

Systemes de types

version du 14 décembre 2004 – 09: 08

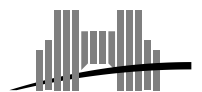
Types avec intersection



Les types avec intersection

On part du λ -calcul avec types simples et on l'**enrichit** par un opérateur intersection \wedge ,

- pour servir de support à des modèles, (comme nous l'avons vu),
- pour caractériser les termes fortement normalisables.

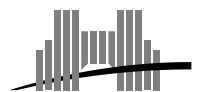


Les types avec intersection

On part du λ -calcul avec types simples et on l'**enrichit** par un opérateur intersection \wedge ,

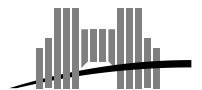
- pour servir de support à des modèles, (comme nous l'avons vu),
- pour caractériser les termes fortement normalisables.

Nous allons essentiellement nous intéresser à la **normalisation forte**.



Les types avec intersection : système D

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \text{ (Var)} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau.} \text{ (Abs)} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau} \text{ (App)}
 \end{array}$$



Les types avec intersection : système D

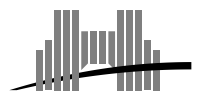
$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \text{ (Var)} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau.} \text{ (Abs)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau} \text{ (App)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau} \text{ (\wedge I)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma} \text{ (\wedge E}_g\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M : \tau} \text{ (\wedge E}_d\text{)}$$

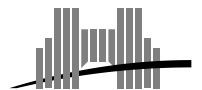


On n'a plus de correspondance de Curry-Howard

Le système **D** ne satisfait plus la correspondance de Curry-Howard.

Les règles $(\wedge E_g)$, $(\wedge E_g)$ et $(\wedge I)$
ne «parlent» que du même terme.

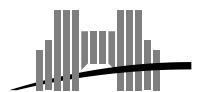
On perd la connexion terme et preuve.



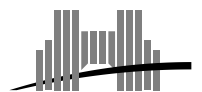
Contraction et affaiblissement

Lemme : Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si x n'apparaît pas dans Γ
alors $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$.

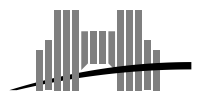
Lemme : Si $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ et si $x \notin FV(M)$ alors $\Gamma \vdash M : \sigma$.



Types de quelques termes

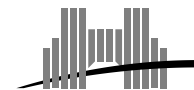


$$\begin{array}{c}
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \rightarrow \tau} (\wedge I_g) \qquad \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma} (\wedge I_d) \\
 \hline
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x x : \tau}{\vdash \lambda x. x x : (\sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)) \rightarrow \tau} (Abs) \\
 \hline
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x x : \tau}{\vdash \lambda x. x x : (\sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)) \rightarrow \tau} (App)
 \end{array}$$



$$\begin{array}{c}
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \rightarrow \tau} (\wedge I_g) \qquad \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)}{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x : \sigma} (\wedge I_d) \\
 \hline
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x x : \tau}{\vdash \lambda x. x x : (\sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)) \rightarrow \tau} (Abs) \\
 \hline
 \frac{x : \sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau) \vdash x x : \tau}{\vdash \lambda x. x x : (\sigma \wedge (\sigma \rightarrow \tau)) \rightarrow \tau} (App)
 \end{array}$$

On n'arrivera pas à typer $(\lambda x. x x) (\lambda x. x x)$.



$$\begin{array}{c}
 \frac{y : \alpha \vdash y : \alpha}{\vdash \lambda y. y : \alpha \rightarrow \alpha} \text{ (Abs)} \qquad \frac{y : \alpha \rightarrow \alpha \vdash y : \alpha \rightarrow \alpha}{\vdash \lambda y. y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)} \text{ (Abs)} \\
 \hline
 \vdash \lambda y. y : (\alpha \rightarrow \alpha) \wedge ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \text{ (\wedge I)}
 \end{array}$$



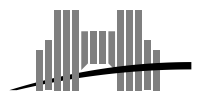
$$\begin{array}{c}
 \frac{y : \alpha \vdash y : \alpha}{\vdash \lambda y. y : \alpha \rightarrow \alpha} \text{ (Abs)} \qquad \frac{y : \alpha \rightarrow \alpha \vdash y : \alpha \rightarrow \alpha}{\vdash \lambda y. y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)} \text{ (Abs)} \\
 \hline
 \vdash \lambda y. y : (\alpha \rightarrow \alpha) \wedge ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \text{ (\wedge I)}
 \end{array}$$

donc

$$\vdash (\lambda x. x x) (\lambda y. y) : \alpha \rightarrow \alpha$$

en posant $\sigma := \alpha \rightarrow \alpha$ et $\tau := \alpha \rightarrow \alpha$.

Donc d'après le théorème que l'on va montrer tous ces termes sont fortement normalisables.



Les typables sont fortement normalisables



Quelques définitions

Soit \mathcal{N} une partie de Λ .

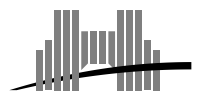
Définition : Une partie \mathcal{X} de Λ est \mathcal{N} -saturée si

pour tous $M, P_1, \dots, P_n \in \Lambda$ et tout $N \in \mathcal{N}$

$$M[x := N] P_1 \dots P_n \in \mathcal{X} \implies (\lambda x.M) N P_1 \dots P_n \in \mathcal{X}$$

Définition : $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y} \triangleq \{M \in \Lambda \mid (\forall N \in \mathcal{X}) M N \in \mathcal{Y}\}$.

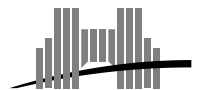
Remarque : $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$ et $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}'$ impliquent $\mathcal{X}' \hookrightarrow \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}'$.



