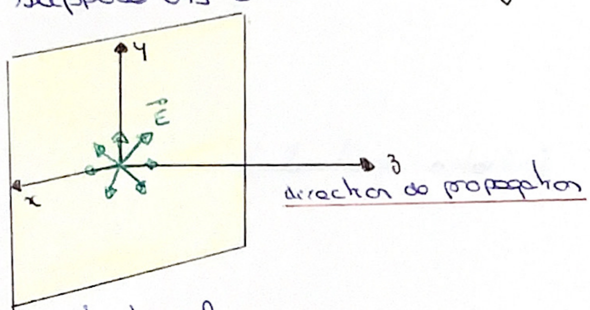
Modèle scalaire de la lumière

1. Le modèle scalaire de la lumière

1.1 Nature de l'onde lumineuse

L'électromagnétisme nous apprend que la lumière est une onde électromagnétique. Une onde E.M se compose de deux champs de vecteurs couplés, le champ $\vec{E}$ et le champ $\vec{B}$, se propageant à $c \simeq 3 \times 10^{8}\ m.s^{-1}$ dans le vide. Dans le cas d'une onde plane, ces vecteurs sont $\perp$ entre eux et à la direction de propagation que nous supposerons être celle de $\vec{u_z}$.



Dans le cas de la lumière naturelle, la direction de $\vec{E}$ change de manière aléatoire au cours du temps ; la durée moyenne entre deux changements est le temps de cohérence τ_c.

→ lumière naturelle est non polarisée

1.2 La vibration lumineuse

On appelle vibration lumineuse une composante quelconque du champ électrique par rapport à un axe perpendiculaire à la direction de propagation.

On la note $s(M,t)$.

1.3 Propriétés de la vibration lumineuse

La vibration lumineuse se propage dans les milieux transparents, le long des rayons lumineux, à la vitesse $v = \frac{c}{n}$ où n est l'indice optique du milieu.

Théorème de superposition :

Si plusieurs vibrations $s_i(M,t)$ se propagent simultanément dans l'espace, chacune se propage comme si elle était seule et la vibration résultante en un point M est :

$$s(M,t) = \sum s_i(M,t)$$

→ découle de la linéarité des équations de Maxwell. Cependant, on doit additionner vectoriellement les champs électriques des ondes. Il faut que les plans dans lesquels évoluent les champs électriques soient proches.

2. Eclairement et intensité vibratoire

⚠ Les récepteurs ne sont sensibles qu'à la valeur moyenne de la puissance lumineuse qu'ils reçoivent.

En électromagnétique, le vecteur de Poynting a pour expression dans le cas d'une onde E.M plane progressive dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$: $\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}$

La puissance lumineuse surfacique est donc proportionnelle au carré de la vibration lumineuse $s(M,t)^2$.

On appelle éclairement $\mathcal{E}$ la puissance lumineuse surfacique moyenne reçue par une surface ; il se calcule par la formule :

$$[W.m^{-2}] \rightarrow \mathcal{E}(M) = K \langle s(M,t)^2 \rangle$$

$\varepsilon_0 c$ mais plus souvent $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$.

3. Lumière monochromatique

L'optique géométrique ne tient pas compte des caractères ondulatoire ni vectoriel de la lumière. Le modèle scalaire conserve la notion de rayon lumineux. Pour une lumière monochromatique, on associe une vibration parfaitement sinusoïdale de la forme :

$$s(M,t) = A(M)\cos(\omega t - \varphi(M))$$ — retard de phase.

$$= A_0\cos(\omega t - kM) = A_0\cos\left(\omega\left(t - \frac{1}{v_\varphi(M)}M\right)\right)$$

— vitesse de phase de l'onde.

En considérant le chemin optique :

$$s(M,t) = A_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{1}{c}\mathcal{L}^{\gamma}_{A\to M}\right)\right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}^{(\gamma)}_{S\to A} = \int_S^A n(s)\,dS$$

amplitude — pulsation constante

→ double périodicité, spatiale et temporelle.

- pour les variations temporelles

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

- pour les variations spatiales

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \text{ (fréquence spatiale)}, \quad k = 2\pi\sigma = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ (pulsation spatiale)}$$

$$\left(\to \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad k = nk_0\right)$$

3.1 Notation complexe

Soit la vibration monochromatique :

$$\underline{s}(M,t) = A(M)\exp(i(\omega t - \varphi(M)))$$

On définit l'amplitude complexe :

$$\underline{a}(M) = A(M)\exp(-i\varphi(M))$$

On retrouve les relations : $s(M,t) = Re(\underline{s}(M,t)) = Re(\underline{a}(M)\exp(i\omega t))$; $A(M) = |\underline{s}(M,t)| = |\underline{a}(M)|$

$$\varphi(M) = -\arg(\underline{a}(M))$$

3.2 Expression de l'éclairement

L'éclairement est :

$$\mathcal{E}(M) = K\langle s(M,t)^2\rangle = \langle A(M)^2\cos^2(\omega t - \varphi(M))\rangle = \frac{1}{2}KA(M)^2$$

L'éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude de vibration

4. Chemin optique

La vibration lumineuse se propage le long des rayons lumineux.

