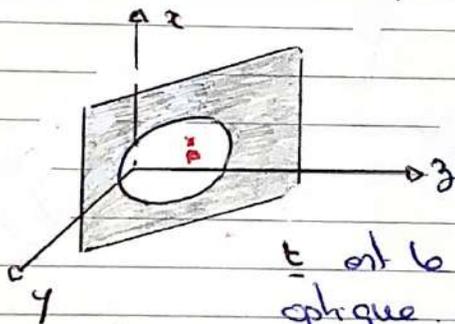


# Diffraction, introduction à l'optique de Fourier

Introduction: des diffractions seront les phénomènes pour lesquels la direction de propagation est modifiée au passage par un obstacle de dimensions adéquates.

## I. Spectre de Fourier d'un objet diffractant

### 1. Transparence d'un objet



en P quelconque :

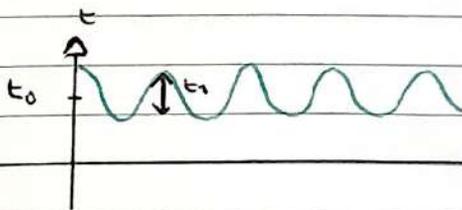
$$\underline{s}(P^+, t) = \underline{s}(P^-, t) \underline{t}(P) \leftarrow \text{sans dimension}$$

$\underline{t}$  est le coefficient de transmission en amplitude optique. Il contient l'indice et l'épaisseur au point P considéré.

en particulier:

- $t = 0$ : pupille opaque
- $t = 1$ : pupille parfaitement transparente  $t \in \mathbb{C}$ .

### 2. Expérience fondatrice : réseau sinusoidal

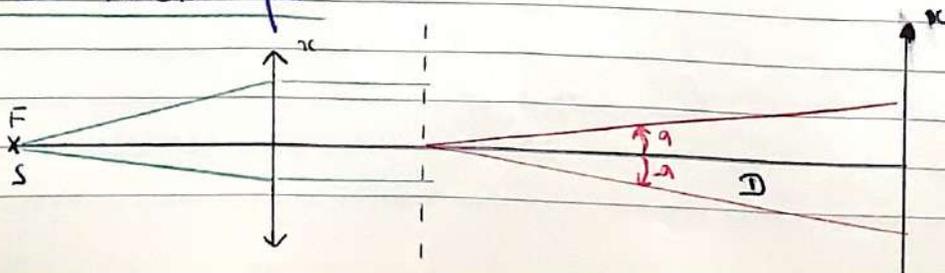


pupille 1D

$$t(x) = t_0 + t_1 \cos(2\pi x) \leftarrow \begin{array}{l} \text{cos de la pupille} \\ \text{amplitude relative au} \\ \text{de la valeur moyenne} \end{array}$$

$a \ll$  largeur éclairée

schéma de montage



observations: on observe à l'écran trois taches, c'est à dire 3 directions de diffraction.

- ordre central très lumineux
- deux ordres latéraux moins lumineux

## Interprétations

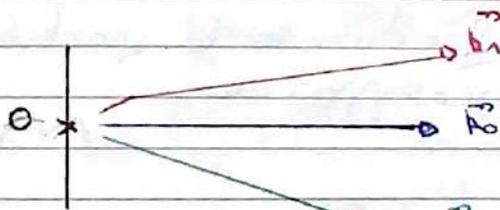
$$s(P^+, t) = s_0 e^{j\omega t} t(P)$$

$$\Rightarrow s(P^+, t) = s_0 e^{j\omega t} \left( t_0 + t_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right)$$

$$= s_0 e^{j\omega t} \left( t_0 + \frac{t_1}{2} \left( e^{j\frac{2\pi x}{a}} + e^{-j\frac{2\pi x}{a}} \right) \right)$$

$$s(P^+, t) = s_0 \left( t_0 e^{j\omega t} + \frac{t_1}{2} e^{j(\omega t - \frac{2\pi x}{a})} + \frac{t_1}{2} e^{j(\omega t + \frac{2\pi x}{a})} \right)$$

$\Rightarrow$  on observe 3 taches qui sont 3 OPH interceptés par l'écran.



$$\vec{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin\alpha \vec{u}_x + \cos\alpha \vec{u}_z)$$

$$\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (-\sin\alpha \vec{u}_x + \cos\alpha \vec{u}_z)$$

ordre 0:  $t_0 s_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{OP})}$

ordre 1:  $\frac{t_1}{2} s_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OP})}$

ordre -1:  $\frac{t_1}{2} s_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OP})}$

Un tel choix de 3 OPH émis dans 3 directions  $(\vec{u}_z, \vec{u}_1, \vec{u}_{-1})$

convient:

$$s(P^+, t) = t_0 s_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{OP})} + \frac{t_1}{2} s_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OP})} + \frac{t_1}{2} s_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OP})}$$

en choisissant  $\frac{2\pi}{\lambda} \sin\alpha = \frac{2\pi}{a}$

on trouve ainsi les 3 directions d'émission de diffraction par pupille sinusoidale:  $\sin\alpha = \frac{\lambda}{a}$

