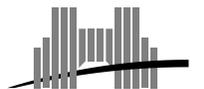


# ***Systemes de types***

*version du 14 décembre 2004 – 09: 08*

# *Types avec intersection*

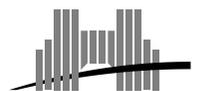


## Les types avec intersection

---

On part du  $\lambda$ -calcul avec types simples et on l'**enrichit** par un opérateur intersection  $\wedge$ ,

- pour servir de support à des modèles, (comme nous l'avons vu),
- pour caractériser les termes fortement normalisables.



## Les types avec intersection

---

On part du  $\lambda$ -calcul avec types simples et on l'**enrichit** par un opérateur intersection  $\wedge$ ,

- pour servir de support à des modèles, (comme nous l'avons vu),
- pour caractériser les termes fortement normalisables.

Nous allons essentiellement nous intéresser à la **normalisation forte**.



## Les types avec intersection : système D

---

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \text{ (Var)}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau.} \text{ (Abs)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau} \text{ (App)}$$



## Les types avec intersection : système D

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \text{ (Var)} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau.} \text{ (Abs)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau} \text{ (App)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau} \text{ (\wedge I)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma} \text{ (\wedge E}_g\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M : \tau} \text{ (\wedge E}_d\text{)}$$



## On n'a plus de correspondance de Curry-Howard

---

Le système **D** ne satisfait plus la correspondance de Curry-Howard.

Les règles  $(\wedge E_g)$ ,  $(\wedge E_g)$  et  $(\wedge I)$   
ne «parlent» que du même terme.

On perd la connexion terme et preuve.



## Contraction et affaiblissement

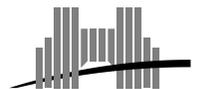
---

**Lemme :** Si  $\Gamma \vdash M : \sigma$  et si  $x$  n'apparaît pas dans  $\Gamma$   
alors  $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ .

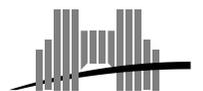
**Lemme :** Si  $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$  et si  $x \notin FV(M)$  alors  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .



## *Types de quelques termes*



$$\begin{array}{c}
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \rightarrow \tau} (\wedge I_g) \qquad \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma} (\wedge I_d) \\
 \hline
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x x : \tau}{\vdash \lambda x. x x : (\sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)) \rightarrow \tau} (Abs) \\
 \hline
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x x : \tau}{\vdash \lambda x. x x : (\sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)) \rightarrow \tau} (App)
 \end{array}$$



$$\begin{array}{c}
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \rightarrow \tau} (\wedge I_g) \qquad \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma} (\wedge I_d) \\
 \hline
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x x : \tau}{\vdash \lambda x. x x : (\sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)) \rightarrow \tau} (Abs) \\
 \hline
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x x : \tau}{\vdash \lambda x. x x : (\sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)) \rightarrow \tau} (App)
 \end{array}$$

On n'arrivera pas à typer  $(\lambda x. x x) (\lambda x. x x)$ .



$$\begin{array}{c}
 \frac{y : \alpha \vdash y : \alpha}{\vdash \lambda y. y : \alpha \rightarrow \alpha} \text{ (Abs)} \qquad \frac{y : \alpha \rightarrow \alpha \vdash y : \alpha \rightarrow \alpha}{\vdash \lambda y. y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)} \text{ (Abs)} \\
 \hline
 \vdash \lambda y. y : (\alpha \rightarrow \alpha) \wedge ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \text{ (\wedge I)}
 \end{array}$$



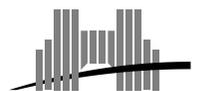
$$\frac{\frac{y : \alpha \vdash y : \alpha}{\vdash \lambda y. y : \alpha \rightarrow \alpha} \text{ (Abs)}}{\vdash \lambda y. y : (\alpha \rightarrow \alpha) \wedge ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))} \text{ (\wedge I)}$$

donc

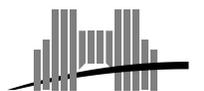
$$\vdash (\lambda x. x x) (\lambda y. y) : \alpha \rightarrow \alpha$$

en posant  $\sigma := \alpha \rightarrow \alpha$  et  $\tau := \alpha \rightarrow \alpha$ .

Donc d'après le théorème que l'on va montrer tous ces termes sont fortement normalisables.



***Les typables sont fortement normalisables***



## Quelques définitions

---

Soit  $\mathcal{N}$  une partie de  $\Lambda$ .

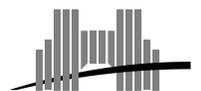
**Définition :** Une partie  $\mathcal{X}$  de  $\Lambda$  est  $\mathcal{N}$ -saturée si

pour tous  $M, P_1, \dots, P_n \in \Lambda$  et tout  $N \in \mathcal{N}$

$$M[x := N] P_1 \dots P_n \in \mathcal{X} \implies (\lambda x.M) N P_1 \dots P_n \in \mathcal{X}$$

**Définition :**  $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y} \triangleq \{M \in \Lambda \mid (\forall N \in \mathcal{X}) M N \in \mathcal{Y}\}$ .

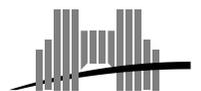
**Remarque :**  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$  et  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}'$  impliquent  $\mathcal{X}' \hookrightarrow \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}'$ .



**Proposition :** Si  $\mathcal{Y}$  est  $\mathcal{N}$ -saturé, alors  $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$  est  $\mathcal{N}$ -saturé.

**Proposition :** Si  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont  $\mathcal{N}$ -saturés,  
alors  $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$  est  $\mathcal{N}$ -saturé.

