

LP 40 : Mouvement brownien

Sadek Al-Jibouri et Isabelle Safa

Niveau : L2

Prérequis

- Principe fondamental de la dynamique
- Constante des gaz parfaits
- Probabilités (espérance, variance d'une variable aléatoire)
- Force de frottements fluides
- Diffusion particulaire (loi de Fick)

Expériences

- ☞ Mesure par mesure de capacité

Références

Table des matières

1	La marche au hasard	1
1.1	Formalisme	1
1.2	Equation de la diffusion 1D	2
1.3	Propriétés de l'équation de diffusion	2
2	L'expérience de Jean Perrin	3
2.1	Description de l'expérience	3
2.2	Loi de Stokes	3

Introduction

1821 Robert Brown : vidéo
1913 *Les Atomes*, Jean Perrin : Prix Nobel 1926

1 La marche au hasard

1.1 Formalisme

On considère un ensemble de particules dans un fluide.

Hypothèses :

- Leur mouvement est uniquement dû aux chocs entre elles.
- Entre deux chocs, aucune force ne s'applique sur les particules.

- Pour une particule, on définit τ , le temps moyen entre deux chocs et l , le libre parcours moyen = la distance moyenne parcourue entre deux chocs.
- Les chocs sont élastiques : la quantité de mouvement est conservée (en norme) lors du choc.
- Après le choc, la direction de la vitesse de la particule est aléatoire. Le processus est *sans mémoire*.

Pour un mouvement 1D, la particule en x à l'instant t sera soit en $x - l$, soit en $x + l$ à l'instant $t + \tau$, avec la même probabilité $1/2$. (schéma + simulation : on peut s'attendre à une espérance nulle)

1.2 Equation de la diffusion 1D

Pour obtenir cette équation, on calcule $p(x_n = nl, t_{k+1} = (k+1)\tau)$ la proba de se trouver en x_n au temps t_{k+1} .

$$p(x_n, t_{k+1}) = \frac{1}{2} (p(x_{n+1}, t_k) + p(x_{n-1}, t_k)) \quad \text{d'où}$$

$$p(x_n, t_{k+1}) - p(x_n, t_k) = \frac{1}{2} (p(x_{n+1}, t_k) - 2p(x_n, t_k) + p(x_{n-1}, t_k))$$

DL à l'ordre 1 en τ , ordre 2 en l :

$$\frac{\partial p}{\partial t} \tau = \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

et on définit le coefficient de diffusion $D = \frac{l^2}{2\tau}$.

1.3 Propriétés de l'équation de diffusion

X variable aléatoire "position". Son espérance sur un grand nombre de réalisations :

$$\langle X \rangle(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, t) dx$$

qu'on calcule grâce à sa dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle X \rangle}{dt} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\partial p}{\partial t} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Dx \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dx \\ &= \left[Dx \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} D \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad \text{par IPP} \\ &= 0 \quad \text{car } p \text{ est à décroissance rapide (tend vers 0 plus vite que toutes les puissances de } x \text{ quand } x \text{ tend vers } \pm\infty) \end{aligned}$$

Si on part d'une position initiale nulle, on a donc $X(t) = 0$.

Variance de X :

$$\langle X \rangle^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p dx$$

et grâce à des calculs similaires au précédent, on obtient

$$\langle X \rangle^2(t) = 2Dt$$

Phénomène lent : en \sqrt{t} .

Généralisation à 2D, 3D :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \Delta p$$

2 L'expérience de Jean Perrin

2.1 Description de l'expérience

Granules en suspension dans un fluide (diapo) à l'équilibre ; régime stationnaire (en fait j'y pense mtn le régime stationnaire c'est pas un équilibre).

Distribution de concentration selon la hauteur Maxwell Boltzmann :

$$c(x) = c(0) e^{-\frac{m^*g}{RT} N_a x}$$

où m^* est la masse effective tenant compte de la poussée d'Archimède pour une particule : $m^* = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_p - \rho_l)$.

