,[\![\sigma \to \tau]\!]$, on a

  $$M_1[x_1 := P_1] \ldots [x_k := P_k]\ M_2[x_1 := P_1] \ldots [x_k := P_k] \\ \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!].$$

  C'est-à-dire $M_1\ M_2[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]$.

- La dernière règle est $(\wedge I)$, donc $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$ et $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \tau$.

  Par induction

  – $M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]$

  – et $M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\tau]\!]$.

  donc

  $M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!] \cap \mathcal{I}\,[\![\tau]\!] \equiv \mathcal{I}\,[\![\sigma \wedge \tau]\!]$.

- La dernière règle est $(\wedge E_g)$, donc

  $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma \wedge \tau$ et par induction

  $M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!] \cap \mathcal{I}\,[\![\tau]\!]$,

  donc $M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]$.

Faire en sorte que les interprétation soit dans $\mathcal{N}$

On donne maintenant une truc pour obtenir un ensemble $\mathcal{N}$ tel que pour toute $\mathcal{N}$-interprétation, on ait $\mathcal{I}[\![\sigma]\!] \subseteq \mathcal{N}$ pour tout type σ du système **D**.

Couple adapté

Définition : Un couple $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ de parties de Λ est dit adapté si

1. $\mathcal{N}$ est $\mathcal{N}$-saturé,
2. $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$ $\quad \mathcal{N}_0 \subseteq (\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{N}_0)$ $\quad (\mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$.

Lemme d'adaptation : Soit

– $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ un couple adapté,

– $\mathcal{I}$ une $\mathcal{N}$-interprétation

telle que pour tout type de base o, $\mathcal{I}\,[\![o]\!]$ soit une partie $\mathcal{N}$-saturée de $\mathcal{N}$ contenant $\mathcal{N}_0$,

alors pour tout type σ,

$\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]$ est une partie $\mathcal{N}$-saturée de $\mathcal{N}$ contenant $\mathcal{N}_0$.

$\mathcal{SN}$ = l'ensemble des termes fortement normalisables,

$\mathcal{N}_0$ = l'ensemble des termes $x\ M_1..M_n$ tels que $M_i \in \mathcal{SN}$

Proposition : $\mathcal{SN}$ est $\mathcal{SN}$-saturé.

Proposition : $\mathcal{SN}$ est $\mathcal{SN}$-saturé.

On veut montrer que pour tous $M, P_1, ..., P_n \in \Lambda$ et tout $N \in \mathcal{SN}$

$$M[x := N]\ P_1 ... P_n \in \mathcal{SN} \quad \Longrightarrow \quad (\lambda x.M)\ N\ P_1 ... P_n \in \mathcal{SN}$$

On raisonne par induction sur

$red(N) + red(M[x := N]\ \ P_1 ... P_n)$.

où $red(Q)$ est la somme des longueurs de toutes les réductions qui commencent en Q.

On considère tous les termes obtenus en contractant un redex de $(\lambda x.M)\ N\ P_1 ... P_n$.

- On contracte le redex $(\lambda x.M)\ N$. On obtient le terme $M[x := N]\ P_1 ... P_n$ qui est dans $\mathcal{SN}$ par hypothèse.
- On contracte un redex dans M, on obtient M', on a $M[x := N]\ P_1 ... P_n \xrightarrow[\beta]{} M'[x := N]\ P_1 ... P_n$, donc

$$red(N) + red(M[x := N]\ \ P_1 ... P_n)$$
$$>$$
$$red(N) + red(M'[x := N]\ \ P_1 ... P_n),$$

  et l'on peut appliquer l'hypothèse d'induction.

  On obtient $(\lambda x.M')\ N\ P_1 ... P_n \in \mathcal{SN}$.
- On contracte un redex dans P_i, même démonstration.

- On contracte un redex dans N. On obtient le terme N'. On voit que

$$red(N) + red(M[x := N]\ P_1...P_n)$$
$$>$$
$$red(N') + red(M[x := N']\ P_1...P_n),$$

  on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

  On obtient $(\lambda x.M)\ N'\ P_1...P_n \in \mathcal{SN}$.

