

LP 33 - Viscosité

Lise Boutenègre, Raphael Rullan

Elément imposé – Cisaillement, Navier-Stokes, viscosité dynamique, viscosité cinématique, écoulement couette plan, loi de poiseuille, résistance hydraulique, circulation sanguine

Introduction Pédagogique

Niveau : L2 (BCPST2 ou PC*) selon l'EI

Pré-requis

- Statique des fluides **L2**
- Dynamique des fluides : premier principe en écoulement **L2**
- Dynamique des fluides parfaits : Relation de Bernoulli **L2**
- Utilisation des dérivées partielles **L2**
- Notion de fluides parfait ou de fluides réels. **L2**
- Bilan de quantité de matière **L2**
- Electrocinétique **L1**

Difficultés

- Hypothèses à maîtriser et à connaître
- Définition du système à étudier
- Traitement mathématique du problème, aspect calculatoire pouvant bloquer les élèves.

Remarque – L'élément imposé va définir la filière dans laquelle on le met

Dans le programme de BCPST :

Mouvement d'une bille dans un fluide newtonien. Loi de Stokes.	Identifier les conditions d'application de la loi de Stokes. Approche documentaire : illustrer un processus de sédimentation.	Dynamique des fluides réels Viscosité dynamique, viscosité cinématique.	Identifier les propriétés des fluides newtoniens soumis à un cisaillement simple plan.
A. Dynamique des fluides. Forces et perméabilité. Sécher.	Mesurer une différence de pression avec un manomètre différentiel. Mettre en œuvre une détermination de porosité et de perméabilité. Mettre en œuvre une détermination de viscosité.	Forces tangentielles de viscosité d'un fluide newtonien.	Exprimer le taux de déformation dans le système de coordonnées approprié à la géométrie de l'écoulement. Donner le lien entre la force tangentielle de cisaillement et le taux de déformation.

Figure 1 – Programme BCPST

Objectifs – Faire comprendre aux élèves le principe de viscosité, leur donner des ordres de grandeur et qu'ils puissent comprendre comment ça influe la mécanique des fluides

Applications

- **TD** : Activité documentaire cours sur la résolution de l'équation de Navier Stokes
- **TP** : Ecoulement de Poiseuille/ détermination de la viscosité du glycérol

Source – Fosset PC/PC*, Cote BCPST 2ème année, Grécias p.583

Introduction

Bonjour à tous, aujourd'hui nous allons continuer l'étude des fluides mais cette fois-ci pas en considérant comme les dernières fois des fluides parfaits. On va s'intéresser aux fluides réels. Qui sont finalement bien plus courants. En effet, qui n'a jamais ralé en attendant que votre miel veuille bien tomber de la cuillère ou encore qui ne s'est pas émerveillé devant une coulée de lave qui s'écoule lentement ? C'est tout cela que nous allons essayer de voir aujourd'hui en s'intéressant à la notion de viscosité. Commençons par une petite expérience.

Expérience qualitative avec la manivelle qui tourne. On fait tourner dans un sens puis dans l'autre. On fait quelques observations qui vont nous servir dans le I.

1 Introduction à la viscosité

1 Observations expérimentales

On réalise l'expérience que l'on peut modéliser comme dans la Figure 2. On réalise ici l'approche historique "Expérience de Couette".

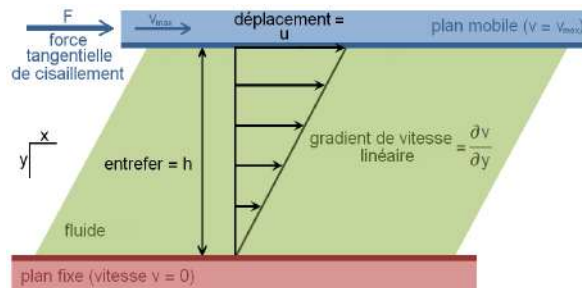


Figure 2 – Modélisation de l'expérience réalisée source : Par Cjp24 — Travail personnel, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17501737>

Une couche de fluide est comprise entre une paroi fixe et une plaque mobile de surface S sur laquelle on applique une force $\vec{F}$ pour la déplacer à vitesse constante $\vec{v}$.

