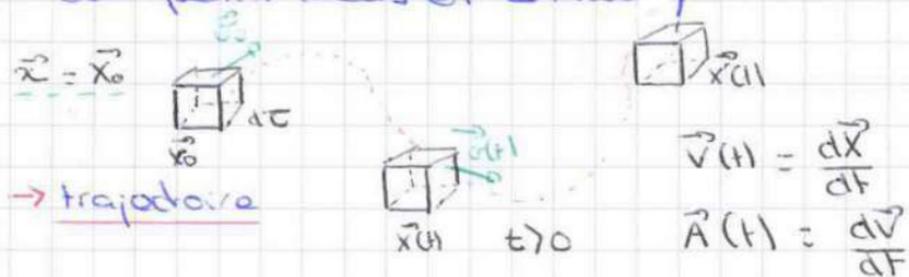


Mécanique des flexibles

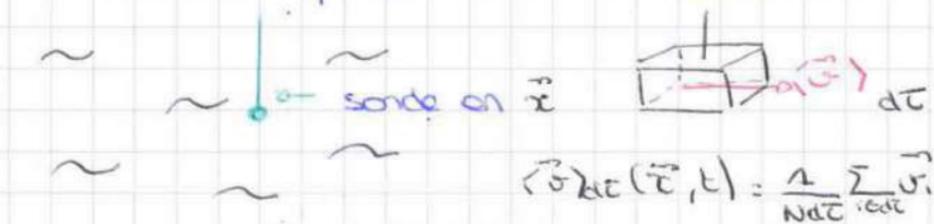
Point de vue Lagrangien

→ On suit le mouvement d'une particule de flexible (analogie avec la mécanique des points mais en continu)



Point de vue Eulerien

→ on s'intéresse ici à un "volume de contrôle", fixe dans l'espace.



→ lignes de courant : lignes de champ de \vec{v}
 // \vec{v} à tout \vec{x} à t .

Equivalence des approches

Si on place à t la sonde en $\vec{x} = \vec{x}(t)$, on doit mesurer : $\vec{v}(\vec{x}(t), t) = \vec{v}(t)$ avec $\begin{cases} \vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) \\ \vec{x}(t=0) = \vec{x}_0 \end{cases}$

→ équiv. Euler-Lagrange

Pour l'accélération :

$$\text{en Lag: } \vec{A}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}(t), t) = \partial_t \vec{v} + \sum_{i=1}^3 \partial_i \vec{v} \frac{dx_i}{dt}$$

$v_i = \partial x_i / \partial t$

$$\vec{A}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right]$$

on introduit l'opérateur "dérivée convective / particulaire"

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$$

$\vec{A}(t)$ dépend de la non-stationnarité et de la non-uniformité

→ si $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{a}t$ "écoulement uniforme" indépendant de \vec{x}

→ si $\vec{v}(\vec{x}, t) = r\Omega \vec{e}_\theta$ "écoulement stationnaire" indépendant de t .

Propriété: pour un écoulement stationnaire les trajectoires sont égales aux lignes de courant.

vitesses	propriétés	schémas et accélérations	appellation
$\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 2\alpha$ $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$	<p>$\vec{v} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha dx \\ \alpha dy \end{pmatrix}$ $d\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha dx \\ \alpha dy \end{pmatrix}$ $d\vec{v} = \alpha d\vec{r}$ $\frac{d(d\vec{v})}{dt} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{v}$ $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}$</p>	écoulement irrotationnel → écoulement potentiel $\vec{v}_{pot} = \vec{\nabla} \phi$
$\vec{v} = \Omega \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\Omega \end{pmatrix}$	<p>$\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v})$ $\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \Omega = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v})$ → vitesse de rotation Ω</p>	écoulement incompressible $\vec{v}_{rot} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$ facteur de circulation
$\vec{v} = \beta \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$		écoulement de cisailage si β est constante