Proposition : $(\mathcal{N}_0, \mathcal{SN})$ est adapté.

Proposition : $(\mathcal{N}_0, \mathcal{SN})$ est adapté.

La condition 1. est satisfaite par le proposition précédente.

$\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{SN}$ car les termes de $\mathcal{N}_0$ sont visiblement fortement normalisables.

$\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{SN} \hookrightarrow \mathcal{N}_0$ fait partie de la définition de $\mathcal{N}_0$.

Pour montrer $\mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{SN} \subseteq \mathcal{SN}$,
supposons $M \in \mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{SN}$ qui ne soit pas fortement normalisable.
En revanche, quand on lui applique un élément de $\mathcal{N}_0$, par exemple une variable x, on obtient $M\ x$ qui est fortement normalisable.
Contradiction.

Théorème de normalisation forte : Tout terme typable du système **D** est fortement normalisable.

Théorème de normalisation forte : Tout terme typable du système **D** est fortement normalisable.

On définit la $\mathcal{SN}$-interprétation qui associe à un type de base o, l'ensemble $\mathcal{SN}$, i. e. $\mathcal{I}\,[\![o]\!] = \mathcal{SN}$.

Soit $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$.

Par définition de $\mathcal{N}_0$, on a $x_i \in \mathcal{N}_0$, donc $x_i \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_i]\!]$.

D'après le lemme d'adéquation,

$M = M[x_1 := x_1]...[x_k := x_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]$.

Or d'après le lemme d'adaptation, $\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!] \subseteq \mathcal{SN}$.

Donc $M \in \mathcal{SN}$.

Les fortement normalisables sont typables

Les formes normales sont typables

On note $\Gamma \sqcap \Delta$ un environnement tel que :

$$\Gamma \sqcap \Delta \quad \triangleq \quad \{x : \sigma \wedge \tau \mid x : \sigma \in \Gamma \;\&\; x : \tau \in \Delta\} \cup (\Gamma \setminus \Delta) \cup (\Delta \setminus \Gamma).$$

Lemme : Si $\Gamma_1 \vdash M : \sigma$ et $\Gamma_2 \vdash M : \sigma$ alors $\Gamma_1 \sqcap \Gamma_2 \vdash M : \sigma$.

Un terme en forme normale est de la forme $\lambda x_1 ... x_n . x \; M_1 ... M_k$.

Proposition : Les formes normales sont typables.

On raisonne par induction sur la structure des formes normales.

Si $M \equiv \lambda y.M'$ est une abstraction.

Alors par induction $\Gamma, y : \sigma \vdash M : \tau$ et donc $\Gamma \vdash \lambda y.M : \sigma \rightarrow \tau$.

Supposons que $M \equiv x\ M_1 ... M_k$ n'est pas une abstraction.

Alors par induction $\Gamma_1 \vdash M_1 : \sigma_1$, ..., $\Gamma_k \vdash M_k : \sigma_k$.

Si $\boxed{x \in \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_k}$ donc $x \in \Gamma_1 \sqcap ... \sqcap \Gamma_k$ où x a un type σ.

Posons

$\Gamma \triangleq \{x : \sigma \wedge (\sigma_1 \rightarrow ... \rightarrow \sigma_k \rightarrow o)\} \cup (\Gamma_1 \sqcap ... \sqcap \Gamma_k) \setminus \{x : \sigma\}$.

On voit que

- $\Gamma \vdash x : \sigma_1 \rightarrow ... \rightarrow \sigma_k \rightarrow o$,
- $\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1$
- et $\Gamma \vdash M_k : \sigma_k$.

Donc on peut prouver que $\Gamma \vdash x\ M_1 ... M_k : \tau$.

Soit o est un type de base.

