

LPS04 Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

R. de Guiran - A.Pricoupenko

Niveau : L2

Commentaires du jury

- **2017** : La multiplication des expériences illustrant le théorème de Bernoulli n'est pas souhaitable, surtout si celles-ci ne sont pas correctement explicitées.
- **2016** : Les limites de ce modèle sont souvent méconnues.
- **2015** : Le jury invite les candidats à réfléchir davantage à l'interprétation de la portance et de l'effet Magnus. Les exemples cités doivent être correctement traités, une présentation superficielle de ceux-ci n'étant pas satisfaisante.
- **Jusqu'en 2013**, le titre était : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide; validité. Relation de Bernoulli; limites et applications.
- **2011, 2012, 2013, 2014** : La notion de viscosité peut être supposée acquise.
- **2010** : Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité que l'on pourra supposer connue. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.
- **2009** : Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.
- **2005** : La différence entre écoulement incompressible et fluide incompressible est souvent ignorée, de même qu'entre écoulement parfait et fluide parfait.
- **2003** : L'équation d'Euler ne constitue pas le sujet central de la leçon et ne doit pas prendre une place excessive. Diverses expressions du théorème de Bernoulli peuvent être présentées. Il est plus intéressant de présenter des illustrations concrètes ou des applications pratiques que d'exposer une longue suite de formulations.

Prérequis

- Navier-Stokes
- Dérivée particulière
- Nombre de Reynolds
- Couche limite

Expériences

- ☕ Vidange réservoir
- ☕ Effet Coandă
- ☕ Effet Venturi
- ☕ Effet Magnus (la manip de Francis tmtc)

Bibliographie

Any livre de prépa

Hydrodynamique Physique, **Guyon, Hulin, Petit** Base de tout
intro à la dynamique des fluides, **Rieutord** on l'oublie trop vite

Hydrodynamique Physique, **Fermigier**

Physique tout-en-un PC, **Sanz**

Cap prépa PC/PC*, **Renvoizé**

Remarque

Préliminaire : leçon ok niveau formalisme mais pleine de subtilités. Dès qu'on sort du modèle du fluide parfait, l'écoulement parfait c'est compliqué avec l'influence de la couche limite qu'on ignore dans les calculs mais qui a une importance cruciale (ex effet magnus).

Garder en tête le paradoxe de d'Allembert (Rieutord p 84) : *l'écoulement stationnaire et potentiel d'un fluide parfait incompressible autour d'un obstacle quelconque n'exerce aucune force sur celui-ci*. Donc on peut avoir une force exercée par un fluide parfait sur un obstacle si régime non stationnaire, si vorticité, si ondes, et autre ??

Rieutord p 88 C'est là que ça devient tendu. si écoulement 2D, type cylindre infini dans écoulement stationnaire. Le domaine n'est plus simplement connexe et on peut avoir un écoulement potentiel **ET** une circulation non nulle (ie vorticité). La force du fluide sur le solide peut donc être non nulle. Exemple du cylindre pour effet Magnus, et c'est pour ça qu'on a un écoulement potentiel et une résultante non nulle.

Introduction

La résolution générale de l'équation de Navier-Stokes est un problème de physique-mathématique extrêmement compliqué (toujours non résolu, à supposer qu'il soit soluble). Or dans beaucoup de cas, pour la quasi totalité du fluide étudié les termes convectifs dominent largement la diffusion (thermique et de quantité de mouvement).

But

On va donc étudier les écoulements en négligeant les pertes afin de simplifier les équations

1 Modèle de l'écoulement parfait

1.1 Fluide parfait

Définition : Ref : GHP p135. on appelle fluide parfait, un fluide pour lequel la viscosité ainsi que sa conductivité thermique sont strictement nulles $\eta = 0$ et $\lambda = 0$. Dynamiquement il vient que le fluide vérifie alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g}$$

