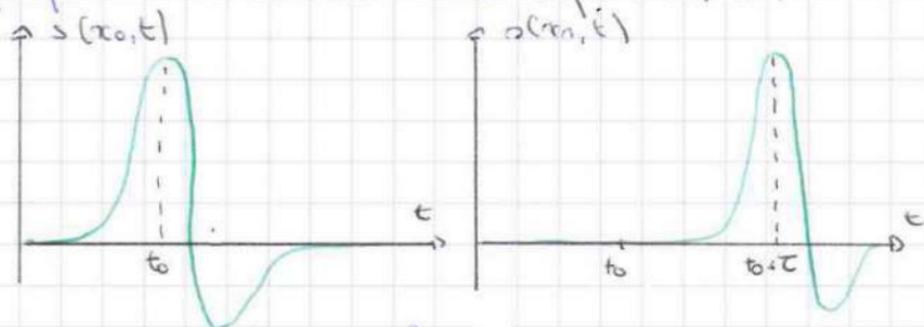


# Ondes

Onde: phénomène physique dans lequel une perturbation physique se propage de proche en proche sans qu'il y ait de déplacement global de matière

## Ondes progressives

Observation d'une onde à 1d  $s(x,t)$  se propageant à une vitesse  $c$  selon les  $x$  pos. H.S. On suppose le milieu infini pour qu'il n'y ait pas de réflexion. On suppose que l'onde se propage sans atténuation ni déformation.



d'onde arrive à la position 1 avec un retard

$$\tau = \frac{x_1 - x_0}{c}$$

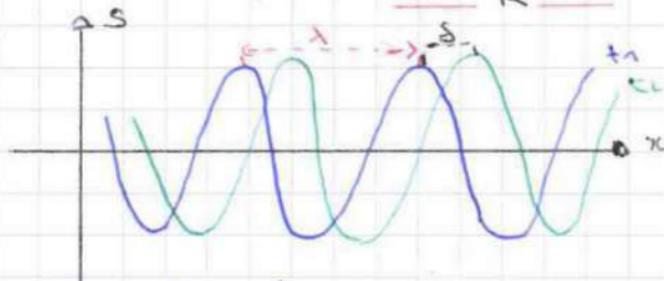
$$s(x_1, x_0, t) = s(x_0, t - \frac{x_1 - x_0}{c})$$

## Ondes planes progressives monochromatiques

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega(t - \frac{x}{c}) + \phi_0) = s_0 \cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

→ double périodicité en temps et en espace  
pulsation  $\omega$ , et période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$   
pulsation spatiale  $k$  et longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

Relation de dispersion:  $\omega = cR$   
 vitesses de phase:  $v_{\phi} = \frac{\omega}{R} = c$



$\delta = c(t_2 - t_1)$   
décalage

lien avec la vitesse de phase:

$\phi(x, t) = \omega t - kx + \phi_0$        $d\phi = 0 = \omega dt - k dx$   
 $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_{\phi}$

on change  $c$  en  $-c$      $k' = -\omega/c = -k$

$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \phi_0) = s_0 \cos(\omega t + kx + \phi_0')$

de la relation de dispersion la plus générale ont:

$\omega^2 = c^2 k^2$        $R = \pm \omega/c$

d'équation d'onde: équation la plus simple, linéaire décrivant la propagation d'une onde 1D

$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - \epsilon kx)$      $\epsilon = \pm 1$

$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s(x, t)$        $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2 s(x, t)$

$s(x, t)$  vérifie l'équation de d'Alembert 1D

$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

→ d'équation d'onde est linéaire, toute fonction de la forme  $s(x, t) = f(x-ct) + g(x+ct)$  on est une solution possible.