Si $\boxed{x \notin \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_k}$ Posons
$\Gamma \triangleq \{x : \sigma_1 \to ... \to \sigma_k \to o\} \cup (\Gamma_1 \sqcap ... \sqcap \Gamma_k)$.

On voit que

– $\Gamma \vdash x : \sigma_1 \to ... \to \sigma_k \to o$,

– $\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1$

– et $\Gamma \vdash M_k : \sigma_k$.

Donc on peut prouver que $\Gamma \vdash x\ M_1 ... M_k : o$.

Les stratégies perpétuelles

Une stratégie perpétuelle est une façon de trouver le redex à contracter pour réduire un terme sans détruire la non forte normalisation.

$$C[(\lambda x.M)\ N] \xrightarrow[perp]{} C[M[x := N]].$$

Si $C[(\lambda x.M)\ N]$ n'est pas fortement normalisable,

alors $C[M[x := N]]$ ne l'est pas non plus.

Ou encore si $C[M[x := N]]$ est fortement normalisable,

alors $C[(\lambda x.M)\ N]$ est fortement normalisable.

Les stratégies perpétuelles

Une stratégie perpétuelle préserve la forte normalisation par expansion.

Exemple 1

Parmi ces réductions,

$$(\lambda xy.y)\ ((\lambda z.zzz)\ (\lambda u.uu)) \quad \xrightarrow[\beta]{} \quad \lambda y.y$$

$$\xrightarrow[\beta]{} \quad (\lambda xy.y)\ ((\lambda u.uu)\ (\lambda u.uu)\ (\lambda u.uu))$$

la deuxième est perpétuelle, tandis que la première ne l'est pas.

Exemple 2

Parmi ces réductions,

$$
\begin{array}{lll}
(\lambda x.x\ (\lambda y.yy))\ (\lambda z.\mathbf{K}z(zz)) & \xrightarrow[\beta]{} & (\lambda z.\mathbf{K}z(zz))\ (\lambda y.yy) \\
 & \xrightarrow[\beta]{} & \mathbf{K}(\lambda y.yy)\ ((\lambda y.yy)(\lambda y.yy)) \\
 & \xrightarrow[\beta]{} & \mathbf{K}(\lambda y.yy)\ ((\lambda y.yy)(\lambda y.yy)) \quad \xrightarrow[\beta]{} \quad \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(\lambda x.x\ (\lambda y.yy))\ (\lambda z.\mathbf{K}z(zz)) & \xrightarrow[\beta]{} & (\lambda x.x\ (\lambda y.yy))\ (\lambda z.z) \\
 & \xrightarrow[\beta]{} & (\lambda z.z)\ (\lambda y.yy) \\
 & \xrightarrow[\beta]{} & \lambda y.yy.
\end{array}
$$

C'est la première qui est perpétuelle.

Exemple 2 (continué)

On aurait pu continuer

$$\mathbf{K}(\lambda y.yy)\ ((\lambda y.yy)(\lambda y.yy)) \quad \xrightarrow[\beta]{} \quad (\lambda y.yy)$$

Mais là encore on n'aurait pas appliqué une stratégie perpétuelle.

Redex perpétuel

On écrit NF l'ensemble des formes normales.

On peut définir un redex perpétuel $perp(M)$ dans un terme M qui n'est pas en forme normale de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} perp(\lambda x.M) & = & perp(M) \\ perp((\lambda x.P)\ N) & = & (\lambda x.P)\ N \text{ si } x \in FV(P) \text{ ou } (P \in NF \text{ et } N \in NF) \\ \text{sinon} & & \\ perp(M\ N) & = & perp(N) \quad \text{si } N \notin NF \\ perp(M\ N) & = & perp(M) \quad \text{autrement.} \end{array}$$

Une stratégie perpétuelle est une réduction qui réduit à chaque étape un redex perpétuel.

Stratégie perpétuelle et typage

Si $\mathcal{SN}$ est l'ensemble des termes fortement normalisables.

