

LP-25 Mesure et contrôle

| Élément imposé – Contrôle et sureté de la vaccination

Introduction Pédagogique

| Niveau : L1

Pré-requis

- Incertitudes **secondaire**
- Mathématiques : sommes, dérivées, probabilités **L1, secondaire**
- Physique quelconque : ça dépend de l'exemple qu'on choisit de traiter dans l'exemple.

Difficultés

- Vocabulaire associé aux incertitudes : mesure - mesurande, erreur - incertitude ...
- Mathématiques pouvant être derrière cela.
- La vaccination est un sujet particulièrement sensible et difficile à traiter tant c'est un sujet large.
- Trouver les bons paramètres du problème et extraire les valeurs pertinentes
- Déterminer toutes les sources d'incertitudes

| **Objectifs** – Que les élèves acquièrent des outils leur permettant de discuter autour de leurs mesures en sciences mais qu'ils soient également capables de l'appliquer dans le cadre d'autres domaines. Il est important pour eux de comprendre les méthodes de mesure et les outils de statistiques associés

Applications

- **Activité documentaire** :
- **TD** :
- **Activités informatiques** :

| **Source** – Taylor : 530.078/TAYL, <https://vaccination-info-service.fr/Generalites-sur-les-vaccinations/Qualite-securite-et-efficacite-des-vaccins/Securite-et-qualite-des-vaccins/Procedure-de-mise-sur-le-marche-des-vaccins>, <https://ansm.sante.fr/dossiers-thematiques/covid-19-vaccins/>

covid-19-controles-de-la-qualite-des-vaccins, <https://ansm.sante.fr/actualites/point-de-situation-sur-la-surveillance-des-vaccins-contre-la-covid-19-11>, <https://www.covireivac.fr/comprendre-les-vaccins/quel-controle-qualite-pour-les-vaccins/>,
Cours de Martin

En terme de séquence pédagogique, ça se discute :

- Soit on la place en L1 et on dit que c'est le premier cours auquel on a à faire dans le supérieur. On introduit les incertitudes pour qu'ils soient capables de faire des mesures.
- Soit on veut faire un cours un petit peu plus véner (finalement ce qu'on fait) on la place en L2. En effet, d'un point de vue mathématique c'est plus en L2 qu'en L1.

Introduction

Bonjour à tous et à toutes aujourd'hui on va s'intéresser à une notion un petit peu spéciale en physique, on va s'intéresser à la métrologie, et aux incertitudes. Normalement vous avez déjà vu comment faire des incertitudes au lycée et en TP, aujourd'hui nous allons aller un peu plus loin là-dedans et voir ce qu'il y a derrière.

Remarque — Si la leçon est placée au niveau L1, on peut faire une intro un peu punchy

Pour illustrer l'importance de choisir ses outils on peut prendre l'exemple d'un menuisier. Celui-ci doit mesurer une nouvelle porte. En effet, il a fait une première mesure de la porte à 2m10. Néanmoins, il va un peu vite et estime en fait entre 2m05 et 2m15. Pour ne pas risquer de se trouver dans l'incapacité de fermer la porte il décide alors de prendre un mètre, il mesure 2m11. La encore il a un doute, en effet sur le mètre il n'arrive pas bien à savoir si c'est 2m11,3001 ou 2m11,300. Bien décider à avoir la bonne mesure il investit alors dans un interféromètre laser pour avoir une précision de l'ordre de $0.5 \cdot 10^{-6} \text{m}$. Même si la valeur est bien plus précise, le menuisier ne peut toujours pas donner la valeur vraie. Il se rend également compte qu'en fonction de la température, de l'humidité ou d'autres paramètres, cette valeur peut changer. Notre pauvre menuisier se trouve alors devant une difficulté de principe. Il ne peut pas avoir la valeur vraie de la hauteur de sa porte, elle n'existe pas. Cette difficulté constitue un problème de définition qui joue un rôle important dans la plupart des mesures scientifiques.

Cette petite histoire nous aura montré deux points :

- Finalement qu'elle besoin avait le menuisier d'avoir une précision aussi grande? On ne lui demande pas de sceller sa porte, il faut juste qu'elle rentre dans l'encadrure. Cela illustre la nécessité de bien choisir ses outils de mesure quand on fait des sciences.
- On ne peut pas mesurer une grandeur physique

Remarque — Si on a un élément imposé plus excentrique on peut changer l'introduction en parlant de la vaccination par exemple. Egalement, si on met la leçon en L2 on fait quelque chose de plus poussé je pense.