Proposition : Si \mathcal{Y} est \mathcal{N} -saturé, alors $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ est \mathcal{N} -saturé.

Proposition : Si \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont \mathcal{N} -saturés,
alors $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ est \mathcal{N} -saturé.

Proposition : Plus généralement, si les \mathcal{X}_i sont \mathcal{N} -saturés,
alors $\bigcap_i \mathcal{X}_i$ est \mathcal{N} -saturé.



\mathcal{N} -interprétation

Définition : Une \mathcal{N} -interprétation est par définition une application, qui, à chaque type de base o , associe une partie \mathcal{N} -saturée de Λ , notée $\mathcal{I} \llbracket o \rrbracket$.

On étend les interprétations aux types.

- $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rightarrow \tau \rrbracket = \mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket \hookrightarrow \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket$.
- $\mathcal{I} \llbracket \sigma \wedge \tau \rrbracket = \mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket \cap \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket$.

Pour tout type σ , $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket$ est \mathcal{N} -saturé.

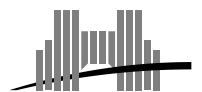
Par induction sur la structure des types.



Lemme d'adéquation : Soit \mathcal{I} une interprétation telle que pour tout type σ du système \mathbf{D} , on ait $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket \subseteq \mathcal{N}$.

Si $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$ et $P_1 \in \mathcal{I} \llbracket \sigma_1 \rrbracket, \dots, P_k \in \mathcal{I} \llbracket \sigma_k \rrbracket$,

alors $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket$.



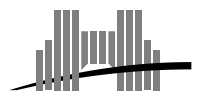
Commentaire : Pour les termes clos le théorème dit que

si $\vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$ alors $M \in \mathcal{I}[\sigma]$.

Si on prouve que M est de type σ alors on montre que M appartient au modèle de σ .

Terminologie : La terminologie **adéquation** est celle de Krivine.

Certains appellent ce lemme, **lemme de correction** comme en logique.



La démonstration est par induction sur la preuve du typage de M .

On examine la dernière règle utilisée.

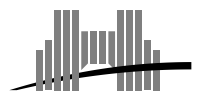
- La dernière règle utilisée est (Var).

Alors M est l'une des variables x_i .

Donc on a $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} x_i : \sigma_i$

et par hypothèse

$$\begin{aligned} M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] &\equiv x_i[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \\ &\equiv P_i \in \mathcal{I} \llbracket \sigma_i \rrbracket \end{aligned}$$



- La dernière règle est (**Abs**), donc

- $M \equiv \lambda x.M'$

- et $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} \lambda x.M' : \sigma \rightarrow \tau$.

Par conséquent, $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k, x : \sigma \vdash_{\mathbf{D}} M' : \tau$.

Soit un N quelconque tel que $N \in \mathcal{I}[\sigma]$.

Par induction, $M'[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k][x := N] \in \mathcal{I}[\tau]$.

Puisque $\mathcal{I}[\tau]$ est \mathcal{N} -saturé et que $\mathcal{I}[\sigma] \subseteq \mathcal{N}$ donc que $N \in \mathcal{N}$,

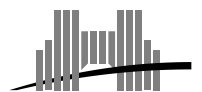
on peut appliquer la définition de \mathcal{N} -saturation et l'on obtient

$$(\lambda x.M')[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] N \in \mathcal{I}[\tau].$$

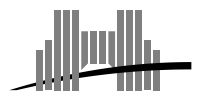
Comme N est quelconque, cela signifie que

$$(\lambda x.M')[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma] \hookrightarrow \mathcal{I}[\tau].$$

$$\text{Or } \mathcal{I}[\sigma] \hookrightarrow \mathcal{I}[\tau] = \mathcal{I}[\sigma \rightarrow \tau].$$



Donc $(\lambda x.M')[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma \rightarrow \tau]$.



- La dernière règle est (App), donc

- $M \equiv M_1 M_2$,

- $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M_1 : \tau \rightarrow \sigma$,

- et $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M_2 : \tau$.

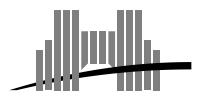
Par induction $M_1[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\tau \rightarrow \sigma]$ et

$$M_2[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\tau].$$

Puisque $\mathcal{I} [\sigma] \hookrightarrow \mathcal{I} [\tau] = \mathcal{I} [\sigma \rightarrow \tau]$, on a

$$M_1[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] M_2[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma].$$

C'est-à-dire $M_1 M_2[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma]$.



- La dernière règle est $(\wedge I)$, donc $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$
et $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \tau$.

Par induction

- $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma]$
- et $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\tau]$.

donc

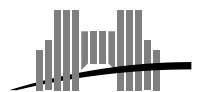
$$M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma] \cap \mathcal{I}[\tau] \equiv \mathcal{I}[\sigma \wedge \tau].$$

- La dernière règle est $(\wedge E_g)$, donc

$x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma \wedge \tau$ et par induction

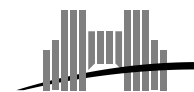
$$M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma] \cap \mathcal{I}[\tau],$$

donc $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma]$.



Faire en sorte que les interprétation soit dans \mathcal{N}

On donne maintenant un truc pour obtenir un ensemble \mathcal{N} tel que pour toute \mathcal{N} -interprétation, on ait $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket \subseteq \mathcal{N}$ pour tout type σ du système **D**.

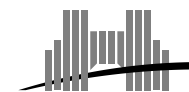


Couple adapté

Définition : Un couple $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ de parties de Λ est dit **adapté** si

1. \mathcal{N} est \mathcal{N} -saturé,

2. $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$ $\mathcal{N}_0 \subseteq (\mathcal{N} \leftrightarrow \mathcal{N}_0)$ $(\mathcal{N}_0 \leftrightarrow \mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$.