$\mathcal{SN}$ est plus petit point fixe de l'équation.

$$\mathcal{SN} = NF \cup \{M \in \Lambda \mid M \xrightarrow[perp]{} N \;\&\; N \in \mathcal{SN}\}$$

Remarque : les typables sont obtenus en itérant des expansions perpétuelles à partir des formes normales.

Lemme : Si $x \in FV(M)$ et $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$, alors il existe un environnement Γ' et un type σ tel que

- $\Gamma' \vdash N : \sigma$
- et $\Gamma', x : \sigma \vdash M : \tau$

La démonstration est par induction sur la structure de M.

Si M est une variable, alors cette variable est x

puisque $x \in FV(M)$.

Donc $M \equiv x$ alors $M[x := N] \equiv N$. On prend $\sigma = \tau$ et $\Gamma = \Gamma'$.

Si M est une abstraction $\lambda y.M'$ alors

$M[x := N] \equiv \lambda y.(M'[x := N])$ et τ est de la forme $\tau_1 \longrightarrow \tau_2$

avec $\Gamma \vdash \lambda y.(M'[x := N]) : \tau_1 \longrightarrow \tau_2$.

Puisque $\Gamma, y : \tau_1 \vdash M'[x := N] : \tau_2$,

par induction, il existe un environnement Γ' tel que

$\Gamma', y : \tau_1 \vdash N : \sigma$ et $\Gamma', y : \tau_1, x : \sigma \vdash M' : \tau_2$.

Par la convention de Barendregt $y \notin FV(N)$.

Donc $\Gamma' \vdash N : \sigma$ et $\Gamma', x : \sigma \vdash \lambda y.M' : \tau_1 \longrightarrow \tau_2$.

Si M est une application $M_1\ M_2$ alors

$M[x := N] \equiv (M_1[x := N])\ (M_2[x := N])$.

Donc il existe

- $\Gamma \vdash M_1[x := N] : \tau' \rightarrow \tau$
- et $\Gamma \vdash M_2[x := N] : \tau'$.

Si $x \notin M_1$ et $x \in M_2$, alors

– $M_1[x := N] \equiv M_1$

– $\Gamma \vdash M_1 : \tau' \rightarrow \tau$

et il existe un environnement Γ' tel que

– $\Gamma' \vdash N : \sigma$

– et $\Gamma', x : \sigma \vdash M_2 : \tau'$.

Donc $(\Gamma \sqcap \Gamma'), x : \sigma \vdash M_1 : \tau' \rightarrow \tau$

et $(\Gamma \sqcap \Gamma'), x : \sigma \vdash M_2 : \tau'$.

Ainsi $(\Gamma \sqcap \Gamma'), x : \sigma \vdash M_1\ M_2 : \tau$.

Si $x \in M_1$ et $x \notin M_2$, la démonstration est similaire.

Si $x \in M_1$ et $x \in M_2$, et il existe des environnements Γ'_1 et Γ'_2 tels que

- $\Gamma'_1 \vdash N : \sigma_1$ et $\Gamma'_1, x : \sigma_1 \vdash M_1 : \tau' \to \tau$,
- $\Gamma'_2 \vdash N : \sigma_2$ et $\Gamma'_2, x : \sigma_2 \vdash M_2 : \tau'$.

Donc

- $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2 \vdash N : \sigma_1 \wedge \sigma_2$,
- $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2, x : \sigma_1 \wedge \sigma_2 \vdash M_1 : \tau' \to \tau$, [a]
- $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2, x : \sigma_1 \wedge \sigma_2 \vdash M_2 : \tau'$, [a]

puis $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2, x : \sigma_1 \wedge \sigma_2 \vdash M_1\ M_2 : \tau$.

---

[a] A prouver, mais vous me l'acheter !

Proposition : Si P est typable et si $Q \xrightarrow[perp]{} P$ alors Q est typable.

La démonstration est par induction sur la structure de P.

Si P est une abstraction, donc $P \equiv \lambda x.P'$, alors $Q' \xrightarrow[perp]{} P'$ avec $Q \equiv \lambda x.Q'$.