→ la solution dépend des CI et des CC

⇒ la vitesse de phase est indep de la pulsation, l'onde est **non-dispersive**

Equation d'Alembert 3D

$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$        $\Delta s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

Solution sous forme d'OPM:

$$s(\vec{r}, t) = s_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$s(\vec{r}, t) = s_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \quad \omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2$$

surfaces équiphasse: plans  $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{cte}$

Solution sous forme d'onde sphérique isotrope

$$s(\vec{r}, t) = s(r, t)$$

$$\Delta s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

solution de  $s$ .

Onde sphérique monochromatique:

$$s(r, t) = \frac{A}{r} \exp(i(kr - \omega t))$$

surfaces équiphasse: sphères centrées sur 0.

Lien avec les ondes stationnaires

Toutes les solutions ne se propagent pas.

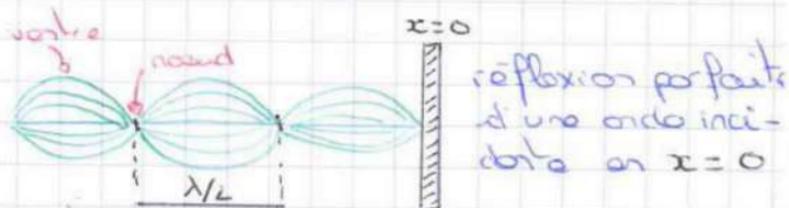
ex: superposition de deux OPM à 1D, de même amplitude, en opposition de phase et ne se propagent en sens contraire.

$$s(x, t) = s_0 \exp(i(\omega t - kx)) - s_0 \exp(i(\omega t + kx))$$

$$s(x, t) = -2i s_0 \exp(i\omega t) \sin(kx)$$

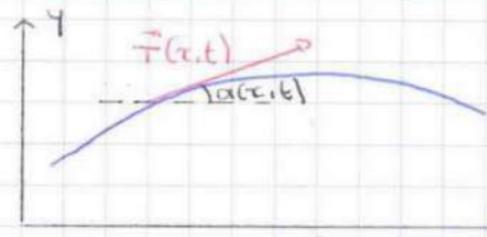
Dans l'espace physique, l'onde a pour expression:

$$s(x, t) = 2s_0 \sin(\omega t) \sin(kx) = f(t)g(x)$$



→ les ondes stationnaires apparaissent en présence de conditions aux limites.

## Ondes transversales le long d'une corde tendue



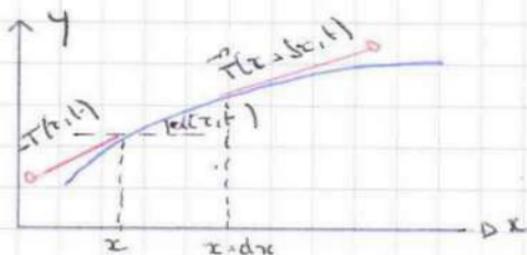
on considère les ondes  
ne propageant le long  
d'une corde sans raideur  
la corde est horizontale  
aux repos.

On donne sa masse linéique  $\mu$  et sa tension aux repos  $T_0$

On suppose que le déplacement  $y(x,t)$  est petit  
devant la longueur de la corde.

$$|\alpha(x,t)| \ll 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = |\tan \alpha| \ll 1$$

On applique le PFD à une section de corde  
comprise entre  $x$  et  $x + \delta x$



$$dl = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \\ = \delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx \delta x$$

d'accélération est  $\vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y$

le PFD appliqué au bout de corde donne :

$$\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = -\vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+\delta x,t) \quad \delta m = \mu \delta x$$

$$\vec{T} = T \cos \alpha \vec{e}_x + T \sin \alpha \vec{e}_y \\ \approx T_0 \vec{e}_x + T_0 \alpha \vec{e}_y$$

On projette selon  $\vec{e}_x$  :  $0 = T(x+\delta x) - T(x)$   
donc  $T(x) = T_0$