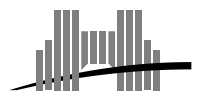
Lemme d'adaptation : Soit

- $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ un couple adapté,
- \mathcal{I} une \mathcal{N} -interprétation

telle que pour tout type de base o , $\mathcal{I} \llbracket o \rrbracket$ soit une partie \mathcal{N} -saturée de \mathcal{N} contenant \mathcal{N}_0 ,

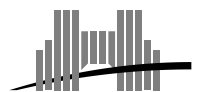
alors pour tout type σ ,

$\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket$ est une partie \mathcal{N} -saturée de \mathcal{N} contenant \mathcal{N}_0 .

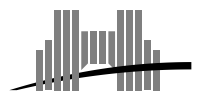


\mathcal{SN} = l'ensemble des termes **fortement normalisables**,

\mathcal{N}_0 = l'ensemble des termes $x M_1..M_n$ tels que $M_i \in \mathcal{SN}$



Proposition : \mathcal{SN} est \mathcal{SN} -saturé.



Proposition : \mathcal{SN} est \mathcal{SN} -saturé.

On veut montrer que pour tous $M, P_1, \dots, P_n \in \Lambda$ et tout $N \in \mathcal{SN}$

$$M[x := N] P_1 \dots P_n \in \mathcal{SN} \implies (\lambda x.M) N P_1 \dots P_n \in \mathcal{SN}$$

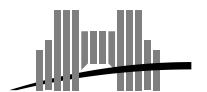
On raisonne par induction sur

$$red(N) + red(M[x := N] P_1 \dots P_n).$$

où $red(Q)$ est la somme des longueurs de toutes les réductions qui commencent en Q .

On considère tous les termes obtenus en contractant un redex de

$$(\lambda x.M) N P_1 \dots P_n.$$



- On contracte le redex $(\lambda x.M) N$. On obtient le terme $M[x := N] P_1 \dots P_n$ qui est dans \mathcal{SN} par hypothèse.
- On contracte un redex dans M , on obtient M' , on a $M[x := N] P_1 \dots P_n \xrightarrow{\beta} M'[x := N] P_1 \dots P_n$, donc

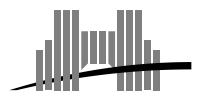
$$\text{red}(N) + \text{red}(M[x := N] P_1 \dots P_n) >$$

$$\text{red}(N) + \text{red}(M'[x := N] P_1 \dots P_n),$$

et l'on peut appliquer l'hypothèse d'induction.

On obtient $(\lambda x.M') N P_1 \dots P_n \in \mathcal{SN}$.

- On contracte un redex dans P_i , même démonstration.



- On contracte un redex dans N . On obtient le terme N' . On voit que

$$\text{red}(N) + \text{red}(M[x := N] P_1 \dots P_n)$$

$$>$$

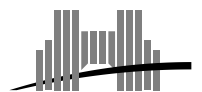
$$\text{red}(N') + \text{red}(M[x := N'] P_1 \dots P_n),$$

on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On obtient $(\lambda x.M) N' P_1 \dots P_n \in \mathcal{SN}$.



Proposition : $(\mathcal{N}_0, \mathcal{SN})$ est adapté.



Proposition : $(\mathcal{N}_0, \mathcal{SN})$ est adapté.

La condition 1. est satisfaite par le proposition précédente.

$\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{SN}$ car les termes de \mathcal{N}_0 sont visiblement fortement normalisables.

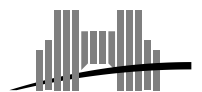
$\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{SN} \leftrightarrow \mathcal{N}_0$ fait partie de la définition de \mathcal{N}_0 .

Pour montrer $\mathcal{N}_0 \leftrightarrow \mathcal{SN} \subseteq \mathcal{SN}$,

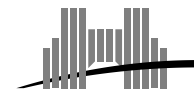
supposons $M \in \mathcal{N}_0 \leftrightarrow \mathcal{SN}$ qui ne soit pas fortement normalisable.

En revanche, quand on lui applique un élément de \mathcal{N}_0 , par exemple une variable x , on obtient $M x$ qui est fortement normalisable.

Contradiction.



Théorème de normalisation forte : Tout terme typable du système **D** est fortement normalisable.



Théorème de normalisation forte : Tout terme typable du système **D** est fortement normalisable.

On définit la \mathcal{SN} -interprétation qui associe à un type de base o , l'ensemble \mathcal{SN} , i. e. $\mathcal{I}[[o]] = \mathcal{SN}$.

Soit $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{D}} M : \sigma$.

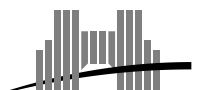
Par définition de \mathcal{N}_0 , on a $x_i \in \mathcal{N}_0$, donc $x_i \in \mathcal{I}[[\sigma_i]]$.

D'après le lemme d'adéquation,

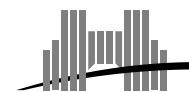
$M = M[x_1 := x_1] \dots [x_k := x_k] \in \mathcal{I}[[\sigma]]$.

Or d'après le lemme d'adaptation, $\mathcal{I}[[\sigma]] \subseteq \mathcal{SN}$.

Donc $M \in \mathcal{SN}$.



Les fortement normalisables sont typables



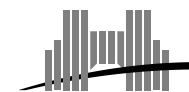
Les formes normales sont typables

On note $\Gamma \sqcap \Delta$ un environnement tel que :

$$\Gamma \sqcap \Delta \triangleq \{x : \sigma \wedge \tau \mid x : \sigma \in \Gamma \ \& \ x : \tau \in \Delta\} \cup (\Gamma \setminus \Delta) \cup (\Delta \setminus \Gamma).$$

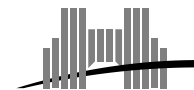
Lemme : Si $\Gamma_1 \vdash M : \sigma$ et $\Gamma_2 \vdash M : \sigma$ alors $\Gamma_1 \sqcap \Gamma_2 \vdash M : \sigma$.

