

# LP 32 - Ecoulement d'un fluide

Lise Boutenègre et Raphael Rullan

| Élément imposé – Fluide parfait, Fluide réel, cinématique des fluides

## Introduction Pédagogique

| Niveau : BCPST2

Je place cette leçon au niveau BCPST2 pour plusieurs raisons :

- Je pense qu'il est important pour cette leçon, pour pouvoir s'affranchir de la critique "oui mais ça a déjà été vu avant", de s'appuyer sur un programme précis. En effet, avec la refonte des programmes, une grosse partie pourra avoir été vu. Cela permet de pouvoir dire "C'est au programme et on applique le programme, il y a en BCPST2 13h allouées à la mécanique des fluides et cette partie en fait partie".
- On peut également retorquer en mettant BCPST2, si le premier argument ne suffit pas à justifier le temps passé sur les définitions, que tous les élèves n'auront pas poursuivi l'enseignement de physique-chimie en spécialité au lycée.

### Pré-requis

- Statique des fluides : équation de la statique des fluides **Première - BCPST2**
- Particule fluide, échelle mésoscopique **BCPST2**
- Forces pressantes, poussée d'Archimède **BCPST2**
- Mécanique du point **BCPST1**
- Théorème de l'énergie mécanique, cinétique, aspects énergétiques de phénomènes physique **BCPST1**
- Dérivées en mathématiques, expression de vecteurs **Secondaire + BCPST1**
- Notions de champs **1ère**
- Notion de travail et de forces : poids, force pressante ... **BCPST1**
- (Selon l'élément imposé, on peut avoir à mettre la cinématique des fluides en prérequis)

### Difficultés

- Traitement mathématique du problème
- Comprendre les hypothèses mises en jeu.
- Bien différencier les types d'écoulement et les caractéristiques de chacun. Faire la différence entre vitesse et débit par exemple.
- Faire les bonnes simplifications.

## V. Mécanique des fluides

L'enseignement de mécanique des fluides dans la filière BCPST est l'occasion d'apporter des éléments de réflexion nécessaires à la compréhension de phénomènes naturels (météorologie, circulation sanguine,...).

Les lois de conservation de la masse et de l'énergie sont présentées sous la forme de bilans globaux sur un volume de contrôle fini. La conservation de l'énergie pour l'écoulement d'un fluide parfait permet d'introduire la notion de charge exprimée en pascal et homogène à une densité volumique d'énergie.

Dans le cadre des écoulements réels, l'enseignement en BCPST privilégie la détermination et l'interprétation de la valeur du nombre de Reynolds. Un des objectifs est ici de pouvoir valider l'utilisation de certaines lois. Les exemples d'écoulements à bas nombre de Reynolds sont choisis dans les domaines des sciences de la vie et de la terre. L'approche expérimentale doit permettre non seulement de maîtriser la manipulation de certains dispositifs simples (manomètres) mais aussi d'adapter à des situations réelles les lois de la mécanique des fluides.

| Notions                                                                                                                                                                                                                         | Capacités exigibles                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1. Statique des fluides</b><br><br>Particule de fluide, échelle mésoscopique.<br><br>Densité volumique des forces de pression.<br>Équation de la statique des fluides.<br><br>Forces pressantes.<br><br>Poussée d'Archimède. | Établir le lien entre la densité volumique d'une force de pression et le gradient de pression.<br>Établir l'équation locale de la statique des fluides et utiliser le système de coordonnées adaptées à son intégration.<br><br>Exprimer la force pressante exercée sur une surface plane soumise à une pression uniforme.<br>Démontrer et utiliser le théorème d'Archimède.<br>À partir de situations simples prises dans le domaine des géosciences, utiliser le théorème d'Archimède. |
| <b>2. Dynamique des fluides</b><br><br>Trajectoire.<br>Champ de vitesse, ligne de courant.<br><br>Bilan d'énergie mécanique.                                                                                                    | Identifier le vocabulaire spécifique à la description du mouvement d'un fluide (trajectoire, ligne de courant).<br>Décrire une ligne de courant dans le cas d'un écoulement permanent.<br>Interpréter un document (schéma, photo d'un écoulement) : profil de vitesse, lignes de courant.<br><br>Établir un bilan d'énergie mécanique dans le                                                                                                                                            |

(a)

(b)

Figure 1 – Programme BCPST2 sur la dynamique des fluides

**Objectifs** – Que les élèves puissent comprendre comment on caractérise un écoulement. Comprendre les mouvements des fluides et pouvoir appliquer cela à l'étude de systèmes en sciences et vie de la Terre et de la Vie. Connaître la relation de Bernoulli

On mettrait cette leçon après la leçon d'introduction de statique des fluides. Cette leçon est en général assez importante et donne lieu à une évaluation à la fin. Si on parle des fluides parfaits alors la suite logique est l'étude des fluides réels. Si on a des fluides réels à étudier alors ... se reporter plus à la leçon viscosité.