2.2 Loi de Stokes

(schéma au tableau flux)

Flux loi de Fick : $\mathbf{j}_F = -D \frac{\partial c}{\partial x} \mathbf{u}_x$

PFD sur une particule :

$$m \frac{dv}{dt} = m^* \mathbf{g} - f \mathbf{v}$$

Soit, en régime stationnaire : $\mathbf{v} = \frac{m^* \mathbf{g}}{f}$

Flux dynamique : $\mathbf{j}_D = c \mathbf{v} = c \frac{m^* \mathbf{g}}{f} (-\mathbf{u}_x)$

Régime stationnaire : $\mathbf{j}_F + \mathbf{j}_D = \mathbf{0}$

$$-D \frac{\partial c}{\partial x} = c \frac{m^* \mathbf{g}}{f}$$

$$c(x) = c(0) e^{-\frac{m^* g}{f D} x}$$

qu'on compare à la formule de Maxwell-Boltzmann pour retrouver la *loi de Stokes* :

$$\frac{1}{f D} = \frac{N_a}{R T}$$

avec le coeff de frottements fluides : $f = 6\pi\eta r$.

Conclusion

Ouverture convection

Questions

- **Variance pour une grandeur aléatoire quelconque ?** $\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ Pourquoi avoir parlé de la variance plutôt que de l'écart quadratique moyen ? Quel sens physique tu donnes aux deux ? Variance permet de déterminer comment nos données sont distribuées autour de l'espérance. Un peu du mal à voir pour l'écart q m
- **Dans ta simu, on voit un écart au modèle. Est-ce que c'est normal ou est-ce qu'il y a une erreur de simu ?** C'est de plus en plus correct au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de réalisations. **Comment ça s'en rapproche ? Il y a une loi ?** TCL, incertitude décroît en...

- **Pourquoi tu choisis d'appeler ton 1) Marche au hasard et pas Marche aléatoire?** Pas de raison particulière, on utilise les deux... Aléatoire correspond au formalisme (variable aléatoire, processus aléatoire). Pas peur que ça ajoute de la confusion ?
- **À quel point ça reproduit bien ce qu'on retrouve dans les expériences, ce genre de modèle?** Equations continues qu'on obtient à la fin permettent de s'abstraire du cadre discret pris au début. Modèle pratique mais pas vraiment ce qu'il se passe. **Modèle plus développé? Différences au niveau de certaines valeurs moyennes, variances...? Formule avec la loi de Stokes toujours valide?**
- **À l'échelle micro, quantité de mvt bien conservée lors des chocs?** Non, j'imagine que c'est plutôt l'énergie globale qui est conservée, mais qu'on peut avoir des transferts d'énergie au sein de l'ensemble de molécules. Ec vers Erotation, absorption, rayonnement... Hypothèse de qté de mouvement uniquement sous forme de translation fausse, mais suffisant pour le modèle.
- **Nom général processus sans mémoire?** Chaîne de Markov
- **En considérant un espace infini, au niveau de la trajectoire, est-ce que tu vas repasser une infinité de fois par l'origine, est-ce que tu vas t'en éloigner?** 1D et 2D on repasse une infinité de fois par tous les points, 3D on s'en éloigne à tout jamais. Pose des pb parce que simus 2D représentent pas ce qu'il se passe en 3D.
- **Comment il obtenait ses granules de $1\mu m$ de diamètre, Jean Perrin? Ou en tout cas des trucs homogènes?** Il essaie d'en suivre un seul... Bon, ça corrige pas tout le pb. Je sais pas. Gomme de bute? Dissoute dans l'alcool, émulsion. Sinon, mastic : résine dissoute dans l'alcool. Laisse reposer, centrifuge : lui permet de séparer les tailles.
- **Comment il observait ses résultats?** Chronographe? Eclairer puis projette.
- **Comment on mesurait D?** Eloignement moyen à l'origine pour un temps donné : $L = \sqrt{2Dt}$. **Important de le dire, pcq c'est là qu'intervient le mouvement brownien...**
- **Idée échelle de temps pour d'autres phénomènes de transport plus rapides?** Disons vent, m/s ou au moins cm/s. OdG diffusion de l'ammoniac dans l'air : 1 cm/min. Encore plus lent aux grands temps. Thé dans l'eau sur plusieurs jours, alors que la convection permet d'avoir un truc homogène rapidement.
- **Manip élèves?** Manip originelle, observer au microscope directement du pollen dans de l'eau. **Facile à préparer?** Je sais pas, ça m'a pas l'air trop dur... Graisse dans le lait? Il faudrait des grains petits... **ça s'appelle des colloïdes, non? Manip en L3. Le lait ça marche aussi, mais moins bien.**
- **Adaptation niveau lycée?** Plus qualitatif, sans la loi de Fick. Pour la proba normalement iels ont les outils d'espérance et de variance (même avec les calculs?) En Term iels font les équations différentielle... Etude quantitative, plus axée sur l'histoire et les expériences. (ens sci!)
- **T'as cité deux exemples d'expériences de Jean Perrin. T'en as d'autres sur les treize?** Détermination du nombre de Faraday, permet de remonter à la charge électronique. *Youssef donne la liste entière.*
- **Qu'est-ce qui est vu au niveau L2 sur la diffusion particulaire?** Loi de Fick, phénoménologique; équation de diffusion. Pas besoin d'avoir vu énormément de choses avant cette leçon-là. Je pense que la diffusion thermique ça vient après.
- **Langevin a aussi étudié le mvt brownien après JP. Tu sais ce qu'il a apporté?** Equation de Langevin, un peu alternative au modèle de la marche aléatoire. Force équivalente aux chocs, bruit blanc gaussien. Donne une meilleure approx pour la diffusion. Permet d'ajouter les forces de dérives. **Il a bcp travaillé à ajouter des termes stochastiques dans les eq de Newton. Ca a amené à des eq plus générales : Fokker-Planck, vue en M2. Pas du tout au programme, tkt.**

