Incertitudes

ex : Dosage du plomb dans l'eau de la rivière

> La métrologie est ainsi la science qui permet de donner un sens à un chiffre provenant d'une expérience.

Définitions générales

Grandeur : Propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence. La référence peut être une unité de mesure, une procédure de mesure, un matériau de réf.
Valeur : Ensemble d'un nombre et d'une référence constituant l'expression quantitative d'une grandeur.
Mesurage : Processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.
Mesurande : Grandeur que l'on veut mesurer.


mesures fidèles mais inexactes


mesures peu fidèles et inexactes


mesures fidèles et justes

Exactitude : Étroitesse de l'accord entre une valeur mesurée et une valeur vraie d'un mesurande.
Justesse : Étroitesse de l'accord entre la moyenne d'un nombre infini de valeurs mesurées répétées et une valeur de référence.
Fidélité : Étroitesse de l'accord entre les indications ou les valeurs mesurées obtenues par des mesurages répétés du même objet ou d'objets similaires dans des conditions spécifiées.
Condition de répétabilité : condition de mesurage dans un ensemble de conditions caractérisées par la même procédure de mesure, les mêmes opérateurs, le même système de mesure, les mêmes conditions et le même lieu, ainsi que des mesurages répétés sur le même objet ou sur ≃ sur une courte période.
Répétabilité : Fidélité de mesure selon un ensemble de conditions de répétabilité.
Condition de reproductibilité : Condition de mesurage dans un ensemble de conditions caractérisées par des lieux, des opérateurs et des systèmes de mesures ≠ ainsi que des mesurages répétés sur le même objet ou des objets ≃.
Reproductibilité : Fidélité de mesure selon des conditions de reproductibilité.

