

LP 30 - Filtrage

Lise Boutenègre, Raphael Rullan

Elément imposé – filtre passe-bas, filtre passe-bande, filtre en mécanique, fonction de transfert, gain, diagramme de Bode

Introduction Pédagogique

Niveau : L1

Pré-requis

- Electrocinétique : loi des mailles, loi des noeuds, pont diviseur de tension, pont diviseur de courant **L1**
- Dipôles passif **L1**
- Impédances des dipôles **L1**
- Notations complexes + utilisation des complexes pour le calcul, dérivé, intégration, module, argument **L1**
- Analyse spectrale **L1**
- Etude de circuits linéaires **L1**

Difficultés

- Leçon particulièrement calculatoire, ici beaucoup de fautes de calculs peuvent arriver et fausser le résultat.
- Représentation Log pas forcément évidente à appréhender.
- Comprendre les différents filtres et pouvoir rapidement statuer sur la nature de celui-ci à l'aide des comportements limites.

Applications

- **TP** : Tracé de Diagrammes de Bode de différents filtres.
- **TD** : Etude de l'utilisation de filtres dans l'industrie du CD.

Objectifs – Que les élèves soient capables de trouver la fonction de transfert, donner le gain, la phase, tracer le diagramme de Bode d'un filtre. Il faut également qu'ils soient capables d'appliquer ces filtres à différents systèmes

Source – Salamito PCSI, Cours électrocinétique, Pérez Electronique, Electronique - Electrocinétique I, Brébec, Wikipédia

Remarque – Cette leçon n'est pas une leçon particulièrement difficile néanmoins il faut être rigoureux·euse et bien illustrer. Bien refaire les calculs avant de la présenter. L'utilisation de codes python ne pourra être que bénéfique

Introduction

Remarque – L'introduction de Wikipédia est particulièrement intéressante et adaptée je trouve

Bonjour à tous·tes, aujourd'hui nous allons continuer notre étude des systèmes électriques. Nous avons vu précédemment comme nous pouvions former un signal, quels étaient les composants à notre disposition, nous allons aujourd'hui voir comment on peut modifier l'histoire de ce signal de départ, pour qu'il nous donne la fin : le signal de sortie. En un mot, nous allons aujourd'hui étudier les filtres. Qu'est-ce qu'un filtre ?

Définition – **Filtre** : c'est un circuit qui réalise une mise en forme d'une grandeur électrique (peut être à étoffer avec un dictionnaire de physique)

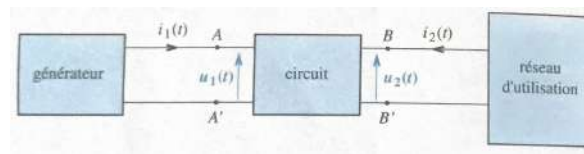


Figure 1 – Montage type filtre, source : Brébec I p.151

C'est vague comme définition alors remontons un peu dans le temps pour expliquer cela. Au XX^{ème} siècle, les télécommunications se faisaient à l'aide de télégraphes, et ensuite de téléphones rudimentaires. Les compagnies qui géraient cela cherchaient à pouvoir faire passer plusieurs signaux, plusieurs communications sur un même câble. Vient alors le problème : comment on fait pour séparer les deux signaux pour récupérer ensuite son message ? C'est à partir de là que la notion de filtre est née. Une analogie que l'on peut voir pour bien comprendre ce qu'est un filtre est l'analogie avec le filtre à solide que vous pouvez utiliser en chimie. On ne laisse passer qu'une certaine taille de particules.

Remarque – Faire une diapo ou deux un peu vintage

1 La fonction de transfert

On considère un circuit électrique linéaire fournissant un signal électrique de sortie $s(t)$ à partir d'un signal d'entrée $e(t)$. On considèrera ici que le signal d'entrée est sous la forme :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi_e) \quad (1)$$

Où ω , E_0 et ϕ_e sont des constantes du problème que l'on connaît en imposant le signal d'entrée. Le circuit étant linéaire, on se place en régime sinusoïdal forcé donc le signal de sortie est sous la forme :

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi_s) \quad (2)$$

Une autre façon d'écrire ces grandeurs est :

$$\underline{e} = E_0 \exp(j\phi_e) \exp(j\omega t) \quad (3)$$

et

$$\underline{s} = S_0 \exp(j\phi_s) \exp(j\omega t) \quad (4)$$

Qu'est-ce qu'un circuit linéaire ?

