

Chapitre 6

Guidage d'ondes

Le guidage d'ondes électromagnétiques est omniprésente dans le transport de l'information. Nous verrons dans ce chapitre les bases du guidage d'ondes avec l'utilisation de conducteurs "parfaits" pour leur réflexion totale.

6.1 Réflexion sur un métal parfait : nécessité d'une onde réfléchie

Reprenons le cas d'une onde plane arrivant sur un métal parfait occupant le demi-espace $x > 0$. On a :

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad \mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad (6.1)$$

L'onde réfléchie est de la forme :

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_0 \cos(\omega' t + k' x + \varphi) \quad (6.2)$$

avec une pulsation et un nombre d'onde *a priori* différents, une phase supplémentaire et une propagation selon les x décroissants.

En $x = 0$, la condition aux limites s'écrit :

$$\mathbf{E}_i(0, t) + \mathbf{E}_r(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) + \mathbf{E}'_0 \cos(\omega' t + \varphi) = 0 \quad \forall t \quad (6.3)$$

Comme la condition aux limites est vraie pour tout temps alors on a nécessairement on a $\omega = \omega'$ et donc par la relation de dispersion $k = k'$. De plus, pour la phase :

$$\varphi = \pi \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}'_0 \quad \text{ou} \quad \varphi = 0 \quad \mathbf{E}_0 = -\mathbf{E}'_0 \quad (6.4)$$

Donc :

$$\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}_0 \cos(\omega t + kx) \quad \mathbf{B}_r = -\frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_r = \frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + kx) \quad (6.5)$$

Au voisinage du métal on a $\mathbf{B} = 2\mathbf{B}_i$ qui vérifie bien les conditions aux limites.



Ainsi la réflexion sur un métal parfait a pour effet un déphasage de π pour le champ électrique et une simple réflexion sans déphasage pour le champ magnétique.

L'onde résultante vaut donc :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] \quad (6.6)$$

Le passage en complexe permet d'écrire :

$$\underline{\mathbf{E}} = -2i\mathbf{E}_0 \sin(kx)e^{-i\omega t} \quad \mathbf{E} = 2\mathbf{E}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \sin(\omega t) \quad (6.7)$$

De même on trouve :

$$\mathbf{B} = \frac{2\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos(\omega t) \quad (6.8)$$

Les champs sont de la forme $f(x)g(t)$, ce sont donc des ondes stationnaires. Les nœuds vérifient :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -q\frac{\lambda}{2} \quad q \in \mathbb{N} \quad (6.9)$$

Les ventres vérifient :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = -\left(q + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad q \in \mathbb{N} \quad (6.10)$$

Le vecteur de Poynting s'écrit alors :

$$\mathbf{\Pi} = \epsilon_0 c E_0^2 \sin(2\omega t) \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda}x\right) \mathbf{e}_x \quad (6.11)$$

La puissance transportée à travers S est alors :

$$\mathbf{p}_t = \epsilon_0 S c E_0^2 \sin(2\omega t) \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda}x\right) \mathbf{e}_x \quad (6.12)$$

Et la puissance moyenne vaut :

$$P = \langle \|\mathbf{p}_t\| \rangle = 0 \quad (6.13)$$

On a également que la charge surfacique est nulle car le champ transverse est nul. Le courant surfacique vaut :

$$\mathbf{j}_S = 2\epsilon_0 c \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \quad (6.14)$$

6.2 Réflexion sous incidence oblique

On considère une OPDM polarisée rectilignement au plan d'incidence. Elle arrive sur une métal parfait avec un vecteur \mathbf{k} faisant un angle i avec la normale au métal.

$$\mathbf{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_y \quad \mathbf{E}_r = E'_0 \cos(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} + \varphi) \mathbf{e}_y \quad (6.15)$$

Au voisinage du métal, le champ est nul donc comme précédemment, on a :

$$\omega = \omega' \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (6.16)$$