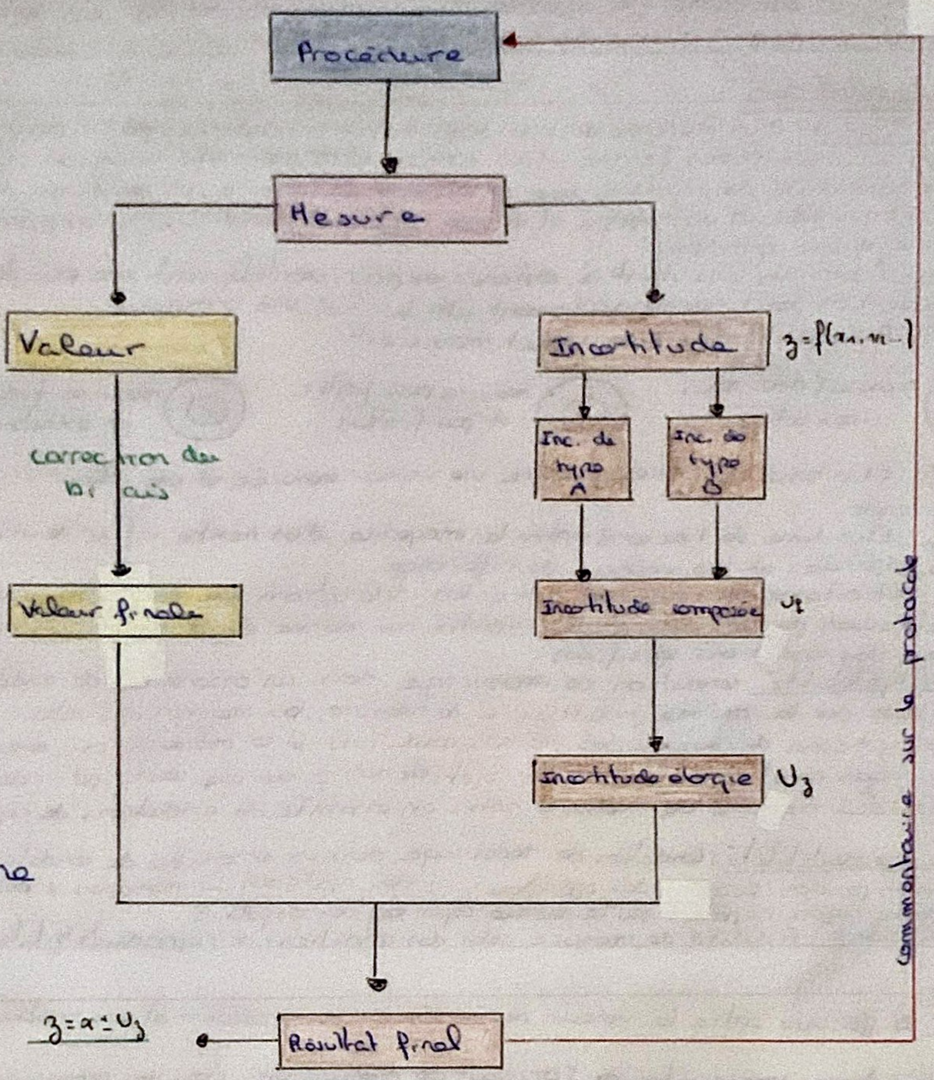
Erreurs

Erreur : Différence entre la valeur mesurée d'une grandeur et une valeur de référence.
Erreur systématique : composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible.
Erreur aléatoire : composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, varie de façon imprévisible.
Biais de mesure, biais, erreur de justesse : Estimation d'une erreur systématique. Connaître l'erreur sous-entend connaître la valeur du vrai mesurande, ce qui n'est possible que pour des objets étalonnés. Il est en général possible d'estimer le biais. Pris en compte direct avec A ou indirectement avec B.

Incertitude

Incertitude : Paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande, à partir des informations utilisées.
Incertitude-type : incertitude de mesure exprimée sous la forme d'un écart-type
→ objet mathématique que manipule
Facteur d'élargissement : nombre supérieur à un par lequel on multiplie une incertitude-type composée pour obtenir une incertitude élargie.
Incertitude élargie : Produit d'une incertitude-type composée et d'un facteur supérieur au nombre un.
Évaluation de type A : Évaluation d'une composante de l'incertitude par une analyse statistique des valeurs mesurées obtenues dans des conditions définies.
Évaluation de type B : Évaluation d'une composante de l'incertitude ≠ qu'avec A.

Schéma général :



⚠ • Toujours donner une incertitude
• Corriger le biais n'améliore pas toujours.

Écart-type relatif : $\alpha = \dfrac{|z - z_0|}{z_0}$ ⚠ de moins en moins utilisé : signification du % ?

z-score : $\alpha = \dfrac{|z - z_0|}{U_z}$ ← est-ce que l'écart est compris dans U_z. Si $\alpha < 3$ OK

Incertitude relative : $U_z' = \dfrac{U_z}{|z|}$ ← Poids de l'incertitude.

Chiffres significatifs

> Le nombre de chiffres significatifs à garder sur la valeur de mesurande est lié à l'incertitude. On ne donne les cs que jusqu'au premier chiffre non nul de l'incertitude.

Théorème de la limite centrale

Le calcul d'incertitude n'est qu'une application de l'analyse statistique, les objets sont des systèmes physiques. Comme ils sont souvent décrits par des distributions de probabilité gaussiennes, les résultats vont découler des propriétés de cette distribution.

> Soit z une grandeur physique aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. Si σ^2 est fini alors la distribution de la valeur moyenne sur un grand nombre n de mesures tend vers une distribution gaussienne avec une moyenne μ et une variance $\frac{\sigma^2}{n}$. i.e. Si une grandeur est influencée par un grand nombre de facteurs indépendants et si l'influence de chacun de ces facteurs est petite alors la distribution est gaussienne.

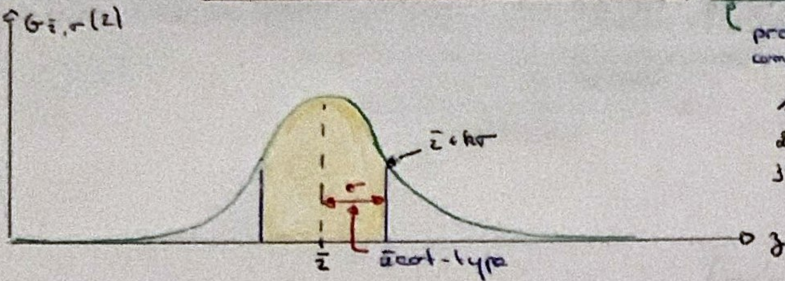
⚠ Bien que la distribution tende vers une gaussienne, la rapidité de la convergence n'est pas connue. C'est pourquoi on utilise d'autres distributions. Ça peut être plus simple de surestimer que d'étudier précisément la distribution.

