LPS 12 : Traitement d'un signal. Étude spectrale.

Alexandre Pricoupenko - Remi de Guiran

Niveau :

Prérequis :
Produit de convolution Effet Doppler Circuit électronique en RSF
M1 Physique Traitement du signal ENS Lyon
Cottet Traitement du Signal Dunod
(voir cours DSM des vieux)
Cours Montrouge
https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02193929/document

Expérience quantitative : Filtre RC passe bas à l'ancienne avec l'oscilloscope. (cool pour transition avec échantillonage) + qualitatif : mesure vitesse par effet doppler avec détection synchrone)

Table des matières

Introduction

Lors d'expériences, on mesure/enregistre souvent des grandeurs physiques avec des appareils électronique. Néanmoins, les paramètres de mesure (ou d'acquisition) sont souvent très importants dans la restitution du résultat. Nous allons donc nous pencher sur l'analyse et la numérisation des signaux i.e. le traitement d'un signal.

Def : Un signal est la quantification d'un phénomène mesurable et variable en fonction d'un indice, également appelé support (ex : onde acoustique en fonction du temps). Dans la suite, le support par défaut sera le temps t.

Expérience introductive :

Matériel : Micro + Oscilloscope + Diapason
- On acquiert le signal d'un diapason à l'oscilloscope → Signal pur sinusoïdal

- Notre voix. Bcp plus compliqué ! Comment faire ?

I Représentations spectrale d'un signal

I.1 Décomposition en série de Fourier

Soit f une fonction périodique ou périodisable (de période $\nu = 1/T$). On peut écrire :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n(f)\cos(2\pi\nu nt) + b_n(f)\sin(2\pi\nu nt) \Big] \tag{1}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi\nu nt)dt \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi\nu nt)dt \tag{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int f(t)dt \tag{3}$$

- C'est la décomposition d'une fonction périodique sur la base des cos et sin [1].
- a_0 correspond à la moyenne de f (composante continue).
- Le terme de la somme qui correspond à $n = 1$ est appelée le fondamental.
- Les autres termes sont appelés harmoniques de rang n.

Pour décrire un signal (réel ?), il est parfois plus commode d'utiliser la forme :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(2n\pi\nu t + \psi_n) \qquad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \psi_n = \arctan(-b_n/a_n) \tag{4}$$

Ainsi, les coefficients $c_n(f)$ représentent le *poids* de chaque harmonique.

<u>Exemple</u> : Créneau impaire (-E,E) [2], Graphe.

$\forall\, n \;\; a_n = 0 \;\;,\;\; b_{2n} = 0 \;\;,\;\; b_{2n+1}(f) = \dfrac{4E}{(2n+1)\pi} \rightarrow$ Graphe $|c_n(f)|$ (= Spectre de f)

Composante continue/Fondamental/Harmoniques

Nombre d'harmoniques pour retrouver forme créneau ?
https://demonstrations.wolfram.com/FourierSeriesOfSimpleFunctions/

$\rightarrow$ Importance notion harmoniques en musique : Comment est on capable de différencier le *la* d'un piano et d'un violon ? Notion de timbre : *Poids* des harmoniques $\neq$.

Transition : Comment généraliser cela si f n'est pas périodique ?

I.2 Transformée de Fourier

Soit f une fonction intégrable. Sa transformée de Fourier, que l'on notera $\mathrm{TF}(f) \equiv \hat{f}$ est donnée par :

$$\mathrm{TF}(f) : \nu \mapsto \hat{f}(\nu) = \int dt f(t) e^{-i2\pi\nu t} \tag{5}$$

La TF apparaît dans de très nombreux domaines de la physique. On la croise par exemple en optique avec la diffraction de Fraunhofer (TF spatiale) [3].

1. Notation complexe : $f(t) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} c_n e^{jn2\pi\nu t}$ avec $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i2\pi\nu nt}dt$
2. Si f paire $\forall n \; b_n = 0$. Si f impaire $\forall n \; a_n = 0$.
3. On la retrouve aussi bien sûr en spectroscopie par TF, qui permet la mesure de spectre optiques riches (i.e. possédant beaucoup de raies)(Source : Jolidon EDP Sciences) et moins évident, dans un spectre RMN également etc ... !