**Proposition :** Plus généralement, si les  $\mathcal{X}_i$  sont  $\mathcal{N}$ -saturés,  
alors  $\bigcap_i \mathcal{X}_i$  est  $\mathcal{N}$ -saturé.



## $\mathcal{N}$ -interprétation

**Définition :** Une  $\mathcal{N}$ -interprétation est par définition une application, qui, à chaque type de base  $o$ , associe une partie  $\mathcal{N}$ -saturée de  $\Lambda$ , notée  $\mathcal{I} \llbracket o \rrbracket$ .

On étend les interprétations aux types.

- $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rightarrow \tau \rrbracket = \mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket \hookrightarrow \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket$ .
- $\mathcal{I} \llbracket \sigma \wedge \tau \rrbracket = \mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket \cap \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket$ .

Pour tout type  $\sigma$ ,  $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket$  est  $\mathcal{N}$ -saturé.

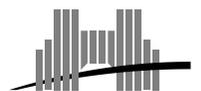
Par induction sur la structure des types.



**Lemme d'adéquation** : Soit  $\mathcal{I}$  une interprétation telle que pour tout type  $\sigma$  du système  $\mathbf{D}$ , on ait  $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket \subseteq \mathcal{N}$ .

Si  $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$  et  $P_1 \in \mathcal{I} \llbracket \sigma_1 \rrbracket, \dots, P_k \in \mathcal{I} \llbracket \sigma_k \rrbracket$ ,

**alors**  $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket$ .



**Commentaire :** Pour les termes clos le théorème dit que

si  $\vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$  alors  $M \in \mathcal{I}[\sigma]$ .

Si on prouve que  $M$  est de type  $\sigma$  alors on montre que  $M$  appartient au modèle de  $\sigma$ .

**Terminologie :** La terminologie **adéquation** est celle de Krivine.

Certains appellent ce lemme, **lemme de correction** comme en logique.



La démonstration est par induction sur la preuve du typage de  $M$ .

On examine la dernière règle utilisée.

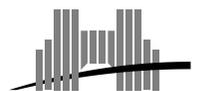
- La dernière règle utilisée est (Var).

Alors  $M$  est l'une des variables  $x_i$ .

Donc on a  $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} x_i : \sigma_i$

et par hypothèse

$$\begin{aligned} M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] &\equiv x_i[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \\ &\equiv P_i \in \mathcal{I} \llbracket \sigma_i \rrbracket \end{aligned}$$



- La dernière règle est (**Abs**), donc

- $M \equiv \lambda x.M'$

- et  $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} \lambda x.M' : \sigma \rightarrow \tau$ .

Par conséquent,  $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k, x : \sigma \vdash_{\mathbf{D}} M' : \tau$ .

Soit un  $N$  quelconque tel que  $N \in \mathcal{I}[\sigma]$ .

Par induction,  $M'[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k][x := N] \in \mathcal{I}[\tau]$ .

Puisque  $\mathcal{I}[\tau]$  est  $\mathcal{N}$ -saturé et que  $\mathcal{I}[\sigma] \subseteq \mathcal{N}$  donc que

$$N \in \mathcal{N},$$

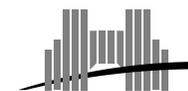
on peut appliquer la définition de  $\mathcal{N}$ -saturation et l'on obtient

$$(\lambda x.M')[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] N \in \mathcal{I}[\tau].$$

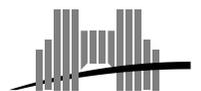
Comme  $N$  est quelconque, cela signifie que

$$(\lambda x.M')[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma] \hookrightarrow \mathcal{I}[\tau].$$

$$\text{Or } \mathcal{I}[\sigma] \hookrightarrow \mathcal{I}[\tau] = \mathcal{I}[\sigma \rightarrow \tau].$$



Donc  $(\lambda x.M')[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma \rightarrow \tau]$ .



- La dernière règle est (**App**), donc

- $M \equiv M_1 M_2$ ,

- $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M_1 : \tau \rightarrow \sigma$ ,

- et  $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M_2 : \tau$ .

Par induction  $M_1[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\tau \rightarrow \sigma]$  et

$$M_2[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\tau].$$

Puisque  $\mathcal{I} [\sigma] \hookrightarrow \mathcal{I} [\tau] = \mathcal{I} [\sigma \rightarrow \tau]$ , on a

$$M_1[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] M_2[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma].$$

C'est-à-dire  $M_1 M_2[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma]$ .



- La dernière règle est  $(\wedge I)$ , donc  $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$   
et  $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \tau$ .

Par induction

- $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma]$
- et  $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\tau]$ .

donc

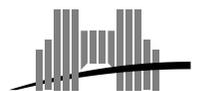
$$M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma] \cap \mathcal{I}[\tau] \equiv \mathcal{I}[\sigma \wedge \tau].$$

- La dernière règle est  $(\wedge E_g)$ , donc

$x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma \wedge \tau$  et par induction

$$M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma] \cap \mathcal{I}[\tau],$$

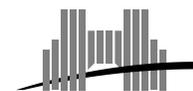
donc  $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma]$ .



## Faire en sorte que les interprétation soit dans $\mathcal{N}$

---

On donne maintenant un truc pour obtenir un ensemble  $\mathcal{N}$  tel que pour toute  $\mathcal{N}$ -interprétation, on ait  $\mathcal{I}[\sigma] \subseteq \mathcal{N}$  pour tout type  $\sigma$  du système **D**.

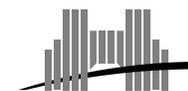


## Couple adapté

---

**Définition :** Un couple  $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$  de parties de  $\Lambda$  est dit **adapté** si

1.  $\mathcal{N}$  est  $\mathcal{N}$ -saturé,
2.  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$      $\mathcal{N}_0 \subseteq (\mathcal{N} \leftrightarrow \mathcal{N}_0)$      $(\mathcal{N}_0 \leftrightarrow \mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ .



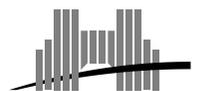
**Lemme d'adaptation :** Soit

- $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$  un couple adapté,
- $\mathcal{I}$  une  $\mathcal{N}$ -interprétation

telle que pour tout type de base  $o$ ,  $\mathcal{I} \llbracket o \rrbracket$  soit une partie  $\mathcal{N}$ -saturée de  $\mathcal{N}$  contenant  $\mathcal{N}_0$ ,

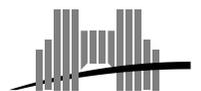
alors pour tout type  $\sigma$ ,

$\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket$  est une partie  $\mathcal{N}$ -saturée de  $\mathcal{N}$  contenant  $\mathcal{N}_0$ .

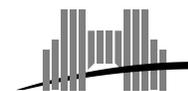


$\mathcal{SN}$  = l'ensemble des termes **fortement normalisables**,

$\mathcal{N}_0$  = l'ensemble des termes  $x M_1 .. M_n$  tels que  $M_i \in \mathcal{SN}$



Proposition :  $\mathcal{SN}$  est  $\mathcal{SN}$ -saturé.



**Proposition** :  $\mathcal{SN}$  est  $\mathcal{SN}$ -saturé.

On veut montrer que pour tous  $M, P_1, \dots, P_n \in \Lambda$  et tout  $N \in \mathcal{SN}$

$$M[x := N] P_1 \dots P_n \in \mathcal{SN} \implies (\lambda x.M) N P_1 \dots P_n \in \mathcal{SN}$$

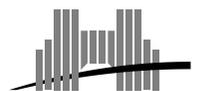
On raisonne par induction sur

$$red(N) + red(M[x := N] P_1 \dots P_n).$$

où  $red(Q)$  est la somme des longueurs de toutes les réductions qui commencent en  $Q$ .

On considère tous les termes obtenus en contractant un redex de

$$(\lambda x.M) N P_1 \dots P_n.$$



- On contracte le redex  $(\lambda x.M) N$ . On obtient le terme  $M[x := N] P_1 \dots P_n$  qui est dans  $\mathcal{SN}$  par hypothèse.
- On contracte un redex dans  $M$ , on obtient  $M'$ , on a  $M[x := N] P_1 \dots P_n \xrightarrow{\beta} M'[x := N] P_1 \dots P_n$ , donc

$$\text{red}(N) + \text{red}(M[x := N] P_1 \dots P_n) >$$

$$\text{red}(N) + \text{red}(M'[x := N] P_1 \dots P_n),$$

et l'on peut appliquer l'hypothèse d'induction.

On obtient  $(\lambda x.M') N P_1 \dots P_n \in \mathcal{SN}$ .

- On contracte un redex dans  $P_i$ , même démonstration.



- On contracte un redex dans  $N$ . On obtient le terme  $N'$ . On voit que

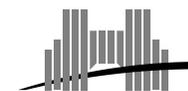
$$\text{red}(N) + \text{red}(M[x := N] P_1 \dots P_n)$$

$$>$$

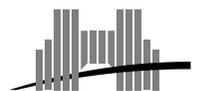
$$\text{red}(N') + \text{red}(M[x := N'] P_1 \dots P_n),$$

on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On obtient  $(\lambda x.M) N' P_1 \dots P_n \in \mathcal{SN}$ .



**Proposition** :  $(\mathcal{N}_0, \mathcal{SN})$  est adapté.



**Proposition** :  $(\mathcal{N}_0, \mathcal{SN})$  est adapté.

La condition 1. est satisfaite par le proposition précédente.

$\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{SN}$  car les termes de  $\mathcal{N}_0$  sont visiblement fortement normalisables.

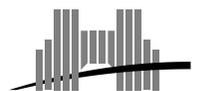
$\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{SN} \leftrightarrow \mathcal{N}_0$  fait partie de la définition de  $\mathcal{N}_0$ .

Pour montrer  $\mathcal{N}_0 \leftrightarrow \mathcal{SN} \subseteq \mathcal{SN}$ ,

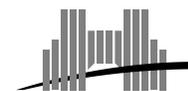
supposons  $M \in \mathcal{N}_0 \leftrightarrow \mathcal{SN}$  qui ne soit pas fortement normalisable.

En revanche, quand on lui applique un élément de  $\mathcal{N}_0$ , par exemple une variable  $x$ , on obtient  $M x$  qui est fortement normalisable.

**Contradiction.**



**Théorème de normalisation forte** : Tout terme typable du système **D** est fortement normalisable.



**Théorème de normalisation forte** : Tout terme typable du système **D** est fortement normalisable.

On définit la  $\mathcal{SN}$ -interprétation qui associe à un type de base  $o$ , l'ensemble  $\mathcal{SN}$ , i. e.  $\mathcal{I}[[o]] = \mathcal{SN}$ .

Soit  $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$ .

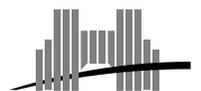
Par définition de  $\mathcal{N}_0$ , on a  $x_i \in \mathcal{N}_0$ , donc  $x_i \in \mathcal{I}[[\sigma_i]]$ .

D'après le lemme d'adéquation,

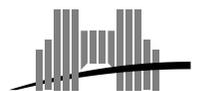
$M = M[x_1 := x_1] \dots [x_k := x_k] \in \mathcal{I}[[\sigma]]$ .

Or d'après le lemme d'adaptation,  $\mathcal{I}[[\sigma]] \subseteq \mathcal{SN}$ .