Définition – Circuit linéaire : c'est un circuit réalisé avec des composantes linéaires, c'est à dire des dipôles linéaires ou des composants électroniques fonctionnant dans leur domaine de linéarité

Remarque – Ce qui pourrait être vraiment vraiment cool ce serait de prendre un système physique, par exemple pour la détection synchrone, ou peu importe et dire ok, ce qu'on fait c'est avoir que le signal 1. On applique un premier filtre et on se dit mince ! ça marche pas. On passe alors aux filtres d'ordre supérieur. Ça marche avec l'exemple de Doppler mais il faudrait une manip où on superpose des signaux.

1 Définitions

On a obtenu dans les chapitres précédent en faisant l'étude de circuits linéaires des relations de la forme :

$$\underline{s} = \underline{H} \times \underline{e} \quad (5)$$

Avec H un complexe dépendant de $j\omega$ et des composantes du système. C'est ce que l'on appelle, la fonction de transfert.

Définition – Fonction de transfert : la fonction de transfert d'un circuit linéaire est la fonction de la variable complexe $j\omega$ telle que pour un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal de pulsation ω , le signal de sortie $s(t)$ en régime sinusoïdal forcé est donné par :

$$\underline{s} = \underline{H}(j\omega) \times \underline{e} \quad (6)$$

A partir de cette fonction de transfert, on peut définir deux autres fonctions qui sont centrales dans l'étude des filtres : la **fonction de gain** qui est définie comme :

$$G(w) = |\underline{H}(j\omega)| \quad (7)$$

et la **fonction de phase** :

$$\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) \quad (8)$$

S'il y a le temps, introduire la notion de filtre parfait et réel (Brébert p.158).

2 Ordre d'un filtre

Nous allons étudier aujourd'hui différents filtres, et la notion d'ordre va dans la suite du cours nous être assez importante. Pour cela, il va falloir faire appel à ce qu'on a fait le cours précédent, lorsqu'on a en fait sans le dire déterminer les fonctions de transferts des différents circuits. On a obtenu les équations différentielles des différents circuits sous la forme :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m s}{dt^m} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n e}{dt^n} \quad (9)$$

C'est l'équation différentielle du filtre. La fonction de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + \dots + a_n(j\omega)^n}{b_0 + b_1(j\omega) + \dots + b_m(j\omega)^m} \quad (10)$$

L'ordre d'un filtre est l'ordre de sa fonction de transfert qui correspond au degré maximal du dénominateur (qui sera toujours plus haut que celui du numérateur en pratique).

2 Vers les diagrammes de Bode

Remarque – Si on a choisit un système au départ, un téléphone ou autre on le garde, sinon on choisit un truc comme on veut en fonction de l'élément imposé.

1 Le filtre le plus simple : RC

On s'intéresse au système suivant : On va d'abord déterminer sa fonction de transfert. On a déjà

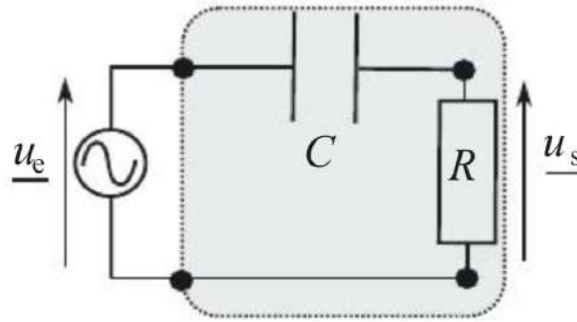


Figure 2 – Représentation schématique d'un filtre passe-bas RC

vu comment on pouvait l'obtenir. On va directement ici pouvoir appliquer la formule du diviseur de tension. On l'applique pour u_s .

$$\underline{u_s} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \underline{u_e} \quad (11)$$

Ce qui donne :

$$\underline{u_s} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1} \underline{u_e} \quad (12)$$

On pose $\tau = RC$ donc :

$$\underline{u_s} = \frac{j\tau\omega}{j\tau\omega + 1} \underline{u_e} \quad (13)$$

La fonction de transfert est donc :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{j\tau\omega}{j\tau\omega + 1} \quad (14)$$

A partir de cela, on peut remonter au gain :

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{\tau\omega}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} \quad (15)$$

On peut en faire l'étude asymptotique pour déterminer son comportement : si on fait tendre ω vers l'infini, alors le gain tend vers 1, si on le fait tendre vers 0 alors le gain tend vers 0, ce qui correspond

à un passe haut. Je vous laisserai faire en exercice l'autre cas, où on place l'oscilloscope aux bornes de C et vous me direz ce qu'on obtient.

