

est plus grande que dans le noyau ($V_M > V_N$ d'après le document 2b, la vitesse passant de 14 km/s à 6 km/s). Si on note i_M l'angle avec lequel arrive le rais depuis le manteau et i_N celui avec lequel le rais démarre dans le noyau, on a alors $\sin i_M/V_M = \sin i_N/V_N$ qui se traduit par $i_N < i_M$. On a bien un rais qui se rapproche de la normale et qui plonge. Lors de la réfraction inverse ($N \rightarrow M$), le rais s'écarte à nouveau de la normale et le rais frappe la surface en un point beaucoup plus éloigné du foyer que les rais P .

10. Notons d la distance du foyer au sismomètre, t_0 l'instant du séisme qu'on ne connaît pas, t_S et t_P les temps d'arrivée des ondes S et P sur le sismomètre, et V_S et V_P les vitesses des ondes. On aura alors $d = V_S(t_S - t_0)$ et $d = V_P(t_P - t_0)$ de sorte que l'on peut éliminer t_0 pour obtenir :

$$\frac{d}{V_S} - \frac{d}{V_P} = t_S - t_P \Leftrightarrow d = \frac{V_S V_P}{V_P - V_S}(t_S - t_P) = 15 \cdot 500 = 7500 \text{ km} \quad (6)$$

On peut tout à fait fixer $t_0 = 0$ de manière arbitraire.

Cette mesure ne permet pas de trouver le Foyer, juste la distance (il est donc sur une sphère). Il faut plusieurs mesures avec des sismomètres suffisamment éloignés les uns des autres pour trianguler la position du foyer.

Le sismomètre détecte des vibrations verticales de quelques micromètres (quelques fois la longueur d'onde de la lumière), il est incroyablement sensible.

11. La vitesse passe de $V_M = 13,5 \text{ km/s}$ à $V_N = 7,5 \text{ km/s}$. Pour un angle d'incidence de $i_M = 50^\circ$, l'angle de réfraction i_N sera tel que $\sin i_N = V_N \sin i_M / V_M$, soit $i_N = \arcsin(V_N \sin i_M / V_M) = 27^\circ$.

C. Tomographie sismique

12. Le document 3 indique que le secteur 1 correspond à une vitesse augmentée et le secteur 2 à une vitesse diminuée. Le second dessin indique que le secteur 1 est plus froid et le secteur 2 plus chaud.
13. La vitesse des ondes diminue lorsque la température augmente (le module d'Young diminue et la densité augmente, ce qui joue dans le même sens). Avec la relation $d = V/\Delta t$, on voit qu'une variation $\delta \Delta t$ du temps de propagation à distance constante correspond à une variation de vitesse δV telle que :

$$\frac{|\delta \Delta t|}{\Delta t} = \frac{|\delta V|}{V} = 2\% \quad (7)$$

Pour connaître la variation de température, on peut évaluer $\partial V / \partial T \simeq \delta V / \delta T = 0,5/500 = 10^{-3} \text{ km/s}$ à partir de la courbe du document 5. On a alors $\delta V \simeq 8,3 \cdot 0,02 = 0,16 \text{ km/s}$ et $\delta T \simeq 0,16/0,001 = 160 \text{ K}$.

D. Etude du fonctionnement d'un sismomètre

14. A l'équilibre, le point O et le point M sont immobiles par rapport au sol de sorte que le référentiel $\mathcal{R}_B$, lié à O , est galiléen. La somme des forces appliquées au point M dans ce référentiel est nulle, de même que la force visqueuse ($\vec{F}_{\text{visc}} = -\lambda \vec{v}$) puisque $\vec{v} = 0$. Notant ℓ_{eq} la position de la masse à l'équilibre dans $\mathcal{R}_B$, on a alors :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} = \vec{F}_{\text{elast}} + \vec{F}_{\text{grav}} = -k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{e}_x + mg\vec{e}_x \quad (8)$$

La position d'équilibre de la masse est donc : $\ell_{eq} = \ell_0 + mg/k$

15. $\mathcal{R}_B$ est un référentiel non galiléen car il en translation rectiligne non uniforme par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen).
16. Appliquons le PFD à la masse dans le référentiel $\mathcal{R}_B$, non galiléen. Puisque ce référentiel n'est pas en rotation par rapport au référentiel lié au sol, la seule force d'inertie supplémentaire est la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -ma_B\vec{e}_x$ avec a_B l'accélération du bâti. La masse ne pouvant se déplacer que le long de l'axe x , le PFD s'écrit :

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x + mg\vec{e}_x - \lambda\dot{x}\vec{e}_x - ma_B\vec{e}_x \quad (9)$$

Notant $u(t) = x(t) - \ell_{eq}$, on obtient en projection sur l'axe x :

$$m\ddot{u} = -ku - \lambda\dot{u} - ma_B, \quad (10)$$

que l'on peut écrire

$$\ddot{u} + \frac{\lambda}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = a_B. \quad (11)$$

On trouve la forme demandée avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ pulsation propre de l'oscillateur et $\alpha_0 = \lambda/m$ le coefficient d'amortissement.

17. Toute variation de flux magnétique au travers d'une bobine provoque l'apparition d'une tension à ses bornes par le phénomène d'induction, donc d'un courant si celle-ci est connectée à une résistance. L'aimant créant un champ magnétique inhomogène le long de l'axe x , le flux de son champ magnétique au travers de la bobine change lorsque celle-ci se déplace verticalement, ce que l'on peut détecter en mesurant la tension à ses bornes.
18. **Le sujet propose une modélisation de la bobine "équivalente un générateur de fem $E(t) = \dot{u}(t)$ en série avec une résistance R_c ", il faut bien lire le sujet et ne pas proposer son propre modèle (avec auto induction...).**

Le circuit comporte le générateur en série avec R_c puis R_s . On oriente i pour que R_s soit en convention récepteur.