On projette selon  $\vec{e}_y$  :

$$\delta x \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x,t) \alpha(x,t) + T(x+\delta x,t) \alpha(x+\delta x,t) \\ = -T_0 \alpha(x,t) + T_0 \alpha(x+\delta x,t)$$

des var (raisons étant petites)

$$\alpha(x + \delta x, t) \approx \alpha(x, t) + \delta x \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

On obtient une première équation concernant l'angle et la position verticale:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

on introduit la vitesse verticale

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} \quad \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

on obtient une seconde équation à partir de la définition de l'angle  $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$

que l'on peut re-écrire:  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$

On obtient alors:

$$\mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

de position verticale vérifie:

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = 0$$

de célérité des ondes est

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

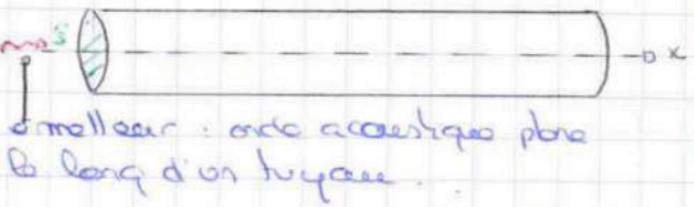
de vitesse verticale  $v_y$  et la tension verticale  $T_y \approx T_0 \alpha$  vérifient:

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

deux produits  $\Pi = v_y T_y$  est homogène à une puissance.

Propagation des ondes sonores dans un fluide au repos



$$\begin{aligned}
 &P = P_0 + p \\
 &|p| \ll P_0 \\
 &e = e_0 + e' \\
 &|e'| \ll e_0
 \end{aligned}$$

Pour un fluide, c'est la masse de la particule de fluide qui est conservée

$\delta m = \rho \delta V$

- Bilan des forces :
- Force de pression :  $\delta F_p = -\text{grad} P \delta V$
  - Force de gravité :  $\delta F_g = \rho \vec{g} \delta V$

Si on utilise le principe fondamental de la dynamique :

$$\rho m \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\text{grad} P \delta V + \rho \vec{g} \delta V$$

$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\text{grad} P + \rho \vec{g}$  équation d'Euler

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \text{grad}) \vec{U}$$

*accélération convective*

$p$  est un infiniment petit d'ordre 1

Si on projette l'équation d'Euler sur  $x$

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

point devant  $\frac{\partial u_x}{\partial t}$

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho' \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

*$\rho' \ll \rho_0$*

conditions	
$u_x = u_0 \cos(kx - \omega t)$	
$\omega u_0 \gg u_0^2 k$	
$u_0 \ll \frac{c}{k}$	

$\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$   $\rightarrow$  on fait toujours ces approximations.

Soit  $P'$  : équation de conservation de la masse :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

En projetant sur  $x$  :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = 0$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v_x + \rho' v_x) = 0$$

$|\rho' v_x| \ll |\rho_0 v_x|$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Soit en fluide de viscosité :  $U = U(N, V, S)$

$$e = e(P, S) \quad de = \left. \frac{\partial e}{\partial P} \right|_S dP + \left. \frac{\partial e}{\partial S} \right|_P dS$$

$\left. \frac{\partial e}{\partial P} \right|_S = \chi_s$        $\left. \frac{\partial e}{\partial S} \right|_P = \frac{1}{T}$  (soit  $\frac{1}{T}$ )

$\Rightarrow de' = \rho_0 \chi_s dP$  à partir de cela, on peut écrire :  $de' = \frac{\partial e'}{\partial t} dt \Rightarrow dP = \frac{\partial e'}{\partial x} dx$

donc :  $\frac{\partial e'}{\partial t} \Big|_x = \rho_0 \chi_s \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_x$

$$\frac{\partial e'}{\partial t} = \rho_0 \chi_s \frac{\partial P}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \chi_s \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

On peut retrouver à partir de cela l'équation de d'Alembert :

$$\chi_s \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{a^2} = \rho_0 \chi_s \quad \text{soit} \quad a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$$