Conclusion: on observe la lumière dans 3 directions angulaires

$$\begin{cases} +\alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{cases}$$

condition de conséquence spatiale:  $t(x) = t_0 + \frac{t_1}{2} e^{j\frac{2\pi}{a}x} + \frac{t_1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{a}x}$

$t(x)$  est déjà sous la forme d'un DSF

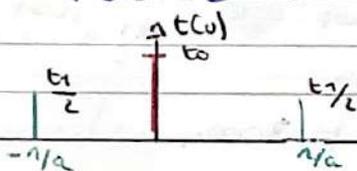
→  $x$  est le paramètre

→ donc les exp peuvent s'écrire

$$e^{j\frac{2\pi x}{a}}$$

fréquence spatiale

1  
période spatiale  
rappelle fréquence spatiale  $u$ , les exponentielles peuvent s'écrire  $e^{j2\pi ux}$  avec  $u [m^{-1}]$ .



Spectre de Fourier de la pupille sinusoidale.

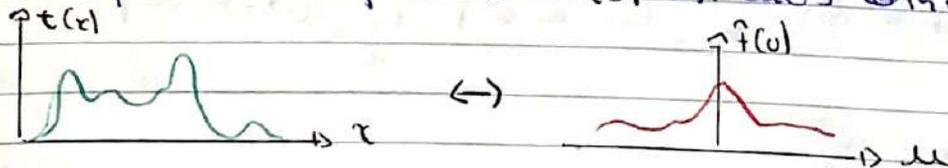
On vient d'obtenir 3 directions de diffraction car le spectre spatial de la pupille contient 3 fréquences spatiales.

### 3 Généralisation

Une fréquence spatiale de la transparence  $t(x)$  correspond à une direction de diffraction  $\theta$  tel que  $\sin\theta = \lambda u$

Un point du plan focal image, Plan de Fourier correspond à une fréquence spatiale du spectre de la transparence.

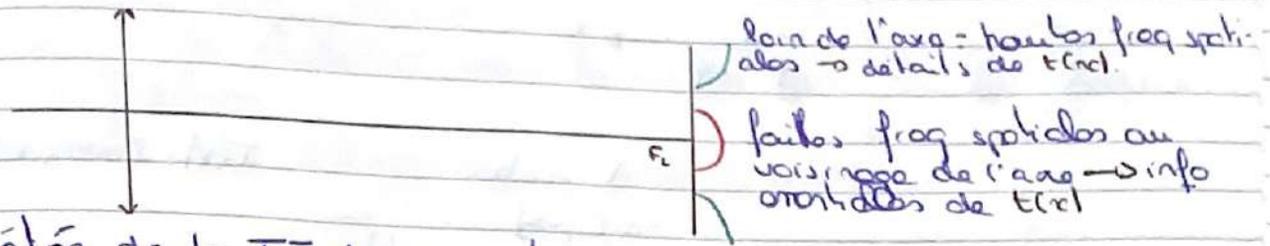
Dans le cas le plus général,  $t(x)$  n'est pas nécessairement périodique son spectre de Fourier  $\hat{t}(u)$  est alors continu.



$$\begin{cases} \underline{t}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\hat{t}}(u) e^{-j2\pi ux} du \\ \underline{\hat{t}}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{t}(x) e^{j2\pi ux} dx \end{cases}$$

conséquence majeure pour la figure de diffraction observée dans le plan de Fourier ( $\Pi$ )

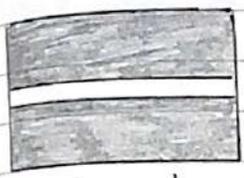
→ l'intensité lumineuse dans  $\Pi$  illustre une relation de transformée de Fourier avec  $t(x)$



les propriétés de la TF donneront:

$\Delta x \Delta u \approx 1$  ← petits détails, hautes fréquences.

4. Cas de la fente parfaitement transparente



$t(x,y) = 0$  si  $|x| > a/2$   
 $t(x,y) = 1$  si  $|x| \leq a/2$

$s(\theta) = \text{cste} \int_x t(x) e^{-j2\pi u x} dx$

$\Rightarrow s(\theta) = \text{cste} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j2\pi u x} dx$