Débits

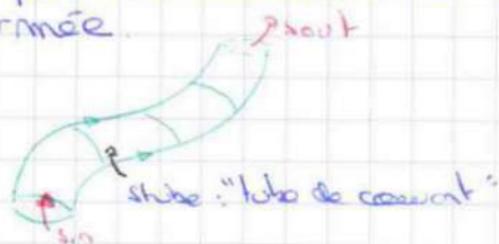
Débit massique: $Q_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$

Débit volumique: $Q_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Ecoulement stationnaire:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \forall S \text{ fermée} \quad \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

→ pas d'accumulation de masse dans la surface fermée.



$$\iint_{\text{surface}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 = Q_m^{\text{out}} - Q_m^{\text{in}}$$

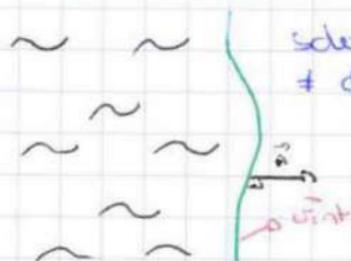
$$\Rightarrow Q_m^{\text{out}} = Q_m^{\text{in}}$$

conservation des débits massiques en stationnaire

Ecoulement incompressible

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow Q_v^{\text{out}} = Q_v^{\text{in}} \quad \text{conservation des débits volumiques en incompressible}$$

Continuité à une interface



séparé en fluide
≠ des propriétés

$$\frac{\vec{v}^{\text{fluides}}(\vec{x} \in S, t) \cdot \vec{n}}{v^{\text{int}} \cdot \vec{n}}$$

"la vitesse normale des fluides suit celle de l'interface?"

Tout champ $\vec{U}(\vec{x}, t)$ se décompose sous la forme:

$$\vec{U}(\vec{x}, t) = \underbrace{\vec{U}_{\text{div}}}_{\vec{\nabla} \times \vec{U}_{\text{div}} = \vec{0}} + \underbrace{\vec{U}_{\text{rot}}}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{U}_{\text{rot}} = 0} + \underbrace{\vec{U}_{\text{cis}} + \vec{U}_{\text{tr}}}_{\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{U}_{\text{cis}} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U}_{\text{tr}} = 0 \end{array} \right.} \leftarrow \text{ind. de } x$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \vec{\nabla} \cdot \vec{U}_{\text{div}}$$

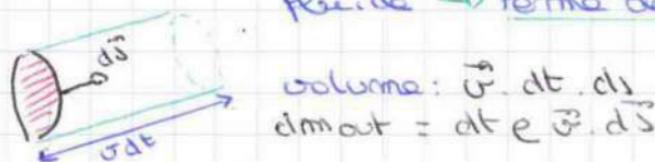
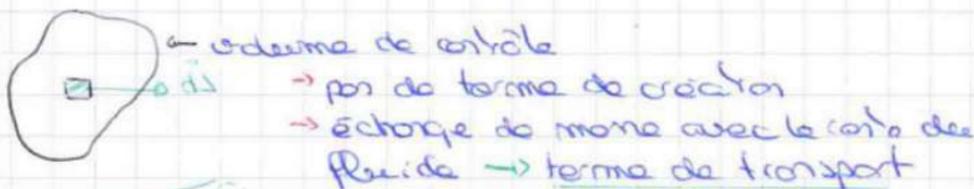
$$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \vec{\nabla} \times \vec{U}_{\text{rot}}$$

de cisaillement est porté uniquement par \vec{U}_{cis}

⚠ écoulement incompressible \neq fluide incompressible

Remarque: $\text{rot}(\vec{U}) = \vec{\nabla} \times \vec{U} = \vec{\omega}$ "vorticité"

Relations de continuité



$$\frac{dm}{dt} = - \oint \rho \vec{U} \cdot d\vec{S}$$

flux \leftarrow densité surfacique de flux au travers de S

Théorème: Flux-Divergence (Ostrogradski)

$$\forall V, \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) d\tau = \iiint_V \partial_t \rho d\tau$$

donc quelque soit V ,

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad \text{conservation de la masse}$$

Ecoule ment parfait

Hypothèses:

- d'effet des contraintes de cisaillement est négligeable
- des effets de diffusion thermique sont négligeables.