## Applications

- **TP** : Vase de Mariotte et vérification de la Loi de Toricelli.
- **TD** : Plein de possibilités, dépend beaucoup de l'élément imposé. Je pense que si on a la statique des fluides en EI on propose un exo sur le réajustement isostatique (voir Fiche)
- **Activité doc** : Pareil, dépend beaucoup de l'EI. On fait ce qu'on ne voit pas.

**Source** – Sanz, Côte, Grécias Tec et Doc (blanc avec carré orange)

# Introduction

Bonjours à tous et à toutes, on va continuer notre étude de la mécanique des fluides. Nous avons vu la dernière fois comment décrire les systèmes statiques. On va maintenant s'intéresser à des systèmes qui bougent. on va essayer de comprendre comment est-ce que ces fluides se déplacent. Qui n'a jamais remarqué en jouant avec le tuyau d'arrosage on un robinet qu'en pinçant le bout l'eau allait plus vite. Egalement, qui ne s'est jamais émerveillé devant ces jets d'eau monumentaux que nous pouvons voir. (Diapo). Ce sont tous ces phénomènes que nous allons essayer d'étudier en plus d'autres phénomènes triviaux comme par exemple : les si connues et controversées sondes de Pitot, la pression sanguine. Tous ces éléments pourront être étudiés à partir de ces outils.

## 1 Cinématique

### 1 Les deux modes de description

| **Remarque** – Je pense qu'on n'en parle que si c'est obligé parce que c'est border programme

On parle de l'approche lagrangienne vs l'approche eulérienne sans dire les mots

### 2 Caractérisation de l'écoulement

On définit un nouvel objet : **les lignes de courant**. à l'instar des trajectoires en mécanique. Ce sont les lignes qui permettent de représenter les trajectoires des particules du fluide en mouvement.

| **Définition** – **Ligne de courant** : On appelle ligne de courant, toute courbe dont la tangente en chacun de ses points est, à chaque instant et localement, colinéaire au vecteur vitesse du champ d'écoulement. Les lignes de courants sont donc les lignes du champ de vecteurs  $v(\vec{M}, t)$

d'un point de vue mathématique, à un instant donné  $t$ , le vecteur vitesse  $v(\vec{M}, t)$  est colinéaire au vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  le long de la ligne de courant. Il existe un réel  $k$  tel que :

$$\vec{v}(\vec{M}, t) = k d\vec{l} \quad (1)$$

L'équation des. lignes de vitesse est en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (2)$$

| **Définition** – **Tube de courant** : On appelle tube de courant l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé

| **Définition** – **Ecoulement unidimensionnel** : Les grandeurs qui décrivent le fluide en écoulement prennent même valeur en tout point d'une section de droite d'un tube d'écoulement.

On accepte les petites déformations

| **Définition** – **Ecoulement unidirectionnel** : Il s'agit d'un écoulement unidimensionnel qui s'effectue selon une seule direction. Toutes les lignes de courant sont. parallèles à l'axe Ox

Pour compléter si besoin Tec et Doc p.538.

### 3 Débit volumique et massique

(Diapo : on met une rivière avec un gros débit et avec un petit débit, une grosse vitesse un petit débit, une petite vitesse et un gros débit pour introduire la notion de débit. On cherche à montrer que débit n'est pas égal à vitesse également).

**Définition – Débit volumique :**  $D_v$  d'un fluide correspond au volume  $V$  de fluide qui traverse une section droite par unité de temps :

$$D_v = \frac{V}{\Delta t} \quad (3)$$

Avec  $D_v$  en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $V$  en  $\text{m}^3$ .  $\Delta t$  correspond à la durée en seconde pendant laquelle le volume  $V$  traverse la section droite d'aire  $S$  (voir Fig. ??)

