

LPS 19 : Diffraction de Fraunhofer.

Alexandre Pricoupenko - Rémi de Guiran

Niveau : L3

Prérequis : Optique Géométrique. Interférences.

Expérience quantitative : Mesure de la largeur a d'une fente.

Table des matières

I Phénomène de diffraction	1
I.1 Principe de Huygens-Fresnel	1
I.2 Régime de Fraunhofer	2
II Figures de diffraction	3
II.1 Cas de la fente rectangulaire	3
II.2 Cas d'une ouverture circulaire	5
II.3 Theoreme de babinet	5
III Optique de Fourier	6

Introduction

Trou seul laser tache d'Airy / Carré tache croix / Fente fine diffraction plus que selon 1 direction

I Phénomène de diffraction

I.1 Principe de Huygens-Fresnel

La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément de surface $d\Sigma$ atteint se comporte comme une source (secondaire) émettrice d'une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à $d\Sigma$ et à l'amplitude reçue (au coefficient de transmittance près). La cohérence est conservée entre les sources secondaires¹.

On peut visualiser cette affirmation pour une onde plane vue comme somme de plein d'ondes sphériques à l'aide d'une petite animation (ou schéma voir cabart) :

<https://demonstrations.wolfram.com/HuygenssPrinciple/> Lien rapide ici

Rmq : On peut voir ça comme le fait que les 2 forment une bases de solutions pour les ondes lumineuses.

1. version BFR cf ulm : Chaque point M d'une surface atteinte par la lumière peut être considérée comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de cette source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en M et à l'élément de surface d entourant le point M. Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

I.2 Régime de Fraunhofer

On prend une onde plane (caractérisé par un vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$)² arrivant sur un objet situé dans un plan $z = 0$ (par exemple une petite ouverture) et on souhaite regarder mathématiquement comment se traduit le principe de Huygens-Fresnel, qui permet la reconstruction d'onde dans le demi-espace libre $z > 0$. (Dessin : repère (x, y, z) (avec x dans le tableau, y vertical et z vers la droite) origine O dans plan objet diffractant décrit par les points $P(x, y, 0)$ + écran à une distance D selon z où on regarde au point $M(X, Y, D)$). L'amplitude de l'onde incidente en un point de l'écran M s'écrit :

$$s(M) = K \int_P s(P) t(P) \frac{e^{ikPM}}{PM} d\Sigma \quad (1)$$

- K est une constante homogène à l'inverse d'une distance ($= -i/\lambda$).
- $t(P)$ est la transmittance, $s'(P) = t(P)s(P)$, c'est à dire qui décrit la fonction qui décrit façon dont le signal est transformé avant le plan de l'objet diffractant et juste après.
- $s(P) = s_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{OP}}$

$$\begin{aligned} PM &= \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + D^2} \\ &= D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{D^2} + \frac{X^2 + Y^2}{D^2} - 2 \frac{xX + yY}{D^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

On suppose ici :

- $x, y \ll D$ (typiquement, la taille max associée à une ouverture est petite devant la distance D à laquelle on regarde)³
- $X, Y \ll D$ On regarde donc les points M de l'écran associés aux petits angles. On peut ainsi se placer dans l'approximation de Gauss.

→ A ce stade, on peut donc remplacer dans la formule Eq.1, PM au dénominateur par D (cf ordre zéro du DL avec les param. petits précédents). **Par contre**, on ne peut pas le faire dans le terme de phase $\Psi = kPM$ car il faut tenir compte des variations de kPM à l'échelle de λ . On pousse donc le DL à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} PM &\simeq D \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2D^2} + \frac{X^2 + Y^2}{2D^2} - \frac{xX + yY}{D^2} \right) \\ &\simeq D + \frac{r_P^2}{2D} + \frac{x^2 + y^2}{2D^2} - \frac{xX + yY}{D} \end{aligned} \quad (3)$$

Où on a noté $r_P = OP$. Certains termes de l'éq. précédente ne dépendent pas du point P considéré, et on peut réécrire dans le cadre du DL effectué l'Eq.1 :

$$s(M) = \frac{K e^{i\phi_0}}{D} \int_P s(P) t(P) e^{-ik(xX + yY)/D} e^{ikr_P^2/(2D)} dx dy \quad (4)$$

ϕ_0 est un terme de phase dont on se fout parce qu'il dépend que de M donc quand on calculera l'intensité en M ça jarte.