Si le fluide est un gaz parfait : de mono molaire  $M$  et de constante  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

Pour une évolution isentropique :  $PV^\gamma = \text{cste}$

$$d(PV^\gamma) = 0$$

$$d(\ln(PV^\gamma)) = d(\ln P + \gamma \ln V) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = \frac{dP}{P} - \gamma \frac{de}{e} = 0$$

$$\Rightarrow de = \frac{e}{\gamma P} dP \quad \text{à } S = \text{cste.}$$

donc:  $\gamma = \frac{1}{\chi_s \rho}$  comme  $P = e \frac{RT}{M}$

$$\chi_s = \frac{M}{\rho RT} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{\rho RT}{M}}$$

Bilan d'énergie:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x = 0 \quad \leftarrow \text{pas de perte}$$

$$\begin{cases} \chi_s \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} & (1) \\ \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} & (2) \end{cases}$$

Méthode 1

$$(2) \times v_x: v_x \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho_0 v_x^2 \right) = -v_x \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(1) \times p: p \times \chi_s \times \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \chi_s p^2 \right) = -p \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$(1)+(2): \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho_0 v_x^2 + \frac{1}{2} \chi_s p^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (p v_x) = 0$$

$\uparrow$   $\rho_c$                        $\uparrow$   $\rho_p$                        $\uparrow$  densité surfacique de puissance

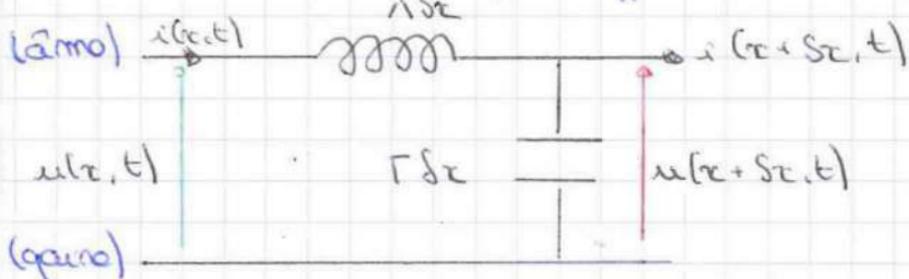
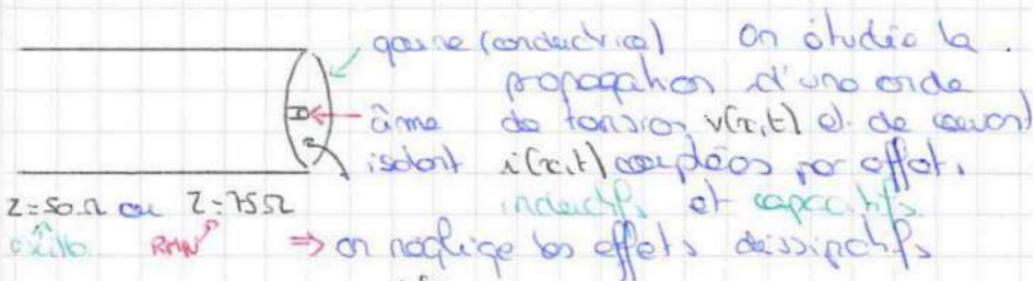
Méthode 2

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} \times v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} v_x \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \times \frac{1}{2} v_x^2 \right) = - \left( \frac{\partial p v_x}{\partial x} - \frac{p \partial v_x}{\partial x} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \times \frac{1}{2} v_x^2 \right) = - \left( \frac{\partial p v_x}{\partial x} + \chi_s \frac{p \partial p}{\partial x} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \times \frac{1}{2} v_x^2 + \chi_s \times \frac{1}{2} p^2 \right) + \frac{\partial p v_x}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

propagation d'ondes élect. dans la longueur d'un câble coaxial

le câble est modélisé comme une succession de cellules élémentaires de longueur  $\delta x$ , se comportent comme une succession de circuits LC série, ayant à la fois une inductance et une capacité proportionnelle à la longueur de la cellule

