LP11 : Rétroactions et oscillations

Alex Pricoupenko - Remi de Guiran

mars 2022

Niveau : PSI

Commentaires du jury

Prérequis

- ➢ Transformée de Fourier/Laplace
- ➢ Fonction de transfert
- ➢ Filtres du 1er et 2nd ordre
- ➢ Modèle de l'Amplificateur Opérationnel (AO)
- ➢ Equations différentielles linéaires du 1er et 2nd ordre

Expériences quantitative

- ☕ Oscillateur à pont de Wien

Table des matières

Introduction

Exemple d'une piscine en extérieur où on veut un niveau d'eau h_0 constant. On peut penser à une commande qui la remplit de autant que ce que l'évaporation prévoit [1] . Mais s'il pleut, catastrophe !

→ Nécessité d'avoir une rétroaction

1. Et encore, cela supposerait qu'on travaille à T constante

But

De zidane

Rétroaction : Systèmes pour lesquels la commande dépend du signal de sortie. [2].

En comparant alors la sortie à l'entrée pour s'assurer qu'elle a la bonne valeur (consigne), la présence d'une rétroaction peut permettre l'asservissement d'un système. On converge alors vers la valeur de consigne et le système est stable.

Stable → Suivi de consigne, régulation (asservissement).

Important

La technologie et la nature regorge de systèmes asservis. (Exemples : Quand on veut rouler à 130 sur l'autoroute. Quand on prend sa douche. La régulation en température d'une pièce, la régulation de température du corps humain etc...)

(On peut alors définir des critères de qualité associé à l'asservissement : rapidité, précision, coût énergétique, economique.)

Instable → Permet la création d'oscillateurs, utiles pour cadencer le fonctionnement des systèmes (horloges circuits numériques, montres, etc...)

Message clé

Louis XIV

1 Systèmes bouclés

1.1 Schéma bloc d'un système bouclé

On reprend l'exemple d'une piscine en extérieur où on veut un niveau d'eau h_0 constant.

On peut imaginer un signal électrique dont l'amplitude est proportionnelle à la hauteur d'eau.

- L'entrée $E(p)$ associé à la hauteur d'eau souhaitée correspond à la consigne. [3].

- On compare cela à la hauteur d'eau actuelle avec un comparateur [4], ici un soustracteur.

- Ceci actionne ou non la vanne de la piscine pour se rapprocher de la consigne (chaine directe).

- Via un capteur on mesure alors le niveau d'eau qu'on va comparer à la consigne (chaîne de retour).

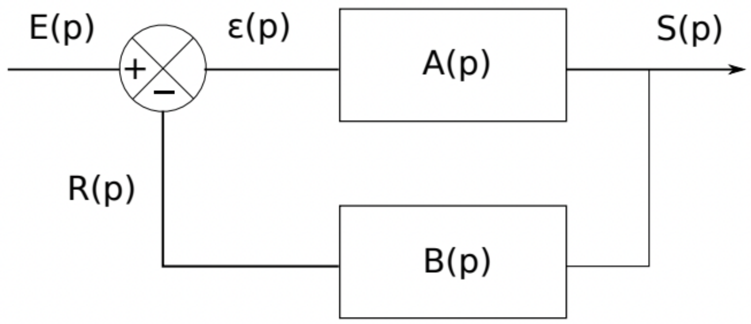
On définit sur le schéma EN COULEURS : signal d'entrée $E(p)$, comparateur (ici soustracteur), signal de commande ϵ, chaine directe $A(p)$, chaine de retour $B(p)$, signal de sortie $S(p)$, signal de retour $R(p)$.

1.2 Fonction de transfert d'un système bouclé

On définit $H_{FTBF}(p)$ la fonction de transfert du système (en boucle fermée).

$$H_{FTBF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \tag{1}$$

2. On parlera de système bouclé, par opposition à un système en ouvert quand la commande ne dépend pas du signal de sortie. (Exemples : Système d'éclairage classique. Programme d'arrosage automatique qui ne prend pas en compte l'humidité du sol, la pluie.)
3. On parle de régulation lorsque la consigne est constante, suivi de consigne sinon.
4. Le comparateur est un soustracteur ou sommateur (def. qui varie selon conventions).