On observe une déformation de la colonne qui s'étend petit à petit quand la plaque avance. Le colorant semble entraîné par la plaque.

Définition – Explications : Le fluide visqueux adhère aux parois : les couches de fluide, au contact avec les parois adoptent les vitesses de ces dernières

Définition – Interprétations : Lorsque la plaque est mise en mouvement, elle transfère de la quantité de mouvement à la couche de fluide situées en dessous (ou au-dessus). Cette dernière fait de même avec les autres couches et ainsi de suite de proche en proche.

2 Définition de la viscosité

On définit la contrainte tangentielle comme étant :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1)$$

C'est une force surfacique qui s'exprime en Pa.

La force qu'une couche de fluide exerce sur une couche adjacente dépend de la différence de vitesse. On considère deux couches comme présenté dans la Figure 3.

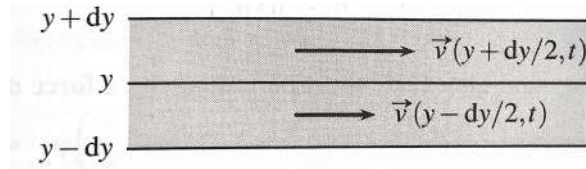


Figure 3 – Pour la démonstration de la formule : source Sanz

La différence de vitesse est :

$$\vec{v}(y + dy/2, t) - \vec{v}(y - dy/2, t) = (v_x(y + dy/2, t) - v_x(y - dy/2, t))\vec{u}_x \approx \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{u}_x \approx \frac{V}{H} \quad (2)$$

On peut appeler ce facteur $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement.

Si on regarde pour différents fluides l'évolution de la contrainte tangentielle en fonction du facteur de cisaillement, on va pouvoir observer trois comportements :

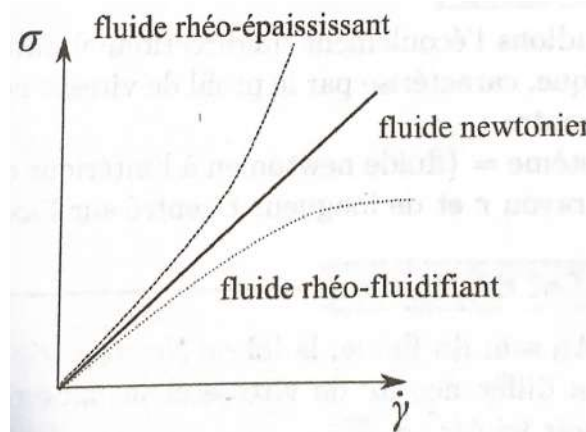


Figure 4 – Différents fluides, source : Côte

On va nous s'intéresser dans un premier temps au cas où c'est proportionnel. Dans ce cas, là on dit que le fluide est Newtonien (on dit aussi que c'est un écoulement de Couette).

Définition – Fluide Newtonien : On dit que le fluide est newtonien si la contrainte tangentielle visqueuse est proportionnelle aux taux de variation de la vitesse suivant la normale à la direction de l'écoulement

Pour un cisaillement peu important, on peut écrire que pour une surface de contact dS , on a la force qui est :

$$d\vec{F}_v(y, t) = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{u}_x \quad (3)$$

Avec η une constante qui représente la viscosité dynamique. C'est la force de viscosité de cisaillement. C'est la loi phénoménologique de Newton à laquelle nous venons de remonter.

3 Valeurs caractéristiques

La **viscosité dynamique** est une grandeur caractéristique du fluide considéré. Son unité est le Pa.s.

On peut exhiber quelques valeurs importantes de viscosité. Tout est fluide. A montrer des exemples.

- gaz : 10^{-5}
- eau : 10^{-3}
- sang : 4.10^{-3}
- huile : 0.1
- glycérol : 1.5
- miel : 10
- Lave à fusion : 1000
- glacier : 10^{11}

La viscosité augmente si on augmente la pression. La viscosité diminue quand la température augmente et la viscosité augmente avec le taux d'impuretés.

Définition – Viscosité cinématique : $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

C'est en Pa.s.kg⁻¹.m³, ce qui donne en USI : m².s⁻¹ ce qui est un coefficient de diffusion.