19. La loi des mailles impose $E = R_ci + R_si$ avec $V = R_si$. On a donc $E = (1 + R_c/R_s)V$, qui donne $V(t) = G\dot{u}(t)R_s/(R_c + R_s)$.
20. Il s'agit de la force de Laplace due au fait que la bobine, parcourue par un courant, est soumise à l'influence du champ magnétique créé par l'aimant. **On rappelle que son expression générale, non demandée, est $\vec{F}_B = \oint i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.** Puisque $i = V/R_s = G\dot{u}(t)/(R_c + R_s)$, l'expression de la force est :

$$\vec{F}_B = -Gi(t)\vec{e}_x = -\frac{G^2}{R_s + R_c}\dot{u}(t)\vec{e}_x \quad (12)$$

21. Il faut tenir compte de $\vec{F}_B$ dans l'expression du PFD appliqué à la masse m , en supposant que l'on peut négliger la masse de la bobine devant celle de M dans tous les termes où elle apparaît : Seul le terme de frottement en $\dot{u}$ change et on a :

$$\ddot{u} + \left(\frac{\lambda}{m} + \frac{G^2}{m(R_s + R_c)} \right) \dot{u} + \frac{k}{m}u = a_B. \quad (13)$$

L'expression de α est $\alpha = \alpha_0 + G^2/(m(R_s + R_c))$. la résistance R_s permet à la fois de mesurer la tension aux bornes de la bobine, mais aussi de contrôler le temps de retour à l'équilibre du système puisque $1/\alpha$ est la durée du régime transitoire lors d'un lâché sans vitesse initiale.

22. On peut utiliser la notation complexe car l'équation régissant le système est linéaire. Un forçage sinusoïdal à la pulsation ω se traduit (en régime établi) par une vibration à la même pulsation. La grandeur $X(t)$ est la partie réelle de $\underline{X}(t)$. On a donc $X(t) = A \cos \omega t$ et $u(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$.
23. $T(\omega)$ représente le rapport entre ce qui est mesuré (V) et la vitesse de vibration du bâti $\dot{X}$. Plus ce rapport est grand et plus la mesure est sensible. On a en complexes : $\underline{V} = j\omega \underline{u} G / (R_s + R_c)$ et $(\omega_0^2 - \omega^2 + j\alpha\omega)\underline{u} = j\omega \dot{\underline{X}}$. On en déduit :

$$\underline{V} = j\omega \frac{G}{R_s + R_c} \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\alpha\omega} \dot{\underline{X}} \quad (14)$$

En prenant le module, on a donc :

$$T(\omega) = \left| \frac{\underline{V}}{\dot{\underline{X}}} \right| = \frac{G}{R_s + R_c} \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}} \quad (15)$$

24. Il n'est pas trop évident de répondre car on ne sait a priori pas ce que les sismologues veulent optimiser dans la mesure. Personnellement je pense qu'on cherche à avoir le temps de réponse le plus court possible (donc la durée de régime transitoire la plus courte) car on veut détecter le début du séisme et tout se fait en régime transitoire.

Sur les courbes de la figure, on voit que R_s augmente la sensibilité, mais que de grandes valeurs de R_s conduisent à une résonance, ce qui n'est pas très bon. De ce point de vue, 7500 Ω semble être un bon compromis. Ce compromis conduit à un régime critique qui correspond au temps de réponse le plus court du système ...

L'expression de T en haute fréquence donne $T = R_s G / (R_s + R_c) = 0,57G$. Le diagramme de Bode en loglog est illisible et donne $T \in [100 - 200]$. Le choix $T = 150$ V/m.s donne $G = 150/0,67 = 260$ V/m.s.

25. Le document indique que le sismomètre a été conçu à l'observatoire midi pyrénées, on imagine qu'il est adapté à ce cas là ...

La fonction de transfert correspond à un filtre passe haut de fréquence de coupure $f_c \simeq 1 - 2$ Hz. Il ne détecte donc pas les séismes lointains, mais détecte très bien les séismes locaux de fréquences typiques 1 - 50 Hz.

E. Méthode de résolution numérique

26. D'après la définition on a $n\Delta t = t_{\max}$ donc $\Delta t = t_{\max}/n$.
27. On voit que l'équation correspond à celle de départ à condition de poser $U = du/dt$. On a donc :

$$\frac{dU}{dt} = -\alpha U - \omega_0^2 u - a_B(t) \quad \text{avec} \quad U = \frac{du}{dt} \quad (16)$$

28. On approxime les dérivées à l'ordre le plus bas sous la forme $du/dt = (u_{i+1} - u_i)/\Delta t$ (il s'agit de la méthode d'Euler d'ordre 1, la plus simple). On a alors

$$U_{i+1} = U_i + \Delta t(-\alpha U_i - \omega_0^2 u_i - a_{B,i}) \quad \text{avec} \quad u_{i+1} = u_i + \Delta t U_i \quad (17)$$

29. Une variable locale est définie localement dans une fonction et n'est utilisée que dans cette fonction. Une variable globale au contraire est déclarée pour toutes les fonctions du programme. Ici la variable α est définie hors de la fonction Euler, c'est une variable globale.