On a d'après le schéma :

$$\epsilon(p) = E(p) - R(p) \qquad S(p) = A(p)\epsilon \qquad R = B(p)S \tag{2}$$

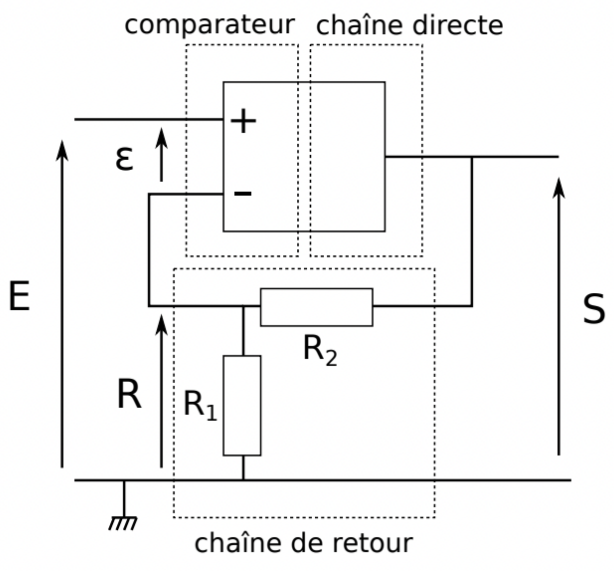
On aboutit à :

$$H_{FTBF} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \tag{3}$$

Rmq : On peut aussi définir la fonction de transfert en boucle ouverte [5]

Transition : Prenons un exemple concret pour illustrer la notion de rétroaction :

1.3 Amplificateur non-inverseur



On identifie les différents éléments sur le montage EN COULEURS :

- L'AO joue à la fois le rôle de comparateur et de chaine directe.

- Le pont diviseur de tension formé par les résistances joue le rôle de chaîne retour (car i=^{0}.

$$R(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} S(p) \tag{4}$$

5. $H_{FTBO} = R(p)/E(p)$ (utile pour parler de stabilité) où l'on ne boucle pas la chaine de retour sur le comparateur (ainsi $\epsilon(p) = E(p)$) et on trouve $H_{FTBO} = AB$, d'où $H_{FTBF} = \dfrac{A}{1 + H_{FTBO}}$

La chaine directe peut soit être modélisé par le modèle de l'AO idéal gain infini soit le modèle du 1er ordre que l'on choisit ici :

$$S(p) = \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \epsilon(p) \tag{5}$$

On a typiquement un gain statique $\mu_0 = 2.10^5$ et une pulsation de coupure $\omega_0 = 50 rad.s^1$ i.e. $f_0 = 8Hz$. Puisqu'on a un filtre passe bas du 1er ordre, la bande passante est $\Delta f = f_0$. On peut définir un temps caractéristique $\tau_0 = 1/\omega_0$.

On fait le calcul de la fonction de transfert H :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\mu_0'}{1 + \frac{p}{\omega_0'}} \tag{6}$$

$$\mu_0' = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \qquad \omega_0' = \omega_0 \Big(1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}\Big) \tag{7}$$

→ On trouve un passe-bas d'ordre 1. Le choix de R_1 et R_2 permet de controler les nouveaux paramètres (gain μ_0' et fréquence de coupure ω_0') .

Important

Transition : Conséquence de la rétroaction ?

2 Conséquence de la rétroaction

2.1 Gain-Bande passante

Dans le système de l'AO non inverseur, le gain a diminué mais la bande passante a augmenté.

Pour $R_2/R_1 \sim 100$ on a $f_0 = 16kHz$

→ On peut se servir de ce type montage pour amplifier des signaux de fréquence supérieure à 8 Hz.

On remarque néanmoins quelque chose d'important :

$$\mu_0'\omega_0' = \mu_0\omega_0 \;\Leftrightarrow\; \text{Le produit "gain-bande passante" est conservé !} \tag{8}$$

Rmq : cette propriété est générique des systèmes bouclé du 1er ordre avec boucle de rétroaction négative.

2.2 Réponse dynamique

Etudions maintenant le régime libre de notre système. On va ainsi pouvoir étudier le critère de rapidité (et de stabilité) pour un système que l'on veut asservir.

On souhaite regarder ce qu'il se passe en temporel, en supposant $s(0^-) = 0$. On utilise pour cela les propriétés de la transformée de Laplace [6] :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{\mu_0'}{1 + p\tau_0'} E(p) \qquad \tau_0' = 1/\omega_0' \tag{9}$$

$$S(p) + \tau_0' p S(p) = \mu_0' E(p) \Leftrightarrow s(t) + \tau_0' \frac{ds}{dt} = \mu_0' e(t) \tag{10}$$

Pour le cas de la réponse à un échelon :

6. $f'(t) \Leftrightarrow pF(p) - f(0^-)$

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On résout l'équation différentielle et on trouve :

$$s(t) = E(1 - e^{-t/\tau_0'}) \tag{11}$$

Le temps caractéristique τ_0' détermine le temps de réaction de la sortie à la réponse. Avec la rétroaction on a diminué le gain mais amélioré le temps de réponse du système, donc on a augmenté la rapidité du système !