Piste d'introduction sur l'homéostasie dans le corps humain. Trouver un exemple de domaine demandant un contrôle fin.

Remarque — Problèmes métaphysiques :

- est-ce que c'est leçon c'est forcément des incertitudes? Je pense qu'il faut bien considérer l'élément imposé avant de se lancer et voir si c'est obligé. Pour moi ce n'est pas une LC6.
- La question du niveau est pour moi un vrai problème. En L1 on ne peut pas décemment aborder les écarts types et les distributions des variables aléatoires. L2 pourrait être plus adapté (fait un niveau BCPST2 en maths et en bio). Le problème étant qu'on ne peut pas mettre les mêmes choses à ces différents niveaux. On ne peut pas recommencer d'aussi bas. Mais si on monte, on se retrouve bloqué par la manipulation.

Remarque — Commencer par faire la manipulation. On fait deux mesures et on se dit mince, on n'a pas la même chose. Comment est-ce qu'on choisit ?

1 D'une grandeur à une valeur

artie tirée du plan de Naia Corbineau http://perso.ens-lyon.fr/naia.corbineau/naia/fichiers/LP25_LECONS_mesures_controle.pdf

Remarque — Cette partie n'est à faire que si on se place à un niveau de L1 sinon on met en prérequis

1 Définitions

Définition — **Grandeur** : Propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence. La référence peut être une unité de mesure, une procédure de mesure, un matériau de référence, ou une de leurs combinaisons.

Ici par exemple c'est la période.

Attention à ne pas confondre avec une valeur :

Définition — **Valeur** : Ensemble d'un nombre et d'une référence constituant l'expression quantitative d'une grandeur.

Ici c'est la valeur que l'on récupère. Lors d'une expérience physique nous réalisons une mesure, par exemple le menuisier qui prend son mètre pour mesurer la porte.

Remarque — Attention, ne pas confondre, valeur théorique et valeur vraie. La valeur vraie est théorique, juste elle existe, elle est non atteignable. La valeur théorique elle dépend d'un modèle et est juste selon les approximations.

Définition — **Mesurande** : Grandeur que l'on veut mesurer

Définition — **Mesurage** : Acte de mesure

Nous devons nous poser plusieurs questions. Sur l'objet que l'on mesure et sur le but recherché derrière cela. Pour cela nous allons avoir besoin d'un capteur :

Définition — **Capteur** : dispositif qui convertit une grandeur physique en une autre directement exploitable (ex : il convertit des signaux lumineux en une image), thermomètre au mercure (convertit une température par une hauteur de mercure)

Définition — **Biais** : En statistique ou en épidémiologie, un biais est une démarche ou un procédé qui engendre des erreurs dans les résultats d'une étude. Formellement, le biais de l'estimateur d'un paramètre est la différence entre la valeur de l'espérance de cet estimateur (qui est une variable

aléatoire) et la valeur qu'il est censé estimer (définie et fixe).

2 Choix d'un appareil

Définition – Chaîne de mesure : ensemble des procédés pour passer d'une grandeur à une valeur : Grandeur $\rightarrow$ Capteur $\rightarrow$ Conditionneur de signal $\rightarrow$ Visualisation ou utilisation des données.

On prend un exemple, on essaye d'avoir un exemple fil rouge qui va bien avec l'EI. Pour le spectrophotomètre voir http://perso.ens-lyon.fr/manon.leconte/pedago/fichiers/LP/mesure_controle_BCPST1.pdf. L'exemple du pendule marche bien. On a une grandeur bien définie, une valeur, une valeur théorique. Cette chaîne de mesure peut entraîner trois types d'erreurs :

- **Erreur de lecture :** si on a un affichage numérique, la valeur réelle est différente de la valeur affichée. Elle se trouve dans un intervalle centrée en la valeur affichée et de largeur égale au dernier digit. De même s'il s'agit d'un régle
- **Erreur de l'appareillage :** pour y avoir accès, il faut lire la notice et chercher les incertitudes-type
- **Erreur du circuit :**

Des grandeurs extérieures peuvent grandement influencer la mesure. En effet la température peut influencer un instrument en dilatant le verre. Ou des ondes extérieures venir déranger les instruments.

3 Justesse et fidélité

Définition – Justesse : Étroitesse de l'accord entre la moyenne d'un nombre infini de valeurs mesurées répétées et une valeur de référence.