Remarque

- On a bien formulé la conservation de la masse en compressible, car en supprimant la viscosité, on a également supprimé l'hypothèse nécessaire d'incompressibilité du fluide pour exprimer les forces de viscosité en $\eta \Delta \vec{v}$
- La seule force volumique considérée ici est la gravité, mais il est possible d'en envisager d'autre (ex le $\vec{j} \wedge \vec{B}$ en MHD)
- Au niveau des conditions aux limites, en l'absence de viscosité, le fluide peut glisser contre les parois, mais ne peut toujours pas les pénétrer :

$$\vec{v}_{solide} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{fluide} \cdot \vec{n}$$

comme pour les écoulements visqueux les conditions au limites, c'est compliqué !
ici on a pris des conditions niveau L2 quoi

- un fluide parfait n'est pas turbulent !
- L'écoulement est isentropique car on a supprimé toutes les causes possibles d'irréversibilité (au sens thermo) → pas forcément une bonne idée d'en parler^a

a. https://fr.wikipedia.org/wiki/Équations_d'Euler Rigoureusement Euler c'est 3 équations + 1 fermeture : 1 dynamique, 1 sur la masse, 1 sur l'énergie et une fermeture thermo type $f(e, p, \rho) = 0 \rightarrow$ ex : coef de compressibilité isentropique pour les ondes sonores . Si les CL sont bien définies, là le problème est bien posé

Problème : des fluides rigoureusement parfaits, on en connaît qu'un c'est l'hélium 4 qui devient superfluide à 2,17K. Ça va être compliqué de décrire notre voiture avec ce modèle...

1.2 Écoulement parfait

Description Un écoulement parfait se comporte **presque partout** comme l'écoulement d'un fluide parfait. On a vu précédemment avec Navier-Stokes qu'en adimensionnant on obtenait :

$$\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t_a} + (\vec{v}_a \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_a) \vec{v}_a = -\overrightarrow{\text{grad}}_a P_a^* + \frac{1}{Re} \Delta_a \vec{v}_a$$

(ici $p_a^* = p - p_h$ avec p_h la pression hydrostatique) où Re était le rapport du terme advectif sur le terme diffusif :

$$\frac{\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}}{\eta \Delta \vec{v}} = \frac{\rho U^2 / L}{\eta U / L^2} = \frac{\rho L U}{\eta} = Re$$

En comparant aussi les termes de transport thermiques (ici on prend les temps carac pour changer) τ_θ et de convection τ_C , on veut

$$\tau_\theta = \frac{L^2}{D} \gg \tau_C = \frac{L}{U}$$

Ce qui se traduit par l'apparition de nombres de Péclet (dont le nombre de Reynolds)

$$Pe_\theta = \frac{UL}{D}, Re = \frac{UL}{\nu} \gg 1$$

ODG

Situation	U	L	diffusion	Nombre de PÉCLET
Jet d'eau robinet	$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	1 m	$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ $D = 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{Re} = 10^6$ $\text{Pe}_\theta = 10^7$
Voiture dans l'air	$10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	1 m	$\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ $D = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{Re} = 10^7$ $\text{Pe}_\theta = 10^7$

Message clé

Le modèle de l'écoulement parfait ne consiste pas à considérer que $\eta = 0$ et $D = 0$ mais que R_e et Pe_θ assez grands pour négliger la viscosité et la conduction thermique **ce qui n'est pas la même chose !**

Validité/limites du modèle Pour des exemples plus courants, on fait l'approximation d'écoulement parfait. Comme on l'a vu, cela revient à supposer qu'il a une viscosité nulle, et que ses évolutions sont adiabatiques.

On a notamment dit que l'écoulement autour de notre voiture pouvait être considéré comme parfait... Mais pourtant elle est ralentie... Pourquoi? → **On ne peut pas supposer le fluide parfait partout :** Afin d'affiner le cadre de cette hypothèse, on reprend la notion de couche limite vue précédemment pour le cas visqueux. On avait $\delta_{\text{visc}} =$

Attention

S'il y a de la turbulence, il y a "cascade" d'énergie des grandes échelles vers les petites où la dissipation ne peut plus être négligée. Il faut donc que le nombre de Reynolds soit assez grand pour négliger la viscosité, mais pas trop grand pour éviter la turbulence

1.3 Application : effet Coanda

Expérience

Référence : <https://www.youtube.com/watch?v=7eHneP5Ejtg&t=42s>

Matériel, description :

Un sèche cheveux + une balle de ping pong

Écoulement parfait ? Avec :

- comme longueur caractéristique la taille de la balle $L = 40 \text{ mm}$
- vitesse caractéristique $U = 10 \text{ m/s}$

on trouve $R_e = \frac{\rho_{\text{air}} L U}{\eta_{\text{air}}} = 24000 \gg 1$ et donc l'hypothèse de l'écoulement parfait est validée (on arrête les vérifications sur transferts thermique là on a assez insisté dessus).