Donc $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ est orthogonal au plan d'incidence et au plan métallique. Comme les deux vecteurs d'onde ont la même norme d'après la relation de dispersion alors \mathbf{k}' est le symétrique de \mathbf{k} par rapport à la normale au plan métallique et au plan d'incidence. On retrouve la loi de la réflexion. La conclusion sur la phase est la même que précédemment. On trouve alors :

$$\mathbf{E} = -2E_0 \sin(kx \cos i) \sin(\omega t - kz \sin i) \mathbf{e}_y \quad (6.17)$$

$$B_y = 0 \quad (6.18)$$

$$B_x = \frac{2E_0}{c} \sin i \sin(kx \cos i) \sin(\omega t - kz \sin i) \quad (6.19)$$

$$B_z = -\frac{2E_0}{c} \cos i \cos(kx \cos i) \cos(\omega t - kz \sin i) \quad (6.20)$$

En espace limité, l'onde résultante est non plane, progressive et se propage selon z . On note :

$$\mathbf{K} = \mathbf{k} \sin i \mathbf{e}_z \quad v_\varphi = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{k \sin i} = \frac{c}{\sin i} > 0 \quad (6.21)$$

On a une onde stationnaire selon x avec des plan nœudaux :

$$x = q \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad q \in \mathbb{N} \quad (6.22)$$

Et des ventres tel que :

$$x = \left(q + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad q \in \mathbb{N} \quad (6.23)$$

On montre toujours que la charge surfacique est nulle et le courant surfacique vaut :

$$\mathbf{j}_S = 2\epsilon_0 c E_i \cos i \mathbf{e}_y \quad (6.24)$$

6.3 Guide d'ondes

6.3.1 Plan-plan

Deux plans métalliques, parfaits, illimités, parallèles, distants de a . Les plans étant infinis selon les directions y et z on va se placer dans un plan perpendiculaire aux deux plans du guide d'onde et propager une onde selon z . On place un plan en $x = 0$ et un plan en $x = a$.

Modélisation et solutions

On envoie une OPPM dans ce guide d'ondes de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{K} faisant un angle i avec les plans. L'onde résultante est propagative selon z avec un vecteur d'onde :

$$\mathbf{K} = k \sin i \mathbf{e}_z \quad (6.25)$$

et on prend une onde est de la forme :

$$\mathbf{E} = E(x) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_y \quad (6.26)$$

qui est un mode transverse électrique (TE). Les modes transverses magnétiques fonctionnent de la même façon mais avec le champ magnétique.

Les conditions aux limites vont donner la fonction $E(x)$: les plans métalliques doivent être des plans nodaux pour \mathbf{E} . La distance d'un plan nodal au plan $x = 0$ est :

$$x = q \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad q \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a = n \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (6.27)$$

Pour chaque entier n on a un mode de propagation avec :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{\pi}{a \cos i} \quad (6.28)$$

avec le champ :

$$\mathbf{E} = -2E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_y \quad (6.29)$$

Relations de dispersion

Pour trouver les relations de dispersion pour chaque mode, injectons la solution dans l'équation de d'Alembert. On trouve :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = K^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (6.30)$$

On obtient donc un filtre passe haut de pulsation de coupure $\omega_{cn} = \frac{n\pi c}{a}$.

- Si $\omega < \omega_{cn}$ alors \mathbf{K} est imaginaire et on a une onde évanescence.
- Si $\omega > \omega_{cn}$ alors on a propagation à la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cn}^2}{\omega^2}}} > c \quad v_g v_\varphi = c^2 \quad (6.31)$$

Les modes transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM) de rang n , noté TE_n et TM_n sont entièrement caractérisés par un unique entier n non nul.

On voit donc que l'onde est loin d'être plane au sens strict du terme. En effet son amplitude varie sinusoïdalement dans les plans $x = cte$ qui seraient les plans d'ondes naturels. Il existe des nœuds et des ventres dans les plans équiphases. Pour une pulsation ω donnée, il existe plusieurs modes de propagations, caractérisés par n , qui vérifient la relation de dispersion.