Si un fluide traverse à la vitesse  $\vec{v}$  la section d'aire  $S$  d'un conduit en une durée  $t$  alors le volume  $V$  de fluide ayant traversé  $S$  peut s'écrire :  $V = S \cdot v \cdot \Delta t$ . En effet on a  $v \cdot \Delta t = l$  (voir Fig. ??). D'un point de vue analyse dimensionnelle on a :

$$D_v = \frac{[L]^3}{[T]} \quad (4)$$

et :

$$\frac{S \cdot v \cdot \Delta t}{t} = \frac{[L]^2 [LT^{-1}] [T]}{[T]} = \frac{[L]^3}{[T]} \quad (5)$$

On a également :

$$D_V = \int \int_S \rho \vec{v} d\vec{S} \quad (6)$$

**Définition –** En régime permanent, il y a conservation du débit volumique  $D_v$  d'un fluide incompressible le long d'un écoulement donc en tous points A et B d'un écoulement :

$$Q_A = Q_B \quad (7)$$

et ainsi :

$$v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B \quad (8)$$

La vitesse est l'aire sont alors des grandeurs inversement proportionnelles. C'est pour cela que lorsque l'on pince le tuyau d'arrosage, l'eau va plus vite. (faire une application numérique).

## 2 Bilan d'énergie mécanique

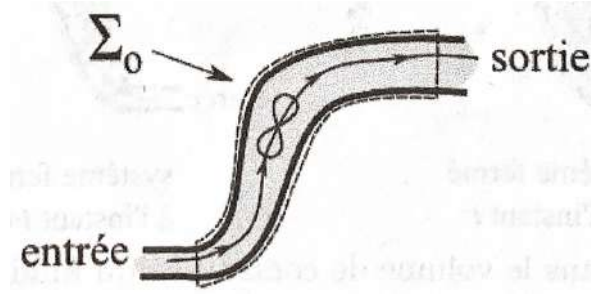
**Remarque –** On essaye de mettre le maximum des hypothèses au tableau et de les utiliser quand il faut, pas juste les mettre avant ou après.

### 1 Application du théorème de l'énergie cinétique

On suppose que :

- l'écoulement est stationnaire
- le fluide est incompressible

On s'intéresse à un fluide dans une conduite fixe et dont la paroi est non-poreuse. Le système étudié est le fluide dans un volume de contrôle fixe délimité par une surface de contrôle notée  $\Sigma$  délimitant



**Figure 2** – Fluide dans une conduite

un système ouvert.  $\mathcal{S}$  correspond au système fermé. À  $t$  :  $m_\Sigma(t) + \delta m_e$  et à  $t + dt$  :  $m_\Sigma(t + dt) + \delta m_s$ . Comme on est en régime stationnaire, les masses sont les mêmes. On peut faire le bilan des forces :

- force de pesanteur
- forces de pression
- force exercée par une paroi mobile
- forces de frottement visqueux

On applique le théorème de l'énergie cinétique appliqué à  $\Sigma$  pendant  $dt$  :

$$dEc = \sum \delta W \quad (9)$$

On regarde la contribution de chacune des forces :

$$\delta W_{poids} = -dE_{pp} = -(\delta m_s g z_s - \delta m_e g z_e) \quad (10)$$

En orientant  $Oz$  vers le haut. En régime stationnaire  $m = \text{cste}$  or :

$$\frac{dm_\Sigma}{dt} = Dm_e - Dm_s = 0 \quad (11)$$

Avec  $Dm_e$  et  $Dm_s$  les débits massiques d'entrée et de sortie. Donc :

$$Dm_e = Dm_s \quad (12)$$

Ainsi :

$$\delta m_e = \delta m_s \quad (13)$$

$$\rho \delta V_e = \rho \delta V_s \quad (14)$$

Finalement :

$$\delta W_{poids} = \rho g \delta V (z_e - z_s) \quad (15)$$

Pour les forces pressantes :

$$\delta W_{press} = -P_s \delta V_s + P_e \delta V_e = \delta V (P_e - P_s) \quad (16)$$

Le travail utile peut être positif ou négatif en fonction de ce qu'il y a dans le système. Le travail des forces dissipatives seront forcément négatives (on prélève de la chaleur au système). On s'intéresse maintenant au premier terme du TEC.