Hypothèses :

- écoulement parfait
- stationnaire
- vitesse $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$

Explication : en appliquant l'équation d'Euler au fluide en stationnaire on trouve

$$\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}P$$

$$\rho v \times \frac{1}{r} \frac{\partial v \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\overrightarrow{\text{grad}}P$$

$$-\rho \frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r$$

et donc :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} > 0$$

On voit donc que la pression augmente avec la distance à la balle. Comme l'écoulement est dissymétrique, la vitesse en dessous est plus faible qu'au dessus cela implique que la dépression est plus forte au dessus de la balle qu'en dessous ce qui permet à la balle de léviter. C'est l'effet Coanda. Vu autrement, l'air subit une accélération radiale mais il faut bien une force radiale pour la lui permettre $\rightarrow$ c'est le gradient de pression radial qui permet ça.

C'est aussi cet effet qui permet la portance des ailes d'avion et donc aux avions de voler !

Transition

Pour aller plus loin, comme on a négligé la dissipation, on peut s'attendre à quelque chose d'intéressant concernant sa conservation

2 Théorème de Bernoulli

2.1 Énoncé et démonstration

Ref : *Cap-prépa PC/PC* p302* la démo n'est qu'une redite du bouquin.

Hypothèses et énoncé :

- Référentiel galiléen
- écoulement parfait, permanent et incompressible ($\rho = cte$ le long d'une ligne de courant)
- l'axe z est vertical ascendant
- pas d'autres forces volumiques que la pesanteur

Énoncé : Entre deux points A et B d'une même ligne de courant, la charge de l'écoulement est constante :

$$\left[P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z \right]_A^B = 0$$

Démonstration : on exprime l'accélération convective comme $\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} \right)$, on intègre le long d'une ligne de courant et avec $\partial_t = 0$ et $\rho = cte$ le long de cette ligne on aboutit au théorème.

Transition

Tout ça ressemble furieusement à une loi de conservation de l'énergie. Peut-on l'interpréter comme tel ?

2.2 Point de vue énergétique

Cap prépa PC/PC* p303 en fait on l'a vu sans s'en rendre compte lors de la démo : à un facteur volumique $d\tau$ près, la démonstration au dessus revient à calculer les travaux reçus par une particule de fluide de volume $d\tau$. On peut en effet écrire :

$$\int_A^B \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B -(\overrightarrow{\text{grad}} p) \cdot \overrightarrow{dl} + \int_A^B \rho \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{dl}$$

à gauche on a la variation d'énergie cinétique volumique de la particule de fluide, et à droite les travaux qu'elle a subit. Comme ces travaux ne dépendent pas du chemin parcouru, il peuvent être vu comme l'opposé d'une variation d'énergie potentielle :

$$[E_c]_A^B = [P]_A^B + [E_p \overrightarrow{g}]_A^B$$

Définition

On appelle charge de l'écoulement la grandeur :

$$P + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2}$$

qui représente l'énergie mécanique volumique d'une particule de fluide. Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie mécanique des particules de fluides au cours du mouvement. Si la charge n'est pas conservée au cours de l'écoulement, on parle de *perte de charges* : c'est le cas pour les écoulements visqueux (ref Poiseuil vu dans la précédente leçon)

2.3 Application : le vase de Toricelli

Expérience

Référence : FLTCDD p??