Définition – Fidélité : Étroitesse de l'accord entre les indications ou les valeurs mesurées obtenues par des mesurages répétés du même objet ou d'objets similaires dans des conditions spécifiées.



Figure 1 – Différence entre fidélité et justesse, source : wikipédia

On peut associer à cela deux types d'erreurs :

- **Erreur systématique :** (figure de gauche) associé à une faible justesse mais une grande fidélité. Elle est présente sur toutes les mesures et peut facilement être corrigée.
- **Erreur aléatoire :** (figure de droite) associé à une faible fidélité. Elle peut être corrigée statistiquement si on prend un grand nombre de points.

Ces erreurs sont prises en compte lorsqu'on donne les incertitudes.

Nous avons posé ici les définitions qui seront essentielles pour la suite de cette étude. Maintenant qu'on a vu qu'on ne pouvait pas arriver à avoir la valeur véritable, la valeur vraie d'une grandeur on va maintenant voir comment on quantifie l'écart avec les incertitudes.

2 Application à la mesure de la période d'un pendule

Remarque – Pour le pendule on donne les hypothèses : on a un pendule simple, dans le référentiel galiléen, on ne suppose que le poids et la tension du fil, on se place dans le cas des petites oscillations

1 Description du montage de mesure

On réalise le montage de mesure de la période du pendule. On parle de la chaîne :

- La grandeur est la période
- le capteur est un capteur inductif. Dès que le pendule passe devant on a un signal électrique
- Le signal passe par un amplificateur : il est conditionné
- On visualise en utilisant Latis-Pro

La formule pour le pendule est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

On fait une acquisition. On regarde combien on obtient. On trouve que l'on a une valeur différente de ce qui avait été faite en préparation. On fait également une mesure avec un chronomètre. On compare les deux. Quelle valeur est la bonne ? Comment écrire le résultat ?

2 Incertitude statistique de type A : mesure de la période

L'évaluation de type A des incertitudes repose sur une détermination statistique. Elles sont obtenues en réalisant un grand nombre de mesures. Comment la calculer ? On mesure déjà la moyenne de la valeur. On fait 20 acquisitions.

$$\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{N} \quad (2)$$

On calcule ensuite l'écart-type de la mesure : pour cela on applique la formule :

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2} \quad (3)$$

J'attire votre attention sur le fait que ce calcul peut s'avérer particulièrement pénible. On laisse donc les calculatrices faire pour nous. Pour cela il faut aller dans : *stats*, *Edit data*, vous rentrez alors les données. Puis sortez, allez dans *stats*, *calc* et *Var Stats*. La calculatrice vous donne la moyenne et l'écart-type.

Remarque – Bien préciser qu'il y a deux notations dépendant de la marque de la calculatrice

On peut alors exprimer l'incertitude-type comme étant :

Définition – Incertitude type : Incertitude de mesure exprimée sous la forme d'un écart-type.

$$u_T = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}} \quad (4)$$

Néanmoins cette incertitude ne représente pas l'incertitude réelle. Il multiplier cela par un facteur d'élargissement qui dépendra du nombre de mesures réalisées et de l'intervalle de confiance voulu. On pourra trouver ce facteur dans des tables, les tables de Student.

$$U = k \times u_T \quad (5)$$

On peut alors écrire le résultat :

$$T = (\bar{T} \pm U) s \quad (6)$$

Attention, que signifie la valeur de l'incertitude. Il est très important de prendre en compte en disant cette incertitude l'intervalle de confiance que l'on choisit. En effet, dire que l'on a signifie que l'on estime avoir 95% de chance que la mesure se trouve dans l'intervalle associé. C'est ça que signifie la valeur.

On multiplie l'incertitude-type par le facteur de Student pour avoir une valeur rentrant dans notre intervalle de confiance. Cela permet de faire le lien entre l'intervalle de confiance, la largeur de la gaussienne et notre distribution.

| Remarque — On remarque néanmoins que plus on a de valeurs plus l'incertitude sera faible

3 Vers les incertitudes de type B

1 Généralités sur les incertitudes

Ce sont les incertitudes que vous allez voir principalement en chimie, lors par exemple de titrages. C'est un autre moyen d'obtenir des incertitudes : évaluation d'une composante de l'incertitude de mesure autrement que par une évaluation de type A de l'incertitude. La nécessité de cette méthode provient du fait qu'il n'est pas toujours possible de réaliser un grand nombre de mesure pour une expérience donnée. Ainsi il faut raisonner autrement. On se sert des indications qui sont données par le constructeur. Celui-ci peut la donner de plusieurs façons :