$C(\delta x) = \Gamma \delta x$        $L(\delta x) = \Lambda \delta x$



la loi aux mailles impose

$v(x, t) = L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + v(x + \delta x, t)$

de tension évaluée entre l'entrée et la sortie de la cellule

$v(x + \delta x, t) \approx v(x, t) + \delta x \frac{\partial v}{\partial x}$   
 $\rightarrow \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

la loi des nœuds impose

$i(x, t) = i(x + \delta x, t) + C \frac{\partial v(x + \delta x, t)}{\partial t}$

d'intensité  $i$  si  $\bar{\epsilon}$  et la tension  $u$  évoluent par rapport à l'entrée et la sortie de la cellule

$$i(x+\delta x, t) \approx i(x, t) + \delta x \frac{\partial i}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{C \partial u(x+\delta x, t)}{\partial t} \approx \Gamma \delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Gamma \delta x^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

des termes d'ordre 2 sont négligeables devant les termes d'ordre 1, la loi des nœuds donne donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}$$

de tension et d'intensité vérifient donc l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$c = 1/\sqrt{\Lambda \Gamma} \approx 2,6 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

( $\bar{\epsilon} \approx 100 \text{ pF/m}$ ,  $\Lambda \approx 15 \text{ pA/m}^2$ )  
→ donc bq cellule.

Bilan d'énergie :  $u$  et  $i$  vérifient le bilan d'énergie

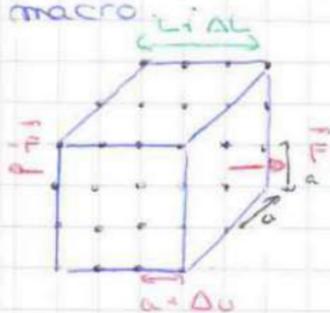
$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \Lambda i^2 + \frac{1}{2} \Gamma u^2 \right) + \frac{\partial u i}{\partial x} = 0$$

## Onde acoustique dans un solide

Module d'Young

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$

La disposition des atomes dans un solide peut être modélisée par des points matériels reliés par des ressorts. La raideur  $R$  des ressorts modélisant l'interaction entre deux atomes voisins est reliée aux propriétés élastiques du solide, caractérisées par le module d'Young. Echelle macro.



d'allongement  $\Delta u$  des ressorts est:

$$\Delta u = \frac{\Delta L}{N}$$

Puisque  $L = Na$  alors  $\frac{\Delta u}{a} = \frac{\Delta L}{L}$

La force usée par un atome de la surface à droite ou à gauche est:

$$f = k \Delta u$$

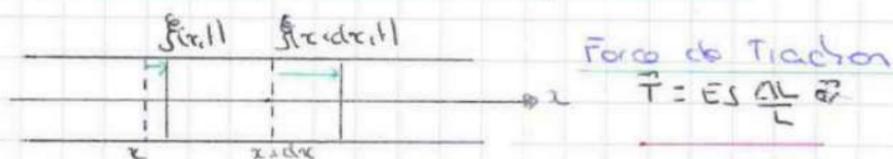
Or il y a  $n = \frac{S}{a^2}$  atomes sur ces surfaces donc en déduisant  $f = \frac{F}{n} = \frac{a^2 F}{S}$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{f}{ka} = \frac{a F}{R S} \quad \text{d'où} \quad E = \frac{R}{a}$$

$$W = \frac{1}{2} k a^3 = \frac{1}{2} E a^3 \leftarrow \text{estimation de l'énergie}$$

d'Young d'un solide.