Le chemin optique parcouru par la lumière entre M et N est par définition :

$$(MN) = c\,t_{MN}$$ temps mis pour aller de M à N

Si la lumière passe par P : $(MN) = (MP) + (PN)$

Principe de Fermat : Le trajet suivi par la lumière d'un point A à un point B correspond à une courbe dont le temps de parcours est stationnaire (extremum local) par rapport aux courbes fictives voisines.

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B n(\vec{r})\,ds(\vec{r}) = \int_A^B n(\vec{r}(t))\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|dt = \int_A^B n(\vec{r}(t))\sqrt{\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right)^2}\,dt$$

4.1 Calcul pratique des chemins optiques

a. hypothèses de travail

- Les milieux transparents utilisés dans les expériences (verre, quartz, plexiglas) sont dispersifs, c'est-à-dire que la vitesse de propagation v et l'indice optique n dépendent de la longueur d'onde. On ne considère que des ondes monochromatiques.
- On supposera les milieux traversés homogènes : n est le même en tout point du milieu. La lumière se propage en ligne droite.

Si on considère l'équation eikonale :

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \vec{\nabla}n \qquad \text{on considère le cas où : } \vec{\nabla}n = 0$$

La direction change seulement lorsqu'elle est réfléchie ou réfractée.

- on négligera l'absorption de l'énergie lumineuse par le milieu : l'indice optique n est réel.

b. Cas général

Le chemin optique le long d'un rayon lumineux est égal à la longueur du rayon lumineux multiplié par l'indice du milieu transparent qu'il traverse.

$$(MN) = \sum_i n_i M_i N_i$$

4.3 Relation fondamentale entre le chemin optique et le retard de phase

La vibration lumineuse en N reproduit la vibration en M avec un retard de propagation t_{MN} et une atténuation éventuelle que l'on représente ici par un coefficient α (dépendant de M et N) compris entre 0 et 1 :

$$s(N,t) = \alpha\, s(M, t - t_{MN})$$

$$\Leftrightarrow A(N)\cos(\omega t - \varphi(N)) = \alpha A(M)\cos(\omega(t - t_{MN}) - \varphi(M))$$

On en déduit :

$$\varphi(N) = \varphi(M) + \omega t_{MN} = \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN)$$

Le retard de phase accumulé par la vibration lumineuse croît proportionnellement au chemin optique qu'elle parcourt selon la relation :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN)$$

⚠ Il y a des exceptions :

1. réflexion sur une surface métallique → déphasage de π
2. pareil lorsqu'on subit une réflexion sur un milieu plus réfringent
3. pareil au passage par un point de convergence.

5. Surface d'onde

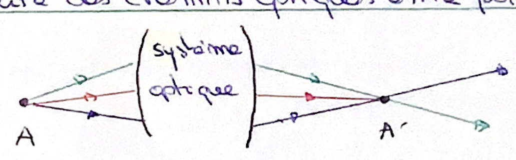
Une surface d'onde relative au point source S est une surface formée des points M tels que (SM) = constante, ou encore, ce qui équivaut $\varphi(M)$ = constante

La vibration a la même valeur en tous les points d'une surface d'onde.

Théorème de Malus

Les surfaces d'ondes relatives au point source S sont orthogonales aux rayons lumineux issus de S.

Égalité des chemins optiques entre points conjugués



Lorsque deux points A et A' sont conjugués par un système optique, le chemin optique (AA') est le même le long de tous les rayons allant de A à A'.

6. Onde sphérique

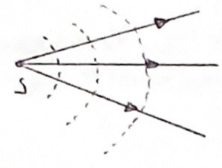
6.1 Définition

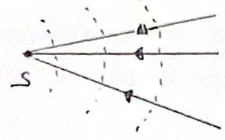
Une onde sphérique est une onde ayant l'une des caractéristiques suivantes :

- les rayons lumineux sont des droites concourantes en un point S
- les surfaces d'ondes sont des sphères centrées sur S.