Donc  $M \in \mathcal{SN}$ .



***Les fortement normalisables sont typables***



## Les formes normales sont typables

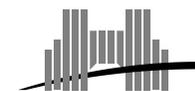
---

On note  $\Gamma \sqcap \Delta$  un environnement tel que :

$$\Gamma \sqcap \Delta \triangleq \{x : \sigma \wedge \tau \mid x : \sigma \in \Gamma \ \& \ x : \tau \in \Delta\} \cup (\Gamma \setminus \Delta) \cup (\Delta \setminus \Gamma).$$

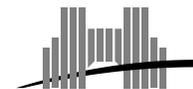
**Lemme :** Si  $\Gamma_1 \vdash M : \sigma$  et  $\Gamma_2 \vdash M : \sigma$  alors  $\Gamma_1 \sqcap \Gamma_2 \vdash M : \sigma$ .

Un terme en forme normale est de la forme  $\lambda x_1 \dots x_n. x M_1 \dots M_k$ .



**Proposition :** Les formes normales sont typables.

On raisonne par induction sur la structure des formes normales.



Si  $M \equiv \lambda y.M'$  est une abstraction.

Alors par induction  $\Gamma, y : \sigma \vdash M : \tau$  et donc  $\Gamma \vdash \lambda y.M : \sigma \rightarrow \tau$ .



Supposons que  $M \equiv x M_1 \dots M_k$  n'est pas une abstraction.

Alors par induction  $\Gamma_1 \vdash M_1 : \sigma_1, \dots, \Gamma_k \vdash M_k : \sigma_k$ .

Si  $x \in \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$  donc  $x \in \Gamma_1 \sqcap \dots \sqcap \Gamma_k$  où  $x$  a un type  $\sigma$ .

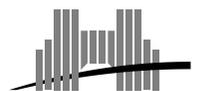
Posons

$$\Gamma \triangleq \{x : \sigma \wedge (\sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_k \rightarrow o)\} \cup (\Gamma_1 \sqcap \dots \sqcap \Gamma_k) \setminus \{x : \sigma\}.$$

On voit que

- $\Gamma \vdash x : \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_k \rightarrow o$ ,
- $\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1$
- et  $\Gamma \vdash M_k : \sigma_k$ .

Donc on peut prouver que  $\Gamma \vdash x M_1 \dots M_k : \tau$ .



Soit  $o$  est un type de base.

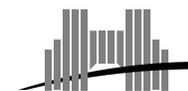
Si  $x \notin \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$  Posons

$$\Gamma \triangleq \{x : \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_k \rightarrow o\} \cup (\Gamma_1 \sqcap \dots \sqcap \Gamma_k).$$

On voit que

- $\Gamma \vdash x : \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_k \rightarrow o$ ,
- $\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1$
- et  $\Gamma \vdash M_k : \sigma_k$ .

Donc on peut prouver que  $\Gamma \vdash x M_1 \dots M_k : o$ .



## Les stratégies perpétuelles

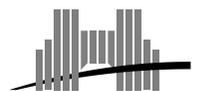
---

Une **stratégie perpétuelle** est une façon de trouver le redex à contracter pour réduire un terme sans détruire la **non forte normalisation**.

$$C[(\lambda x.M) N] \xrightarrow{\text{perp}} C[M[x := N]].$$

Si  $C[(\lambda x.M) N]$  n'est pas fortement normalisable,  
alors  $C[M[x := N]]$  ne l'est pas non plus.

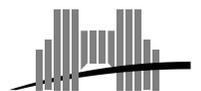
Ou encore si  $C[M[x := N]]$  est fortement normalisable,  
alors  $C[(\lambda x.M) N]$  est fortement normalisable.



## Les stratégies perpétuelles

---

Une stratégie perpétuelle préserve la forte normalisation par expansion.



## Exemple 1

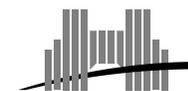
---

Parmi ces réductions,

$$(\lambda xy.y) ((\lambda z.zzz) (\lambda u.uu)) \xrightarrow{\beta} \lambda y.y$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda xy.y) ((\lambda u.uu) (\lambda u.uu) (\lambda u.uu))$$

la deuxième est perpétuelle, tandis que la première ne l'est pas.



## Exemple 2

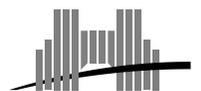
Parmi ces réductions,

$$\begin{aligned}
 (\lambda x.x (\lambda y.yy)) (\lambda z.\mathbf{K}z(zz)) &\xrightarrow{\beta} (\lambda z.\mathbf{K}z(zz)) (\lambda y.yy) \\
 &\xrightarrow{\beta} \mathbf{K}(\lambda y.yy) ((\lambda y.yy)(\lambda y.yy)) \\
 &\xrightarrow{\beta} \mathbf{K}(\lambda y.yy) ((\lambda y.yy)(\lambda y.yy)) \xrightarrow{\beta} \dots
 \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
 (\lambda x.x (\lambda y.yy)) (\lambda z.\mathbf{K}z(zz)) &\xrightarrow{\beta} (\lambda x.x (\lambda y.yy)) (\lambda z.z) \\
 &\xrightarrow{\beta} (\lambda z.z) (\lambda y.yy) \\
 &\xrightarrow{\beta} \lambda y.yy.
 \end{aligned}$$

C'est la première qui est perpétuelle.



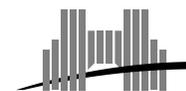
## Exemple 2 (continué)

---

On aurait pu continuer

$$\mathbf{K}(\lambda y. yy) ((\lambda y. yy)(\lambda y. yy)) \xrightarrow{\beta} (\lambda y. yy)$$

Mais là encore on n'aurait pas appliqué une stratégie perpétuelle.