On remarque que pour une valeur de ω donné tout les n ne sont pas accessibles. Une onde de fréquence donnée ne peut se propager que dans un nombre fini de modes.

Calculons maintenant le champ magnétique associé. Pour cela il faut revenir aux équations de Maxwell. En effet les relations de structures ne sont pas valable dans le cas présent, l'onde n'étant pas une onde plane! En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, il vient que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \wedge \mathbf{E} \\ &= \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_z \\ &= 2E_0 \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_z + K2E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - Kz) \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

En intégrant par rapport au temps :

$$\mathbf{B} = E_{0,n} \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - Kz) \mathbf{e}_z - \frac{K}{\omega} E_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_x \quad (6.32)$$

L'onde se propage dans le vide mais pour autant elle n'est pas transverse! Ce sont les conditions aux limites qui modifient considérablement la structure de l'onde. Celle-ci ne dépend donc pas uniquement du milieu de propagation.

Décomposition en ondes planes

Remarquons que l'onde TE_n précédente peut se mettre sous la forme d'une superposition de deux ondes planes :

$$\begin{aligned} E_n &= -2E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_y \\ &= -E_0 \left[\sin\left(\omega t - Kz + \frac{n\pi x}{a}\right) + \sin\left(\omega t - Kz - \frac{n\pi x}{a}\right) \right] \mathbf{e}_y \\ &= -E_0 [\sin(\omega t - \mathbf{k}_{1,n} \cdot \mathbf{r}) + \sin(\omega t - \mathbf{k}_{2,n} \cdot \mathbf{r})] \mathbf{e}_y \\ &= \mathbf{E}_{1,n} + \mathbf{E}_{2,n} \end{aligned}$$

On y reconnaît la somme de deux vraies OOPH de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_{1,n}$ et $\mathbf{k}_{2,n}$ de même composante selon z mais de composante opposée selon z . Il n'est pas étonnant que la solution se décompose sous forme d'OOPH (puisque ce sont une base des solutions de l'équation de d'Alembert). Nous verrons par la suite pourquoi cette décomposition est intéressante. Ces ondes par contre vérifient la relation de structure et la relation des ondes électromagnétiques dans le vide.

Mode TM et mode TEM

Les calculs sont analogues à ceux menés dans la partie précédente dans le cas du mode TM et donne la même relation de dispersion. Un point important est l'existence d'une onde supplémentaire qui n'existe pas dans le cas des ondes TE. En effet dans le cas des ondes TM il existe une onde transverse électromagnétique (TEM). En effet, le groupe TE ne contient aucun mode TEM, puisque $n \in \mathbb{N}^*$ et B_z est non nul dès que n est non nul. C'est différent pour le groupe TM, puisque :

$$\mathbf{B} = B_0 e^{i(\omega t - Kz)} \mathbf{e}_y \quad (6.33)$$

$$\mathbf{E} = cB_0 e^{i(\omega t - Kz)} \mathbf{e}_x \quad (6.34)$$

définit bien une onde TEM qui est bien du groupe TM et qui de plus compatible avec les conditions aux limites. En effet ce conditions impliquent la nullité de B_x , E_y et E_z mais rien sur les autres composantes en raison de l'existence de charges et de courants surfaciques. En un sens, les ondes TM dans cette géométrie sont moins contraintes que les ondes TE. Cette onde est plane et vérifie la relation de dispersion $\omega = Kc$.

Il existe un certain nombre de résultats sur les ondes TEM :

- Un guide d'onde électromagnétique ne peut propager d'onde TEM que si il est constitué d'au moins deux conducteurs différents (nous aurons l'occasion de revenir sur ce résultat).
- Un mode TEM vérifie toujours la relation de dispersion des ondes planes dans le milieu illimité, même si cette onde n'est pas une onde plane au sens strict.
- Par opposition aux modes TE et TM, lorsque le mode TEM existe il est unique.