Un terme en forme normale est de la forme $\lambda x_1 \dots x_n . x M_1 \dots M_k$.



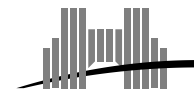
Proposition : Les formes normales sont typables.

On raisonne par induction sur la structure des formes normales.



Si $M \equiv \lambda y.M'$ est une abstraction.

Alors par induction $\Gamma, y : \sigma \vdash M : \tau$ et donc $\Gamma \vdash \lambda y.M : \sigma \rightarrow \tau$.



Supposons que $M \equiv x M_1 \dots M_k$ n'est pas une abstraction.

Alors par induction $\Gamma_1 \vdash M_1 : \sigma_1, \dots, \Gamma_k \vdash M_k : \sigma_k$.

Si $x \in \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ donc $x \in \Gamma_1 \sqcap \dots \sqcap \Gamma_k$ où x a un type σ .

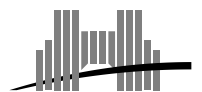
Posons

$$\Gamma \triangleq \{x : \sigma \wedge (\sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_k \rightarrow o)\} \cup (\Gamma_1 \sqcap \dots \sqcap \Gamma_k) \setminus \{x : \sigma\}.$$

On voit que

- $\Gamma \vdash x : \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_k \rightarrow o$,
- $\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1$
- et $\Gamma \vdash M_k : \sigma_k$.

Donc on peut prouver que $\Gamma \vdash x M_1 \dots M_k : \tau$.



Soit o est un type de base.

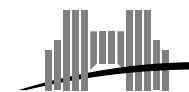
Si $x \notin \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ Posons

$$\Gamma \triangleq \{x : \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_k \rightarrow o\} \cup (\Gamma_1 \sqcap \dots \sqcap \Gamma_k).$$

On voit que

- $\Gamma \vdash x : \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_k \rightarrow o$,
- $\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1$
- et $\Gamma \vdash M_k : \sigma_k$.

Donc on peut prouver que $\Gamma \vdash x M_1 \dots M_k : o$.



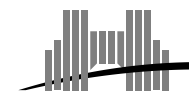
Les stratégies perpétuelles

Une **stratégie perpétuelle** est une façon de trouver le redex à contracter pour réduire un terme sans détruire la **non forte normalisation**.

$$C[(\lambda x.M) N] \xrightarrow{\text{perp}} C[M[x := N]].$$

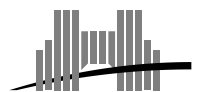
Si $C[(\lambda x.M) N]$ n'est pas fortement normalisable,
alors $C[M[x := N]]$ ne l'est pas non plus.

Ou encore si $C[M[x := N]]$ est fortement normalisable,
alors $C[(\lambda x.M) N]$ est fortement normalisable.



Les stratégies perpétuelles

Une stratégie perpétuelle préserve la forte normalisation par expansion.



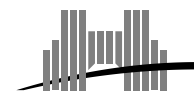
Exemple 1

Parmi ces réductions,

$$(\lambda xy.y) ((\lambda z.zzz) (\lambda u.uu)) \xrightarrow{\beta} \lambda y.y$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda xy.y) ((\lambda u.uu) (\lambda u.uu) (\lambda u.uu))$$

la deuxième est perpétuelle, tandis que la première ne l'est pas.



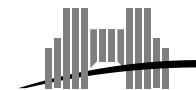
Exemple 2

Parmi ces réductions,

$$\begin{aligned}
 (\lambda x.x (\lambda y.yy)) (\lambda z.\mathbf{K}z(zz)) &\xrightarrow{\beta} (\lambda z.\mathbf{K}z(zz)) (\lambda y.yy) \\
 &\xrightarrow{\beta} \mathbf{K}(\lambda y.yy) ((\lambda y.yy)(\lambda y.yy)) \\
 &\xrightarrow{\beta} \mathbf{K}(\lambda y.yy) ((\lambda y.yy)(\lambda y.yy)) \xrightarrow{\beta} \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda x.x (\lambda y.yy)) (\lambda z.\mathbf{K}z(zz)) &\xrightarrow{\beta} (\lambda x.x (\lambda y.yy)) (\lambda z.z) \\
 &\xrightarrow{\beta} (\lambda z.z) (\lambda y.yy) \\
 &\xrightarrow{\beta} \lambda y.yy.
 \end{aligned}$$

C'est la première qui est perpétuelle.

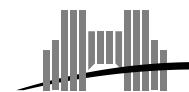


Exemple 2 (continué)

On aurait pu continuer

$$\mathbf{K}(\lambda y. yy) ((\lambda y. yy)(\lambda y. yy)) \xrightarrow{\beta} (\lambda y. yy)$$

Mais là encore on n'aurait pas appliqué une stratégie perpétuelle.



Redex perpétuel

On écrit NF l'ensemble des formes normales.

On peut définir un **redex perpétuel** $perp(M)$ dans un terme M qui n'est pas en forme normale de la façon suivante :

$$perp(\lambda x.M) = perp(M)$$

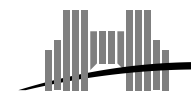
$$perp((\lambda x.P) N) = (\lambda x.P) N \text{ si } x \in FV(P) \text{ ou } (P \in NF \text{ et } N \in NF)$$

sinon

$$perp(M N) = perp(N) \text{ si } N \notin NF$$

$$perp(M N) = perp(M) \text{ autrement.}$$

Une **stratégie perpétuelle** est une réduction qui réduit à chaque étape un redex perpétuel.