⚠ Il faut que la variance soit finie sinon le théorème ne s'applique pas.

Distribution :

Gaussienne :

$$G_{\bar{z},\sigma}(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma^2}\right)$$



$$P_{z,\sigma}(k) = \int_{\bar{z}-k\sigma}^{\bar{z}+k\sigma} G_{\bar{z},\sigma}(x)\,dx$$

$P_{z,\sigma}(k)$: probabilité d'avoir une mesure comprise entre $\bar{z}-k\sigma$ et $\bar{z}+k\sigma$

$1\sigma = 68\,\%$
$2\sigma = 95.75\,\%$
$3\sigma = 99,\ldots\,\%$

$$\underset{\text{I-type}}{u} = \frac{\overset{\text{I-élargie}}{U}}{k}$$

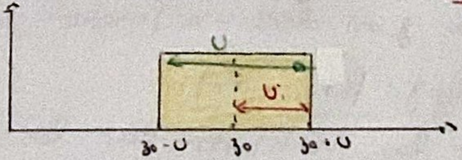
Evaluation d'une incertitude de type B

La plupart du temps, une mesure statistique complète demande une étude trop longue pour pouvoir être menée de A à Z. Il faut alors utiliser les données fournies. Elles peuvent être de différentes natures. Le fabricant donne :

- incertitude-type : $u_{iB} = U_i$
- Il donne l'incertitude sous la forme $\pm U_i$. La loi est supposée rectangulaire avec un niveau de confiance égal à 100 % et on a alors :

⚠ U_i : demi-largeur de la distribution rectangulaire.

$$u_{iB} = \frac{U_i}{\sqrt{3}}$$



ex : pipette jaugée, burette graduée

- Il donne une incertitude sans dire que c'est une incertitude-type. La loi est supposée rectangulaire avec un niveau de confiance égal à 100 % :

⚠ U_i : largeur de la distribution

$$u_{iB} = \frac{U_i}{2\sqrt{3}}$$

ex : résolution d'un instrument, graduation d'un instrument analogique.

- Le fabricant ne fournit pas d'indication mais on connait les valeurs extrêmes mesurables z^+ et z^-. L'incertitude U_i est maximale et vaut $U_i = z^+ - z^-$ et la valeur moyenne est $\bar{z} = \frac{z^+ + z^-}{2}$

• On suppose une distribution rectangulaire :

$$u_{iB} = \frac{U_i}{2\sqrt{3}} \quad \leftarrow \text{cas le plus défavorable}$$

• On suppose la distribution triangulaire

$$u_{iB} = \frac{U_i}{2\sqrt{6}}$$

• On suppose la distribution gaussienne et que l'on a le niveau de confiance $P_{z,\sigma}$ d'avoir une mesure entre $\bar{z} \pm U_i/2$ alors $u_{iB} = \frac{U_i}{k_i}$

Évaluation d'une incertitude de type A

Lorsque c'est possible, avoir une étude statistique plutôt qu'une unique mesure permet de réduire de manière significative l'incertitude. Permet de prendre simultanément en compte des effets qui sont difficiles à estimer.

Pour donner le résultat, il faut :

- La moyenne : $\boxed{\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i}$
- L'écart-type sans biais (standard deviation)

$$\boxed{\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}}$$

⚠ S_x sur les calculettes Texas.

L'incertitude-type à retenir est l'écart-type de la moyenne : $\boxed{u_{\bar{z},A} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}}$

Formule de propagation de l'incertitude

Après avoir obtenu les incertitudes de type A et B, il faut en déduire l'incertitude finale sur la grandeur z mesurée :

$$\boxed{u_z = \sqrt{\sum_i u_{iA}^2 + \sum_i u_{iB}^2}}$$

⚠ Les deux incertitudes sont équivalentes.

⚠ pire hypothèse qu'on peut faire car A contient B.

Cependant, il est courant que z se déduise indirectement à partir d'autres grandeurs mesurées. La grandeur z est alors une fonction de différentes variables considérées indépendantes $x_1, \dots, x_n$.

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$

Il faut alors propager les incertitudes sur les x_i pour obtenir celle sur z. Si les incertitudes-types sur les différentes variables u_i sont connues :

$$\boxed{u_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}u_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_k}u_k\right)^2}}$$

⚠ Vrai parce qu'on a des Gaussiennes (supposé).