Propagation des modes et dispersion

Pour le mode TE_n comme pour le mode TM_n nous avons obtenu la relation de dispersion :

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (6.35)$$

C'est une relation de dispersion de Klein-Gordon qui dépend de l'indice n du mode. On est donc amené à identifier :

$$\omega_{c,n} = \frac{p\pi c}{a} \quad (6.36)$$

qui est la fréquence de coupure du mode n . En réécrivant cette relation de dispersion, on obtient :

$$cK^2 = \omega^2 - \omega_{c,n}^2 \quad (6.37)$$

$$\frac{cK}{\omega_{c,1}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{c,1}^2} - n^2} \quad (6.38)$$

comme tracé sur la FIGURE 6.1.

Si on envoie une onde de pulsation ω celle-ci va effectivement se déformer. En effet, l'onde va être transportée par différents modes qui ont des célérités différentes. On peut faire la construction comme sur la FIGURE 6.2 en exprimant les vitesses de phase et de groupe de chaque mode :

$$v_{\varphi,n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad v_{g,n} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2} \quad (6.39)$$

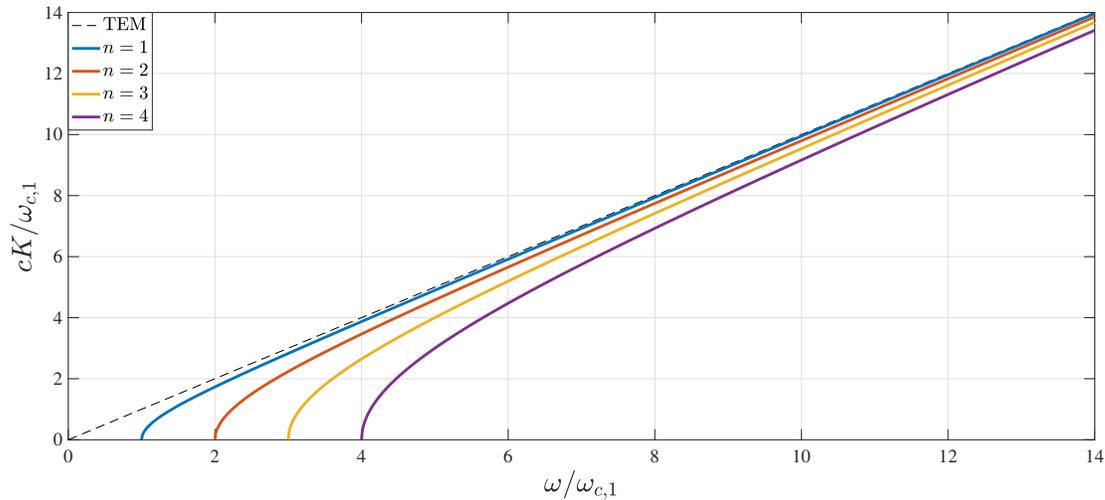


FIGURE 6.1 – Relation de dispersion du guide d'ondes électromagnétiques plan-plan. Pour une pulsation donnée, on va avoir plusieurs mode de propagation possible.

Pour un paquet d'onde à spectre fréquentiel étroit, les vitesses de propagation accessibles sont fortement élargies par la dispersion de mode, bien plus que la dispersion intramodale. Cela conduit à des fortes déformations voir même des dédoublements du signal. Les dimensions des guides d'ondes sont adaptés à la propagation de ces ondes pour s'assurer que ceux-ci restent monomodes.



On appelle **dispersion intermodale** ou **dispersion de mode** la différence de vitesse effective de propagation de deux ondes harmoniques de même pulsation mais portées par des modes différents. Elle est due aux conditions aux limites imposées à l'onde.

La **dispersion intramodale** caractérise la différence de vitesse effective de propagation entre deux harmoniques portées par le même mode (n fixé) mais de pulsation différentes. Elle est due aux propriétés intrinsèques du milieu (milieu dispersif) et aussi aux conditions limites.