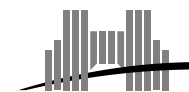
Stratégie perpétuelle et typage

Si \mathcal{SN} est l'ensemble des termes fortement normalisables.

\mathcal{SN} est plus petit point fixe de l'équation.

$$\mathcal{SN} = NF \cup \{M \in \Lambda \mid M \xrightarrow{perp} N \ \& \ N \in \mathcal{SN}\}$$

Remarque : les typables sont obtenus en itérant des expansions perpétuelles à partir des formes normales.



Lemme : Si $x \in FV(M)$ et $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$,
 alors il existe un environnement Γ' et un type σ tel que

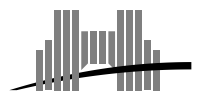
- $\Gamma' \vdash N : \sigma$
- et $\Gamma', x : \sigma \vdash M : \tau$

La démonstration est par induction sur la structure de M .

Si M est une **variable**, alors cette variable est x

puisque $x \in FV(M)$.

Donc $M \equiv x$ alors $M[x := N] \equiv N$. On prend $\sigma = \tau$ et $\Gamma = \Gamma'$.



Si M est une **abstraction** $\lambda y.M'$ alors

$M[x := N] \equiv \lambda y.(M'[x := N])$ et τ est de la forme $\tau_1 \rightarrow \tau_2$

avec $\Gamma \vdash \lambda y.(M'[x := N]) : \tau_1 \rightarrow \tau_2$.

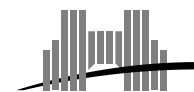
Puisque $\Gamma, y : \tau_1 \vdash M'[x := N] : \tau_2$,

par induction, il existe un environnement Γ' tel que

$\Gamma', y : \tau_1 \vdash N : \sigma$ et $\Gamma', y : \tau_1, x : \sigma \vdash M' : \tau_2$.

Par la convention de Barendregt $y \notin FV(N)$.

Donc $\Gamma' \vdash N : \sigma$ et $\Gamma', x : \sigma \vdash \lambda y.M' : \tau_1 \rightarrow \tau_2$.

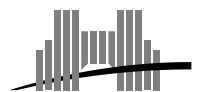


Si M est une **application** $M_1 M_2$ alors

$$M[x := N] \equiv (M_1[x := N]) (M_2[x := N]).$$

Donc il existe

- $\Gamma \vdash M_1[x := N] : \tau' \rightarrow \tau$
- et $\Gamma \vdash M_2[x := N] : \tau'$.



Si $x \notin M_1$ et $x \in M_2$, alors

- $M_1[x := N] \equiv M_1$
- $\Gamma \vdash M_1 : \tau' \rightarrow \tau$

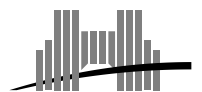
et il existe un environnement Γ' tel que

- $\Gamma' \vdash N : \sigma$
- et $\Gamma', x : \sigma \vdash M_2 : \tau'$.

Donc $(\Gamma \sqcap \Gamma'), x : \sigma \vdash M_1 : \tau' \rightarrow \tau$
 et $(\Gamma \sqcap \Gamma'), x : \sigma \vdash M_2 : \tau'$.

Ainsi $(\Gamma \sqcap \Gamma'), x : \sigma \vdash M_1 M_2 : \tau$.

Si $x \in M_1$ et $x \notin M_2$, la démonstration est similaire.



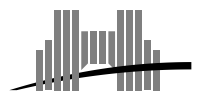
Si $x \in M_1$ et $x \in M_2$, et il existe des environnements Γ'_1 et Γ'_2 tels que

- $\Gamma'_1 \vdash N : \sigma_1$ et $\Gamma'_1, x : \sigma_1 \vdash M_1 : \tau' \rightarrow \tau$,
- $\Gamma'_2 \vdash N : \sigma_2$ et $\Gamma'_2, x : \sigma_2 \vdash M_2 : \tau'$.

Donc

- $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2 \vdash N : \sigma_1 \wedge \sigma_2$,
 - $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2, x : \sigma_1 \wedge \sigma_2 \vdash M_1 : \tau' \rightarrow \tau$,^a
 - $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2, x : \sigma_1 \wedge \sigma_2 \vdash M_2 : \tau'$,^a
- puis $\Gamma'_1 \sqcap \Gamma'_2, x : \sigma_1 \wedge \sigma_2 \vdash M_1 M_2 : \tau$.

^aA prouver, mais vous me l'acheter !



Proposition : Si P est typable et si $Q \xrightarrow{\text{perp}} P$
alors Q est typable.

La démonstration est par induction sur la structure de P .

Si P est une **abstraction**, donc $P \equiv \lambda x.P'$, alors $Q' \xrightarrow{\text{perp}} P'$ avec $Q \equiv \lambda x.Q'$.

Puisque P est typable, P' est typable.

Par induction Q' est typable et clairement Q est typable.

Si P est une **application** $M N$, telle que le redex perpétuel se situe dans M ou N , le résultat vient clairement par induction.



Supposons donc que P est le redex perpétuel.

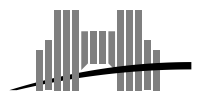
- Si $P \equiv (\lambda x.M') N$ avec $M' \in NF$ et $N \in NF$,
le résultat se démontre facilement.
- Si $P \equiv (\lambda x.M') N$ avec $x \in FV(M')$ et $Q \equiv M'[x := N]$.

En appliquant le lemme, on démontre qu'il existe

- $\Gamma' \vdash N : \sigma$
- et $\Gamma', x : \sigma \vdash M' : \tau$.