Dans le cas étudié ici, le rapport gain/temps caractéristique est conservé : il y a donc un compromis à trouver entre gain et rapidité.

2.3 Stabilité

Def : Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée [7].

Le programme se limitant aux systèmes d'ordre 1 et 2, on retiendra :

Propriété : Les systèmes d'ordre 1 et 2 sont stables ssi tous les coefficients de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène qui les régit sont de même signe [8] [9]. (On le voit bien pour l'ordre 1 où on aurait une solution en $e^{+t/\tau}$.) [10]

Exemple (à l'oral pour GAGNER DU TEMPS) : Que se passe t il si dans notre montage avec l'AO, on inverse les bornes + et (et qu'on a alors une rétroaction positive au lieu de négative) ?

Cela équivaut formellement à changer le signe de μ_0 dans la fonction de transfert de passe bas du 1er ordre de l'AO. Or on a vu que :

$$s(t) + \tau_0' \frac{ds}{dt} = \mu_0' e(t) \qquad \tau_0' = \frac{\tau_0}{1 + \mu_0 \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}} \approx \frac{\tau_0 (R_1 + R_2)}{\mu_0 R_1} \text{ car } \mu_0 \gg 1 \tag{12}$$

Ainsi, $sgn(\tau_0') = sgn(\mu_0)$ et le montage n'est stable que si $\mu_0 > 0$.

Attention : Quand les signaux théoriques sont trop grands, le système quitte le régime linéaire [11] (phénomènes de saturation) et l'équation différentielle linéaire ne régit plus son fonctionnement !

Exemple (à l'oral pour GAGNER DU TEMPS) : Si on inverse les bornes + et - de notre montage précédent, notre systeme est instable et va alors rentrer en régime saturé ($\pm V_s \sim \pm 12V$). Le montage devient alors un comparateur à hystérésis.

(à l'oral brièvement pour GAGNER DU TEMPS ? L'important sera de dire qu'on peut avoir un dépassement de consigne et compromis rapidité/dépassement) Intéressons nous maintenant à un système d'ordre 2, on prend un passe-bas d'ordre 2 avec une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q [12] tel que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{\omega_0^2 + p\omega_0/Q + p^2} \tag{13}$$

7. Défition de stabilité pas super clair. On trouve aussi "qu'un système est stable si la réponse libre du système tend vers zéro à l'infini". Cette déf est équivalente à la notre pour des systèmes linéaires.

8. On sait qu'un système linéaire est stable si et seulement si aucune des racines de l'équation caractéristique associée n'est réelle strictement positive ou complexe à partie réelle strictement positive.

9. Hors Programme : C'est un critère nécéssaire mais pas suffisant pour des systèmes d'ordre 3 ou plus. On peut alors utiliser le critère de Routh.

10. Les racines de l'équation caractéristique sont donc les pôles de la fonction de transfert, ainsi, un système asservi est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée ont tous leur partie réelle strictement négative.

11. Le cours de Montrouge stipule alors que le système linéaire est instable mais pas convaincu car pas en désaccord avec les déf de stabilité : on peut penser à un régime pseudo périodique (cf ordre 2), donc donnant un signal borné, mais qui dépasse la saturation ...

12. Cela pourrait caractériser un asservissement en position cf Duffait p.338

On a ainsi :

$$p^2S + \frac{\omega_0}{Q}pS + \omega_0^2 S = E(p) \Longleftrightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = e(t) \tag{14}$$

Les coefficients de l'equation caractéristique sont tous de même signe : le système est donc stable.

On a différents régimes en fonction de Q. Regardons la réponse à un échelon de tension :

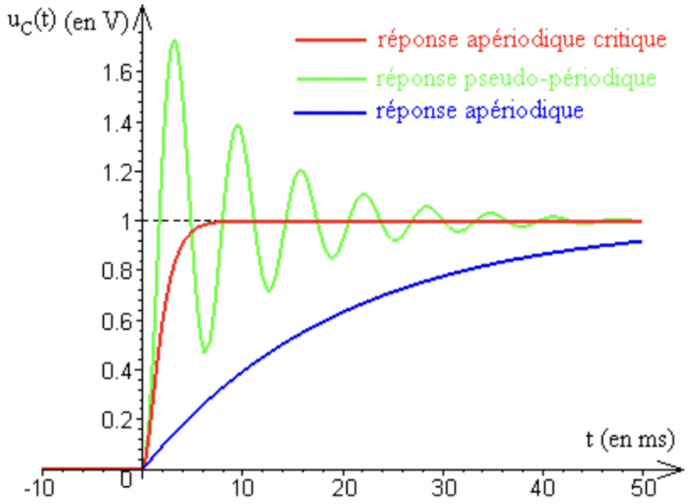


FIGURE 1 – Régime amorti $Q < 1/2$, Régime critique $Q = 1/2$, Régime pseudo périodique $Q > 1/2$