La dispersion de mode est d'importance technologique car elle limite grandement l'information que peut transporter un guide d'onde, notamment les fibres optiques. Dans le cas illustré sur la FIGURE 6.3, on préfère utiliser un guide monomode.

En conclusion, si on considère l'ensemble des modes TE, la dispersion dans le guide d'onde est imposé par l'équation de Klein-Gordon, dupliquée autant de fois qu'il y a de modes. Si une OPPH du groupe TE de pulsation ω est forcée à l'entrée du guide, sa propagation par le guide dépend de sa fréquence :

- Si $\omega < \omega_{c,1}$, tout les modes sont amortis et l'onde ne se propage pas dans le guide.
- Si $\omega_{c,1} < \omega < \omega_{c,2}$ l'onde ne se propage que dans son mode fondamental, avec dispersion intramodale. La propagation se fait sans atténuation et le guide est monomode.
- Si $\omega_{c,n} < \omega < \omega_{c,n+1}$, l'onde est propagée par n modes, sans atténuation mais avec une double dispersion, à la fois intermodale et intramodale. Le guide d'onde est multimode.

Pour qu'une OPPH puisse se propager dans le guide, il faut que :

$$\begin{aligned} \omega &> \omega_{c,1} = \frac{\pi c}{a} \\ \frac{2\pi c}{\lambda} &> \frac{\pi c}{a} \\ \lambda &< 2a \end{aligned}$$

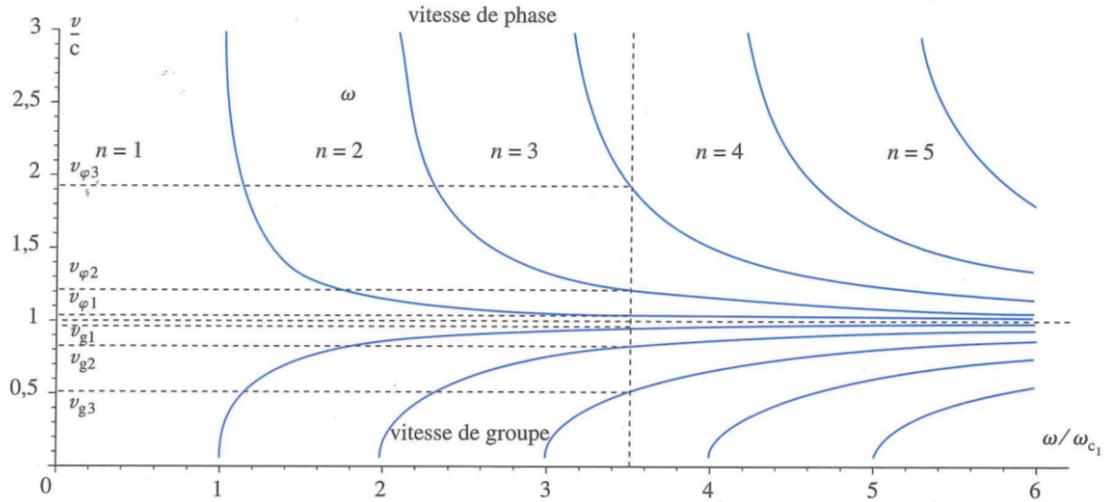


FIGURE 6.2 – Pour une valeur de ω donnée, il existe plusieurs modes de propagation possibles (ici trois) correspondant à des valeurs de k différentes et donc à des valeurs de vitesses de phase et groupe différentes. ceci induit de la dispersion intermodale.