- L'incertitude type : U
- L'incertitude sous la forme $\pm U$. Dans ce cas l'incertitude associée sera (distribution triangulaire) :

$$u = \frac{U}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

- une incertitude sans dire de quoi il s'agit alors on prend :

$$u = \frac{U}{2\sqrt{3}} \quad (8)$$

- Si le constructeur donne juste les valeurs maximales et minimales alors :

$$u = \frac{z^+ - z^-}{2\sqrt{3}} \quad (9)$$

On ne prend ici que les cas les plus défavorables pour ne pas sous-estimer l'incertitude.

2 Application à un cas simple

Remarque — Le cas simple est à déterminer, on peut prendre l'exemple de la leçon de Manon même si c'est un peu trop chimiste : http://perso.ens-lyon.fr/manon.leconte/pedago/fichiers/LP/mesure_controle_BCPST1.pdf

J'attire votre attention sur plusieurs choses, tout d'abord, cette méthode n'est pas forcément moins précise. Tout repose en réalité sur la détermination des sources d'incertitudes. Il ne faut pas en oublier ou en compter plusieurs fois ce qui peut être problématique.

$$i = \frac{U}{R} \quad (10)$$

Remarque — On prend cet exemple mais on pourrait prendre celui de Doppler ou n'importe quelle formule tant qu'on a un quotient

On a plusieurs sources d'incertitudes. Une sur la distance provenant de la mesure de la distance et une sur le temps.

on a deux incertitudes. Comment est-ce qu'on fait ? On va utiliser la formule de propagation des incertitudes.

$$\frac{u_i}{i} = \sqrt{\left(\frac{u_i}{i}\right)^2 + \left(\frac{u_R}{R}\right)^2} \quad (11)$$

Si on avait une simple somme nous aurions :

$$u_i = \sqrt{\sum u_n^2} \quad (12)$$

On peut utiliser un logiciel comme Gum MC pour faire les incertitudes. En effet, en plus de calculer celles-ci il permet de voir les contributions principales des incertitudes et donc d'essayer de jouer au mieux pour la réduire. Un onglet est particulièrement intéressant sur Gum MC et c'est l'onglet Monte-carlo. C'est une autre méthode de détermination des incertitudes.

4 Méthode de Monte-Carlo

Cette méthode repose sur des principes un peu différents que les deux autres. C'est une méthode à la fois simple à mettre en place mais difficile à comprendre. En effet c'est une méthode numérique s'appuyant sur les distributions.

1 Point sur les distributions

Dans les parties précédentes, j'ai introduit des notations et des valeurs :

$$u = \frac{U}{2\sqrt{3}} \quad (13)$$

Par exemple sans vraiment évoquer d'où ça venait. En effet, cela demande de se plonger un peu plus dans les mathématiques.

En probabilité, pour décrire la probabilité d'un événement on parle de distribution. Ces distributions peuvent avoir plusieurs formes : rectangulaires, triangulaires, gaussiennes ... On choisit pour les variables une distribution en fonction de certains paramètres qui ne seront pas discutés ici. Il faut juste

savoir que cela existe.

Un point important à comprendre c'est que pour faire tout ce qu'on a fait, on a une distribution qui occupe plus d'espace : la distribution gaussienne qui a des propriétés qui sont particulièrement intéressantes pour nous. Et qui permettent notamment de relier l'intervalle de confiance et la largeur de l'intervalle.

2 Retour sur Monte Carlo

Comment fonctionne cette méthode ?

- on effectue un grand nombre N de tirages
- pour chaque tirage j , on prend une valeur aléatoire de chacune des variables x_i en respectant leur distribution. Pour chaque tirage on a donc $x_{1,j}, \dots, x_{n,j}$
- on calcule la valeur $z_j = f(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ que l'on stocke.
- Quand on a effectué les N tirages, on a l'ensemble des valeurs z_j et donc la distribution de z . A partir de cela on peut évaluer la moyenne, l'écart-type et établir les liens utiles.

Remarque — Je ne sais pas si on explique pourquoi on obtient une gaussienne. Pour moi c'est un peu difficile de parler du TCL en L1. On peut simplement dire qu'on a au final la distribution de la valeur et que du coup on peut remonter à l'écart-type.