L'onde émise par une source ponctuelle S située à distance finie est une onde sphérique. Lorsqu'un système optique donne d'une source ponctuelle S une image S', l'onde issue du système optique est une onde sphérique de centre S'. Tout se passe comme s'il y avait une nouvelle source en S'.

L'onde sphérique est dite divergente dans une zone où les rayons lumineux s'éloignent du centre et convergente dans une zone où les rayons se dirigent vers le centre.





6.2 Expression d'une onde sphérique monochromatique ou harmonique

Une onde sphérique divergente de centre S, monochromatique, se propageant au sein d'un milieu homogène d'indice n est de la forme :

$$s(M,t) = \frac{\alpha}{r}\cos(\omega t - kr - \varphi_0)$$

où $r = SM$, α est une constante réelle et φ_0 le retard de phase à la source S. Son retard au point M est :

$$\varphi(M) = \varphi_0 + kr$$

En notation complexe :

$$\underline{s}(M,t) = \frac{\alpha}{r}\exp(i(\omega t - kr - \varphi_0))$$

$$\underline{a}(M) = \frac{\alpha}{r}\exp(-i(\varphi_0 + kr))$$

Remarque :

L'amplitude $A(M) = \frac{\alpha}{r}$ décroît proportionnellement à la distance au centre C.

Par conséquent l'éclairement $\mathcal{E}(M) = \frac{1}{2}KA(M)^2 = \frac{K\alpha^2}{2r^2}$ décroît $\propto \frac{1}{r^2}$. Ceci traduit la conservation de l'énergie lumineuse. En effet, la puissance moyenne traversant une sphère de centre C et de rayon R est :

$$P = \iint_{sphère} \mathcal{E}(M)\,dS = \frac{K\alpha^2}{2R^2} \times 4\pi R^2 = 2\pi K\alpha^2$$

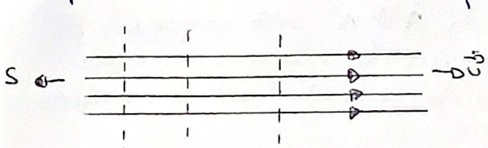
7. Onde plane

7.1 Définition

Une onde plane est une onde ayant l'une des caractéristiques suivantes :

- les rayons lumineux sont des droites parallèles entre elles
- les surfaces d'ondes sont des plans parallèles entre eux appelés plans d'onde

Les plans d'onde sont orthogonaux aux rayons lumineux.



On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire // aux rayons dirigé dans le sens de la propagation.

Dans les situations concrètes, l'onde plane est :

- l'onde d'un faisceau laser dans la zone $|z| < z_R$
- la lumière provenant d'une source très éloignée et quasi-ponctuelle
- l'onde produite par un collimateur c'est-à-dire une source ponctuelle S placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente. $\vec{u} = \frac{\vec{SO}}{f'}$

7.2 Expression

Nous allons exprimer l'onde émise par un point source S situé à l'infini. On supposera que S se trouve à très grande distance r_0 de l'origine O puis on fera tendre r_0 vers l'infini. Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\vec{OS} = -r_0\vec{u}$

$$r^2 = SM^2 = (\vec{SO}+\vec{OM})^2 = (r_0\vec{u}+\vec{OM})^2 = r_0^2 + 2r_0\vec{u}\cdot\vec{OM} + OM^2$$

$$\Rightarrow r = r_0\sqrt{1+2\frac{\vec{u}\cdot\vec{OM}}{r_0}+\frac{OM^2}{r_0^2}} \simeq r_0\left(1+\frac{\vec{u}\cdot\vec{OM}}{r_0}\right) = r_0 + \vec{u}\cdot\vec{OM}$$

L'onde émise par S est une onde sphérique donnée par la formule avant dans laquelle on fait les approximations suivantes :

- pour l'amplitude : $A(M) = \frac{a}{r} \simeq \frac{a}{r_0} = A_0$
- pour la phase : $\varphi(M) = \varphi_0 + kr \simeq \varphi_0 + kr_0 + k\vec{u}\cdot\vec{OM} = \varphi(O) + k\vec{u}\cdot\vec{OM}$

Une onde plane monochromatique se propageant dans la direction $\vec{u}$ au sein d'un milieu d'indice n est de la forme :

$$s(M,t) = A_0\cos(\omega t - \varphi(O) - \vec{k}\cdot\vec{OM})$$

$\vec{k} = k\vec{u}$ vecteur d'onde

A_0 est l'amplitude et $\varphi(O)$ est le retard de phase en un point référence. Le retard au point M est :

$$\varphi(M) = \varphi(O) + \vec{k}\cdot\vec{OM}$$

en notation complexe :

$$\underline{s}(M,t) = A_0\exp\left(i(\omega t - \varphi(O) - \vec{k}\cdot\vec{OM})\right)$$