Matériel, description :

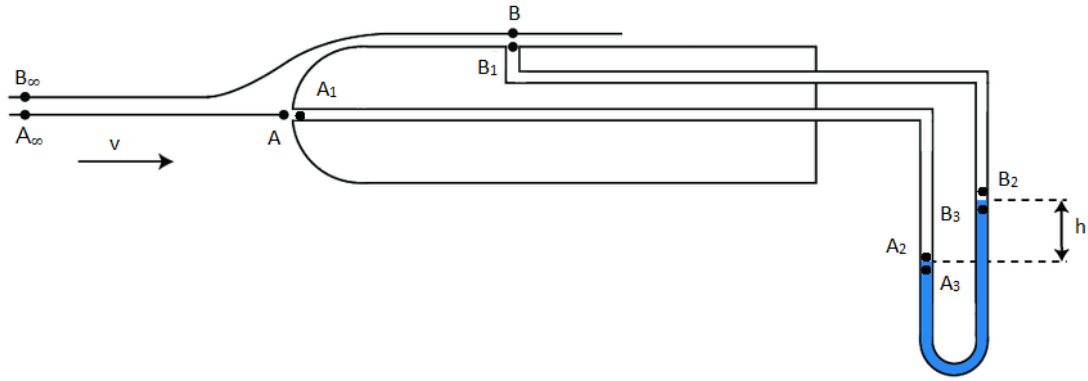
Vase de Toricelli.

- Vase de Mariote
- Balance et chronomètre
- règle ou pied à coulisse

3 Applications pratiques

3.1 Le tube de Pitot

Dans une soufflerie ou même dans un avion, il est important de connaître la vitesse de l'écoulement relativement à un objet. On utilise pour ça un tube de Pitot.

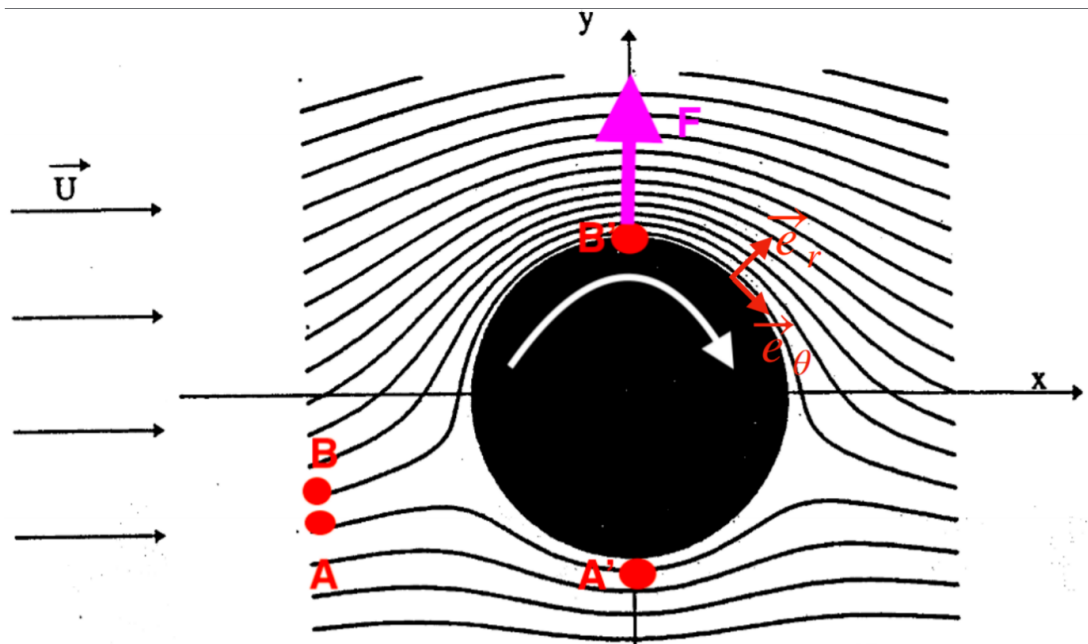


A est considéré comme un point d'arrêt, c'est-à-dire $v(A) = 0$ et la vitesse en B est la vitesse que l'on souhaite déterminée. On note $\Delta P = P_A - P_B = \rho_{liq}gh$ obtenu par la statique des fluides. De plus, avec Bernoulli, on a $\Delta P = \frac{1}{2}\rho_{air}V^2$, ce qui donne :

$$V^2 = 2 \frac{\rho_{eau}}{\rho_{air}} gh$$

3.2 L'effet Magnus

L'effet Magnus est observé aux sports avec des balles auxquelles on donne un effet. Le fait que la balle tourne sur elle-même engendre une force qui modifie sa trajectoire.