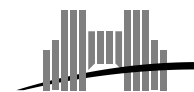
On en déduit que $\Gamma' \vdash \lambda x.M' : \sigma \rightarrow \tau$.

Par conséquent, $\Gamma' \vdash (\lambda x.M') N : \tau$.



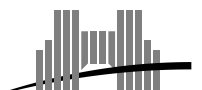
Théorème : Si M est fortement normalisable
alors M est typable dans **D**.

Grâce à la proposition précédente et à la remarque.

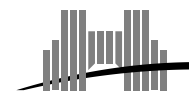


Caractérisation des fortement normalisables

Un terme est fortement normalisable
si et seulement si
il est typable dans **D**



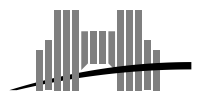
Le système F



Le système F

Le système de type admet maintenant des quantifications.

Par exemple, on veut pouvoir écrire $\vdash \lambda x.x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$.



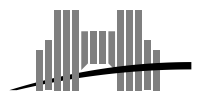
Le système F

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \text{ (Var)} \qquad \frac{\Gamma, x \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau.} \text{ (Abs)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau} \text{ (App)}$$

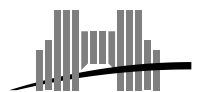
$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \sigma} \text{ (\forall I)} \quad \text{si } \alpha \text{ n'est libre dans aucun des types de } \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \sigma}{\Gamma \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]} \text{ (\forall E)}$$



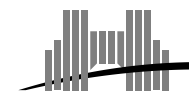
Le système F

$$\frac{x : \alpha \vdash x : \alpha}{\vdash \lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha} (Abs)$$
$$\frac{\vdash \lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha}{\vdash \lambda x.x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)} (\forall I)$$



Le système F

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \vdash \lambda x.x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \quad (\forall I) \\
 \hline
 \vdash \lambda x.x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \quad (\forall E)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \vdash \lambda y.y : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \quad (\forall I) \\
 \hline
 \vdash (\lambda x.x) (\lambda y.y) : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \quad (App)
 \end{array}$$

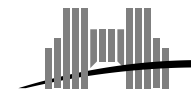


Le système F

$$\begin{array}{c}
 \frac{x : \forall \alpha. \alpha \vdash x : \forall \alpha. \alpha}{x : \forall \alpha. \alpha \vdash x : \alpha \rightarrow \beta} (\forall E) \qquad \frac{x : \forall \alpha. \alpha \vdash x : \forall \alpha. \alpha}{x : \forall \alpha. \alpha \vdash x : \alpha} (\forall E) \\
 \frac{}{} \\
 \frac{}{} \\
 \frac{x : \forall \alpha. \alpha \vdash xx : \beta}{\vdash \lambda x. xx : (\forall \alpha. \alpha) \rightarrow \beta} (Abs) \\
 \frac{}{} \\
 \frac{}{} (App)
 \end{array}$$

Remarque : Le type $(\forall \alpha. \alpha)$ n'est habité par aucun terme clos.

On l'utilise pour noter la contradiction.



Le système F

$$x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \vdash x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$$

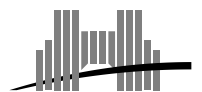
($\forall E$)

$$x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \vdash x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \quad x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \vdash x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$$

(App)

$$x : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \vdash xx : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$$

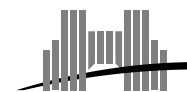
(Abs)

$$\vdash \lambda x. xx : \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$$


Le système F

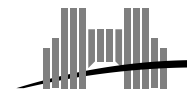
$(\lambda x.xx) (\lambda x.xx)$ n'est pas typable dans le système F.

En revanche, $(\lambda x.xx) (\lambda x.x)$ est typable dans le système F.

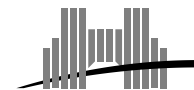


Réduction du sujet dans F

Si $\Gamma \vdash_{\mathbf{F}} M : \sigma$ et si $M \xrightarrow{\beta} N$ alors $\Gamma \vdash_{\mathbf{F}} N : \sigma$.



***Les typables du système F
sont fortement normalisables***



La difficulté de la preuve de forte normalisation

En général, quand on définit l'interprétation des types

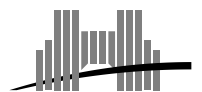
on la définit par **des interprétations sur des types plus simples.**

L'interprétation $\mathcal{I} [\forall\alpha.\sigma]_\rho$ ressemble à une intersection et on veut la définir par

$$\mathcal{I} [\forall\alpha.\sigma]_\rho = \bigcap_{\tau \text{ types}} \mathcal{I} [\sigma]_{\rho(\alpha := \mathcal{I} [\tau]_\rho)}$$

Mais cette définition conduit à un cercle vicieux.

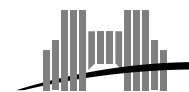
Car τ peut être $\forall\alpha.\sigma$ lui-même.



La difficulté de la preuve de forte normalisation

Une telle théorie est dite **imprédicative**.

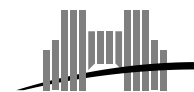
Pour résoudre ce problème, Jean-Yves Girard a défini les **candidats de réductibilité**.



Là aussi on considère la paire adaptée :

\mathcal{SN} = l'ensemble des termes **fortement normalisables**,

\mathcal{N}_0 = l'ensemble des termes $x M_1 .. M_n$ tels que $M_i \in \mathcal{SN}$



Interprétations

Soit \mathcal{I} une interprétation

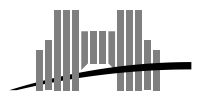
$$\begin{aligned} \rho : \text{Var} &\rightarrow \text{parties } \mathcal{SN}\text{-saturées de } \mathcal{SN} \text{ qui contiennent } \mathcal{N}_0 \\ \alpha &\mapsto \rho(\alpha) \end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{N}_0 \subseteq \rho(\alpha) \subseteq \mathcal{SN}$.