$$dEc = [Ec(\Sigma)(t + dt) + \frac{1}{2} \delta m_s v_s^2] - [Ec(\Sigma)(t) + \frac{1}{2} \delta m_e v_e^2] \quad (17)$$

Comme on est dans un état stationnaire :

$$dEc = \frac{1}{2} \rho \delta V (v_s^2 - v_e^2) \quad (18)$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\rho\delta V(v_s^2 - v_e^2) = \rho\delta Vg(z_e - z_s) + \delta V(P_e - P_s) + \delta W_u + \delta W_d \quad (19)$$

Soit :

$$\delta V[(\frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s + P_s) - (\frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e + P_e)] = \delta W_u + \delta W_d \quad (20)$$

Si le fluide est parfait, on néglige les phénomènes dissipatifs et on se place dans le cas où il n'y a pas de travail utile donc :

$$\delta V[(\frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s + P_s) - (\frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e + P_e)] = 0 \quad (21)$$

## 2 Théorème de Bernoulli pour les fluides parfaits

On arrive donc à l'expression du théorème de Bernoulli. Cette relation est peut être la plus importante que vous allez voir en mécanique des fluides. Vous pouvez expliquer beaucoup de choses grâce à cela. Des effets très diverses. Elle a été énoncée en 1738 par Daniel Bernoulli (physicien, mathématicien Suisse). Pour l'écoulement d'un fluide incompressible en régime permanent, parfait et unidimensionnel, la relation de Bernoulli modélise les évolutions de la pression  $P$ , de la vitesse  $v$  et de l'altitude  $z$  le long d'une ligne de courant dans un fluide de masse volumique  $\rho$  dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$ . Pour un point sur une ligne de courant :

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = cste \quad (22)$$

Ce qui donne (et ce que vous allez faire principalement) quand on l'applique à deux points :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B \quad (23)$$

Si on divise tout par  $\rho g$  :

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g} = cste' \quad (24)$$

Avec  $z$  l'altitude, le premier terme correspond à la hauteur cinématique et le dernier terme correspond à la hauteur piézométrique : c'est la hauteur d'une colonne de fluide qui génère à sa base une pression  $P$ .

## 3 Application

**Remarque** — Cette partie dépendra de l'élément imposé, on n'en fait qu'un

### 1 Tube de Pitot

Pour exprimer la vitesse de l'écoulement pour un dispositif Pitot on applique la méthode :

- On applique la relation de Bernoulli sur des lignes de courant judicieusement choisies pour trouver une expression de la vitesse en fonction des pressions
- On applique la relation fondamentale de la statique des fluides pour le fluide à l'intérieur du dispositif
- On déduit l'expression de la vitesse du fluide

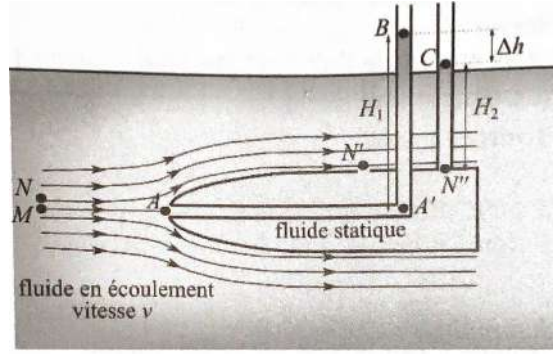


Figure 3 – Tube de Pitot

On applique la relation de Bernoulli sur la ligne de courant possédant le point d'arrêt entre un point M et le point A :

$$P_M + \frac{1}{2}\rho v_M^2 + \rho g z_M = P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A \quad (25)$$

On est sur une ligne de courant horizontale donc  $z_M = z_A$ . A est un point d'arrêt donc  $v_A = 0$ . Nous avons :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = P_A - P_M \quad (26)$$

Donc :

$$v = \sqrt{\frac{2(P_A - P_M)}{\rho}} \quad (27)$$

**Remarque** – Attention, la pression n'est pas la même en M et en A à cause de l'écoulement, les surfaces isobares ne sont pas horizontales.