Le régime où on peut négliger le terme quadratique $\propto r_P^2$ dans la phase correspond au régime de diffraction de Fraunhofer.⁴

2. On peut en fait prendre en compte la source dans le calcul cf Enoncé/ Corrige TD d'Optique 3, Ulm Montrouge 2020 Clément Sayrin. Ça permet de retrouver tous les régimes dans lequel on retrouve Fraunhofer. Le cas classique de l'onde plane incidente où on regarde à l'infini ou très loin de l'objet diffractant ET le cas où on a pas besoin d'onde plane et on montre que la diffraction de Fraunhofer a lieu au voisinage de l'image géométrique

3. C'est un peu chelou le cas où on a un objet opaque et tout autre partie du plan qui laisse passer la lumière parce que les points P qui laisse passer la lumière ne sont plus compris dans un certain intervalle et donc on ne peut plus faire l'approximation présentée ici.

4. On devrait aussi ajouter à cette condition que $D \gg \lambda$ cf femto physique, mais ceci est dès lors vérifié qu'en on regarde en champ lointain dans les faits en expérience

$$kr_P^2/(2D) \ll 1 \rightarrow D \gg \frac{r_{\max}^2}{\lambda} \quad (5)$$

La condition précédente est donc vérifiée lorsqu'on est assez loin.

ODG : Pour $\lambda \sim 10^{-6}m$ (en gros rouge) et une taille d'ouverture a .

Si $a = 1cm$. $\rightarrow D \gg 100m$

Si $a = 100\mu m$. $\rightarrow D \gg 1cm$

Rmq : Si ce n'est pas vérifié, on est dans le régime de diffraction de Fresnel (mais alors on doit quand même avoir $D \gg \lambda$, ce qui est plutôt chill)

Dans ce régime, l'intensité au point M s'écrit donc :

$$I(M) \simeq C \left| \int_P s(P)t(P)e^{-ik(xX+yY)/D} dx dy \right|^2 \quad (6)$$

Où C est une constante qui dépend de la distance D , et de λ ($C = 1/(\lambda D)^2$)

Important : On est rigoureusement dans le régime de diffraction de Fraunhofer lorsqu'on observe à l'infini la diffraction d'un objet par une onde plane incidente. Un moyen d'obtenir parfaitement ce régime est d'utiliser une lentille convergente (appelée lentille de projection) qui permet de conjuguer l'infini et son plan focal image au niveau duquel on place notre écran.

On peut introduire les angles $\alpha = x/D$ et $\beta = y/D$, utiles car on est dans les conditions de Gauss, et introduire les vecteurs : $\mathbf{u} = (\alpha\mathbf{e}_x + \beta\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$ relatif à la direction entre l'objet et le point M de l'écran où l'on regarde, et un vecteur relié à la direction de l'onde plane incidente $\mathbf{u}_0 = (\alpha_0\mathbf{e}_x + \beta_0\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$. Enfin, puisqu'à un point M de l'écran est associée une seule direction $\mathbf{u}$, on peut écrire⁵

$$s(M) \propto \int_P t(x, y) e^{-ik(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{OP}} dx dy \quad (7)$$

Rmq : Quand on regarde à l'infini, définir le vecteur $\mathbf{u}$ n'est en fait pas un problème car on peut définir une direction à l'infini, et la formule précédente caractérise donc l'amplitude de l'onde diffractée à l'infini dans la direction $\mathbf{u}$. Cette vision permet d'aborder plus sereinement (quoique ? aha) le cas où on ajoute une lentille convergente. En effet, la lentille est un élément qui arrive *après* la formation de la figure de diffraction à l'infini dans *le résumé du trajet optique*, et elle permet de par ses propriétés, dans les conditions de Gauss, de conjuguer l'infini avec son plan focal image. Ainsi, elle permet de rétablir la notion de localisation de la tâche de diffraction relatif à l'ensemble des points M à l'infini et situés dans des directions différentes. En moins compliqué : elle permet de transcrire cette notion de pt M situé à l'infini mais caractérisé par une certaine direction en un point M' donné du plan focal image.

II Figures de diffraction

II.1 Cas de la fente rectangulaire

On envoie ici une onde plane en incidence plane qu'on prend normale à la surface d'une ouverture rectangulaire de largeur a et de longueur b . Pour ce faire, il suffit de disposer une source très loin, ou alors de placer cette source dans le plan focal objet d'une première lentille.