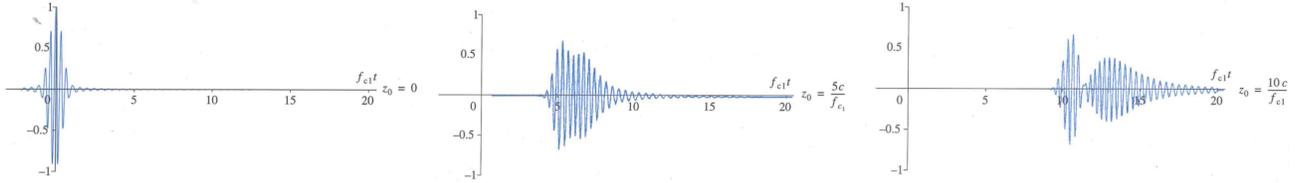


FIGURE 6.3 – Illustration de la dispersion intermodale : dédoublement d'un paquet d'ondes dans un guide pour les modes TE1 et TE2 avec $\omega = \frac{3}{2}\omega_{c,1}$.

On retrouve le critère géométrique sur la longueur d'onde de l'OPPH qui est très général. Le préfacteur dépend du guide d'onde et de sa géométrie. Attention cependant à ne pas interpréter ce critère comme une longueur qui rentre ou pas dans le guide d'onde puisque λ correspond à la longueur d'onde dans la direction de propagation.

6.3.2 Extension au guide rectangulaire

On ajoute deux plans de métal parfait parallèles distants de b . Une onde TE se propage selon z , soit \underline{E}_x , \underline{E}_y , \underline{B}_x , \underline{B}_y , \underline{B}_z les composantes complexes cherchées. On cherche B_z sous la forme :

$$\underline{B}_z = f(x)g(y)e^{i(Kz-\omega t)} \quad (6.40)$$

On a les équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad \nabla \wedge \underline{E} = i\omega \underline{B} \quad \nabla \wedge \underline{B} = -\frac{i\omega}{c} \underline{E} \quad (6.41)$$

On trouve alors les relations :

$$\underline{B}_x = -\frac{K}{\omega} \underline{E}_y \quad \underline{B}_y = \frac{K}{\omega} \underline{E}_x \quad (6.42)$$

$$-\frac{i\omega}{c^2} \underline{E}_x = \frac{\partial \underline{B}_z}{\partial y} = -iK \underline{E}_y \quad -\frac{i\omega}{c^2} \underline{E}_y = -\frac{\partial \underline{B}_z}{\partial x} = iK \underline{E}_x \quad (6.43)$$

On pose :

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - K^2 \quad (6.44)$$

d'où :

$$\underline{\mathbf{E}}_x = \frac{i\omega}{k_c^2} \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial y} \quad \underline{\mathbf{E}}_y = -\frac{i\omega}{k_c^2} \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial x} \quad (6.45)$$



Pour avoir une onde TEM il faut que B_z soit égale à 0 mais dans ce cas on a toutes les autres composantes nulles et donc il n'y a pas de telle onde qui se propage. Ce résultat est indépendant de la forme de la section droite du guide à condition qu'elle soit délimitée par une courbe fermée ce qui n'est pas le cas du guide plan-plan où un mode TEM est possible.

On a par ailleurs :

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \underline{\mathbf{B}}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + k_c^2 = 0 \quad (6.46)$$

Or, la somme d'une fonction de x et d'une fonction de y ne peut être constante quelque soit x et y sauf si $p, q \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f''}{f} = -p^2 \quad \frac{g''}{g} = -q^2 \quad p^2 + q^2 = k_c^2 \quad (6.47)$$

Alors :

$$f(x) = A \cos(px) + B \sin(px) \quad g(y) = C \cos(qy) + D \sin(qy) \quad (6.48)$$

Donc :

$$\underline{\mathbf{B}}_z = (A \cos(px) + B \sin(px))(C \cos(qy) + D \sin(qy))e^{i(Kz - \omega t)} \quad (6.49)$$

Conditions aux limites pour le champ électrique :

$$E_y(0 \text{ ou } a, y, z, t) = 0 \quad \partial_x \underline{\mathbf{B}}_z|_{x=0,a} = \partial_x f|_{x=0,a} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad p = m \frac{\pi}{a} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (6.50)$$

$$E_y(x, 0 \text{ ou } b, z, t) = 0 \quad \partial_y \underline{\mathbf{B}}_z|_{y=0,b} = \partial_y g|_{y=0,b} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \quad q = n \frac{\pi}{b} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.51)$$

Donc p et q sont quantifiés et ne peuvent être nuls simultanément sinon les composantes transverses des champs seraient nulles.