Puisque P est typable, P' est typable.

Par induction Q' est typable et clairement Q est typable.

Si P est une application $M\ N$, telle que le redex perpétuel se situe dans M ou N, le résultat vient clairement par induction.

Supposons donc que P est le redex perpétuel.

- Si $P \equiv (\lambda x.M')\ N$ avec $M' \in NF$ et $N \in NF$,

  le résultat se démontre facilement.

- Si $P \equiv (\lambda x.M')\ N$ avec $x \in FV(M')$ et $Q \equiv M'[x := N]$.

  En appliquant le lemme, on démontre qu'il existe

  – $\Gamma' \vdash N : \sigma$

  – et $\Gamma', x : \sigma \vdash M' : \tau$.

  On en déduit que $\Gamma' \vdash \lambda x.M' : \sigma \to \tau$.

  Par conséquent, $\Gamma' \vdash (\lambda x.M')\ N : \tau$.

$\boxed{\text{Théorème : Si } M \text{ est fortement normalisable alors } M \text{ est typable dans } \mathbf{D}.}$

Grâce à la proposition précédente et à la remarque.

Caractérisation des fortement normalisables

Un terme est fortement normalisable

si et seulement si

il est typable dans **D**

Le système F

Le système F

Le système de type admet maintenant des quantifications.

Par exemple, on veut pouvoir écrire $\vdash \lambda x.x : \forall \alpha.(\alpha \rightarrow \alpha)$.

Le système F

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\,(Var) \qquad \frac{\Gamma, x \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau.}\,(Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\ N : \tau}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\sigma}\,(\forall\ I)$$ si α n'est libre dans aucun des types de Γ

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\sigma}{\Gamma \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]}\,(\forall\ E)$$

Le système F

$$\dfrac{\dfrac{x : \alpha \vdash x : \alpha}{\vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha}\,(Abs)}{\vdash \lambda x.x : \forall \alpha.(\alpha \to \alpha)}\,(\forall\, I)$$

Le système F

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash \lambda x.x : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)}\ (\forall I)}{\vdash \lambda x.x : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)}\ (\forall E) \qquad \dfrac{\vdots}{\vdash \lambda y.y : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)}\ (\forall I)}{\vdash (\lambda x.x)\ (\lambda y.y) : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)}\ (App)
$$

Le système F

$$
\dfrac{
\dfrac{x : \forall\alpha.\alpha \vdash x : \forall\alpha.\alpha}{x : \forall\alpha.\alpha \vdash x : \alpha \rightarrow \beta}\,(\forall\, E)
\qquad
\dfrac{x : \forall\alpha.\alpha \vdash x : \forall\alpha.\alpha}{x : \forall\alpha.\alpha \vdash x : \alpha}\,(\forall\, E)
}{
\dfrac{x : \forall\alpha.\alpha \vdash xx : \beta}{\vdash \lambda x.xx : (\forall\alpha.\alpha) \rightarrow \beta}\,(Abs)
}\,(App)
$$

Remarque : Le type $(\forall\alpha.\alpha)$ n'est habité par aucun terme clos.

On l'utilise pour noter la contradiction.

Le système F

$$
\dfrac{\dfrac{x : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \vdash x : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)}{x : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \vdash x : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)}\,(\forall\, E) \qquad x : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \vdash x : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)}{\dfrac{x : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \vdash xx : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)}{\vdash \lambda x.xx : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)}\,(Abs)}\,(App)
$$

Le système F

$(\lambda x.xx)\ (\lambda x.xx)$ n'est pas typable dans le système **F**.

En revanche, $(\lambda x.xx)\ (\lambda x.x)$ est typable dans le système **F**.

Réduction du sujet dans F

$\boxed{\text{Si } \Gamma \vdash_{\mathbf{F}} M : \sigma \text{ et si } M \xrightarrow[\beta]{} N \text{ alors } \Gamma \vdash_{\mathbf{F}} N : \sigma.}$

Les typables du système F sont fortement normalisables

La difficulté de la preuve de forte normalisation

En général, quand on définit l'interprétation des types

on la définit par des interprétations sur des types plus simples.