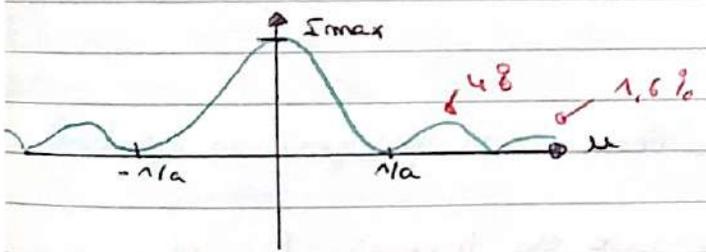
$\Rightarrow s(\theta) = \frac{\text{cste}}{-j2\pi u} [e^{-j2\pi u x}]_{-a/2}^{a/2}$

$\Rightarrow s(\theta) = \text{cste} \times a \frac{e^{-j\pi u a} - e^{j\pi u a}}{-j2\pi u a}$

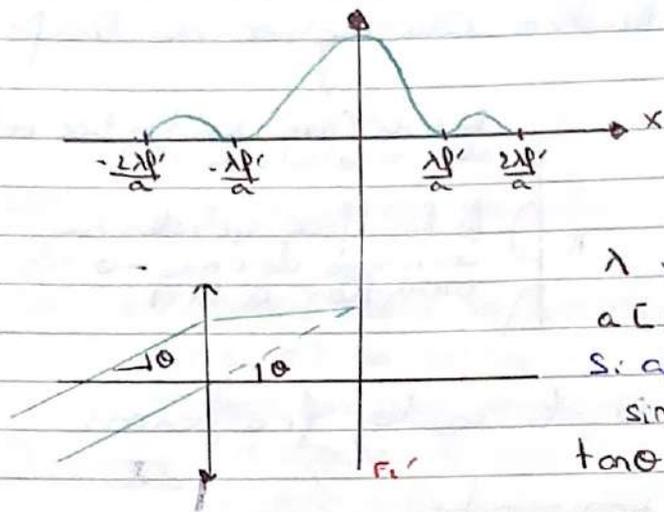
$\Rightarrow s(\theta) = \text{cste} \times a \frac{-2j \sin(2\pi u a/2)}{2\pi u a} = \text{cste} \times a \text{sinc}(\pi u a)$

$I(\theta) = |\text{cste} \times a|^2 \text{sinc}^2(\pi u a) = I_{\text{max}} \text{sinc}^2(\pi u a)$

$I(\theta) = I_{\text{max}} \text{sinc}^2(\pi \frac{\sin \theta}{\lambda} a)$



A l'écran = plan de Fourier du montage de Fraunhofer



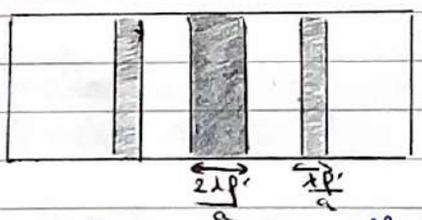
$\lambda$  visible  
 $a$  [μm]  
 Si: approx des petits angles  
 $\sin \theta \approx \theta = \lambda u = 0$   
 $\tan \theta \approx \theta = \frac{x}{f_1'}$

$$I(x) = I_{\max} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda f_1'}\right)$$

de lumière est essentiellement concentrée dans le tronçon central de diffraction d'angle caractéristique  $\lambda/a$ .

### Approximation des petits angles

$\sin \theta \approx \theta = \lambda u$  → la tache centrale est de largeur double  
 $\tan \theta \approx \theta = x/f_1'$  des taches secondaires.



## II Propriétés générales de la diffraction

### 1. Transformée de Fourier 2D

$t(x,y)$  pupille plane 2D ----> fréquence spatiale dans 2 directions  $(u,v)$

$$\tilde{t}(u,v) = \text{TF}(t(x,y))$$

$$t(x,y) = \text{TF}^{-1}(\tilde{t}(u,v))$$

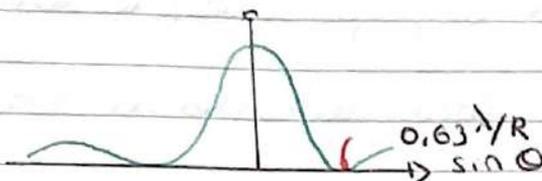
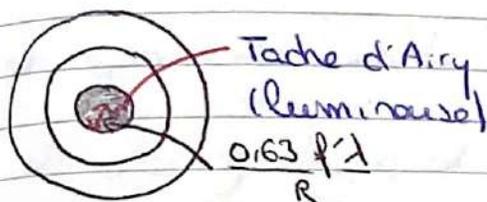
- une image 2D a un spectre de Fourier en fréquences spatiales 2D
- lien  $\tilde{t}(u,v) / t(x,y)$  rappelle principe de Huygens-Fresnel.

## 2. Pupille circulaire

on a un disque diffractant

→ symétrie de révolution pour la pupille donc pour la figure de diffraction

→ résultat:  $s(\theta)$ : Intégrale de Bessel d'ordre 0



⚠ Au labo  $\frac{\lambda}{R} < 1 \text{ mm}$  donc on voit un point mais enregistré mont compliqué à cause des pixels.