- **Pourquoi pendant lgtmps devant les jurys d'agreg il fallait parler des atomes comme une hypothèse ? Pourquoi tant de précautions ?** Thèse équivalentiste : chimie est une science expérimentale, il ne faut pas essayer d'apporter des hypothèses au modèle si elles ne sont pas suggérées par les expériences. Marcellin Berthelot était équivalentiste et à l'éducation nationale à ce moment-là.
- **(Louis) Quelle diff tu fais entre stat et proba ?** Stat = grand nombre de réalisations ; proba = ? Plutôt MQ peut-être. (En fait la proba c'est suivant une loi (le modèle), alors que les stats c'est exp. Moyenne c'est le terme stat, Espérance le terme proba)
- **Tiens ça me fait penser : tu parles bcp d'aléatoires. Dans les faits, est-ce que c'est aléatoire ou déterministe ?** Très grand nombre de particules + chaotique (grande sensibilité aux conditions initiales), donc imprévisible pour nous. Mais déterministe. **Exemples de phénomène véritablement aléatoire ?** La mesure en MQ. Pas du pseudo-aléatoire cette fois.
- **(Mathieu) Ca veut dire quoi "retrouver" la constante d'Avogadro ? C'est une convention...** L'idée c'est que si on définit cette constante, avec plein d'expériences différentes, on tombe *toujours sur la même valeur*. C'est ça qui compte.

Commentaires

- Diversité des supports : bien !
- Fais attention à rester sérieux...
- Définis bien dans quel espace vit X, dis dès le début qu'elle dépend du temps. C'est facile de perdre les gens sinon.
- Intro : 1827 pas 1821
- Pour le barycentre dans ta simu, persistance/origine fixée pour pouvoir comparer ?
- Précise bien que la variance c'est ça parce que la l'espérance est nulle
- Contenu : bien géré ton temps. Le plan est bien (aspects historiques, calculs, simulations, expérience...) Ca a l'air pas mal, jsp avec quoi comparer parce que la leçon est nouvelle. Approche historique ok. Peut-être retrouver les docs sur le TP de L3.
- Insiste sur l'importance du mvt brownien à la fin... Sinon ta ccl arrive un peu comme un cheveu sur la soupe. Il faut dire que la diffusion est modélisée par le mvt brownien. Insiste sur le lien entre les deux.
- C'est bien de passer au moins 2min sur la conclusion comme tu l'as fait
- Bosse les exp de JP si t'en parles autant. Peut-être parler un peu plus du contexte scientifique par exemple quand t'évoques son Prix Nobel.
- Bravo tableau, pas effacé la formule dont t'avais encore besoin [Maxwell-Boltzmann].