On voit qu'on est plus *rapide* pour atteindre la valeur souhaitée avec le régime pseudo périodique, mais on a aussi un dépassement de la consigne ($\neq$ ordre 1) ! Sur l'autoroute, si on veut aller de 120 à 130, on ne veut pas se taper une pointe à 150 ! Encore une fois, en fonction de ce qu'on veut, il faut trouver le bon compromis.

Rmq : l'étude de la stabilité d'un système linéaire peut aussi se mener de manière expérimentale (i.e. graphique) à partir du relevé de son comportement fréquentiel en boucle ouverte cf critère de Nyquist. [13]

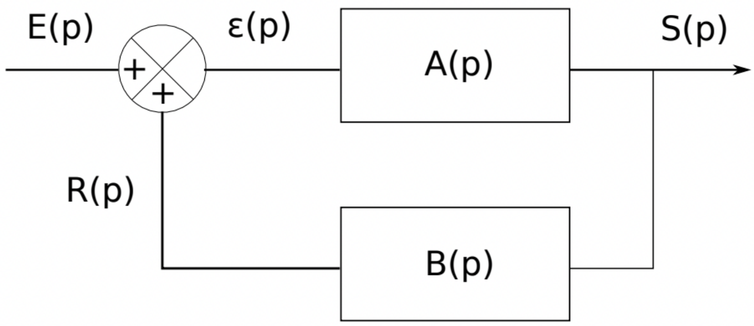
Transition : Ici on s'est intéressé à des systèmes stables, mais les instabilités peuvent aussi être très intéressantes d'un point de vue pratique $\rightarrow$ on peut créer des systèmes oscillant à fréquence constante : les oscillateurs auto-entretenus.

13. Voir Cours Montrogue : (Critère simplifié du revers). Si le système est stable en boucle ouverte (HFTBO(p) n'a pas de pôles instables), une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique du système en boucle fermée est qu'en parcourant le lieu de Nyquist $H_{FTBO}(j\omega)$ dans le sens des pulsations ω croissantes, on laisse le point critique 1 à gauche. Le sens des pulsations ainsi défini garantit que le contour approche le point 1 avec une phase négative. Attention : ceci est vrai lorsqu'on a pris un soustracteur comme comparateur, si on a un sommateur le point critique est +1.

3 Oscillateurs

3.1 Condition de Barkhausen

RAPIDE!! On reprend notre fonction de transfert initial, ici on va utiliser plutot un sommateur, mais c'est juste une convention (cf formellement chaine de retour B en -B). [14]



On passe en Fourier ici, et on peut donc écrire :

$$H(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 - A(j\omega)B(j\omega)} \tag{15}$$

Propriété : (Condition de Barkhausen). S'il existe une pulsation $\omega_0 > 0$ tq $A(j\omega_0)B(j\omega_0) = 1$ [15] alors on a un système auto-oscillant (il n'y a pas de source à l'entrée de la boucle $e(t) = 0$ mais on a $s(t) \neq 0$).

$\rightarrow$ Pour un systsème auto-oscillant, le signal est engendré par le système lui-même, les oscillations "accrochant" un signal de perturbation quelconque [16].

Les oscillations se réalisent entre les deux valeurs de saturation. Moins le système reste en régime saturé, i.e. plus il est proche de la réalisation exacte de la condition de Barkhausen [17], plus le signal se rapproche d'un signal sinusoïdal pur [18]. L'étude exacte est assez complexe, car une fois en régime saturé, il faut écrire la nouvelle équation qui régit le système dans ce régime, et calculer sa durée.

On va s'intéresser à un oscillateur à boucle de réaction, qui associe un amplificateur à un filtre.

3.2 Oscillateur à pont de Wien

- On a un filtre passe bande du 2e ordre de pulsation $\omega_0 = 1/(RC)$ et de facteur de qualité $Q = 1/3$.
- AO supposé idéal

On dit qu'on calcule la fonction de tranfert H (mais pas le temps) :

- Condition de Barkhausen : $\omega_0 = 1/RC$ et $R_2 = 2R_1$

- On peut également voir ça avec une equa diff depuis H :

14. Rmq : L'idée intuitive de ce choix en fait, c'est qu'avec un soustracteur cela permet un asservissement du système pour converger vers une consigne alors qu'ici on va avoir tendance à additionner des valeurs ce qui va tendre à *déstabiliser* le système. (ex : effet Larsen, le signal audio de votre enceinte derrière vous vient s'ajouter au signal du micro etc ...)