L'interprétation $\mathcal{I}\left[\!\left[\forall\alpha.\sigma\right]\!\right]_\rho$ ressemble à une intersection et on veut la définir par

$$\mathcal{I}\left[\!\left[\forall\alpha.\sigma\right]\!\right]_\rho = \bigcap_{\tau \text{ types}} \mathcal{I}\left[\!\left[\sigma\right]\!\right]_{\rho(\alpha:=\mathcal{I}[\![\tau]\!]_\rho)}$$

Mais cette définition conduit à un cercle vicieux.

Car τ peut être $\forall\alpha.\sigma$ lui-même.

La difficulté de la preuve de forte normalisation

Une telle théorie est dite imprédicative.

Pour résoudre ce problème, Jean-Yves Girard a défini les candidats de réductibilité.

Là aussi on considère la paire adaptée :

$\mathcal{SN}$ = l'ensemble des termes fortement normalisables,

$\mathcal{N}_0$ = l'ensemble des termes $x\ M_1..M_n$ tels que $M_i \in \mathcal{SN}$

Interprétations

Soit $\mathcal{I}$ une interprétation

$$\begin{array}{rll} \rho: & Var & \longrightarrow \text{parties } \mathcal{SN}\text{-saturées de } \mathcal{SN} \text{ qui contiennent } \mathcal{N}_0 \\ & \alpha & \mapsto \rho(\alpha) \end{array}$$

On a donc $\mathcal{N}_0 \subseteq \rho(\alpha) \subseteq \mathcal{SN}$.

On modifie une valuation comme d'habitude

$$\rho(\alpha{:=}\mathcal{A}) = \begin{cases} \rho(\beta) & \text{if } \beta \not\equiv \alpha \\ \mathcal{A} & \text{if } \beta \equiv \alpha \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ est une partie de Λ qui est $\mathcal{SN}$-saturée et qui contient $\mathcal{N}_0$.

Interprétations

On définit l'interprétation d'un type comme suit :

σ	$\rho\,[\![\sigma]\!]$
α	$\rho(\alpha)$
$\sigma_1 \longrightarrow \sigma_2$	$\mathcal{I}\,[\![\sigma_1]\!]_\rho \hookrightarrow \mathcal{I}\,[\![\sigma_2]\!]_\rho$
$\forall\alpha.\sigma$	$\bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})}$

L'intersection est prise sur toutes les parties $\mathcal{A}$ qui sont $\mathcal{SN}$-saturées et qui contiennent $\mathcal{N}_0$.

Remarque : Dans la suite $\bigcap_{\mathcal{A}}$ signifiera que l'intersection est prise sur toutes les parties $\mathcal{A}$ qui sont $\mathcal{SN}$-saturées et qui contiennent $\mathcal{N}_0$.

Proposition 1 : Pour tout σ,
– $\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_\rho$ est $\mathcal{SN}$-saturé
– et $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_\rho \subseteq \mathcal{SN}$

Si $\sigma \equiv \alpha$ est une variable, $\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_\rho = \rho(\alpha)$ et ça vient par définition des valuations.

Si $\sigma \equiv \sigma_1 \to \sigma_2$, par induction $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}\,[\![\sigma_1]\!]_\rho \subseteq \mathcal{SN}$ et $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}\,[\![\sigma_2]\!]_\rho \subseteq \mathcal{SN}$ donc

$$\mathcal{N}_0 x \subseteq \mathcal{SN} \hookrightarrow \mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}\,[\![\sigma_1]\!]_\rho \hookrightarrow \mathcal{I}\,[\![\sigma_2]\!]_\rho \subseteq \mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{SN} \subseteq \mathcal{SN}.$$

$\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_\rho = \mathcal{I}\,[\![\sigma_1]\!]_\rho \hookrightarrow \mathcal{I}\,[\![\sigma_2]\!]_\rho$ est $\mathcal{SN}$-saturé provient
– d'un des premiers lemmes sur la saturation
– et du fait que par induction $\mathcal{I}\,[\![\sigma_2]\!]_\rho$ est $\mathcal{SN}$-saturé.