ondes de réformations longitudinales



de façon que ce trouve au repos entre les plans d'abscisses  $x$  et  $x+dx$  sont allongés de  $\xi(x+dx, t) - \xi(x, t)$  en présence de la déformation donc l'allongement relatif est :

$$\frac{\xi(x+dx, t) - \xi(x, t)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)$$

$$\vec{T}(x, t) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \vec{e}_x \quad \text{d'après la loi de Hooke}$$

$$d \ln \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) = T(x+dx, t) - T(x, t)$$

Soit au premier ordre on dx et après simplification par dx

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\rho_0}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

## ondes électromagnétiques

de champ électromagnétique vér. f. a les équations de Maxwell que consistent naturellement  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

On étudie une propagation dans le vide (pas de charges ni de courant)

On calcule le rotationnel de l'équation (1) car le ~~rot~~ rotationnel est lié à la dérivation

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (\text{div} \vec{E} = 0)$$

$$\text{On a alors: } \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\vec{\text{rot}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B}$$

$$\text{Qui donne: } \boxed{\Delta \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$\vec{B}$  vér. f. a aussi l'équation de d'Alembert. La célérité est la même que la lumière.

## Réflexions et transmission des ondes

des ondes à l'équation satisfait à l'équation de d'Alembert qui admet des ondes progressives comme solutions

$$f_+(x-ct)$$

$$g_-(x+ct)$$

des différents on ont fait apparaître des variables complexes par des équations d'ordre 1.

Exemple: câble coaxial  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$   $\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}$   $\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}$

Ces relations imposent que les variables complexes évaluent sont proportionnelles dans le cas d'une onde progressive

$$\hat{i} = i(x-ct) \Rightarrow u(x,t) = c\Lambda i(x-ct)$$

$$\hat{i} = i(x+ct) \Rightarrow u(x,t) = -c\Lambda i(x+ct)$$

$$\underline{Z = \pm c\Lambda}$$

d'impédance joue un grand rôle dans les problèmes de réflexion et transmission. On la définit comme le rapport de la variable qui correspond à une adp divisée par celle qui correspond à un debit.

! d'impédance dépend des caractéristiques des milieux. On s'intéresse aux variables complexes

## Réflexion - transmission en incidence normale

On s'intéresse à la propagation d'une onde plane se propageant vers les  $x > 0$  dans un tuyau de section constante  $S$ .

Dans un milieu infini, en l'absence d'obstacle, elle peut se propager seule

$$\underline{p_{inc} = \underline{p}_i \exp i(kx - \omega t)}$$

$\xrightarrow{p_{inc}}$ $Z_1 = \rho_1 c_1$	$Z_2 = \rho_2 c_2$
$p_{inc} = Z_1 \underline{u}_{inc}$	$x = 0$

En  $x=0$ , les conditions aux limites imposent la continuité de la pression et du débit

$$\left. \begin{aligned} p(x=0^-, t) &= p(x=0^+, t) \\ s \cdot u(x=0^-, t) &= s \cdot u(x=0^+, t) \end{aligned} \right\} \text{on néglige l'inertie de la masse.}$$

Une onde incidente seule ne peut vér. p. or ces conditions aux limites si  $Z_1 \neq Z_2$ .

Une onde réfléchie et une onde transmise vont être générées à l'interface.

de processus physique est linéaire, onde transmise et onde réfléchie ont même fréquence que l'onde incidente

• l'onde dans le milieu 1 s'écrit :

$$\begin{aligned} p_1(x,t) &= p_i \exp i(kx - \omega t) + p_r \exp(-i(kx + \omega t)) \\ \underline{u}_1(x,t) &= \underline{u}_i \exp i(kx - \omega t) + \underline{u}_r \exp(-i(kx + \omega t)) \end{aligned}$$

• si le milieu 2 est infini, l'onde 2 s'écrit :

$$p_2(x,t) = p_t \exp i(kx - \omega t) \quad \underline{u}_2(x,t) = \underline{u}_t \exp i(kx - \omega t)$$

des coefficients de réflexion et transmission

$$\underline{r}_u = \frac{\underline{u}_r}{\underline{u}_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad \underline{t}_u = \frac{\underline{u}_t}{\underline{u}_i} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$\underline{r}_p = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad \underline{t}_p = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