Conditions de validité

- le fluide est un fluide parfait i.e., sa viscosité est nulle et sa diffusivité thermique est nulle.
- superfluides (^4He , $T < 2.17\text{K}$; ^3He / BECs, $T < 1\text{mK}$, noyaux des étoiles à neutrons)
- d'écoulement est assez rapide par rapport à $T \cdot \rho$ mais pas trop rapide pour ne pas déclencher des cisaillement (turbulences).

Equation d'Euler

On applique la PFD à une particule fluide

- accélération: $\vec{A} = \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$
- masse de PF: $dm = \rho d\tau$
- forces: $\rightarrow \vec{f}_{int} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = -\nabla P \Rightarrow d\vec{E} = d\tau \vec{f}$
 $\rightarrow \vec{f}_{ext}$

$$\text{PFD: } dm \vec{A} = d\vec{E} + d\vec{F}_{ext}$$

$$d\tau \rho (\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}) = -d\tau \vec{\nabla} P + d\tau \vec{f}_{ext}$$

$$\text{i.e.: } \rho (\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}) = -\vec{\nabla} P + \vec{f}_{ext}$$

$$\triangle \vec{v} = \vec{0} \neq \vec{A} = \vec{0}$$

↑
repos

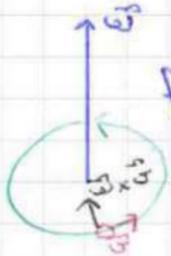
↑
repos

ou écoulement stat.

si $|\vec{f}_{ext}| < |\vec{\nabla} P| \Rightarrow \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P$ (le gradient de pression ont de même direction mais de sens contraire)

ex: effet Garda.

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\substack{\perp \vec{v} \\ \perp \vec{\omega}}} \quad (\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v})$$



fluide attiré vers le centre, cf vortex

Théorème de Bernoulli:

On considère l'écoulement parfait.

Hypothèses

- fluide incompressible $\rho = \text{cste}$
- écoulement stationnaire $\partial_t \vec{v} = \vec{0}$
- traj = ligne de courant.
- fort conservatif: $f_{\text{ext}} = e\vec{g} = -\vec{\nabla}(egz)$

Euler: $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \vec{\omega} \times \vec{v} = -\vec{\nabla}P - \vec{\nabla}(egz)$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \rho v^2}_{\text{ec}} + \underbrace{egz + P}_{\text{ep}} \right) = -\rho \vec{\omega} \times \vec{v}$ ← conservatif de l'énergie tot

On intègre sur une ligne de courant

→ $d\vec{e} \parallel \vec{v}$

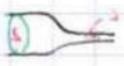
d'où $\int_A^B \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + egz + P \right) d\vec{e} = -\rho \int_A^B (\vec{\omega} \times \vec{v}) d\vec{e}$

$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + egz_A + P_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + egz_B + P_B$

Relation de Bernoulli:

Effet Venturi → Bernoulli avec $z_A = z_B$

$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + P_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + P_B$

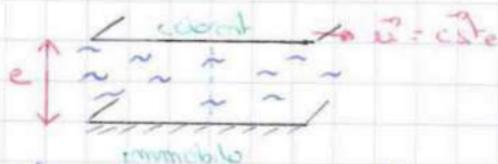


$Q_v = cste \Rightarrow S \times v = S' \times v' \Rightarrow v = \frac{S'}{S} v'$
 → $v \uparrow$ donc $P \downarrow$.

Effet Coanga → Euler

Écoulements visqueux

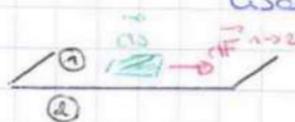
Expérience de "Couette"



obs: le cylindric en contact avec le haut se déplace à \vec{u} . Celui en contact avec la plaque de bas est immobile.