On modifie une valuation comme d'habitude

$$\rho(\alpha := \mathcal{A}) = \begin{cases} \rho(\beta) & \text{if } \beta \neq \alpha \\ \mathcal{A} & \text{if } \beta \equiv \alpha \end{cases}$$

\mathcal{A} est une partie de Λ qui est \mathcal{SN} -saturée et qui contient \mathcal{N}_0 .



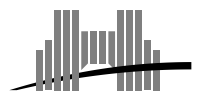
Interprétations

On définit l'interprétation d'un type comme suit :

σ	$\rho \llbracket \sigma \rrbracket$
α	$\rho(\alpha)$
$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$	$\mathcal{I} \llbracket \sigma_1 \rrbracket_\rho \hookrightarrow \mathcal{I} \llbracket \sigma_2 \rrbracket_\rho$
$\forall \alpha. \sigma$	$\bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}$

L'intersection est prise sur toutes les parties \mathcal{A} qui sont \mathcal{SN} -saturées et qui contiennent \mathcal{N}_0 .

Remarque : Dans la suite $\bigcap_{\mathcal{A}}$ signifiera que l'intersection est prise sur toutes les parties \mathcal{A} qui sont \mathcal{SN} -saturées et qui contiennent \mathcal{N}_0 .



Proposition 1 : Pour tout σ ,

- $\mathcal{I}[\sigma]_\rho$ est \mathcal{SN} -saturé
- et $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\sigma]_\rho \subseteq \mathcal{SN}$

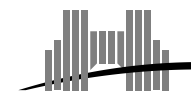
Si $\sigma \equiv \alpha$ est une variable, $\mathcal{I}[\sigma]_\rho = \rho(\alpha)$ et ça vient par définition des valuations.

Si $\sigma \equiv \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$, par induction $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\sigma_1]_\rho \subseteq \mathcal{SN}$ et $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\sigma_2]_\rho \subseteq \mathcal{SN}$ donc

$$\mathcal{N}_0 x \subseteq \mathcal{SN} \hookrightarrow \mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\sigma_1]_\rho \hookrightarrow \mathcal{I}[\sigma_2]_\rho \subseteq \mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{SN} \subseteq \mathcal{SN}.$$

$\mathcal{I}[\sigma]_\rho = \mathcal{I}[\sigma_1]_\rho \hookrightarrow \mathcal{I}[\sigma_2]_\rho$ est \mathcal{SN} -saturé provient

- d'un des premiers lemmes sur la saturation
- et du fait que par induction $\mathcal{I}[\sigma_2]_\rho$ est \mathcal{SN} -saturé.



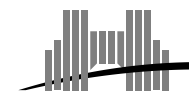
Si $\sigma \equiv \forall \alpha. \tau$ alors

$$\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket_{\rho} = \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}.$$

Par induction, chaque $\mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}$ est \mathcal{SN} -saturé
et $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{A})} \subseteq \mathcal{SN}$.

Clairement $\mathcal{N}_0 \subseteq \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{A})} \subseteq \mathcal{SN}$.

$\bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}$ est \mathcal{SN} -saturé, comme intersection de \mathcal{SN} -saturés.



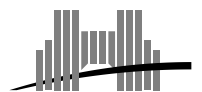
Proposition 2 : $\mathcal{I} \llbracket \sigma[\alpha := \tau] \rrbracket_\rho = \mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_\rho)}$.

La démonstration est classique.

Si $\sigma \equiv \alpha$ est une variable, facile !

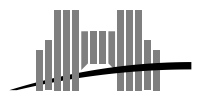
Si $\sigma \equiv \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} \llbracket (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)[\alpha := \tau] \rrbracket_\rho &= \mathcal{I} \llbracket \sigma_1[\alpha := \tau] \rightarrow \sigma_2[\alpha := \tau] \rrbracket_\rho \\
 &= \mathcal{I} \llbracket \sigma_1[\alpha := \tau] \rrbracket_\rho \hookrightarrow \mathcal{I} \llbracket \sigma_2[\alpha := \tau] \rrbracket_\rho \\
 &= \mathcal{I} \llbracket \sigma_1 \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_\rho)} \hookrightarrow \mathcal{I} \llbracket \sigma_2 \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_\rho)} \\
 &= \mathcal{I} \llbracket \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rrbracket_{\rho(\alpha := \mathcal{I} \llbracket \tau \rrbracket_\rho)}
 \end{aligned}$$



Si $\sigma \equiv \forall\beta.\sigma'$ alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} [(\forall\beta.\sigma')[\alpha := \tau]]_{\rho} &= \mathcal{I} [\forall\beta.(\sigma'[\alpha := \tau])]_{\rho} \\
 &= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} [\sigma'[\alpha := \tau]]_{\rho(\beta:=\mathcal{A})} \\
 &= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\beta:=\mathcal{A})(\alpha:=\mathcal{I} [\tau]_{\rho(\beta:=\mathcal{A})})} \\
 &= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha:=\mathcal{I} [\tau]_{\rho})(\beta:=\mathcal{A})} \\
 &= \mathcal{I} [\forall\beta.\sigma']_{\rho(\alpha:=\mathcal{I} [\tau]_{\rho})}
 \end{aligned}$$

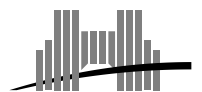


Lemme d'adéquation : Soit \mathcal{I} une interprétation et ρ une valuation

Si $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{F}} M : \sigma$

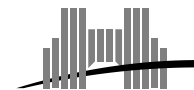
et $P_1 \in \mathcal{I}[\sigma_1]_{\rho}, \dots, P_k \in \mathcal{I}[\sigma_k]_{\rho},$

alors $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I}[\sigma]_{\rho}.$



Par induction sur la preuve de $x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k \vdash_{\mathbf{F}} M : \sigma$.