Démonstration :

Conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{aligned} p_1(0,t) &= p_2(0,t) & \Rightarrow p_i e^{-i\omega t} + p_r e^{i\omega t} &= p_t e^{-i\omega t} \\ \underline{u}_1(0,t) &= \underline{u}_2(0,t) & \Rightarrow \underline{u}_i + \underline{u}_r &= \underline{u}_t \quad (1) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} p_i &= Z_1 \underline{u}_i \\ p_r &= -Z_1 \underline{u}_r \\ p_t &= Z_2 \underline{u}_t \end{aligned} \quad \underline{Z_1 \underline{u}_i - Z_1 \underline{u}_r = Z_2 \underline{u}_t} \quad (2)$$

## Ondes stationnaires et modes

dorsque l'on s'impose des conditions aux limites (extrémités des masses), les ondes peuvent résonner pour un ensemble discret de fréquences. On les appelle modes.

Ces modes se présentent sous la forme d'ondes stationnaires. On peut les exciter par forçage.

### Résonances et modes de la corde pincée

Ces de la corde de longueur  $l$ :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

$$T_0 = Mg$$

vitesse nulle, conditions aux limites

$$y(x=0, t) = 0$$

$$y(x=l, t) = 0$$

Méthode de séparation: aucune onde ne peut se propager, on cherche une solution sous forme d'une onde stationnaire:

$$y(x, t) = f(t) \times g(x)$$

On doit donc avoir:  $\frac{1}{g(x)} \frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f}{dt^2} = \text{cste.}$

de constante est négative (sinon se diverge). On la pose égale à  $-k^2$ .

$$g''(x) = -k^2 g(x) \rightarrow g(x) \propto \cos(kx + \phi)$$

$$f''(t) = -k^2 c^2 f(t) \rightarrow f(t) \propto \cos(\omega t + \psi)$$

$$\omega = ck$$

des solutions sont de la forme:

$$g(x) = g_0 \cos(kx + \phi) = g_0 \cos(kx) + g_1 \sin(kx)$$

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t + \psi)$$

$$Z_1 (1) + (2)$$

$$Z_2 (1) - (2)$$

$$2Z_1 \underline{v}_i = (Z_1 + Z_2) \underline{v}_t$$

$$(Z_2 - Z_1) \underline{v}_i + (Z_2 + Z_1) \underline{v}_r = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\underline{v}_r}{\underline{v}_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\underline{v}_r}{\underline{v}_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

En général  $r$  et  $t$  sont non nuls et il y a une onde progressive transmise.

Dans la zone 1, il y a superposition d'une onde progressive et d'une onde stationnaire.

→ le coefficient de réflexion n'est nul que si il y a adaptation d'impédance  $Z_1 = Z_2$ . de coefficient de transmission est égal à 1.

Pour savoir quelle quantité d'énergie passe au travers de l'interface, il faut s'intéresser au flux d'énergie:

$$\vec{\Pi}(z,t) = v(z,t) p(z,t) \vec{e}_z$$

Dont on peut calculer la moyenne temporelle:

$$\langle \vec{\Pi}(z,t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{v} \underline{p}^*) \vec{e}_z$$

Flux incident

Flux réfléchi

Flux transmis

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2} Z_1 |\underline{v}_i|^2 \vec{e}_z$$

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{1}{2} Z_1 |\underline{v}_r|^2 \vec{e}_z$$

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{1}{2} Z_2 |\underline{v}_t|^2 \vec{e}_z$$

de conservation de l'énergie se traduit par

$$\langle \vec{\Pi}_t(z,t) \rangle = \langle \vec{\Pi}_i \rangle + \langle \vec{\Pi}_r \rangle = \langle \vec{\Pi}_e \rangle$$