Int: le fluide transmet \vec{p} dans la direction transverse au mouvement.

des phénoménologiques de déviation pour les forces de cisaillement



① exerce sur ② en dS

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial z} dS \vec{e}_x \quad \eta: \text{viscosité dynamique}$$

η est en Pa.s

$1 \text{ PR} = 1 \text{ Pa.s}$

$1 \text{ Po} = 0,1 \text{ Pa.s}$

Loi de déviation = écoulement de Couette

viscosité cinématique $\mu = \frac{\eta}{\rho} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$: unité d'un coefficient de diffusion.

$\eta \rightarrow F$ de cisaillement

$\mu \rightarrow$ "accélération"

des PF en contact avec une interface se déplacent à la même vitesse que l'interface.

$$\vec{v}(\vec{r} \in S, t) = \vec{v}_p(t) \quad \text{condition km. le visqueux}$$

Equations de Navier-Stokes

On applique le AFD sur une PF:

Forces:

- \vec{f}_{ext}
- $\vec{f}_1 = -\vec{\nabla} p$

- $\vec{f}_2 = ?$

Pour les fluides newtoniens et pour fluides / cisaillement incompressibles

$$\vec{f}_2 = \eta \nabla^2 \vec{v} \quad \text{cisaillement newtonien}$$

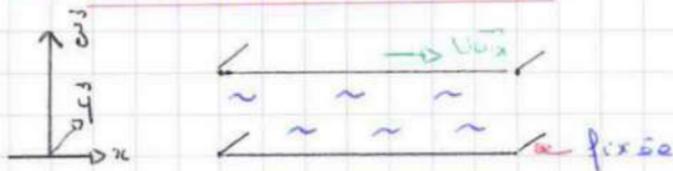
PFD

$$\rho(\partial_t \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}) = -\nabla P \cdot \text{font} + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

Equation de Navier - Stokes

Ecoulement des liquides

a. Ecoulement de Couette



Hypothèses

- fluide newtonien, incompressible
- l'écoulement est stationnaire, invariant par translation selon y et parallèle selon Ox

écoulement stationnaire $\partial_t \vec{v} = \vec{0}$

// invar $\partial_y \vec{v} = \vec{0}$

// parallèle $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$

\rightarrow cons. masse (incompl) $\nabla \cdot \vec{v} = 0 = \partial_x v_x \Rightarrow v_x(z)$

seulement.

\Rightarrow "advection" $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left(v_x \middle| \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \right) = v_x \partial_x$

$\Rightarrow (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_x \partial_x \vec{v} = \vec{0}$

NS: $\vec{0} = -\nabla P - \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}$

En composantes x, y, z:

$$\begin{cases} 0 = -\partial_x P + \eta \partial_{zz}^2 v_x & (1) \\ 0 = -\partial_y P & (2) \\ 0 = -\partial_z P - \rho g & (3) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow P$ ind. de $y \Rightarrow P(x, z)$

(3) $\Rightarrow \partial_z P = -\rho g \Rightarrow P(x, z) = P_0(x) - \rho g z$

(1) $\eta \partial_{zz}^2 v_x(z) = \partial_x P = \partial_x P_0(x)$

fin de $z \rightarrow$ var. indep \leftarrow fin de x
 \downarrow \downarrow
 après mixation

$\rightarrow \partial x$ $P_0 = \text{cst} \rightarrow$ hyp. suppl. (def. Coue. Ho) $\partial P = 0$
 $\Rightarrow P(z) = P_0 - \rho g z$ cf HS

$$\frac{d^2 \sigma_x}{dz^2} = 0 \rightarrow \sigma_x = a z + b \text{ alors } \ll \begin{cases} \sigma_x(z=0) = 0 = b \\ \sigma_x(z=e) = U = a e \end{cases}$$

$$\sigma_x(z) = \frac{U}{e} z$$

Écoulement de cisaillement

d'écarteur: $d\vec{F}^{\text{flu} \rightarrow \text{bas}} = \eta \left. \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} \right|_{z=0} ds \vec{e}_x = \eta \frac{U}{e} ds \vec{e}_x$

Au total sur S : $\vec{F}^{\text{flu} \rightarrow \text{bas}} = \eta \frac{US}{e} \vec{e}_x$ ← obs avec exp.