Remarque – C'est à partir de là qu'on va avoir une réelle discrimination en fonction de la filière. BCPST ou PC*

2 Détermination expérimentale de la viscosité

On utilise la Loi de Stokes pour remonter à la viscosité du glycérol.

Remarque – Si on a un élément imposé type Poiseuille, on peut faire l'économie de le faire et avoir une autre manipulation

3 L'équation de Navier-Stokes (niveau PC*)

1 Etablissement de l'équation

On applique le principe fondamental de la dynamique à une particule fluide dans un référentiel galiléen. On fait le bilan des forces :

- $\vec{f}_{ext}$
- $\vec{f}_{perp} = -\nabla(\vec{P})$
- $\vec{f}_{visc} = ?$

Pour les fluides newtoniens et pour des fluides/écoulement incompressibles on a :

$$\vec{f}_{visc} = \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (4)$$

Ce qui nous permet d'écrire la fameuse équation :

$$\rho(\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}) = -\nabla(\vec{P}) + \vec{f}_{ext} + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (5)$$

On remarque ici que l'on utilise l'opérateur dérivée convective particulière (approche Lagrangienne).

Cette équation n'est pour l'instant pas solvable analytiquement, il s'agit même d'un des problèmes du millénaire. Dans le cadre de ce cours nous réaliserons un ensemble d'hypothèses nous permettant d'arriver à une solution.

Remarque — On ne va résoudre ici qu'un des deux cas, on prend celui qui est en lien avec l'élément imposé

2 Ecoulement de Couette

Les hypothèses sont les suivantes :

- fluide Newtonien incompressible
- écoulement stationnaire, invariant par translation selon Oy et parallèle selon Ox
- hypothèse de Couette $\partial_x P = 0$

Voir démonstration fiche.

Remarque — le fluide dissipe de l'énergie par viscosité

3 Ecoulement de Poiseuille

Les hypothèses sont les suivantes :

- on considère le fluide newtonien et incompressible
- écoulement stationnaire
- écoulement invariant par rotation autour de Ox
- l'écoulement est parallèle
- On néglige le poids.

Voir démonstration fiche.

Dans ce cas on obtient :

$$v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (6)$$

Ce qui nous permet de remonter au débit :

$$Qv = \frac{\pi \Delta P}{8\eta L} R^4 \quad (7)$$

Ce qui nous permet de définir la résistance hydraulique par analogie avec la résistance électrique et tout suit avec les mêmes propriétés.

4 Ecoulement de Poiseuille d'un fluide Newtonien ([Sans Navier-Stokes])

1 Observations expérimentales

On fait les hypothèses suivantes :

- incompressible
- Newtonien
- écoulement permanent laminaire

Manipulation à faire. Le débit volumique est proportionnel au rayon de la canalisation à la puissance

4.

Remarque — Si l'élément imposé est : perte de charge on peut en parler ici et faire une sous-partie entière dessus mais sinon à éviter je pense

2 Perte de charge

Voir fiche

3 Expression du champ des vitesses

Dans une conduite cylindrique, le profil de vitesse est parabolique :

$$\vec{v} = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} (a^2 - r^2) \quad (8)$$

Ce qui nous permet de remonter au débit en intégrant sur la surface :

$$Dv = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} a^4 \quad (9)$$

A partir du débit volumique on peut définir la vitesse moyenne :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{Dv}{S} \quad (10)$$

Qui correspond au final à la moitié de la vitesse maximale

5 Débit volumique et analogie électrique : application

On fait un tableau de l'analogie électrique et hydraulique Figure 5. On a la résistance qui vaut :

Figure 5 – Analogie électrique/ hydraulique

$$Rh = \frac{P_A - P_B}{Dv} = \frac{8\eta}{\pi a^4} L \quad (11)$$

On a également les deux mêmes lois d'association en série et en parallèle. Les résistances en série s'ajoutent et pour celles en parallèles ce sont les inverses qui s'ajoutent.