TF inverse : Si $\hat{f}$ est une fonction intégrable, on retiendra qu'on peut retrouver f à partir de $\hat{f}$:

$$f(t) = \int d\nu \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} \tag{6}$$

Propriété (Th. de Plancherel) : Soit x et y deux fonctions intégrables[4] :

$$\mathrm{TF}(x(t).y(t)) = \mathrm{TF}(x) * \mathrm{TF}(y) \qquad \mathrm{TF}(x(t) * y(t)) = \mathrm{TF}(x).\mathrm{TF}(y) \quad (\text{* : produit de convolution}) \tag{7}$$

II Acquisition et filtrage numérique

On veut passer d'un signal analogique (qui varie continuement en fct de son support) à un signal numérique (composé d'une suite de nombres provenant du langage binaire, ie suite de 0 ou 1)[5].

Pour des raisons techniques d'encodage (et pratiques de mesures ?), on ne peut pas récupérer l'infinité du signal analogique : on peut prendre un nombre fini de points.

La question est : Quels sont les critères à respecter pour que notre signal numérisé soit le plus fidèle possible au signal analogique ?

Soit $s(t)$ un signal analogique, dont le spectre $\hat{s}$ est à support borné.

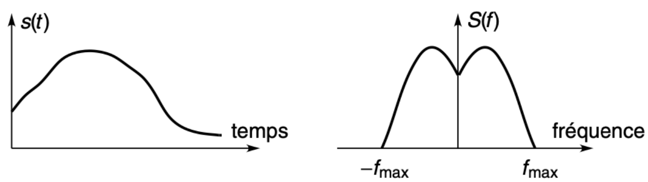


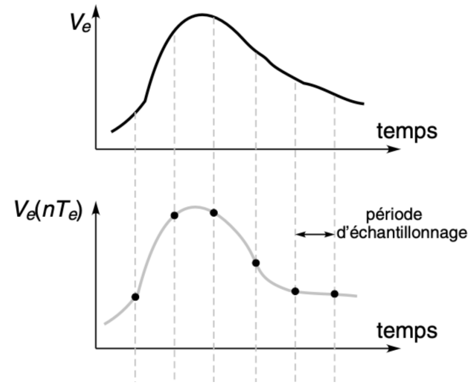
Figure 6.2 Signal à spectre borné à échantillonner.

Pour acquérir ce signal, on va commencer naturellement par échantilloner le signal.

4. Carré sommable pour avoir également la TF d'un produit de convolution ?
5. On ne présentera pas le principe général de la numérisation mais l'avoir en tête au cas où voir Fig.1)

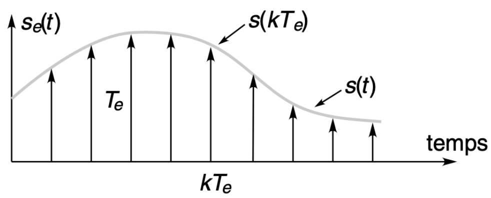
II.1 Échantillonage

Procédons à un échantillonage régulier et idéal [6] du signal aux instants $t_n = nT_e$.



Description en temps continu $x(t) \rightarrow$ Série de valeurs apellées échantillons $x[nT_e]$

Soit $s_e(t)$ le signal échantilloné, on peut voir ce signal comme une multiplication par un peigne de Dirac p_{T_e} :



$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\delta(t-kT_e) = s(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_e) = s(t)p_{T_e}(t) \tag{8}$$

On utilise ce qu'on connait de la transformée de Fourier [7] :

$$\hat{s}_e(f) = \hat{s}(f) * \hat{p}_{T_e}(f) = \hat{s}(f) * \Big[f_e p_{f_e}(f)\Big] = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{s}(f')\delta(f-nf_e-f')df' \tag{10}$$

$$\hat{s}_e(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{s}(f-nf_e) \tag{11}$$

6. Echantillonage idéal quand on prélève exactement la valeur de x à l'instant d'échantillonage
7. Ainsi que la formule de Poisson (cas particulier Dirac) :

$$p_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n f_e t} \qquad c_n = f_e\int_0^T \delta(t)e^{-i2\pi n f_e t} = f_e \tag{9}$$

Pour avoir le résultat sur la TF du peigne de Dirac, on passe à la TF de l'equation à gauche au-dessus.