## Redex perpétuel

On écrit  $NF$  l'ensemble des formes normales.

On peut définir un **redex perpétuel**  $perp(M)$  dans un terme  $M$  qui n'est pas en forme normale de la façon suivante :

$$perp(\lambda x.M) = perp(M)$$

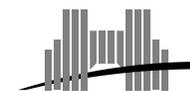
$$perp((\lambda x.P) N) = (\lambda x.P) N \text{ si } x \in FV(P) \text{ ou } (P \in NF \text{ et } N \in NF)$$

**sinon**

$$perp(M N) = perp(N) \text{ si } N \notin NF$$

$$perp(M N) = perp(M) \text{ autrement.}$$

Une **stratégie perpétuelle** est une réduction qui réduit à chaque étape un redex perpétuel.



## Stratégie perpétuelle et typage

---

Si  $\mathcal{SN}$  est l'ensemble des termes fortement normalisables.

$\mathcal{SN}$  est plus petit point fixe de l'équation.

$$\mathcal{SN} = NF \cup \{M \in \Lambda \mid M \xrightarrow{perp} N \ \& \ N \in \mathcal{SN}\}$$

**Remarque :** les typables sont obtenus en itérant des expansions perpétuelles à partir des formes normales.



**Lemme** : Si  $x \in FV(M)$  et  $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$ ,  
 alors il existe un environnement  $\Gamma'$  et un type  $\sigma$  tel que

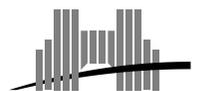
- $\Gamma' \vdash N : \sigma$
- et  $\Gamma', x : \sigma \vdash M : \tau$

La démonstration est par induction sur la structure de  $M$ .

Si  $M$  est une **variable**, alors cette variable est  $x$

puisque  $x \in FV(M)$ .

Donc  $M \equiv x$  alors  $M[x := N] \equiv N$ . On prend  $\sigma = \tau$  et  $\Gamma = \Gamma'$ .



Si  $M$  est une **abstraction**  $\lambda y.M'$  alors

$M[x := N] \equiv \lambda y.(M'[x := N])$  et  $\tau$  est de la forme  $\tau_1 \rightarrow \tau_2$

avec  $\Gamma \vdash \lambda y.(M'[x := N]) : \tau_1 \rightarrow \tau_2$ .

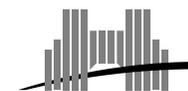
Puisque  $\Gamma, y : \tau_1 \vdash M'[x := N] : \tau_2$ ,

par induction, il existe un environnement  $\Gamma'$  tel que

$\Gamma', y : \tau_1 \vdash N : \sigma$  et  $\Gamma', y : \tau_1, x : \sigma \vdash M' : \tau_2$ .

Par la convention de Barendregt  $y \notin FV(N)$ .

Donc  $\Gamma' \vdash N : \sigma$  et  $\Gamma', x : \sigma \vdash \lambda y.M' : \tau_1 \rightarrow \tau_2$ .

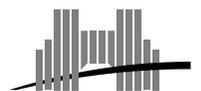


Si  $M$  est une **application**  $M_1 M_2$  alors

$$M[x := N] \equiv (M_1[x := N]) (M_2[x := N]).$$

Donc il existe

- $\Gamma \vdash M_1[x := N] : \tau' \rightarrow \tau$
- et  $\Gamma \vdash M_2[x := N] : \tau'$ .



Si  $x \notin M_1$  et  $x \in M_2$ , alors

- $M_1[x := N] \equiv M_1$
- $\Gamma \vdash M_1 : \tau' \rightarrow \tau$

et il existe un environnement  $\Gamma'$  tel que

- $\Gamma' \vdash N : \sigma$
- et  $\Gamma', x : \sigma \vdash M_2 : \tau'$ .

Donc  $(\Gamma \sqcap \Gamma'), x : \sigma \vdash M_1 : \tau' \rightarrow \tau$

et  $(\Gamma \sqcap \Gamma'), x : \sigma \vdash M_2 : \tau'$ .

Ainsi  $(\Gamma \sqcap \Gamma'), x : \sigma \vdash M_1 M_2 : \tau$ .

Si  $x \in M_1$  et  $x \notin M_2$ , la démonstration est similaire.



Si  $x \in M_1$  et  $x \in M_2$ , et il existe des environnements  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'_2$  tels que

- $\Gamma'_1 \vdash N : \sigma_1$  et  $\Gamma'_1, x : \sigma_1 \vdash M_1 : \tau' \rightarrow \tau$ ,
- $\Gamma'_2 \vdash N : \sigma_2$  et  $\Gamma'_2, x : \sigma_2 \vdash M_2 : \tau'$ .

Donc

- $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2 \vdash N : \sigma_1 \wedge \sigma_2$ ,
  - $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2, x : \sigma_1 \wedge \sigma_2 \vdash M_1 : \tau' \rightarrow \tau$ ,<sup>a</sup>
  - $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2, x : \sigma_1 \wedge \sigma_2 \vdash M_2 : \tau'$ ,<sup>a</sup>
- puis  $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2, x : \sigma_1 \wedge \sigma_2 \vdash M_1 M_2 : \tau$ .

---

<sup>a</sup>A prouver, mais vous me l'acheter !



**Proposition :** Si  $P$  est typable et si  $Q \xrightarrow{\text{perp}} P$   
alors  $Q$  est typable.

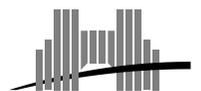
La démonstration est par induction sur la structure de  $P$ .

Si  $P$  est une **abstraction**, donc  $P \equiv \lambda x.P'$ , alors  $Q' \xrightarrow{\text{perp}} P'$  avec  $Q \equiv \lambda x.Q'$ .