Un point particulièrement important que l'on peut regarder c'est la pulsation de coupure de notre filtre. Mais qu'est-ce que c'est ?

Définition – Pulsation de coupure : C'est une pulsation définie telle que :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

Remarque – Sur une slide on met la démonstration que c'est un passe haut en utilisant les équivalents. Une résistance reste une résistance qu'on soit à haute ou basse fréquence. Pour le condensateur à haute fréquence ça devient un fil et à basse fréquence c'est un interrupteur ouvert

On définit alors le domaine de bande passante du filtre tel que $G(\omega_c) < G(\omega)$. Ça correspond à la bande du signal qui peut passer au travers du filtre. C'est assez important des les telecoms et en général d'avoir une bande passante qui comprend le signal. Dans le cas de notre système d'étude :

$$\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{\tau\omega_c}{\sqrt{(\tau\omega_c)^2 + 1}} \quad (17)$$

On a dans ce cas $G_{max} = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\tau\omega_c}{\sqrt{(\tau\omega_c)^2 + 1}} \quad (18)$$

$$\sqrt{(\tau\omega_c)^2 + 1} = \sqrt{2}\tau\omega_c \quad (19)$$

On met tout au carré :

$$(\tau\omega_c)^2 + 1 = 2(\tau\omega_c)^2 \quad (20)$$

$$1 = (\tau\omega_c)^2 \quad (21)$$

On ne prend que les solutions positives :

$$1 = (\tau\omega_c) \quad (22)$$

Donc :

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \quad (23)$$

On peut faire un tableau récapitulatif comme l'a fait Naia dans sa leçon. http://perso.ens-lyon.fr/naia.corbineau/naia/fichiers/LP30_LECON_site.pdf

2 Tracé d'un diagramme de Bode

Un outil très important pour visualiser les caractéristiques des filtres est le diagramme de Bode. On aura deux représentations, une pour le gain et une autre pour la phase. On trace dans le premier cas : $20 \log(G)$ en fonction de $\log(\omega)$ ce qui correspond au gain en décibel et dans l'autre : la phase en fonction de $\log(\omega)$.

Remarque – On fait les deux représentations au tableau.

Remarque – Manipulation : Tracé d'un diagramme de Bode et vérification de la fréquence de coupure

En effet dans cette représentation, on a :

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dB_{max}} - 3 \text{ dB}. \quad (24)$$

On s'attend à avoir une pente à 20 dB pour un filtre d'ordre 1 et 40 pour un d'ordre deux. L'avantage d'utiliser un filtre d'ordre supérieur est d'avoir une coupure plus nette (avec une pente plus grande) ce qui peut nous être utile si on veut séparer des signaux avec des composantes proches.

Remarque – On peut introduire ici la notion de gabarit voir Salamito p.428.

3 D'autres types de filtres

Remarque – Dans cette section on traitera les cas qui n'ont pas été traités dans la partie d'avant. On ne fait pas forcément une liste exhaustive, néanmoins on peut montrer en slide les différents types. Discuter du RLC est intéressant pour le facteur de qualité. On réserve une petite sous-partie pour les filtres actifs.

1 Les filtres passe-bandes : circuits RLC

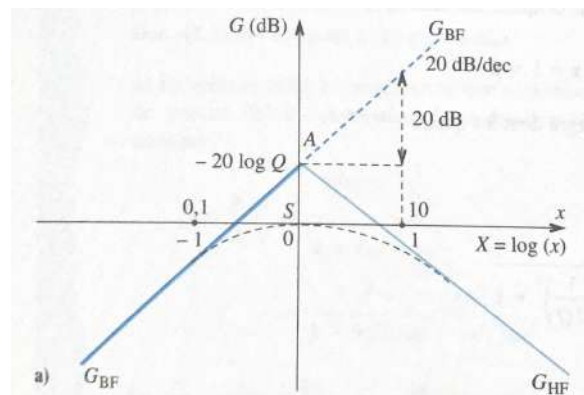


Figure 3 – Courbe de gain passe bande, source : Brébec 1 p.169

Il y a une multitude d'autres filtres que vous allez pouvoir étudier en exercice néanmoins, un qui mérite une attention particulière est le filtre passe-bande. C'est un filtre qui ne laisse pas passer les basses et hautes fréquences Le montage est présenté dans la figure ci-après. La courbe de gain est présentée dans la Figure 3 La fonction de transfert d'un tel système est :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \quad (25)$$

Avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$ ainsi que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

On voit l'apparition d'un nouveau facteur, le facteur Q que l'on appelle le facteur de qualité.