5. Cette réécriture permet de ne pas faire intervenir D explicitement (il est caché dans $\mathbf{u}$) et de voir le problème, comme associé à connaître l'amplitude de l'onde diffractée dans une certaine direction. On est tenté de l'utiliser direct pour le cas avec une lentille de projection, mais je suis pas sûr que c'est mega ok ... En tout cas on peut montrer que le cas avec une lentille permet de ne pas faire une approche qui émerge d'un DL : Cf calculs garing 2006 a l'ancienne avec les différences de marches..

Le but est de remonter à la figure de diffraction de Fraunhofer qu'on obtient sur l'écran, i.e. d'obtenir $I(M) = f(X, Y)$

Définition de la transmittance du système ici, produit de deux fonctions portes (on rappelle ce que c'est en faisant le graphe d'une des deux, ambiance 0 ou 1 quoi) selon x et y :

$$t(x, y) = \Pi_{[-a/2, a/2]}(x) \Pi_{[-b/2, b/2]}(y) \quad (8)$$

Ca nous permet de décomposer l'intégrale selon x et y , et c'est le même calcul :

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikxX/D} dx dy = -ia \operatorname{sinc}\left(\frac{kXa}{2D}\right) = -ia \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda} \frac{X}{D}\right) \quad (9)$$

$$I(x, y) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \frac{X}{D}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \frac{Y}{D}\right) \quad (10)$$

Rmq : Si on prend pas une incidence plane, la figure de diffraction sera juste décalée sur l'écran et il suffira alors de changer les abscisses de la fonction précédente, tq les $X \rightarrow X - X_0$ (i.e. $I = f(X - X_0, Y - Y_0)$)

On trace la courbe de l'intensité selon l'axe X par exemple $I=f(X)$, sinus cardinal au carré et on insiste sur le fait que l'intensité est concentré essentiellement dans la tache principale, et sur les valeurs d'annulation. Première annulation d'un coté : X_1 lorsque $\pi a X_1 / (\lambda D) = \pi$ donc pour $X_1 = \lambda D a$, et symetrie pour X_{-1}

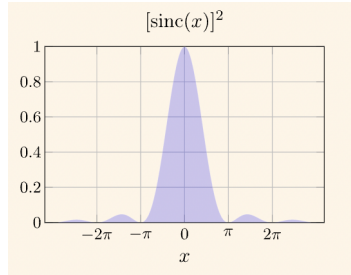


FIGURE 1 – aide pour tracer le jour J odg sinus cardinal .credits : jimmy roussel femtophysique.fr.

EXPERIENCE : Calcul de la taille de la tâche centrale $L = |X_1 - X_{-1}| = 2\lambda D/a$ pour revenir à la taille de la fente a . On prendra typiquement une fente. En fonction de si on voit bien les deuxiemes annulations du sinus cardinal, faire sur une plus grande distance la mesure, sinon se limiter aux premières annulations de part et d'autre de la tache centrale.

$$a = \dots \pm \dots \quad (11)$$

Rmq : On peut aussi ici faire une image avec une lentille qui a le bon gout de faire exactement la tache de fraunhofer, par contre etre au clair sur cette transition (cf ce qu'on a dit avant on conjugue l'infini blabla mais bon je sais pas si c ultra rigoureux cf discussions/footnote d'avant). Voir schéma cabart cf Fig.4 pour lier le calcul fait précédemment avec cette nouvelle configuration. ATTENTION, ici savoir estimer l' incertitude de la focale f j'imagine. Ici on a $L = 2\lambda f'/a$.

Discussions incertitudes. Petits angles cf $\sin \theta = X/D \simeq \theta$. Probleme de parallaxe (est ce que c'est bien le mot ?) pour mesurer D (de l'ordre du metre) à la regle.

- Cas d'une fente fine ($a \ll b$) (attention ne pas se gourer dans l'explication c'est un ptit peu subtil)
On retient notamment : fente verticale $\rightarrow$ tache horizontale