On applique Bernoulli entre N et N' :

$$P_N + \frac{1}{2}\rho v_N^2 + \rho g z_N = P_{N'} + \frac{1}{2}\rho v_{N'}^2 + \rho g z_{N'} \quad (28)$$

On considère que la différence de hauteur entre les deux points est négligeable donc  $z_N = z_{N'}$  et  $v_N = v_{N'}$ . Ainsi  $P_N = P_{N'}$ . Comme N et M sont proches on a :

$$P_N \approx P_M \quad (29)$$

On applique la relation de la statique des fluides pour un fluide incompressible dans chaque tube :

$$P_A = P_{atm} + \rho g H_1 \quad (30)$$

et :

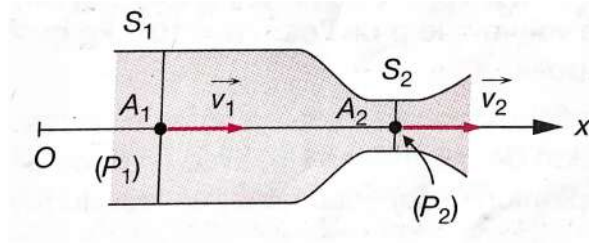
$$P_M = P_{atm} + \rho g H_2 \quad (31)$$

Donc,

$$P_A - P_M = \rho g (H_1 - H_2) = \rho g \Delta h \quad (32)$$

Enfin, on a :

$$v = \sqrt{2g\Delta h} \quad (33)$$



**Figure 4** – Effet Venturi, source Grécias p.549

## 2 Effet Venturi

On applique l'équation de Bernoulli dans le cas on on est à l'horizontal donc  $z_A = z_B = 0$ . C'est ce qu'il se passe quand vous filtez sur Buchner. On a donc :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \quad (34)$$

Donc :

$$(P_A - P_B) = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) \quad (35)$$

On a également :

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \quad (36)$$

$$v_A = \frac{S_B \cdot v_B}{S_A} \quad (37)$$

En introduisant :

$$(P_A - P_B) = \frac{1}{2}\rho v_B^2 \left(1 - \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2\right) \quad (38)$$

On peut donc en connaissant tout remonter à la vitesse de l'eau. On a appliqué la statique pour avoir la différence de pression en fonction de différence de hauteur. On a :

$$P_A = P_0 + \rho g z_A \quad (39)$$

et

$$P_B = P_0 + \rho g z_B \quad (40)$$

Manipulation : Effet Venturi + <https://www.youtube.com/watch?v=7P00LpvRD3k>

## 3 Relation de Torricelli

On applique le théorème de Bernoulli entre A et B.

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + P_B \quad (41)$$

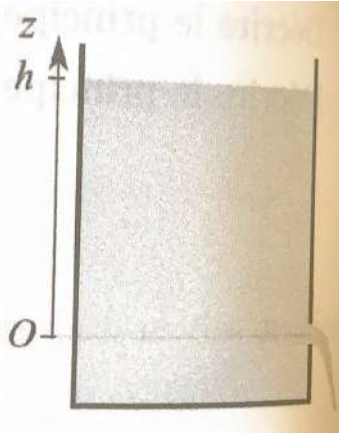
Avec ici  $P_A = P_B = P_{atm}$ . Il y a conservation du débit volumique. Donc :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B \quad (42)$$

On néglige  $v_A$  devant  $v_B$  (parce qu'on a  $S \gg s$ ) et on a :

$$\frac{v_B^2}{2} = gh \quad (43)$$





**Figure 5** – Ecoulement de Torricelli

$$v_B = \sqrt{2gh} \quad (44)$$

On peut calculer la durée de vidange :

$$v_A = \frac{s}{S} v_B = \frac{s}{S} \sqrt{2gh} = \frac{-dh}{dt} \quad (45)$$

Donc :

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{-s}{S} \sqrt{2g} dt \quad (46)$$

On intègre entre 0 et H :

$$[2\sqrt{h}]_H^0 = \frac{-s}{S} \sqrt{2g} [t]_0^t \quad (47)$$

ce qui donne :

$$-2\sqrt{H} = \frac{-s}{S} \sqrt{2g} t \quad (48)$$

$$t = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (49)$$

Voir Tec Doc + Manipulation du vase de Mariotte Fruchart p.422. <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/bernou1.html>

## 4 Conclusion

On a pu voir aujourd'hui une relation fondamentale pour la description des fluides. Vous la ré-utiliserez à de multiples occasions. Même si cela est très intéressant on commence déjà à voir la limite de cette description avec l'expérience. La prochaine fois nous rajouterons un degré de complexité, nous avons supposé ici les fluides comme étant parfaits. Nous verrons la prochaine fois comment la description change quand on enlève cette hypothèse.