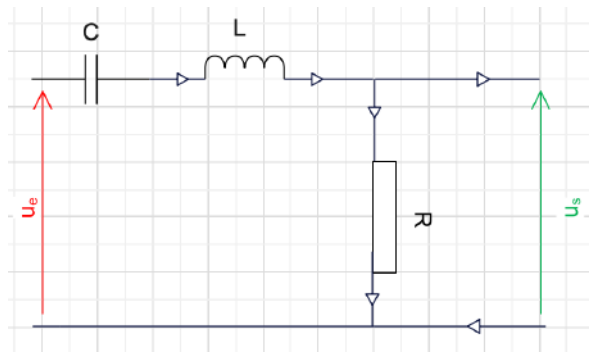


Figure 4 – Circuit RLC passe-bande

Définition – Facteur de qualité : décrit la capacité d'un filtre à sélectionner une fréquence. Il représente le rapport de la largeur de la bande passante à la fréquence centrale. La bande passante est celle entre les fréquences pour lesquelles la puissance du signal est divisée par deux, par rapport au maximum. Il peut être aussi vu comme un facteur d'amortissement.

Nous en ferons l'étude plus en détail, notamment nous discuterons de ses différentes valeurs. On peut discuter de la valeur de la courbe. A faire sur une slide, la bande passante etc. Je pense que la leçon de Naia résume bien ce qu'il faut mettre.

2 Les filtres actifs

Ce sont des filtres qui utilisent au moins un élément actif, que ce soit un amplificateur opérationnel ou autre. Cela permet d'avoir des gains supérieurs à 1, ce qui n'est possible uniquement parce que l'on rajoute de l'énergie à l'intérieur du système. Il est donc possible avec cela de mettre en avant et de faire ressortir certaines fréquences par rapport à d'autres.

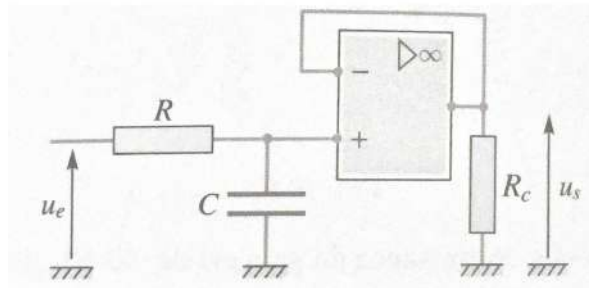


Figure 5 – Filtre passe bas actif, source : Pérez p.329

Pour plus de précision sur cette partie voir fiche et Pérez P.329.

Annexe de trucs que je trouve bien mais je pas où mettre pour l'instant

Quadripole

On étudie ici des **quadripoles** c'est à dire un système à 4 bornes, deux à l'entrée entre lesquelles on applique une tension u_e , et deux à la sortie entre lesquelles on mesure la tension de sortie u_s , même

si une borne de sortie est reliée à une borne d'entrée. Si le gain en tension varie, lorsqu'on fait varier la fréquence, on dit qu'on a réalisé un filtre en fréquence. Comme, en outre, la puissance à la sortie est nécessairement inférieure à la puissance à l'entrée, puisque le système ne reçoit pas d'énergie d'une source auxiliaire, le filtre est **passif**. Pérez p.185.

Stabilité d'un système linéaire

Brébert I p.155.

Conclusion

Je pense qu'on peut se permettre de faire une conclusion qui reprend un peu tout :

Il y a différents filtres,

- passe-bas
- passe-haut
- passe-bande
- coupe-bande

Chacun de ces filtres sont caractérisés par des fonctions de transfert. On peut jouer sur la fréquence de coupure avec les caractéristiques des composantes. En fonction de l'utilisation on peut choisir l'ordre des filtres que nous utilisons. Nous continuerons la prochaine fois l'étude des filtres passe-bande pour voir l'influence du facteur Q .