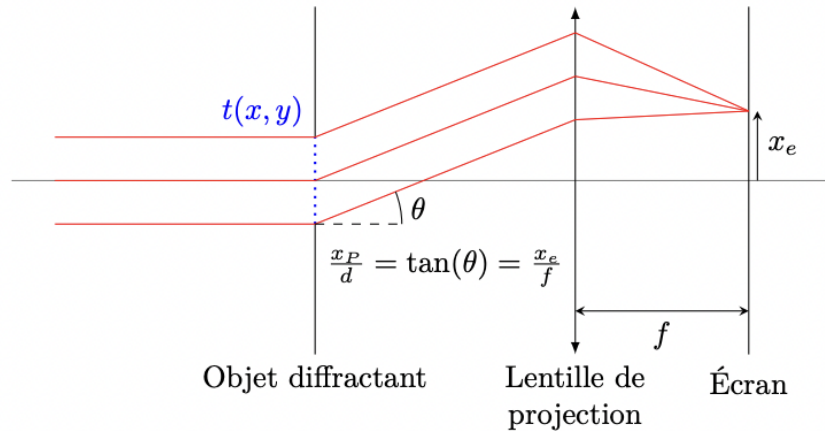


FIGURE 2 – credits : clement cabart

II.2 Cas d'une ouverture circulaire

Importance en optique cf diaphragme circulaire dans les montages.

Tache d'Airy.

Diffraction va induire dans tous les systèmes optiques une limite de résolution.

Critère de Rayleigh. Dessin.

Exemple application : Telescopes limite de résolution cf diamètre (voir leçon telescopes) / Microscope à 2 lentilles.

II.3 Theoreme de babinet

VOIR BOUQUIN de reference (champeau optique p.186 ou tallet ? ou houard ?)

Je mets quand meme quelques trucs dessus mais jsuis pas super clair (a voir si y a des gens qui le font bien ailleurs ?)

→ L'idée c'est de prévoir à quelle figure de diffraction d'un objet on s'attend lorsqu'on connaît la figure de diffraction de l'objet qui est complémentaire (en termes de transmittance).

Ex : petit trou circulaire et un petit disque genre tête d'épingle tel que la transmittance des deux soit complémentaires.

$$t_1(x, y) + t_2(x, y) = 1 \quad (12)$$

Bon, là il faudrait être plus précis mais on va le faire rapidement dans un cas simple où on a juste notre objet et une lumière incidente :

L'idée, c'est que "La superposition des deux pupilles complémentaires est identique à une ouverture non limitée et, donc, ne présentant pas de phénomène de diffraction."

On fait donc 3 dessins, avec trou circulaire, disque et un plan sans rien, vide qui laisse passer tranquille la lumière et qui correspond à la somme des deux transmittances précédente, égale à 1. Dans les deux premiers cas on sait qu'on va avoir de la diffraction et on dessine par exemple le vecteur $\mathbf{u}$ associé au signal diffracté dans une direction $\mathbf{u}$ différente de la direction de l'onde incidente $\mathbf{u}_0$

En dehors de la direction de l'onde incidente, le cas où on a un faux plan, ie sans rien avec $t = 1$ nous dit que $s(\mathbf{u})$ est nulle en dehors de la direction de l'onde incidente.

Or, on avait $t_1(x, y) + t_2(x, y) = 1 (= t)$, et donc $s_1(\mathbf{u}) + s_2(\mathbf{u}) = s(\mathbf{u})$ (cf principe de Huygens Fresnel). Ainsi $s_1(\mathbf{u}) = s_2(\mathbf{u})$, en dehors de la direction de l'onde incidente. Et donc, en particulier $I_1 u = I_2(u)$.

→ "Les intensités associées à la diffraction de l'un des deux objets sont donc les mêmes pour toute direction distincte de celle de l'onde incidente." (cf <https://web.cortial.net/babinet/babinet1-2.html>)

IMPORTANT : Mais est-ce que c'est équivalent avec l'énoncé standard :

(cf wiki :) En physique, le principe de Babinet est un théorème portant sur la diffraction. Il stipule que la forme d'une figure de diffraction est la même, **en dehors de l'image géométrique**, si elle est obtenue à partir d'un corps opaque ou de son « conjugué », obtenu en perçant une plaque aux emplacements où se situe ce corps.

→ Ainsi : est-ce que "en dehors de l'image géométrique" est équivalent à la direction de l'onde incidente ?? on se doute que y a une subtilité ici ??

III Optique de Fourier

cours de bonne qualité je crois mais bien venir :

Lien rapide ici

(crédits élément cabart)

L'idée de l'optique de Fourier est simple : dans le plan "à l'infini", on a accès de manière stricte à la TF de l'objet. Si on utilise une lentille pour projeter, la TF se retrouve dans le plan focal image de la lentille, ce qui veut dire que l'on va pouvoir agir dessus. Si on place des éléments opaques dans ce plan, on ne va plus agir sur des parties de l'image de notre objet, mais bien sur sa transformée de Fourier. On va donc pouvoir faire du filtrage, comme vous l'avez déjà vu par exemple en électronique. Ici néanmoins, on ne passe pas le filtre en fréquence temporelle mais en fréquence spatiale.