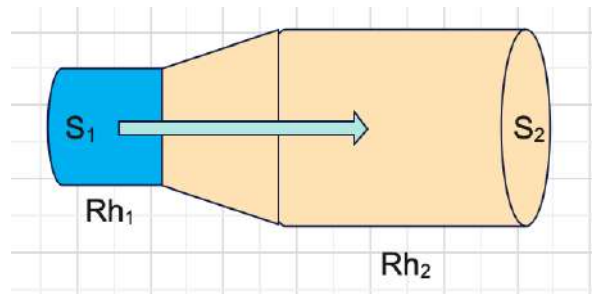


Figure 6 – Association des résistances en série

On suppose bien évidemment la conservation du débit entre les deux sections, pas d'accumulation.

$$Rh_{tot} = \frac{P_A - P_C}{Dv} = \frac{(P_A - P_B) + (P_B - P_C)}{Dv} = Rh_1 + Rh_2 \quad (12)$$

Pour l'association en parallèle :

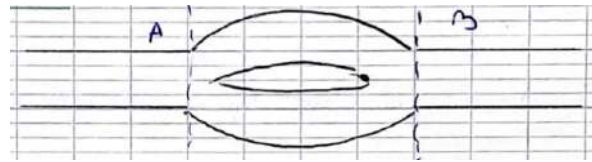


Figure 7 – Association parallèles

$$Dv = Dv_1 + Dv_2 = \frac{P_A - P_B}{Rh_1} + \frac{P_A - P_B}{Rh_2} = (P_A - P_B) \left(\frac{1}{Rh_1} + \frac{1}{Rh_2} \right) = \frac{P_A - P_B}{Rh} \quad (13)$$

1 Application à. la circulation sanguine

A partir de cela, on peut proposer un modèle simplifié de la circulation sanguine. Modélisation de la circulation :

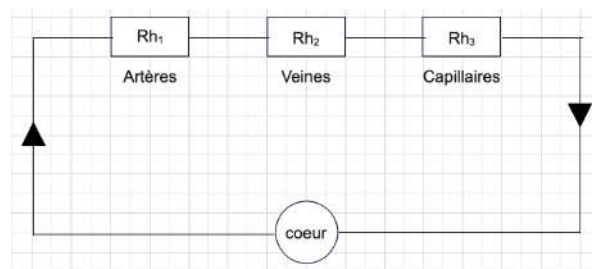


Figure 8 – Analogie entre la circulation sanguine et l'électrocinétique

Quelques valeurs à mettre en perspective : La problématique associée à ces valeurs est suivante, comment faire pour tout irriguer, sachant que la résistance au niveau des capillaires est très forte, que la pression appliquée par le cœur n'est pas infinie. Si on fait la somme, on voit que c'est supérieur à ce qui est possible pour le cœur : il est nécessaire d'avoir une régulation du débit : toutes les zones ne seront pas irriguées en même temps. C'est en partie pour cela qu'on nous dit de ne pas faire de sport sur la digestion, le flux sanguin est dirigé principalement vers l'estomac et l'appareil digestif et tout effort nécessitera une re-direction ce qui diminuerait l'efficacité des deux. Voir leçon Bénédicte.

	aorte	capillaire	veine
v	0.3	4.2×10^{-4}	0.2
section	3×10^{-4}	0.22	4.4×10^{-4}
Dv	90	92	88

Tableau 1 – Valeurs dans les différentes parties du réseau sanguin

6 Application de l'écoulement de Poiseuille : Loi de Darcy

La loi de Darcy s'intéresse à la porosité d'un matériau (voir si on peut faire une manipulation là-dessus). On définit la porosité comme :

$$\phi = \frac{V_{pores}}{V_{tot}} \quad (14)$$

On se place dans le cas d'un écoulement rampant, fluide newtonien. On suppose que la perte de charge est linéique : $\frac{P_A - P_B}{e}$. Soit S la surface traversée, la loi de Darcy donne :

$$\frac{Dv}{S} = \frac{K}{\eta} \frac{\Delta P}{e} \quad (15)$$

K : perméabilité du milieu poreux en m^2 . 1 Darcy est égal à $(1\mu m)^2$.