On obtient à la fin une gaussienne. Ceci est donné par le théorème central limite sur laquelle se base finalement tout ce qu'on fait. En effet, même si on ne l'a pas dit jusqu'alors c'est qu'on utilise pour faire des incertitudes de type B l'hypothèse que toutes les distributions sont des Gaussiennes.

3 Encart mathématique : autour des gaussiennes

Remarque — Cette partie est plus pour nous que pour être faite sauf si un élément imposé très spécifique le demande

Une distribution gaussienne se met sous la forme :

$$G_{\bar{z},\sigma}(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(z - \bar{z})^2}{2\sigma^2} \quad (14)$$

La probabilité d'avoir une valeur entre $\bar{z} - k\sigma$ et $\bar{z} + k\sigma$ est :

$$P_{\bar{z},\sigma}(k) = \int_{\bar{z}-k\sigma}^{\bar{z}+k\sigma} G_{\bar{z},\sigma}(x) dx \quad (15)$$

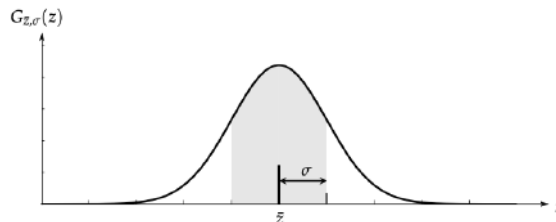


Figure 2 – Gaussienne, source : Martin

k	$\mathcal{P}_{z,\sigma}(k)$
1	68,27
2	95,45
3	99,73
4	99,994
5	99,99994

Figure 3 – Tableau donnant le niveau de confiance pour certains multiples de l'écart type. Les niveaux de confiance les plus utilisés sont ceux correspondant à respectivement 1, 2 ou 3 écarts-types d'une distribution gaussienne, soit 68, 95 ou 99 %, source : Martin

5 Conclusion

Importance de revenir sur sa mesure (voir Fig. 4) et sur les résultats pour faire des critiques sur le protocole et proposer des améliorations. Vous réutiliserez cela en TP dans les prochaines séances.

Annexe

Les différentes distributions :

En plus si on a besoin

Le test du χ^2

C'est une méthode qui permet de savoir si la distribution expérimentale est en accord avec la distribution théorique. On vérifie que les différences observées ne sont pas dues juste au faible échantillonnage. On s'intéresse particulièrement aux distributions gaussiennes.

6 Démonstration des formules pour les incertitudes de type B

$$C = A \times B \quad (16)$$

$$\ln C = \ln A + \ln B \quad (17)$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{dA}{A} + \frac{dB}{B} \quad (18)$$

On met tout au carré.

$$\left(\frac{dC}{C}\right)^2 = \left(\frac{dA}{A}\right)^2 + \left(\frac{dB}{B}\right)^2 \quad (19)$$

Donc :

$$\frac{dC}{C} = \sqrt{\left(\frac{dA}{A}\right)^2 + \left(\frac{dB}{B}\right)^2} \quad (20)$$