De manière générique, les éléments de l'objet correspondant à des variations spatiales de taille a sont associés à une tache de diffraction de taille typique $\lambda f'/a$. Ainsi, les variations "haute fréquence" (associé à des détails de plus en plus petit) sont ainsi éloignées du centre dans le plan de Fourier, les basses fréquences étant au centre.

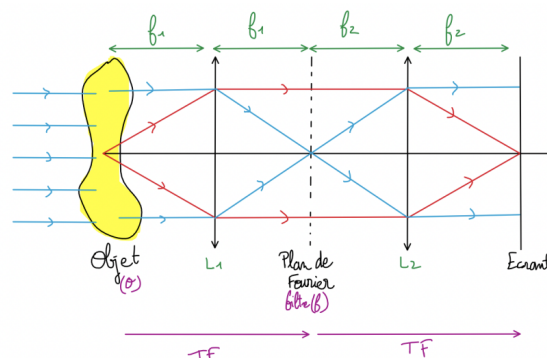


FIGURE 8 – Montage $4f$

FIGURE 3 – crédits : sylvio rosseti

Concrètement, on peut réaliser un montage $4f$:

1. On se débrouille pour arriver avec une onde plane (monochromatique i guess aussi ?) incidente. sur l'objet. En gros, soit on fait ça avec une source dans le plan focal objet d'une lentille, soit on place la source très loin.

2. On a la transformée de fourier de la transmittance t de l'objet, $TF(t_{objet})$ dans le plan focal image de la première lentille L_1 , aussi appelée plan de Fourier.

3. On ajoute dans ce plan un filtre, de tel sorte que le signal en sortie, juste avant propagation soit $\propto TF[t_{objet}] \times t_{filtre}$.

4. C'est la partie tricky : on peut dire qu'on observe sur l'écran la "TF de l'image dans le plan de fourier ?". Pour être rigoureux, voir cours venir l'expression exacte et on tombe finalement pour l'écran sur un calcul de type convolution (avec image inversée en gros jcrois). voir p.26 du cours donné en intro de cette partie : [Lien rapide ici](https://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/physique-animee-filtrage-spatial.xml)

- Filtrage passe bas (petite ouverture circulaire)

- Filtrage passe haut (obstacle circulaire genre tête d'épingle)

<https://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/physique-animee-filtrage-spatial.xml> Lien rapide ici

Filtrage passe bas : On place une ouverture circulaire au centre du plan de Fourier.

P.331 présentation générale optique fourier

en particulier p.336 Jolidon 1 paragraphe sur les filtrages.

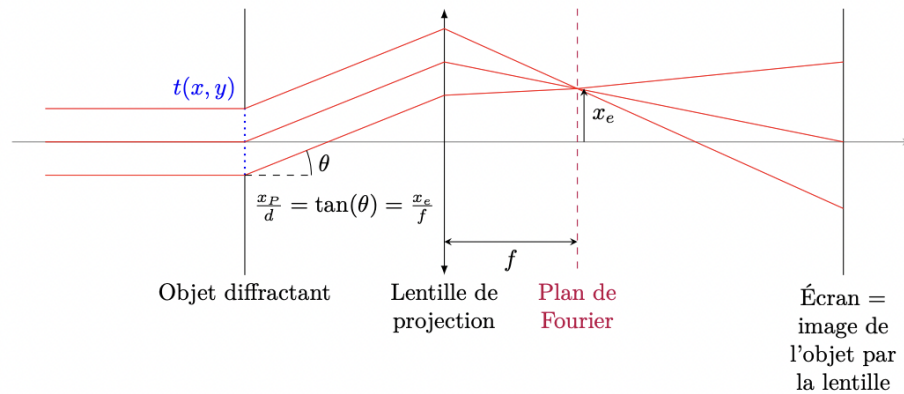


FIGURE 4 – (credits : clement cabart.) WARNING CHELOU Ici je le mets, ça correspond au dessin du jolidon 1, p.331 1 il me semble que c'est le cas où on prend une distance D très grande entre le plan de fourier et l'écran MAIS CHELOU CAR ici on a pas d'onde incidente plane !!! DONC JE SAIS PAS CE QU'IL SE PASSE SUR L'ÉCRAN VRAIMENT