Pour les règles (Var), (Abs) et (App), la démonstration est la même que pour le lemme d'adéquation du système **D**.



- La dernière règle est $(\forall I)$. Posons $\sigma \equiv \forall\alpha.\sigma'$.

Par hypothèse d'induction,

$$M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma']_{\rho}.$$

Mais comme α n'est libre dans aucun des σ_i ,

pour tout \mathcal{A} , \mathcal{SN} -saturé, tel que $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{SN}$,

on a $\mathcal{I} [\sigma_i]_{\rho} = \mathcal{I} [\sigma_i]_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}$.

Donc pour tout \mathcal{A} \mathcal{SN} -saturé, tel que $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{SN}$,

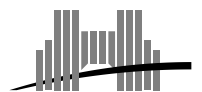
$P_1 \in \mathcal{I} [\sigma_1]_{\rho}, \dots, P_k \in \mathcal{I} [\sigma_k]_{\rho}$ implique

$$M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}.$$

Donc

$P_1 \in \mathcal{I} [\sigma_1]_{\rho}, \dots, P_k \in \mathcal{I} [\sigma_k]_{\rho}$ implique

$$\begin{aligned} M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] &\in \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha := \mathcal{A})} \\ &\triangleq \mathcal{I} [\forall\alpha.\sigma']_{\rho} \end{aligned}$$



- La dernière règle est $(\forall E)$. Posons $\sigma \equiv \sigma'[\alpha := \tau]$.
Par hypothèse d'induction,

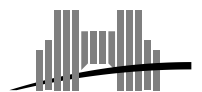
$$\begin{aligned} M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] &\in \mathcal{I} [\forall \alpha. \sigma']_{\rho} \\ &= \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha := \mathcal{A})} \end{aligned}$$

C'est-à-dire que pour tout \mathcal{A} , \mathcal{SN} -saturé, tel que
 $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{SN}$,

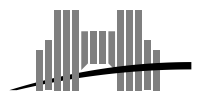
on a $M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] \in \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha := \mathcal{A})}$.

Donc a fortiori,

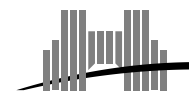
$$\begin{aligned} M[x_1 := P_1] \dots [x_k := P_k] &\in \mathcal{I} [\sigma']_{\rho(\alpha := \mathcal{I} [\tau]_{\rho})} \\ &= \mathcal{I} [\sigma'[\alpha := \tau]]. \end{aligned}$$



La dernière égalité provient de la proposition 2.



Théorème de normalisation forte : Tout terme typable du système **F** est fortement normalisable.



Théorème de normalisation forte : Tout terme typable du système **F** est fortement normalisable.

On considère la valuation $\rho_{\mathcal{SN}}$ qui associe l'ensemble \mathcal{SN} à chaque variable de type α .

$x_i \in \mathcal{I}[\sigma_i]_{\rho_{\mathcal{SN}}}$ car d'après la proposition 2, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{I}[\sigma_i]_{\rho_{\mathcal{SN}}}$

Donc d'après le lemme d'adéquation, on a

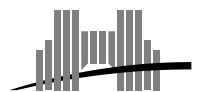
$M[x_1 := x_1] \dots [x_k := x_k] \equiv M \in \mathcal{I}[\sigma]_{\rho_{\mathcal{SN}}}$.

Mais $\mathcal{I}[\sigma]_{\rho_{\mathcal{SN}}} \subseteq \mathcal{SN}$.

Donc $M \in \mathcal{SN}$.



Types de données



Parties saturées

Une partie de Λ est **saturée** si

pour tous $M, P_1, \dots, P_n, N \in \Lambda$

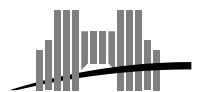
$$M[x := N] P_1 \dots P_n \in \mathcal{X} \implies (\lambda x.M) N P_1 \dots P_n \in \mathcal{X}$$

On définit les interprétations comme précédemment,
sauf qu'on remplace « \mathcal{N} -saturé» par «saturé».

Il y a un lemme d'adéquation avec le même énoncé et la même démonstration que précédemment.

Si σ est un type clos, $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket_\rho$ ne dépend pas de σ .

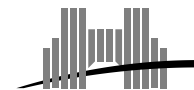
Donc on le note $\mathcal{I} \llbracket \sigma \rrbracket$.



Types de données

Un type clos est un **type de données** si

- $\mathcal{I}[\sigma] \neq \emptyset$,
- tout terme de $\mathcal{I}[\sigma]$ est β -convertible à un terme clos.



Types de données

- $Id \triangleq \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$ est le type de l'identité,

$$M \in \mathcal{I} [Id] \Leftrightarrow M \underset{\beta}{\longleftrightarrow} \lambda x.x.$$

- $Bool \triangleq \forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)$ est le type des booléens,

$$M \in \mathcal{I} [Bool] \Leftrightarrow M \underset{\beta}{\longleftrightarrow} \lambda xy.x \text{ ou } M \underset{\beta}{\longleftrightarrow} \lambda xy.y.$$

- $Nat \triangleq \forall \alpha. ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ est le type des entiers,

$$M \in \mathcal{I} [Nat] \Leftrightarrow \text{il existe un entier } n \text{ tel que}$$

$$M \underset{\beta}{\longleftrightarrow} \lambda fx.f(\dots n \text{ fois} \dots (fx) \dots) \text{ ou } M \underset{\beta}{\longleftrightarrow} \lambda f.f.$$

