Well quasi-ordering in a paper by Maurice Janet

Pierre LESCANNE
Centre de Recherche en Informatique de Nancy
LORIA
Campus Scientifique, BP 239,
54506 Vandœuvre-les-Nancy, France

October 1989

Abstract

This note provides the French original text and the English translation of excerpts of a paper, entitled "Sur les systèmes d'équations au dérivées partielles" (*Journal de Mathématiques*, III(8), 1920), due to Maurice Janet, and dealing with well quasi-orderings.

Since I am basically interested in the concept of well quasi-ordering (see [1]) presented in Janet's paper and included in Chapter I, entitled *Modules de monomes, théorie générale et applications* ("Modules of monomials, general theory and applications"), I am going to focus just on this aspect in this note.

The paper begins by defining "monomial" :

> Le mot *monome* désignera dans ce qui suit une expression de la forme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ où les α sont des entiers positifs (sens large) ; ($x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0$ devra être considéré comme un ⟨⟨monome⟩⟩).

This means :

> In what follows, the word *monomial* refers to an expression of the form $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ where the α's are non-negative integers ($x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0$ should be considered a "monomial").

Then Janet states :

> *Théorème général sur certaines suites de monomes.* Une suite de monomes $M_1, M_2, \ldots$ telle que chacun d'eux n'est multiples d'aucun des précédents ne peut comprendre qu'un nombre fini de termes.

This translates to :

> *A general theorem on some sequences of monomials.* A sequence of monomials $M_1, M_2, \ldots$ such that each one is a multiple of none of the previous ones can contain only finitely many terms.

Janet's proof of the theorem is as follows :

> Dans le cas d'une variable, la proposition se réduit à celle-ci : Une suite d'entiers positifs décroissante est finie.
>
> Admettons la proposition dans le cas de $n-1$ variables, et démontrons-la pour n. Soit $M_1 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ le premier monome de la suite donnée (S) ; dans l'un des suivants, pris arbitrairement, l'exposant d'un des variables au moins, x_i par exemple, est inférieur à l'exposant de cette variable dans M_1. Appelons (S_{ik}) la suite de monomes de (S) où x_i entre à l'exposant k exactement : $(k = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_i - 1)$; nous obtenons ainsi $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ suites partielles, dont l'ensemble renferme (peut-être avec répétition) *tous* les monomes de (S) qui suivent M_1. Mais les termes de S_{ik} ne sont autres, au facteur près x_i^k, que les monomes à $n-1$ variables $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ tels que chacun d'eux ne soit multiple d'aucun des précédents. Chacune des ces suites est donc finie et il en est de même de la suite donnée.

This means :

> In the case of one variable, the proposition reduces to : A decreasing sequence of positive integers is finite.
>
> Let us assume the proposition in the case of $n-1$ variables, and let us prove it for n. Let $M_1 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ be the first monomial of the given sequence (S) ; in any subsequent monomials, chosen arbitrarily, the exponent of at least one of the variables, say x_i, is less than the exponent of this variable in M_1. Let us call (S_{ik}) the sequence of monomials wherein x_i occurs with exponent k exactly : $(k = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_i - 1)$; thus we obtain

> $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ partial sequences, the whole of which contains (perhaps with repetition) *all* the monomials of (S) that follow M_1. However, the terms of S_{ik} are, up to the factor x_i^k, nothing but monomials in $n-1$ variables $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, such that each is a multiple of none of the preceding ones. Therefore, each of these sequences is finite, and the same holds for the given sequence.

After the proof of the theorem, he says on page 69 under the title "Miscellaneous consequences" :

> Il résulte du théorème précédent que d'un système quelconque, infini de monomes, on peut extraire un système fini (M) tel que tout monome du système donné soit multiple de l'un, au moins, de monomes (M) ; il suffit, en effet, de choisir arbitrairement un monome du système donné, M_1, puis parmi les monomes du système un monome M_2 qui ne soit pas multiple de M_1, puis parmi les monomes du système qui ne sont multiples ni de M_1, ni de M_2, un monome M_3 etc. ; la suite ainsi obtenue sera finie : tout monome du système donné sera multiple de l'un au moins des monomes ainsi obtenus $M_1, M_2, \ldots, M_p$.

This translates to :

> From the previous theorem, it follows that from any system of monomials, one can extract a finite system (M) such that every monomial of the given system is a multiple of at least one of the monomials of (M) ; indeed, it is sufficient to arbitrarily choose a monomial of the given system, M_1, then, among the monomials of the system, a monomial M_2 which is not a multiple of M_1, then, among the monomials of the system which are multiples of neither M_1, nor M_2, a monomial M_3, etc, ; the sequence obtained is finite : each monomial of the given system is a multiple of at least one of the monomials $M_1, M_2, \ldots, M_p$.

Then some applications follow :

> On peut utiliser la proposition précédente sous différentes formes que nous allons indiquer :
>
> Si l'on considère une *suite* infinie de monomes, à partir d'un certain rang r, on n'obtient que des multiples des monomes de rang inférieure à r.

Si l'on considère une suite quelconque de monomes de degrés non décroissants, à partir d'un certain degré p, les monomes de la suite sont des multiples de monomes de la suite de degré inférieur à p.

Une suite de *systèmes* de monomes contenant chacun des monomes qui ne sont multiples d'aucun de ceux contenus dans les systèmes précédents est finie.

Soit $S_1S_2\dots S_k\dots$ une suite de systèmes de monomes où S_{k+1} est constitué par : 1° les monomes de S_k ; 2° des monomes qui ne sont multiples d'aucun monome de de S_k ; un telle suite est nécessairement finie.

Si l'on considère une suite de systèmes[1] de monomes E_k, $E_{k+1},\dots$, de degré $k, k+1,\dots$, où E_{i+1} contient tous les monomes de degré $i+1$ multiples des monomes de E_i (quel que soit i), dès que i dépasse une certaine valeur p, E_{i+1} ne contient *que* les multiples (de degré $i+1$) de E_i.

This means :

One can use several different forms of the previous proposition, as we are going to show :

If one considers an infinite *sequence* of monomials, after some rank r, one gets only multiples of the monomials of rank less than r.

If one considers any sequence of monomials of non-decreasing degrees, after some rank p, the monomials of the sequence are multiples of the monomial of the sequence of degree less than p.

A sequence of *systems* of monomials, each one of which contains monomials that are not multiples of any of those of the previous systems, is finite.

Let $S_1S_2\dots S_k\dots$ be a sequence of monomials where S_{k+1} is made of (1) the monomials of S_k, and (2) some monomials that are multiples of none of the monomials of S_k. Such a sequence is necessarily finite.

If one considers a sequence of systems[1] of monomials E_k, E_{k+1}, ..., of degrees $k, k+1, \dots$, where E_{i+1} contains all the monomials of degree $i+1$ that are multiples of monomials of E_i

[1] Delassus. Extension du théorème de Cauchy. *Annales de l'Ecole Normale*, 1896.

(for each i), whenever i goes further than some value p, E_{i+1} contains *only* multiples (of degree $i+1$) of E_i.

References

[1] J. B. Kruskal. The theory of well-quasi-ordering: A frequently discovered concept. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 13(3):297–305, November 1972.