Si $\sigma \equiv \forall\alpha.\tau$ alors

$$\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_\rho = \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})}.$$

Par induction, chaque $\mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})}$ est $\mathcal{SN}$-saturé
et $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})} \subseteq \mathcal{SN}$.

Clairement $\mathcal{N}_0 \subseteq \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})} \subseteq \mathcal{SN}$.

$\bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})}$ est $\mathcal{SN}$-saturé, comme intersection de $\mathcal{SN}$-saturés.

Proposition 2 : $\mathcal{I}\,[\![\sigma[\alpha := \tau]]\!]_\rho = \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_\rho)}$.

La démonstration est classique.

Si $\sigma \equiv \alpha$ est une variable, facile !

Si $\sigma \equiv \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}\,[\![(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)[\alpha := \tau]]\!]_\rho &= \mathcal{I}\,[\![\sigma_1[\alpha := \tau] \rightarrow \sigma_2[\alpha := \tau]]\!]_\rho \\
&= \mathcal{I}\,[\![\sigma_1[\alpha := \tau]]\!]_\rho \hookrightarrow \mathcal{I}\,[\![\sigma_2[\alpha := \tau]]\!]_\rho \\
&= \mathcal{I}\,[\![\sigma_1]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_\rho)} \hookrightarrow \mathcal{I}\,[\![\sigma_2]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_\rho)} \\
&= \mathcal{I}\,[\![\sigma_1 \rightarrow \sigma_2]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_\rho)}
\end{aligned}
$$

Si $\sigma \equiv \forall\beta.\sigma'$ alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\,[\![(\forall\beta.\sigma')[\alpha := \tau]]\!]_\rho &= \mathcal{I}\,[\![\forall\beta.(\sigma'[\alpha := \tau])]\!]_\rho \\
&= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}\,[\![\sigma'[\alpha := \tau]]\!]_{\rho(\beta:=\mathcal{A})} \\
&= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}\,[\![\sigma']\!]_{\rho(\beta:=\mathcal{A})(\alpha:=\mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_{\rho(\beta:=\mathcal{A})})} \\
&= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}\,[\![\sigma']\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_\rho)(\beta:=\mathcal{A})} \\
&= \mathcal{I}\,[\![\forall\beta.\sigma']\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_\rho)}
\end{aligned}$$

Lemme d'adéquation : Soit $\mathcal{I}$ une interprétation et ρ une valuation

Si $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{F}} M : \sigma$

et $P_1 \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_1]\!]_\rho$,... , $P_k \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_k]\!]_\rho$,

alors $M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_\rho$.

Par induction sur la preuve de $x_1 : \sigma_1, ..., x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{F}} M : \sigma$.

Pour les règles (Var), (Abs) et (App), la démonstration est la même que pour le lemme d'adéquation du système **D**.

- La dernière règle est $(\forall\ I)$. Posons $\sigma \equiv \forall \alpha.\sigma'$.

  Par hypothèse d'induction,

  $M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma']\!]_\rho$.

  Mais comme α n'est libre dans aucun des σ_i,

  pour tout $\mathcal{A}$, $\mathcal{SN}$-saturé, tel que $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{SN}$,

  on a $\mathcal{I}\,[\![\sigma_i]\!]_\rho = \mathcal{I}\,[\![\sigma_i]\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})}$.

  Donc pour tout $\mathcal{A}$ $\mathcal{SN}$-saturé, tel que $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{SN}$,

  $$P_1 \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_1]\!]_\rho, \ldots, P_k \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_k]\!]_\rho \text{ implique}$$
  $$M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma']\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})}.$$

  Donc

  $$P_1 \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_1]\!]_\rho, \ldots, P_k \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_k]\!]_\rho \text{ implique}$$
  $$M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}\,[\![\sigma']\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})} \triangleq \mathcal{I}\,[\![\forall\alpha.\sigma']\!]_\rho$$

- La dernière règle est $(\forall E)$. Posons $\sigma \equiv \sigma'[\alpha := \tau]$.