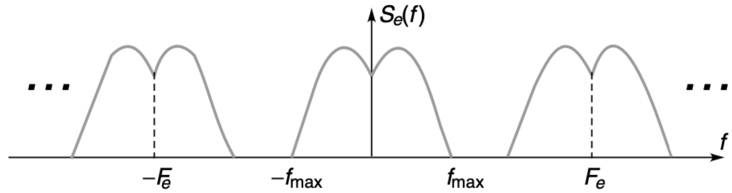


Figure 6.4 Périodisation du spectre du signal échantillonné.

<u>Critère de Shannon</u>

$$f_e \geq 2f_{max} \tag{12}$$

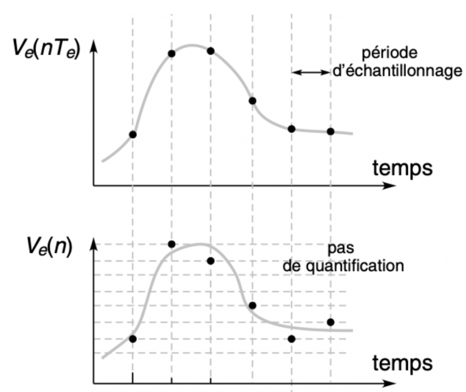
- Critère vérifié : pour obtenir ce que l'on veut, il faudrait récupérer seulement un motif... ce qui requiert un filtrage, point que l'on abordera plus tard. [8]

- Critère non vérifié : Repliement de spectre ("aliasing" en anglais) → Fréquence indésirable (fausses images, nouveaux sons etc). Reconstruction exacte impossible (?) [9].

Rmq : Pour un échantillonage réel, on fait face à plusieurs limites : La durée d'obervation finie qui déforme la transformée de Fourier obtenue + échantillonage réel fenêtre de temps et non une impulsion de Dirac.

II.2 Quantification

On souhaite convertir notre échantillon en signal numérique, i.e. traduire notre signal en code binaire (1 bit = 0 ou 1). Puisqu'on a un nombre de bits q fini, on a un nombre fini de valeurs discrètes possibles pour décrire les mesures du signal (Attention, erreurs sur la figure ci-dessous sur attributions valeurs points). On définit le pas de quantification $a = (\mathrm{Max(s)} - \mathrm{min(s)})/(2^q - 1)$.



Le principe de la quantification est alors de mesurer le signal $s(t)$ à chaque instant retenu et de le comparer à ces valeurs discrètes possibles.

8. On retrouve la TF de x avec une fonction porte qui joue le rôle de filtre passe bas idéal et de bande passante $[-f_e/2, f_e/2]$

$$TF[x] = T_e \Pi_{[-f_e/2, f_e/2]} TF[x_e] \qquad \text{et on trouve} \qquad x(t) = \sum x(nT_e) sinc(\pi(t/T_e - n)) \tag{13}$$

9. Deux manières de s'en sortir : Augmenter la fréquence d'échantillonage / Mettre un filtre passe-bas à $f_e/2$ avant l'échantillonage. (raison probable : bcp de data avec l'echantillonage) (good for transition)

III Traitement analogique d'un signal

III.1 Réponse en fréquence d'un SLIT

SLIT = Système Linéaire Invariant par translation dans le Temps

Filtre linéaire = système qui applique un opérateur linéaire à un signal d'entrée [10].

+ Invariance dans le temps [11]

Notons que les filtres linéaires ne créent pas de nouvelles fréquences dans le signal [12].