De même: $d\vec{F}^{\text{flu} \rightarrow \text{haut}} = -\eta \left. \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} \right|_{z=e} ds \vec{e}_x$

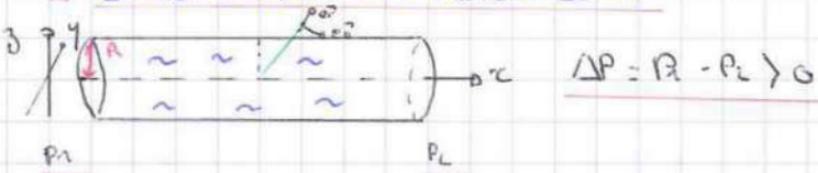
$$\vec{F}^{\text{flu} \rightarrow \text{haut}} = -\eta \frac{US}{e} \vec{e}_x$$

$\vec{F}^{\text{flu} \rightarrow \text{haut}} = \vec{F}^{\text{flu} \rightarrow \text{bas}}$ $U \vec{e}_x = -\frac{\eta U^2 S}{e} \vec{e}_x < 0$ transf. de chaleur

Remarque:

- i) le fluide dissipe de l'énergie par viscosité
- ii) viscosimétrie de Couette.

b. Écoulement de Poiseuille



hypothèses:

- on considère le fluide newtonien et incompressible
- écoulement stationnaire $\partial \vec{v} = 0$
- écoulement invariant par rotation autour de Ox
- d'écoulement est parallèle $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = 0 = \partial_x \sigma_x \Rightarrow \sigma_x(r) \text{ ind. de } x, \theta, t$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\sigma} = \vec{0}$$

NS: $\vec{0} = -\vec{\nabla} P + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{\sigma}$ on néglige le poids
 selon \vec{e}_x : $0 = -\partial_x P + \eta \nabla^2 \sigma_x(r)$

Or ici: $\nabla^2 \sigma_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \sigma_x}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \partial_x P$

En projetant sur y, z

$$\begin{cases} 0 = \partial_y P \\ 0 = \partial_z P \end{cases} \Rightarrow P(x) \text{ seulement}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x P = \frac{P_2 - P_1}{L} = -\frac{\Delta P}{L} = c_s^2 e \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\sigma_x}{dr} \right) = -\frac{\Delta P}{\eta L} r \end{cases}$$

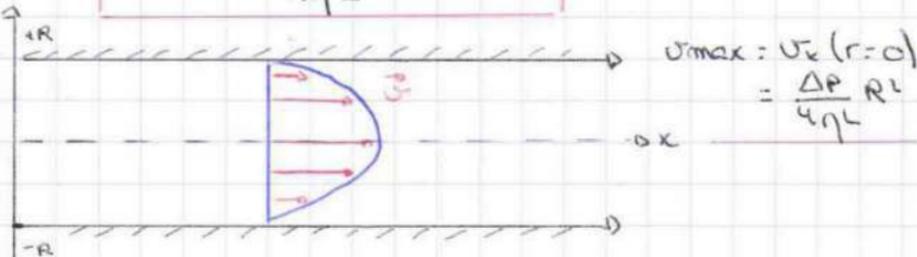
$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\sigma_x}{dr} \right) = -\frac{\Delta P}{\eta L} r \Rightarrow r \frac{d\sigma_x}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r^2 + A = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_x(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 + B$$

des conditions limites usquennes donnent:

$$\sigma_x(r=R) = 0 = -\frac{\Delta P}{4\eta L} R^2 + B$$

i.e. $\sigma_x(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$



Débit volumique $Q_v = \iiint_S \vec{\sigma} \cdot d\vec{S}$ \leftarrow conservation du débit volumique