Puisque  $P$  est typable,  $P'$  est typable.

Par induction  $Q'$  est typable et clairement  $Q$  est typable.

Si  $P$  est une **application**  $M N$ , telle que le redex perpétuel se situe dans  $M$  ou  $N$ , le résultat vient clairement par induction.



Supposons donc que  $P$  est le redex perpétuel.

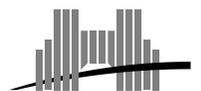
- Si  $P \equiv (\lambda x.M') N$  avec  $M' \in NF$  et  $N \in NF$ ,  
le résultat se démontre facilement.
- Si  $P \equiv (\lambda x.M') N$  avec  $x \in FV(M')$  et  $Q \equiv M'[x := N]$ .

En appliquant le lemme, on démontre qu'il existe

- $\Gamma' \vdash N : \sigma$
- et  $\Gamma', x : \sigma \vdash M' : \tau$ .

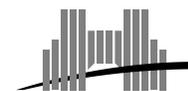
On en déduit que  $\Gamma' \vdash \lambda x.M' : \sigma \rightarrow \tau$ .

Par conséquent,  $\Gamma' \vdash (\lambda x.M') N : \tau$ .



**Théorème :** Si  $M$  est fortement normalisable  
alors  $M$  est typable dans **D**.

Grâce à la proposition précédente et à la remarque.



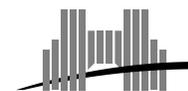
## Caractérisation des fortement normalisables

---

Un terme est fortement normalisable  
si et seulement si  
il est typable dans **D**



# *Le système F*



## Le système F

---

Le système de type admet maintenant des quantifications.

Par exemple, on veut pouvoir écrire  $\vdash \lambda x.x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$ .



## Le système F

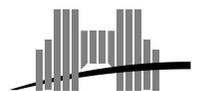
---

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \text{ (Var)} \qquad \frac{\Gamma, x \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau.} \text{ (Abs)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau} \text{ (App)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \sigma} \text{ (\forall I)} \quad \text{si } \alpha \text{ n'est libre dans aucun des types de } \Gamma$$

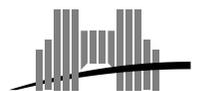
$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \sigma}{\Gamma \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]} \text{ (\forall E)}$$



## Le système F

---

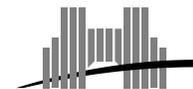
$$\frac{x : \alpha \vdash x : \alpha}{\vdash \lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha} (Abs)$$
$$\frac{\vdash \lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha}{\vdash \lambda x.x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)} (\forall I)$$



## Le système F

---

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \vdash \lambda x.x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \quad (\forall I) \\
 \hline
 \vdash \lambda x.x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \quad (\forall E) \\
 \hline
 \vdash (\lambda x.x) (\lambda y.y) : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \vdash \lambda y.y : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \quad (\forall I) \\
 \hline
 \vdash (\lambda x.x) (\lambda y.y) : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \quad (App)
 \end{array}$$





## Le système F

---


$$x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \vdash x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$$


---

( $\forall E$ )

$$x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \vdash x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \quad x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \vdash x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$$

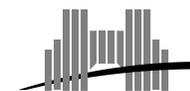

---

( $App$ )

$$x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \vdash xx : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$$


---

( $Abs$ )

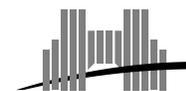
$$\vdash \lambda x. xx : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$$


## Le système F

---

$(\lambda x.xx) (\lambda x.xx)$  n'est pas typable dans le système **F**.

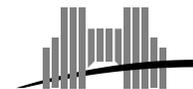
En revanche,  $(\lambda x.xx) (\lambda x.x)$  est typable dans le système **F**.



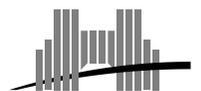
## Réduction du sujet dans F

---

Si  $\Gamma \vdash_{\mathbf{F}} M : \sigma$  et si  $M \xrightarrow{\beta} N$  alors  $\Gamma \vdash_{\mathbf{F}} N : \sigma$ .



***Les typables du système F  
sont fortement normalisables***



## La difficulté de la preuve de forte normalisation

---

En général, quand on définit l'interprétation des types

on la définit par **des interprétations sur des types plus simples.**

L'interprétation  $\mathcal{I} [\forall\alpha.\sigma]_\rho$  ressemble à une intersection et on veut la définir par

$$\mathcal{I} [\forall\alpha.\sigma]_\rho = \bigcap_{\tau \text{ types}} \mathcal{I} [\sigma]_\rho(\alpha := \mathcal{I} [\tau]_\rho)$$

Mais cette définition conduit à un cercle vicieux.

Car  $\tau$  peut être  $\forall\alpha.\sigma$  lui-même.

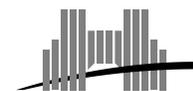


## La difficulté de la preuve de forte normalisation

---

Une telle théorie est dite **imprédicative**.

Pour résoudre ce problème, Jean-Yves Girard a défini les **candidats de réductibilité**.



Là aussi on considère la paire adaptée :

$\mathcal{SN}$  = l'ensemble des termes **fortement normalisables**,

$\mathcal{N}_0$  = l'ensemble des termes  $x M_1 .. M_n$  tels que  $M_i \in \mathcal{SN}$



## Interprétations

---

Soit  $\mathcal{I}$  une interprétation

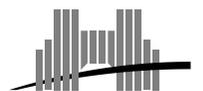
$$\begin{aligned} \rho : \text{Var} &\rightarrow \text{parties } \mathcal{SN}\text{-saturées de } \mathcal{SN} \text{ qui contiennent } \mathcal{N}_0 \\ \alpha &\mapsto \rho(\alpha) \end{aligned}$$

On a donc  $\mathcal{N}_0 \subseteq \rho(\alpha) \subseteq \mathcal{SN}$ .