Entrée e(t), Sortie s(t) , Réponse impulsionnelle $h(t)$ la réponse du système à l'application d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$

$$s(t) = \int x(t')h(t-t')dt' = (x * h)(t) \tag{14}$$

$$\hat{s}(\nu) = \hat{h}(\nu)\hat{e}(\nu) \tag{15}$$

Fonction de transfert H :

$$H(\nu) \equiv \hat{h}(\nu) = \frac{\hat{s}(\nu)}{\hat{e}(\nu)} \qquad \text{Schéma bloc ?} \tag{16}$$

Il existe des filtres passe-bas, passe hauts, passe-bande, coupe-bande.

Exemple (si ok avec le temps ?) : Circuit RC filtre passe-bas 1er ordre circuit.

EXPERIENCE : Filtre RC. On prend $R = 1k\Omega$ et $C = 1\mu F$, $\omega_0 = 10^3 rad.s^{-1}$ (on ne veut pas trop taravailler en HF cf parasite Latis Pro. Qualitativement on regarde à basse et haute fréquence ce que cela fait sur le signal de sortie par rapport à celui d'entrée. Diagramme de Bode avec réponse indicielle ?

Schéma V_s cf tension condensateur

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \qquad \omega_0 = 1/RC \tag{17}$$

Diagramme de Bode : Gain $G_{dB}(\omega)$ en dB + Phase $\psi(\omega)$ en radians

$$G_{dB}(\omega) = 20\log|H|(\omega) = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} \qquad \psi(\omega) = Arg(H(j\omega)) = -\arctan(\omega/\omega_0) \tag{18}$$

Cas limite, asymptotes :

- $\omega \to 0$: $G_{dB} \to 0$, $\psi \to 0$
- $\omega \to +\infty$: $G_{dB} \to -20\log(\omega/\omega_0)$ [13], $\psi \to -\pi/2$
- $\omega = \omega_0$: $G_{dB} = -3dB$, $\psi = -\pi/4$

Tracé abscisse avec ω et échelle logarithmique $(10^0, 10^1, ..., 10^6)$.

10. On peut alors traiter indépendamment chaque composante spectrale.
11. Si $y(t)$ est la sortie correspondant à une entrée $x(t)$, la réponse associée à $x(t-t_0)$ est $y(t-t_0)$
12. Si un filtre est passif (ex : résistance, condensateurs, inductances), il ne peut qu'atténuer le signal. Si un filtre est actif (ex : AO, transistors), il peut également amplifier le signal.
13. Pente -20 dB/décade, et on rappelle que Décade = Intervalle de pulsation entre ω et 10ω.

III.2 Détection synchrone

Cas pratique : mesurer vitesse d'une voiture avec radar.

Attention il faut etre clair pour laisser une bonne impression c'est la derniere partie, mais c'est pas evident niveau temps je crois ! Au pire en parler en conclusion.

schéma
E —–(f)————–>
<—– (vitesse v) Voiture
R <—(f+ Δf)———

On peut montrer que $\Delta f = 2f\dfrac{v}{c}$ si $v/c \ll 1$. (savoir redémontrer ce résultat : cas général et developmt limité, voir discussio après, ici facteur 2 cf aller retour on fait applique 2 fois l'effet doppler en v/c en gros je crois)

On utilise des ondes ultra sonores. (a verifier ?)
$U_e = U_{e0}\cos(2\pi f t)$ $U_r = U_{r0}\cos(2\pi(f+\Delta f)t + \phi)$
U_e et U_r en entrée du Multiplieur, puis on filtre le sginal V avec un passe bas pour obtenir s (sortie).

$$V(t) = \frac{U_{e0}U_{r0}}{2}(\cos(2\pi(2f+\Delta f)t + \phi) + \cos(2\pi\Delta f + \phi) \tag{19}$$

Spectre Schéma Δf et $2f + \Delta f$ on ne garde que Δf (cf filtre passe bas)
Manip très rapide qualitative avec Doppler par ultrasons P73.23. (Jeulin)

A savoir pour les questions : Formule cas général simple source S qui émet un signal vers un observateur (récepteur) fixe O

$$f_{recepteur} = \frac{f_{source}}{1 + \mathbf{v}.\mathbf{u}/c} \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{OS}}{OS} \tag{20}$$

ATTENTION ici c'est tricky, cette eq (et son dvlpmt limite en v/c) peut servir pour le "retour" de l'onde dans le réf du sol (la voiture joue le role de source qui emet un signal et le recepteur joué le radar qui est fixe dans ce ref)