écoulement stationnaire \rightarrow débit conservé même en présence de viscosité. (σ_x indep de x + écoulement incomp.)

$$Q_v = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \sigma_x(r) = \frac{2\pi}{4\eta L} \Delta P \int_0^R r (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi \Delta P}{8\eta L} R^4$$

Remar que: $\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q_v$

R hydrauliques
on a $\Delta U = RI$ \leftarrow toutes les lois s'appliquent

Aspect énergétique: puissance des forces visqueuses

$$P_{\text{visq}} = \vec{f}_{\text{visq}} \cdot \vec{v} = \eta \vec{\sigma} \cdot \nabla \vec{v} = \underbrace{\vec{\sigma}}_{\text{visc}} \cdot \underbrace{\nabla \vec{v}}_{\text{dissipation visqueuse}} = -\frac{\Delta P}{L} v_x \leq 0$$

Δ Puissance volumique

Puissance totale sur la conduite:

$$P_{\text{visq}} = \iiint_{\text{conduite}} P_{\text{visq}} d\tau = \int_0^L dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R -\frac{\Delta P}{L} v_x r dr$$

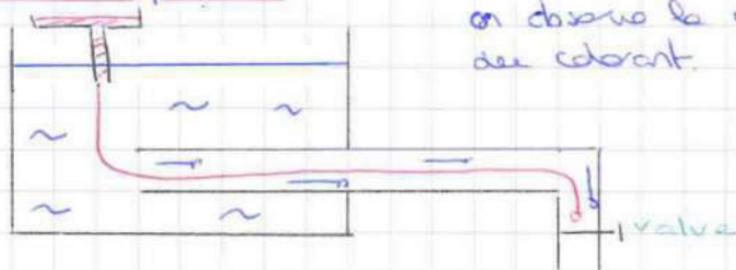
$$= -\Delta P \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^R v_x r dr}_{Q_v} = -\Delta P Q_v \quad \text{Effet Joule}$$

Δ Passer en écoulement visqueux, Bernoulli:
ont fautes \Rightarrow la charge n'est pas conservée.
on peut avoir une relation générale:

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho g z_0 + P_0 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_1 - \rho v_1 v_2 + \frac{P_{\text{lost}}}{Q_v}$$

Régimes d'écoulement

Osborne Reynolds (1883)



on observe le comportement des colorant.

"à faible vitesse"

écoulement en ligne droite
on "voit" /
lignes "parallèles" \Rightarrow "laminaire"

en ce qui concerne ν



"Turbillons"

pour ν assez grand



écoulement instable
turbillonnant et chaotique \Rightarrow "turbulent"

nombre de Reynolds : $Re = \frac{UL}{\nu}$

équation - Stokes adim.

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{ext} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}$$

à ces limites :

$\bullet Re \ll 1 : \frac{UL}{\nu} \ll 1 \rightarrow \vec{f}_{visc}$ joue un rôle important
 $\rightarrow Re = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{\rho U^2 L}{\eta U} \sim \frac{\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}{\eta \nabla^2 \vec{v}} \ll 1 \Leftrightarrow |\eta \nabla^2 \vec{v}| \gg |\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}|$

\Rightarrow écoulement "laminaire"

$\bullet Re \gg 1 : |\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}| \gg |\eta \nabla^2 \vec{v}| \rightarrow$ inertie des PF domine. Ce qui correspond à un écoulement **turbulent**.

NS : $\rho (\nabla_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}) \approx -\nabla p + \vec{f}_{ext} \approx Euler$

i) CL visqueuses restent valables qq soit Re.

zone où $|\vec{v}| \rightarrow 0$ \Rightarrow totalement $|\eta \nabla^2 \vec{v}| \gg |\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}|$
condition limite visqueuse $\delta \sim L Re^{-1/2}$

Assez loin des parois, $Re \gg 1$, écoulement parfait. $\nu \ll$ grand

ii) même loin des parois $|\eta \nabla^2 \vec{v}| \sim \frac{\eta U}{L^2}$ toujours important aux petites échelles.