On suppose l'écoulement parfait, incompressible et stationnaire. Ainsi, le théorème de Bernoulli donne :

$$\begin{aligned} P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} &= P_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} \\ P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} &= P_{B'} + \rho \frac{v_{B'}^2}{2} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$P_{B'} + \rho \frac{v_{B'}^2}{2} = P_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2}$$

Or, on voit sur le dessin que suite à la rotation de la balle, on a $v_{B'} > v_{A'}$. On a donc $P_{B'} < P_{A'}$ et la balle part vers le haut ! Cela explique donc que la trajectoire ne soit pas droite.

<https://www.youtube.com/watch?v=20SrvzNW9FE>

Remarque

On peut s'attarder un peu sur ce qu'on vient de dire. On suppose que la balle "entraîne" l'air dans sa rotation, ce qui explique la différence de vitesse. Néanmoins, cela n'est possible que s'il y a de la viscosité! Et c'est là tout l'importance de la couche limite

Important

Normalement, ici il n'y a plus de temps et il faut passer à la conclusion. Néanmoins, voici de quoi combler les dernières minutes si besoin :

On considère l'écoulement **parfait, incompressible, irrotationnel et stationnaire**. Le théorème de Bernoulli donne :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \frac{P(R)}{\rho} + \frac{v^2(R)}{2}$$

Par analogie électrostatique/mécanique des fluides, on peut écrire le potentiel :

$$\Phi = Ur \cos \theta - \frac{p \cos \theta}{2\pi r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Le premier terme vient de l'écoulement à l'infini, le deuxième à celui d'un dipôle et le troisième terme traduit la rotation du cylindre sur lui-même. On en déduit :

$$\begin{aligned} v_r &= U \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} \\ v_\theta &= -U \sin \theta + \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned}$$

La condition $v_r(R) = 0$ donne $p = -2\pi R^2 U$. D'où :

$$\begin{aligned} v_r &= U \cos \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ v_\theta &= -U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned}$$

Le théorème de Bernoulli permet ensuite d'obtenir la pression au niveau de la balle :

$$P(R) = P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 \left[1 - \left(-2 \sin \left(\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R U} \right) \right)^2 \right]$$

On obtient alors l'expression des deux composantes de la force :

- La force de trainée :

$$F_t = \int_0^{2\pi} P \cos \theta d\theta = 0$$

On en déduit donc que la force de trainée est nulle ici.

- La force de portance

$$F_p = \int_0^{2\pi} P \sin \theta d\theta = \rho \Gamma U$$

On en déduit donc qu'il y a bien une force qui dévie la balle! Cette force serait nulle sans rotation de la balle sur elle-même, qui est à l'origine du facteur Γ