Permet de définir les coefficients de réflexion et transmission en énergie.

$$R = \frac{|\langle \vec{\Pi}_r \rangle|}{|\langle \vec{\Pi}_i \rangle|} = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

$$T = \frac{|\langle \vec{\Pi}_t \rangle|}{|\langle \vec{\Pi}_i \rangle|} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

$$R + T = 1$$

Ici  $g_c = 0$   $g_s \sin(kL) = 0$  et  $x=L$

Si  $g_s$  est non nul, il faut  $kL = n\pi$ ,  $n \geq 1$

$$y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \psi_n)$$

des pulsations sont:  $\omega_n = n\omega_1 = \frac{n\pi c}{L}$

$n=1$  est le fondamental, les autres pulsations sont les harmoniques.

Toute fonction  $y(x,t)$  se décompose sur les modes

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \psi_n)$$

Vibreur aléatoire, nouvelles conditions aux limites:

$$y(x,t) = g(x) f(t) = A \cos(kx + \phi) \cos(\omega t + \psi) \quad \omega = ck$$

$$A \cos(\phi) \cos(\omega t + \psi) = y_0 \cos(\omega t) \rightarrow A \cos(\phi) = y_0, \psi = 0$$

$$A \cos(kL + \phi) \cos(\omega t + \psi) = 0 \rightarrow \cos(kL + \phi) = 0$$

Choix de la phase:

$$kL + \phi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} - kL$$

$$A \sin(kL) = y_0$$

$$y(x,t) = y_0 \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \quad \omega = ck$$

Si on tombe sur une fréquence de résonance, l'amplitude explose. Il existe une solution pour toute pulsation.

dans que la pulsation des vibreur approche les fréquences des modes, on a:

$$\omega \rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad k \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

la forme des modes dépend fortement des conditions aux limites.

## Complètement : paquet d'onde, dispersion

Toute onde se décompose comme une superposition continue d'OPM. On l'appelle paquet d'ondes.

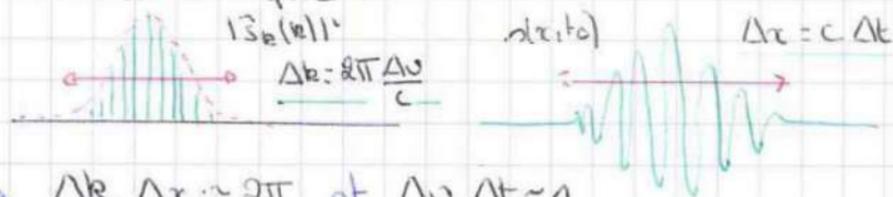
$|\tilde{S}_R(k)|^2$  est le spectre spatial.

$\omega$  et  $k$  sont liés

$$S(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{S}(k,\omega) e^{i(kx - \omega t)}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{S}_\omega(\omega) e^{i(k(\omega)x - \omega t)} \quad \underbrace{|\tilde{S}_\omega(\omega)|^2}_{\text{spectre temporel}}$$

⚠ Une OPM n'est pas réaliste, aucun signal n'est parfaitement délocalisé ou monochromatique.

Plus le contenu fréquentiel est riche, plus le paquet est localisé en espace.



on a  $\Delta k \cdot \Delta x \approx 2\pi$  et  $\Delta \nu \cdot \Delta t \approx 1$ .

On retrouve les notions de durée et de largeur de raie en optique:

$$l_c = c \Delta t = \frac{c}{\Delta \nu} = \frac{\lambda^c}{\Delta \lambda}$$

Chaque fréquence se déplace à la vitesse de phase:

$$\underline{v_\phi = \frac{\omega}{k}}$$

d'enveloppe se déplace à la vitesse de groupe

$$\underline{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

Si la vitesse de groupe est constante, le paquet se déplace sans déformation. d'onde est dite non dispersive.