  Par hypothèse d'induction,

$$
\begin{array}{rcl}
M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] & \in & \mathcal{I}\,[\![\forall\alpha.\sigma']\!]_\rho \\
 & = & \displaystyle\bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}\,[\![\sigma']\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})}
\end{array}
$$

  C'est-à-dire que pour tout $\mathcal{A}$, $\mathcal{SN}$-saturé, tel que
  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{SN}$,
  on a $M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] \in \mathcal{I}\,[\![\sigma']\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{A})}$.
  Donc a fortiori,

$$
\begin{array}{rcl}
M[x_1 := P_1]...[x_k := P_k] & \in & \mathcal{I}\,[\![\sigma']\!]_{\rho(\alpha:=\mathcal{I}\,[\![\tau]\!]_\rho)} \\
 & = & \mathcal{I}\,[\![\sigma'[\alpha := \tau]]\!].
\end{array}
$$

La dernière égalité provient de la proposition 2.

Théorème de normalisation forte : Tout terme typable du système **F** est fortement normalisable.

Théorème de normalisation forte : Tout terme typable du système **F** est fortement normalisable.

On considère la valuation $\rho_{\mathcal{SN}}$ qui associe l'ensemble $\mathcal{SN}$ à chaque variable de type α.

$x_i \in \mathcal{I}\,[\![\sigma_i]\!]_{\rho_{\mathcal{SN}}}$ car d'après la proposition 2, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}\,[\![\sigma_i]\!]_{\rho_{\mathcal{SN}}}$

Donc d'après le lemme d'adéquation, on a

$M[x_1 := x_1]...[x_k := x_k] \equiv M \in \mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_{\rho_{\mathcal{SN}}}$.

Mais $\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_{\rho_{\mathcal{SN}}} \subseteq \mathcal{SN}$.

Donc $M \in \mathcal{SN}$.

Types de données

Parties saturées

Une partie de Λ est saturée si

pour tous $M, P_1, ..., P_n, N \in \Lambda$

$$M[x := N]\, P_1 ... P_n \in \mathcal{X} \quad \Longrightarrow \quad (\lambda x.M)\, N\, P_1 ... P_n \in \mathcal{X}$$

On définit les interprétations comme précédemment,

sauf qu'on remplace «$\mathcal{N}$-saturé» par «saturé».

Il y a un lemme d'adéquation avec le même énoncé et la même démonstration que précédemment.

Si σ est un type clos, $\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]_\rho$ ne dépend pas de σ.

Donc on le note $\mathcal{I}\,[\![\sigma]\!]$.

Types de données

Un type clos est un type de données si

- $\mathcal{I}[\![\sigma]\!] \neq \emptyset$,
- tout terme de $\mathcal{I}[\![\sigma]\!]$ est β-convertible à un terme clos.

Types de données

- $Id \triangleq \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)$ est le type de l'identité,

$$M \in \mathcal{I}[\![Id]\!] \quad \Leftrightarrow \quad M \underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} \lambda x.x.$$

- $Bool \triangleq \forall\alpha.(\alpha \to \alpha \to \alpha)$ est le type des booléens,

$$M \in \mathcal{I}[\![Bool]\!] \Leftrightarrow M \underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} \lambda xy.x \text{ ou } M \underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} \lambda xy.y.$$

- $Nat \triangleq \forall\alpha.((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha))$ est le type des entiers,

$M \in \mathcal{I}[\![Nat]\!] \Leftrightarrow$ il existe un entier n tel que

$$M \underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} \lambda fx.f(\ldots n \text{ fois}..(fx)\ldots) \text{ ou } M \underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} \lambda f.f.$$