On modifie une valuation comme d'habitude

$$\rho(\alpha := \mathcal{A}) = \begin{cases} \rho(\beta) & \text{if } \beta \neq \alpha \\ \mathcal{A} & \text{if } \beta \equiv \alpha \end{cases}$$

$\mathcal{A}$  est une partie de  $\Lambda$  qui est  $\mathcal{SN}$ -saturée et qui contient  $\mathcal{N}_0$ .



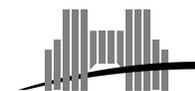
## Interprétations

On définit l'interprétation d'un type comme suit :

$\sigma$	$\rho \llbracket \sigma \rrbracket$
$\alpha$	$\rho(\alpha)$
$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$	$\mathcal{I} \llbracket \sigma_1 \rrbracket_\rho \hookrightarrow \mathcal{I} \llbracket \sigma_2 \rrbracket_\rho$
$\forall \alpha. \sigma$	$\bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}$

L'intersection est prise sur toutes les parties  $\mathcal{A}$  qui sont  $\mathcal{SN}$ -saturées et qui contiennent  $\mathcal{N}_0$ .

**Remarque :** Dans la suite  $\bigcap_{\mathcal{A}}$  signifiera que l'intersection est prise sur toutes les parties  $\mathcal{A}$  qui sont  $\mathcal{SN}$ -saturées et qui contiennent  $\mathcal{N}_0$ .



**Proposition 1 :** Pour tout  $\sigma$ ,

- $\mathcal{I}[\sigma]_\rho$  est  $\mathcal{SN}$ -saturé
- et  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\sigma]_\rho \subseteq \mathcal{SN}$

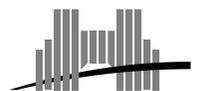
Si  $\sigma \equiv \alpha$  est une variable,  $\mathcal{I}[\sigma]_\rho = \rho(\alpha)$  et ça vient par définition des valuations.

Si  $\sigma \equiv \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ , par induction  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\sigma_1]_\rho \subseteq \mathcal{SN}$  et  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\sigma_2]_\rho \subseteq \mathcal{SN}$  donc

$$\mathcal{N}_0 x \subseteq \mathcal{SN} \hookrightarrow \mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\sigma_1]_\rho \hookrightarrow \mathcal{I}[\sigma_2]_\rho \subseteq \mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{SN} \subseteq \mathcal{SN}.$$

$\mathcal{I}[\sigma]_\rho = \mathcal{I}[\sigma_1]_\rho \hookrightarrow \mathcal{I}[\sigma_2]_\rho$  est  $\mathcal{SN}$ -saturé provient

- d'un des premiers lemmes sur la saturation
- et du fait que par induction  $\mathcal{I}[\sigma_2]_\rho$  est  $\mathcal{SN}$ -saturé.



Si  $\sigma \equiv \forall \alpha. \tau$  alors

$$\mathcal{I}[\sigma]_{\rho} = \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}[\tau]_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}.$$

Par induction, chaque  $\mathcal{I}[\tau]_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}$  est  $\mathcal{SN}$ -saturé  
et  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\tau]_{\rho(\alpha := \mathcal{A})} \subseteq \mathcal{SN}$ .

Clairement  $\mathcal{N}_0 \subseteq \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}[\tau]_{\rho(\alpha := \mathcal{A})} \subseteq \mathcal{SN}$ .

$\bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I}[\tau]_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}$  est  $\mathcal{SN}$ -saturé, comme intersection de  $\mathcal{SN}$ -saturés.



**Proposition 2 :**  $\mathcal{I} \llbracket \sigma[\alpha := \tau] \rrbracket_{\rho} = \mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_{\rho})}$ .

La démonstration est classique.

Si  $\sigma \equiv \alpha$  est une variable, facile !

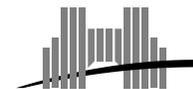
Si  $\sigma \equiv \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} \llbracket (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)[\alpha := \tau] \rrbracket_{\rho} &= \mathcal{I} \llbracket \sigma_1[\alpha := \tau] \rightarrow \sigma_2[\alpha := \tau] \rrbracket_{\rho} \\
 &= \mathcal{I} \llbracket \sigma_1[\alpha := \tau] \rrbracket_{\rho} \hookrightarrow \mathcal{I} \llbracket \sigma_2[\alpha := \tau] \rrbracket_{\rho} \\
 &= \mathcal{I} \llbracket \sigma_1 \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_{\rho})} \hookrightarrow \mathcal{I} \llbracket \sigma_2 \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_{\rho})} \\
 &= \mathcal{I} \llbracket \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_{\rho})}
 \end{aligned}$$



Si  $\sigma \equiv \forall\beta.\sigma'$  alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} [(\forall\beta.\sigma')[\alpha := \tau]]_{\rho} &= \mathcal{I} [\forall\beta.(\sigma'[\alpha := \tau])]_{\rho} \\
 &= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} [\sigma'[\alpha := \tau]]_{\rho(\beta:=\mathcal{A})} \\
 &= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\beta:=\mathcal{A})(\alpha:=\mathcal{I} [\tau]_{\rho(\beta:=\mathcal{A})})} \\
 &= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha:=\mathcal{I} [\tau]_{\rho})(\beta:=\mathcal{A})} \\
 &= \mathcal{I} [\forall\beta.\sigma']_{\rho(\alpha:=\mathcal{I} [\tau]_{\rho})}
 \end{aligned}$$

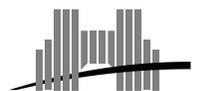


**Lemme d'adéquation :** Soit  $\mathcal{I}$  une interprétation et  $\rho$  une valuation

Si  $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{F}} M : \sigma$

et  $P_1 \in \mathcal{I}[\sigma_1]_{\rho}, \dots, P_k \in \mathcal{I}[\sigma_k]_{\rho},$

**alors**  $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma]_{\rho}.$



Par induction sur la preuve de  $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{F}} M : \sigma$ .