La modélisation classique du problème est la suivante :

- n : le nombre de canaux par unité de surface
- le canal est de rayon r, longueur e
- On considère un écoulement de Poiseuille dans chaque canal

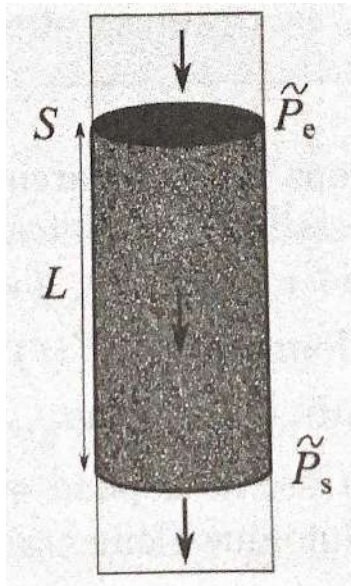


Figure 9 – Loi de Darcy

On a donc :

$$Dv = dv \times n \times S = nS \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta P}{e} r^4 \quad (16)$$

$$\frac{Dv}{S} = n \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta P}{e} r^4 = \frac{K}{\eta} \frac{\Delta P}{e} \quad (17)$$

Avec

$$K = \frac{n\pi}{8} r^4$$

. On remonte donc à n et ainsi on peut remonter à la porosité avec :

$$\phi = \frac{V_{pores}}{V_{tot}} = \frac{\pi r^2 e n S}{S e} = n \pi r^2 \quad (18)$$

Remarque – S'il y a une variation de hauteur on considère ΔP^* , c'est à dire la différence de pression verticale

Remarque – Si c'est l'élément imposé, on peut faire une manipulation dessus

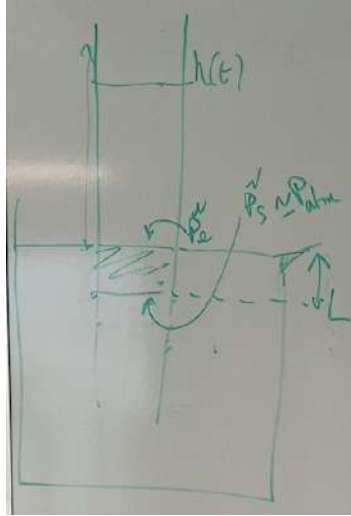


Figure 10 – Montage expérimental Loi de Darcy

On cherche à montrer que l'on peut écrire :

$$h(t) = h_0 \exp\left(-\frac{K\rho g}{\eta L} t\right) \quad (19)$$

On a :

$$D = AS\Delta P^* \quad (20)$$

Or :

$$\Delta P^* = P_e^* - P_s^* \quad (21)$$

$$\Delta P^* = \rho g h(t) + P_{atm} - (P_{atm} + \rho g L) \quad (22)$$

Egalement, on a :

$$D = S \times \frac{dh}{dt} \quad (23)$$

Donc on a :

$$\frac{dh}{dt} = A\rho g h - A\rho g L \quad (24)$$

Or $L \gg h$ donc :

$$\frac{dh}{dt} = A\rho gh \quad (25)$$

Ce qui donne en intégrant l'équation voulue. On trace alors $\ln(h) = f(t)$ et on récupère le coefficient directeur. Ça fait, une magnifique droite (voir Fig. 11).

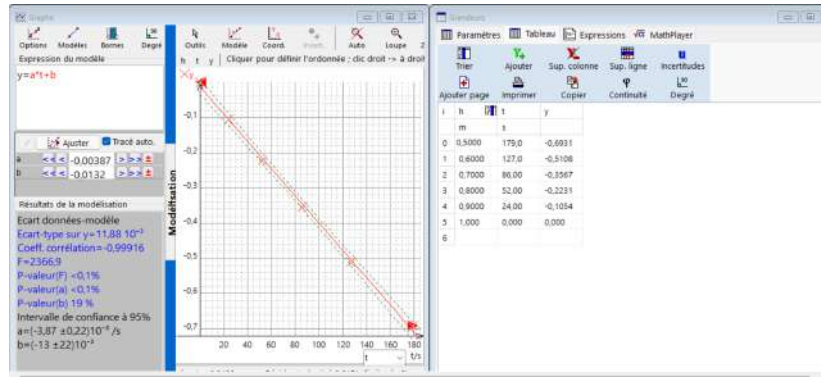


Figure 11 – Vérification de la loi de Darcy

Conclusion