Pour "l'aller" on se place dans le ref de la voiture (le radar est ici la source, qui emet un signal, et le recepteur, la voiture, est fixe dans ce ref ; faire attention au sens de v : ici on inverse notre **v** dans la formule du coup non ? + IMPORTANT : onde acoustique ne va plus à c dans ce référentiel mais à $c' = c - v$ (ça doit aller moins vite dans le cas où la voiture arrive vers le radar car cest comme si on avait du vent qui nous arrive a la gueule dans le ref de la voiture, et nous on veut transmettre du son devant nous et comme le vent augmente ou ralentit la vitesse du son, bah notre celerite est ici abaissée. Cette histoire de vent ça peut bien se montrer, cest dans le Hprepa bleu sur les ondes dans le chapitre ondes acoustiques dans un exo dont faudrait que je mette la ref ! !)

MAIS bon avec les DLs imbriqués a l'ordre 1 en v/c (faire gaffe à ça, quand on a des DLs imbriqués faut etre precautionneux,, et ça se trouve je dis nimp mais bon), je crois bien que c'est pas grave sur la formule qu'on donne en v/c à la fin.

Rmq : ah oui et quand on change de referentiel, ici on s'en bat les steakos de la relat' restreinte car on est vraiment pas avec des vitesses de l'ordre de la celerite de la lumiere ! !

Conclusion

Autres filtres ex optique et importance transformée de fourier

Quelques questions

(cf LP : Filtrage en électronique analogique et numérique guillaume)

Detecteurs enveloppes avec diodes

Radio FM et AM (Frequency/Amplitude modulation)

Harmoniques en 1/n ici avec b_n en 1/2n+1 (?)

Laplace : La pulsation peut etre complexe. Transformee de Fourier plus commode.

extension temporelle finie support compact

Vraies formules de l'effet Doppler ?
Erreur de l'ordre de 10% sur l'autoroute cf 30m/s vs 340 m/s

Comment on fait un multiplieur ? Il faut qq chose de non linéaire. Utilisation de diodes et transistors.

Filtre optique ?
Diffraction de Fraunhofer. Angles fréquences

Analogie avec mécanique
RLC et Systeme masse ressort avec frottements
Resistance -> pertes
Capacité –> Ressort (∼ stockage énergie)
Bobine –> inertie masse m

Notes

- EXPERIENCE :

Pour mesurer le déphasage de 2 par rapport à 1, i.e. $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ (ici sortie par rapport à entrée cf Bode) :

1. On choisit un instant de référénce t_1 caractérisé typiquement par un max ou min du signal 1.
2. On cherche t_2 le plus proche de t_1 tel que 2 soit dans le même état que le signal 1 à t_1.
3. On calcule $\Delta t = t_2 - t_1$ et on utilise que $\Delta\phi = 2\pi f \Delta t$.

Si $\Delta\phi > 0$, 2 est en avance de phase par rapport à 1.
Si $\Delta\phi < 0$, 2 est en retard de phase par rapport à 1.

Filtre numérique ? Circuit intégrés (portes logique etc..), Processeurs programmables (limitations : vitesse et coût)

- Bruit thermique : Mouvement brownien dans les résistances. Bruit blanc

- Multiplieur ? $\rightarrow$ AO + diode

- Diode ? Basiquement : ne laisse passer le courant que dans un sens. Si $V < V_{seuil}$ pas de courant qui passe (diode bloquée). Si $V \geq V_{seuil}$ le courant passe (diode passante). Dipôle non linéaire à semi-conducteur (cf jonction PN) qui a 2 régimes de fonctionnement : passant et bloquant.

Modelisation diode $I(V) = I_0[e^{V/V_0} - 1]$. Mais si tension inverse trop grande, champ E grand. Effet Tunnel pour e^- de valence + E_c paire electron-trou augmente et arrache d'autres e^- = apparition courant inverse ($\sim$ V<tension d'avalanche)

- Semi-conducteur ? Un semi-conducteur est un matériau qui a les caractéristiques électriques d'un isolant, mais pour lequel la probabilité qu'un électron puisse contribuer à un courant électrique, quoique faible, est suffisamment importante. En d'autres termes, la conductivité électrique d'un semi-conducteur est intermédiaire entre celle des métaux et celle des isolants.