Compléments

Questions + commentaires

- **Tu as commencé par écrire l'équation de Navier Stokes, est-ce que c'est une seule équation, ou bien un système d'équation ?** N.S c'est un système d'équations, 1 vectorielle et 1 scalaire, donc 4 équations.
- **Où intervient λ dans l'équation ?** Dans les phénomènes de dissipation.
- **Si le fluide parfait c'est viscosité nulle. Est ce que c'est différent du cas $\eta \rightarrow 0$?** Oui c'est un passage à la limite discontinue.
- **Cas de la barque avec une personne dessus ; Quelle différence ?** Je ne me souviens plus de l'explication, à revoir.
- **Est ce que tu peux citer des exemples de fluides parfaits ?** Cas des superfluides, comme la viscosité est strictement nulle, le fluide va remonter les bords du récipient.
- **Que se passe-t-il à l'interface entre 2 fluides, si elle est courbée ?** Il n'y a pas d'énergie due à la tension de surface.
- **L'équation de N.S. marche pour décrire des fluides très différents. Comment on fait pour décrire ça ?** Il faut écrire N.S adimensionalisée, et du coup on trouve le même nombre de Reynolds.
- **Comment trouver des tailles caractéristiques ?** C'est souvent la taille caractéristique de l'objet solide dans l'écoulement.
- **C'est quoi la couche limite ?** Couche dans laquelle les phénomènes de dissipation visqueuses ne sont pas négligeables
- **Comment évolue la force de traînée avec le nombre de Reynolds** La force de traînée est en $\frac{1}{2} \rho S C_x v^2$. Donc la question c'est comment le C_x varie avec le nombre de Reynolds.
- **C'est quoi le petit creux dans l'évolution du C_x avec Re ?** Ça s'appelle la crise de traînée, ça correspond au moment où l'écoulement se décroche avec la turbulence, et où la force de traînée diminue brusquement.
- **Effet Coandă, tu peux revenir dessus ? A quoi correspond θ ?** Angle en coordonnées cylindriques
- **Comment peux tu justifier le $v = \text{cte}$ dans le cas de la balle de ping pong**
- **Peux tu réexpliquer l'origine de la force pour la balle de ping pong ? Problème de la différence de pression entre le haut et le bas ?** Le flux d'air est dissymétrique entre le haut et le bas.
- **Pourquoi dans l'écoulement de Bernoulli, tu as dit que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.** Quand $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, ça signifie que le volume de la particule de fluide ne varie pas.
- **Qu'est ce que tu peux modifier avec l'écoulement potentiel ?** La constante dépend seulement du temps
- **Qu'est ce qui est modifié pour l'écoulement potentiel si tu passe en référentiel non Galiléen** Si la force d'inertie d'entraînement peut s'exprimer sous la forme d'un gradient d'une énergie potentielle ($e_p = \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{H}^2$ par exemple) on rajoute cette énergie potentielle dans Bernoulli.

- **Sur le tube de Pitot, par quoi sont reliés les points A et B ?** Ils sont reliés par la même ligne de courant.
- **Attention à dessiner les lignes de courants et ensuite placer les points**
- **Au sujet de l'analogie magnétostatique, $\nabla \wedge \mathbf{B}$ et hydrodynamique. Est ce que tu peux pousser un peu plus cette analogie.** Analogie directe entre la définition du vecteur tourbillon et Maxwell-Ampère
- **Est ce qu'on a une idée de la densité de l'atmosphère en fonction de l'altitude ?** Ballon sonde, certains modèles (modèle de l'atmosphère isotherme).
- **Sur ton becher, on met un profil en $1/r^2$, mais l'oeil est pas très bon pour repérer des profils en $1/r^2$, comment faire ?** Avec une photo et un logiciel de traitement, ça aurait pu être ok.
- **Peux tu estimer la vitesse du barreau en fonction du nombre de Reynolds ?** On a une estimation de ω grâce à la molette de l'agitateur.
- **Alors estime le nombre de Reynolds** Relevé de ω puis calcul de Re par $Re = \frac{\rho \omega L^2}{\eta}$ avec L la taille du turbulent.

ommentaires

- Bien insister sur le fait que N.S c'est un système d'équation et pas une seule équation.
- J'aime bien montrer que $\eta = 0$ et $\eta \rightarrow 0$ c'est pas la même chose. Visiblement les avions ne voleraient pas avec un fluide parfait.
- Il aurait pu être pas mal de montrer une vidéo avec l'hélium superfluide.
- Le fait que Re intervient dans l'adimensionnement de Navier Stokes, c'est important de montrer ce point.
- Les ODG avec les nombres de Reynolds et les nombres de Peclet c'est bien. Des ODG y en a jamais assez.
- Visiblement c'était pas assez clair l'expérience de la balle de pong pong show. Une slide avec le schéma le système de coordonnées pourrait être pas mal.
- Regarder un peu moins les notes, plus regarder le jury.
- Pour Bernoulli les hypothèses ont toutes été bien listées, c'est bien
- Tube de pitot, attention à bien expliquer les lignes de courant.
- Pas hésiter à tendre des perches pour avoir des questions faciles (cf question sur la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude)
- Attention petite chose qui t'a desservie, viscosité cinématique vs dynamique 'je confond tout le temps'
- Les applications choisies pour cette leçon sont super.
- Revoir la conclusion qui était un peu courte.