→ taille télescope:  $R$  ?

→ Résolution de l'image.

## 3. Conséquence de la relation de TF

Propriété de dilatation / contraction

Si taille pupille →  $k \times$  taille

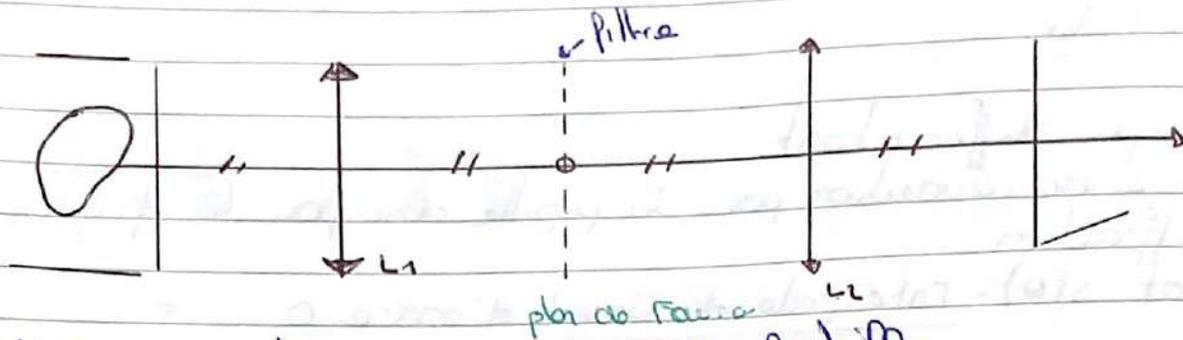
alors figure →  $1/k$  figure.

Liens de symétrie: si la pupille admet des symétries alors la figure aussi.

## II Filtrage optique

Filtrage optique dans le plan  $\Pi$ : occulter telle ou telle partie de  $\Pi$  pour couper telle ou telle fréquence spatiale.

### 1. Filtrage passe tout



d'écran est conjugué avec la lentille.

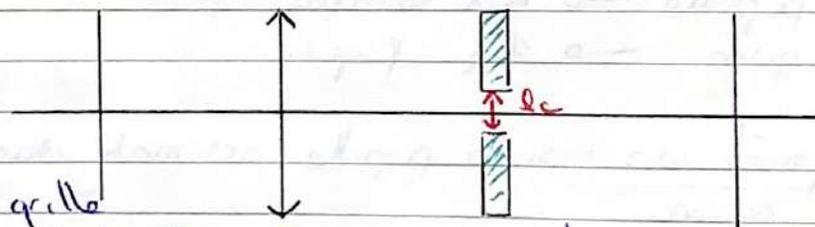
- Dans  $(\Pi)$  on place un cache sur l'axe et au voisinage de l'axe.

On observe alors à l'écran l'image de la pupille privée de ses hautes fréquences spatiales (celles de grande énergie). On observe à l'écran les détails diffractés par la pupille.

## 2. Filtrage passe-bas

Pupille = grille périodique de période  $a$ .

On place dans le plan de Fourier sur l'axe optique une fente de diffraction parallèle aux fils de la grille. On coupe les harmoniques de hauts rangs près par à près les rangs de plus en plus petits.



$l_c$  largeur de l'obstacle à sa description des fils à l'écran

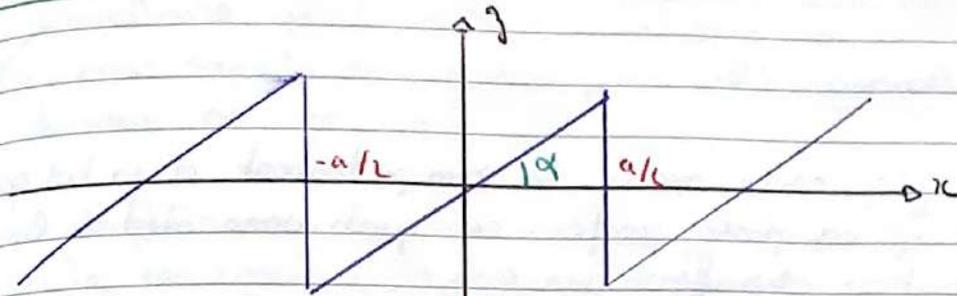
$$\begin{cases} \sin \theta_c = \lambda / a \\ \tan \theta_c = \frac{l_c / L}{f'} \end{cases}$$

petits angles  $\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{a} = \frac{l_c / L}{f'} \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{2\lambda f'}{l_c}}}$$

## IV Autres

### de réseaux blosés



$$t(x) = \Pi a \exp(ik(n-1)\theta x)$$

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2 \left( \frac{ka}{z} ((n-1)\theta - a) \right)$$

permet de choisir quel ordre on veut évaluer. Utile en spectroscopie.