15. Cette condition sur les nombres complexes se traduit par deux conditions sur les réels : module et phase.

16. En électronique, l'énergie produite provient évidemment des sources de tension conti- nues non représentées sur les schémas servant à l'alimentation des composants actifs. De même, pour tous les systèmes auto-oscillants de tout domaine de la physique (optique, mécanique, par exemple), une source d'énergie extérieure est nécessaire à l'entretien des oscillations.

17. On souhaite donc (si je me souviens bien) un régime saturé instable.

18. En pratique, on a toujours du mal à obtenir très précisément la condition de Barkhausen, à cause des incertitudes sur les valeurs des composants. C'est pourquoi on n'a pas d'oscillateur exactement sinusoïdal, et on parle d'oscillateur quasi-sinusoïdal. Pour observer un signal périodique en l'absence d'entrée, il faut réaliser la condition de Barkhausen au mieux, mais en se plaçant dans une situation légèrement instable i.e. $|AB| \geq 1$

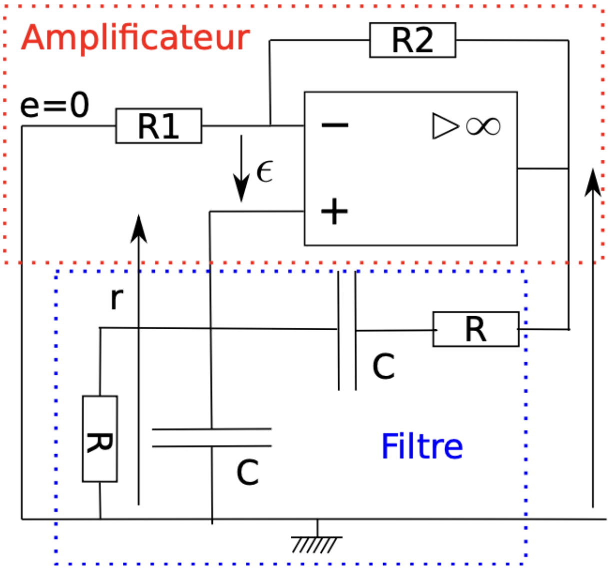


Figure 55 – Oscillateur à pont de Wien.

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2 - R_2/R_1}{RC}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}s = 0 \tag{16}$$

Condition d'apparition des oscillations : $R_2 = 2R_1$ (et on se place légèrement au-dessus cf Eq.16 [19])

EXPERIENCE : Naissance des oscillations, avec R_2 résistance variable

On prend comme valeurs : $R = R_1 = 10k\Omega$, $C = 10nF$

$\rightarrow$ On trouve $R_2 \sim 20,6k\Omega$

Un autre exemple avec un bien meilleur facteur de qualité c'est bien sur le Laser (milieu amplificateur + cavité Fabry Pérot), ou moins connu mais utilisé pour les montres : l'oscillateur à quartz.

Pour les questions (car impossible dans les temps) :

Etude du filtre (chaine retour) :

$$\beta = \frac{r}{s} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2} \tag{17}$$

Etude AO supposé idéal (ie ordre zéro) :

$$s = (1 + \frac{R_2}{R_1})r - \frac{R_2}{R_1}e \tag{18}$$

On note $\alpha = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$ et on écrit la fonction de transfert H du système :

$$H = \frac{-R_2/R_1}{1 - \beta\alpha} \tag{19}$$

Condtion de Barkhausen : $1 - \beta\alpha = 1$

On trouve $\omega_0 = 1/RC$ et $\alpha = 3$

19. ou cf critère de Nyquist dit critère du revers

Conclusion

Les rétroactions permettent de dégager deux types de systèmes : les systèmes stables de type asservissement, qui sont extrêmement utiles en ingénierie, dans l'industrie, puisqu'ils permettent de commander automatiquement une grandeur. On recherche alors précision, rapidité, non dépassement... Les autres sont les systèmes instables, qui peuvent se mettre à osciller. La non divergence des oscillations est due aux limitations des appareils que l'on utilise, que l'on ne prend pas en compte dans les modélisations.

Ouverture : On s'est intéressé aux oscillateurs quasi sinusoïdaux mais il existe aussi des oscillateurs à relaxation, signal périodique non sinusoïdal (vase de Tantale, multivibrateur astable, appareil de Soxhlet en chimie etc ...)

Conclusion