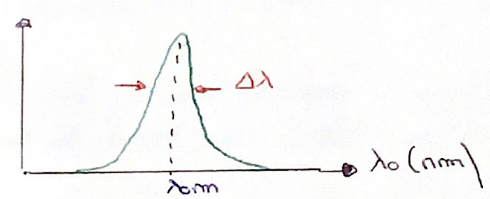
$$\underline{a}(M) = A_0\exp\left(-i(\varphi(O) + \vec{k}\cdot\vec{OM})\right)$$

⚠ On ne peut pas ici appliquer $\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM)$ car (SM) est infini, d'où la référence.

8. Trains d'onde

8.1 Le profil des raies spectrales

On sait mesurer le profil fin des raies spectrales. Les raies ont une allure :



- λ_{0m} correspond au maximum d'émission
- la largeur à mi-hauteur $\Delta\lambda$ qui est telle que $\Delta\lambda \ll \lambda_{0m}$
- la forme de la raie (une sinusoïde parfaite aurait $\Delta\lambda = 0$)

En termes de fréquences, la raie est caractérisée par la fréquence moyenne $\nu_m = \frac{c}{\lambda_{0m}}$ et la largeur $\Delta\nu$. Étant donné que $\Delta\lambda \ll \lambda_{0m}$ et $\Delta\nu \ll \nu_m$ on peut écrire : $\Delta\nu = \Delta\left(\frac{c}{\lambda_0}\right) = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda_{0m}^2} = \nu_m\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{0m}}$

On a donc : $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{0m}} = \frac{\Delta\nu}{\nu_m}$

Les valeurs des largeurs de raies sont très variables, les lasers ayant des raies nettement plus fines que les lampes spectrales. Des grandeurs habituelles sont :

- $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{0m}} \sim 10^{-3}$ pour une lampe et $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{0m}} \sim 10^{-7}$ pour laser.

8.2 Interprétation

La transformée de Fourier nous apprend qu'un signal limité dans le temps et de durée approximative τ_c a un spectre dont la largeur en fréquence est telle que :

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_c}$$

Si ce signal est quasiment sinusoïdal de période T, la fréquence moyenne du spectre est $\nu_m = \frac{1}{T}$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_m} \sim \frac{T}{\tau_c} = \frac{1}{N}$$ avec N le nombre d'oscillations.

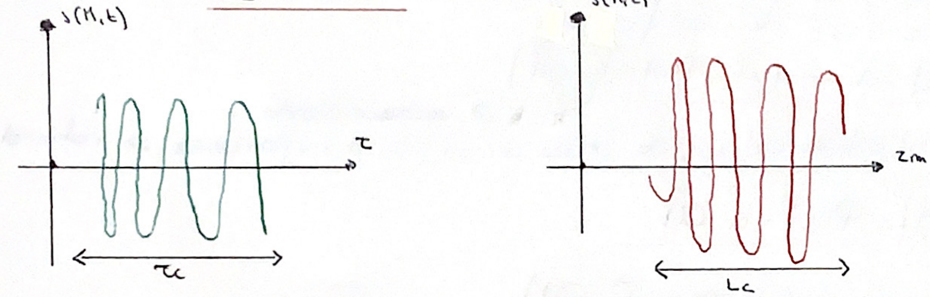
des atomes émettent la lumière par trains d'onde de durée limitée τ_c telle que :

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_c}$$

la durée moyenne des trains d'onde est appelée temps de cohérence.

On définit à partir de cela la longueur de cohérence, distance que parcourt la lumière dans le vide pendant la durée τ_c d'un train d'onde soit :

$$L_c = c\tau_c$$



Ordre de grandeur :

- lumière blanche : $\tau_c = 3.10^{-15}$, $L_c = 0{,}9\ \mu m$
- lampe au mercure : $\tau_c = 10^{-12}$, $L_c = 0{,}3\ mm$
- laser H-Ne stabilisé : $\tau_c = 1{,}3.10^{-6}$, $L_c = 400\ nm$.

8.3 Caractère aléatoire de l'émission lumineuse

Chaque train d'onde a une amplitude et une phase aléatoire.

On modélise la lumière quasimonochromatique d'une raie spectrale de manière simplifiée comme une onde monochromatique :

- d'amplitude A(M) fixe, égale à la moyenne sur un très grand nombre de trains d'onde.
- de retard de phase à la source $\varphi(S)$ aléatoire prenant toutes les valeurs possibles entre 0 et 2π changeant de valeur au bout de τ_c.