- 1 octave au dessus $\rightarrow$ on double la fréquence

IV Questions

- Comment expliquer ce qu'est le produit de convolution ?

Mathématiquement, le produit de convolution est égale à l'intégrale sur l'entièreté du domaine d'une des deux fonctions autour de ce point, pondérée par l'autre fonction autour de l'origine.

Physiquement on peut l'expliquer avec la notion de Dirac (t) qui est l'élément neutre de la convolution, mais qui peut translater la fonction (cf $\delta(t-a)$). Exemple de 2 Dirac pondérés = superposition de 2 courbes translatées avec un certain poids. Fonction Porte unitaire. Elargissement du signal. Si l'on considère maintenant une fonction quelconque g, on peut voir g comme une succession de diracs pondérés par la valeur de g au point considéré. Le produit de convolution de f par g s'obtient donc en faisant glisser la fonction f et en la dilatant selon la valeur de g. (cf Wiki)

On peut aussi parler de moyenne glissante (cf fonction obtenue en faisant glisser une des deux fonctions sur l'autre de gauche à droite et de calculer aire quand domaine non nul en commun exemple de la convolutionde deux portes qui donne un pic triangulaire (cf wiki).

- Pourquoi la dérivée de la réponse indicielle permet de remonter à la fonction de transfert du filtre ?

Soit H l'échelon unité (Heaviside) réponse indicielle. On a : $H'(x) = \delta(x)$. Ainsi la dérivée de la réposne indicielle donne la fonction de transfert (cf réponse impulsionnelle).

- En quelques mots, c'est quoi la numérisation d'un signal ?

On appelle numérisation d'un signal l'opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitudes discrets. Cette opération de numérisation d'un signal peut être décomposée en deux étapes principales : échantillonnage et quantification. (Cottet Dunod)

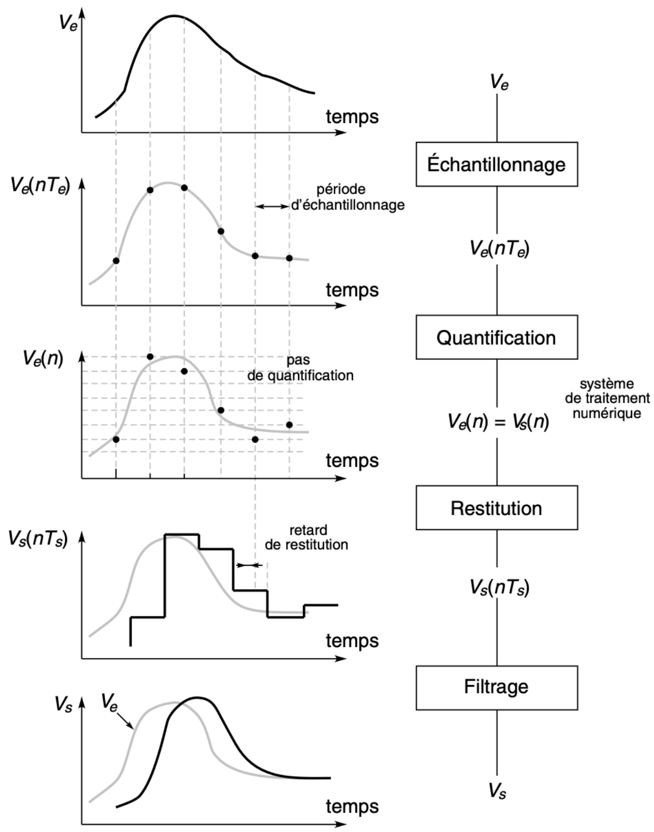


FIGURE 1 – Évolution d'un signal à travers une chaîne d'acquisition et de restitution de données sans modification des valeurs. Te est la période d'échantillonnage et Ts la période restitution supposée égale à Te. cf Cottet Dunod