Cas particulier d'une addition : $z = \sum_{i=1}^{k} \pm x_i$

L'incertitude-type sur z est égale à : $\boxed{u_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} u_i^2} \ll \sum_{i=1}^{k} |u_i|}$ — ancienne formule, toujours majorant. Les incertitudes s'additionnent toujours de la manière la plus défavorable.

Cas particulier d'un quotient simple $z = \frac{x_1 \times \dots \times x_k}{x_l \times \dots \times x_n}$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = \pm \frac{z}{x_i}$

On peut en déduire que :

$$\boxed{\frac{u_z}{|z|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{u_i}{x_i}\right)^2} \ll \sum_{i=1}^{k}\left|\frac{u_i}{x_i}\right|}$$

⚠ Pour les points aberrants : critère de Chauvenet. Le mieux étant de faire une mesure en plus.

Incertitude élargie :

L'incertitude sur l'incertitude dans le cas d'une évaluation de type A peut-être très importante. Il est donc nécessaire de multiplier l'incertitude-type u par un coefficient k pour avoir une adéquation. Le plus souvent test de Student. k dépend du nombre de degré de liberté.

- mesure directe (A)

$\nu = n - 1$

- Pour incertitude de type B car $\nu = \infty$ ou

$\nu_{eff} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u_B}{u_B}\right)^{-2}$

- mesure indirecte

Welch-Satterthwaite

$\nu_{eff} = \frac{u_z^4}{\sum_i \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}}$

⟹ $U_i = k u_z$ Dans le doute ou sans la connaissance du nombre de degré de liberté, la convention est $k=2$ pour élargir l'incertitude-type

Quelques outils supplémentaires

Corrélations :

Covariance :

Jusqu'à présent, nous avons considéré les sources d'incertitudes non corrélées : indépendantes. Cependant, il peut arriver qu'une grandeur influence simultanément plusieurs sources d'incertitude. Dans ce cas, les formules précédentes donnent des incertitudes inférieures aux incertitudes réelles. La covariance permet de mesurer si plusieurs sources d'incertitude varient en même temps.

$$\boxed{cov(x,y) = \overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}$$

Coefficient de corrélation

La covariance a la dimension du produit xy et peut varier librement, son interprétation directe est donc complexe. C'est pourquoi on introduit le coefficient de corrélation r adimensionné compris entre -1 et 1.

$$\boxed{r = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \times \sigma_y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) \times (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \times \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}}$$

Plus ce coefficient plus on peut dire qu'une variable est affine de l'autre.

Test du χ^2 :

Si on connait la distribution théorique, il peut être intéressant de voir si les points mesurés suivent la distribution théorique. Pour cela il faut avoir un grand nombre de points. Le principe du test est de comparer la distance entre la distribution étudiée et un seuil critique afin de déterminer si on peut dire raisonnablement que la distribution expérimentale est en accord avec la distribution théorique.

Régression linéaire

Pour une série de points $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ le but est de montrer que l'on a la relation :

$$y = A \times x + B$$

Le principe est de minimiser : $\chi^2 = \sum_i (y_i - Ax - B)^2$

En dérivant χ^2 par rapport à A et B et annuler simultanément les deux dérivées pour obtenir les expressions numériques de A et B :

$$B = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad \Delta$$

$$A = \frac{n \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}$$

⇒ régression linéaire par méthode des moindres carrés

Incertitudes : $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-2} \chi^2}$ ← indépendante du point considéré

$\sigma_x \approx \sigma_y / B$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{\Delta}}$$

reliées

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

⚠ Le r^2 n'a pas de signification physique intrinsèque.

! Il peut être intéressant de faire une régression pondérée aux temps courts.

⚠ Régressi propage correctement les incertitudes, pas libre office ou excel.

Point intéressant : Méthode Monte Carlo

(voir feuille)

Verrerie :

Pour la verrerie, les contenants sont généralement divisés en 3 classes :

- La verrerie de classe B qui a une précision faible
- La verrerie de classe A qui a une précision élevée
- La verrerie de classe AS qui a une précision élevée et un temps d'écoulement calibré.

En général, la classe ainsi que l'incertitude (de type B) est inscrite sur la verrerie. Pour la verrerie de classe AS, il est également donné un temps d'attente qui correspond au temps pour que le film de liquide sur la paroi s'écoule lui aussi.