Pour les règles (Var), (Abs) et (App), la démonstration est la même que pour le lemme d'adéquation du système **D**.



- La dernière règle est  $(\forall I)$ . Posons  $\sigma \equiv \forall\alpha.\sigma'$ .

Par hypothèse d'induction,

$$M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma']_{\rho}.$$

Mais comme  $\alpha$  n'est libre dans aucun des  $\sigma_i$ ,

pour tout  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{SN}$ -saturé, tel que  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{SN}$ ,

on a  $\mathcal{I} [\sigma_i]_{\rho} = \mathcal{I} [\sigma_i]_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}$ .

Donc pour tout  $\mathcal{A}$   $\mathcal{SN}$ -saturé, tel que  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{SN}$ ,

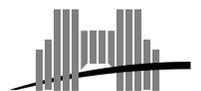
$P_1 \in \mathcal{I} [\sigma_1]_{\rho}, \dots, P_k \in \mathcal{I} [\sigma_k]_{\rho}$  implique

$$M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}.$$

Donc

$P_1 \in \mathcal{I} [\sigma_1]_{\rho}, \dots, P_k \in \mathcal{I} [\sigma_k]_{\rho}$  implique

$$\begin{aligned} M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] &\in \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha := \mathcal{A})} \\ &\triangleq \mathcal{I} [\forall\alpha.\sigma']_{\rho} \end{aligned}$$



- La dernière règle est  $(\forall E)$ . Posons  $\sigma \equiv \sigma'[\alpha := \tau]$ .  
Par hypothèse d'induction,

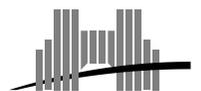
$$\begin{aligned} M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] &\in \mathcal{I} [\forall \alpha. \sigma']_{\rho} \\ &= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha := \mathcal{A})} \end{aligned}$$

C'est-à-dire que pour tout  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{SN}$ -saturé, tel que  
 $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{SN}$ ,

on a  $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}$ .

Donc a fortiori,

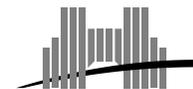
$$\begin{aligned} M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] &\in \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha := \mathcal{I} [\tau]_{\rho})} \\ &= \mathcal{I} [\sigma'[\alpha := \tau]]. \end{aligned}$$



La dernière égalité provient de la proposition 2.



**Théorème de normalisation forte** : Tout terme typable du système **F** est fortement normalisable.



**Théorème de normalisation forte :** Tout terme typable du système **F** est fortement normalisable.

On considère la valuation  $\rho_{\mathcal{SN}}$  qui associe l'ensemble  $\mathcal{SN}$  à chaque variable de type  $\alpha$ .

$x_i \in \mathcal{I}[\sigma_i]_{\rho_{\mathcal{SN}}}$  car d'après la proposition 2,  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\sigma_i]_{\rho_{\mathcal{SN}}}$

Donc d'après le lemme d'adéquation, on a

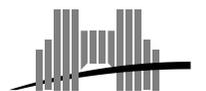
$M[x_1 := x_1] \dots [x_k := x_k] \equiv M \in \mathcal{I}[\sigma]_{\rho_{\mathcal{SN}}}$ .

Mais  $\mathcal{I}[\sigma]_{\rho_{\mathcal{SN}}} \subseteq \mathcal{SN}$ .

Donc  $M \in \mathcal{SN}$ .



# *Types de données*



## Parties saturées

---

Une partie de  $\Lambda$  est **saturée** si

pour tous  $M, P_1, \dots, P_n, N \in \Lambda$

$$M[x := N] P_1 \dots P_n \in \mathcal{X} \implies (\lambda x.M) N P_1 \dots P_n \in \mathcal{X}$$

On définit les interprétations comme précédemment,  
sauf qu'on remplace « $\mathcal{N}$ -saturé» par «saturé».

Il y a un lemme d'adéquation avec le même énoncé et la même démonstration que précédemment.

Si  $\sigma$  est un type clos,  $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket_\rho$  ne dépend pas de  $\sigma$ .

Donc on le note  $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket$ .



## Types de données

---

Un type clos est un **type de données** si

- $\mathcal{I}[\sigma] \neq \emptyset$ ,
- tout terme de  $\mathcal{I}[\sigma]$  est  $\beta$ -convertible à un terme clos.



## Types de données

---

- $Id \triangleq \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$  est le type de l'identité,

$$M \in \mathcal{I} [Id] \Leftrightarrow M \underset{\beta}{\longleftrightarrow} \lambda x.x.$$

- $Bool \triangleq \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)$  est le type des booléens,

$$M \in \mathcal{I} [Bool] \Leftrightarrow M \underset{\beta}{\longleftrightarrow} \lambda xy.x \text{ ou } M \underset{\beta}{\longleftrightarrow} \lambda xy.y.$$

- $Nat \triangleq \forall \alpha. ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$  est le type des entiers,

$$M \in \mathcal{I} [Nat] \Leftrightarrow \text{il existe un entier } n \text{ tel que}$$

$$M \underset{\beta}{\longleftrightarrow} \lambda fx.f(\dots n \text{ fois} \dots (fx) \dots) \text{ ou } M \underset{\beta}{\longleftrightarrow} \lambda f.f.$$