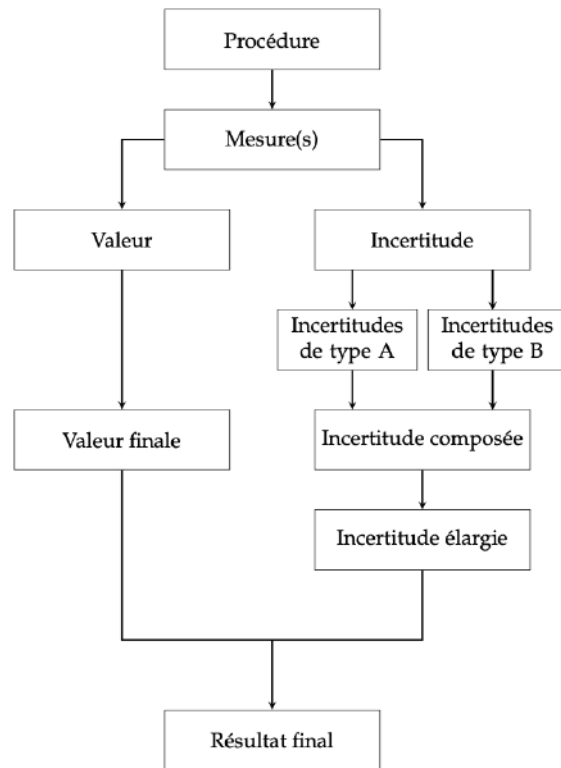


Figure 4 – Schéma bilan de la recherche d'incertitude

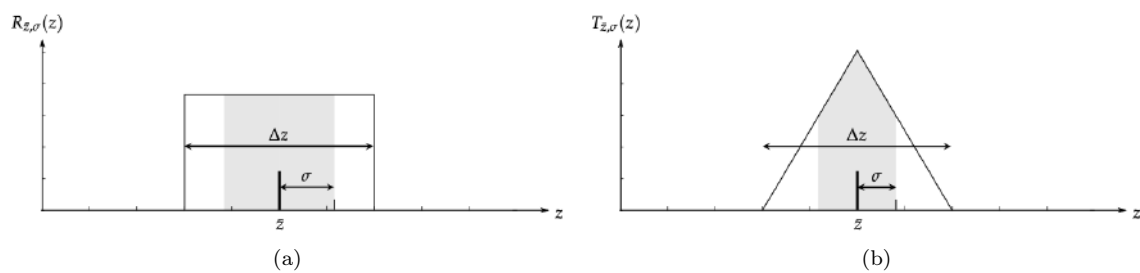


Figure 5 – (a) Distribution rectangulaire (b) Distribution triangulaire

Questions et remarques

- Programme de statistique au lycée, pour la leçon quel vocabulaire et quelles notions doivent ils connaître? *Quartile, Moyenne, Médiane, ...*
- Traitement mathématique au prochain cours?
- Difficulté : Problème de vocabulaire, comment y remédier? *Problème récurrent au cours de l'année à corriger sur l'ensemble de l'année.*
- Pourquoi faire le pendule? Pas déjà vu au lycée?
- Contribution de Poper sur la notion de contrôle?
- Commentaire sur la valeur?
- Qu'est ce que la valeur vraie?
- Pour les médicaments double aveugle et pour les vaccins?
- Les chiffres ont une importance c'est à dire?
- Comment on différencie valeur de grandeur en pratique?
- Qu'est ce qu'un capteur? Dans le pendule quel est le capteur? *Potentiomètre*
- Conditionnement fait par quelle partie du montage?
- Mesurage/Mesurande définition?
- Fidélité et justesse hypothèse?
- Erreur systématique = biais?
- Répéter les mesures diminue l'incertitude?
- Calcul de l'incertitude type puis élargissement, quelle hypothèse est faite sur la forme de la loi pour élargir? *Distribution de student*
- Comment la valeur obtenu en fin de manip permet de savoir si la manip a été bien faite? *On peut revenir sur la pertinence de la mesure en observant le phénomène.*
- Si on mesure une pulsation cyclotron ou un autre système pour lequel on ne peut observer le système? *Se référer à la valeur vraie.*
- Quelle est la différence entre référence et unité? *La référence peut être une unité.*
- Une valeur peut être exprimée sans unité? *Différence entre valeur et grandeur.*
- Domaine de la médecine créée par Nightingale?
- Différence de calcul type A type B?
- Démo des formules de propagation?
- **Un élève te dit : Je ne crois pas à l'efficacité du vaccin?**

Éviter de vouloir mettre l'élément imposé à tout prix. Ici l'élément imposé est bien traité de manière intéressante. Attention au vocabulaire et aux contre-sens. Au niveau de la manipulation il faut ajouter le point même si ce n'est pas le même expérimentateur. **Faire la manipulation dans tous les cas.** *Sinon sur le pendule montrer la mesure d'une période avec un chrono et 10 et montrer la différence.* Niveau vocabulaire : Grandeur OK, Valeur théorique : valeur déterminée théoriquement dans le cas d'un modèle (ici petits angles), Valeur vraie peut être proche de la valeur théorique si le modèle est assez juste. Il est pratique de dire qu'une valeur vraie existe mais on ne pourra jamais l'atteindre on peut seulement l'approcher. Revoir les capteurs (voir livre Asch - Capteurs et instrumentation, chapitre 1 ou 2). Pas mal d'hypothèse pour la période des oscillations : Labo = ref galiléen, Pendule simple, Petites oscillations,... Voir vidéo chaîne *Science 4 roll ou Chat Sceptique ou Risque α* . Loi de Student = Somme de gaussienne. Double aveugle : Même l'administrateur ne sait pas à qui il a administré le vaccin ou le médicament. Faux positif faux négatif à regarder aussi. Il aurait été possible de passer moins de temps sur l'élément imposé.