Chaque couple (n, m) détermine un mode de propagation noté TE_{mn} de champs :

$$B_z = B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - kz) \quad (6.52)$$

$$E_x = -\frac{\omega}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - kz) \quad B_y = \frac{K}{\omega} E_x \quad (6.53)$$

$$E_y = \frac{\omega}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - kz) \quad B_x = -\frac{K}{\omega} E_y \quad (6.54)$$

Les conditions sur \mathbf{B} sont alors vérifiées. La relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - K^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (6.55)$$

Chaque mode (n, m) est un filtre passe haut de pulsation de coupure :

$$\omega_{cn,m} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (6.56)$$

Dans la bande passante on a :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cnm}}{\omega}\right)^2}} > c \quad (6.57)$$

Condition monomode : pour $a > 2b$, le mode TE_{10} est le seul mode à se propager si $\omega_{c10} < \omega < \omega_{c20}$, le guide est monomode si $a < \lambda < 2a$. En ordre de grandeur, pour une fibre standard on a $a = 2.25b = 2.28$ cm soit $2.28 \text{ cm} < \lambda < 4.56 \text{ cm}$. Pour être sûr d'être monomode on prend $2.42 \text{ cm} < \lambda < 4.35 \text{ cm}$

Chapitre 7

Induction électromagnétique

L'induction est un exemple très important d'un phénomène électromagnétique. En effet, il s'agit d'un exemple typique des effets du couplage entre \mathbf{E} et \mathbf{B} . De plus, c'est un peu "l'antichambre" de l'électromagnétisme relativiste. Enfin, ces phénomènes physiques ont une importance conceptuelle et pratique avec une foule d'applications.

7.1 Énoncé historique de la loi de Faraday

On doit les lois de l'induction à Michel Faraday. La loi qui porte son nom date de 1831 :

Toute variation du flux du champ magnétique à travers un circuit mobile se traduit par l'apparition d'un champ électrique à rotationnel non nul vérifiant :

$$e = \oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d\phi}{dt}$$



où :

- e est la force électromotrice
- \mathbf{E}_i est le champ électrique vu dans le référentiel du circuit (pas forcément Galiléen)
- k est une constante qui dépend du système d'unités choisi.
- ϕ est le flux du champ magnétique vu dans le référentiel du laboratoire à travers le circuit.

Le signe "-" de la formule est la signature de la loi de Lenz qui stipule que le champ électromoteur créé par la variation de flux crée un champ magnétique qui tend à s'opposer au champ qui lui a donné naissance.

On parle donc d'induction lorsqu'il y a variation du champ magnétique. Pour cela deux façons de faire :

- On peut faire bouger le circuit avec le champ magnétique constant : Induction de Lorentz
- Le circuit ne bouge pas et le magnétique varie dans le temps : induction de Neumann

Les deux façons de faire sont complètement équivalentes et peuvent être unifiées grâce au principe de relativité, qui souligne le fait que l'entité physique intéressante n'est ni \mathbf{E} ni \mathbf{B} mais le couple (\mathbf{E}, \mathbf{B}) qui constitue le champ électromagnétique.

Dans le cas de l'induction on se place toujours dans le cadre de l'**ARQS magnétique** et donc on néglige le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell Ampère, cependant l'équation de Maxwell-Faraday reste inchangé.

7.2 Cas de l'induction de Neumann

L'équation de Maxwell-Faraday nous permet d'écrire le champ électrique comme un potentiel :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.1)$$

En calculant la circulation du champ électrique le long d'un circuit fixe et fermé \mathcal{C} :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{\mathcal{C}} \nabla V \cdot d\mathbf{l} - \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.2)$$

Le premier terme est nul car la courbe \mathcal{C} est fermée et comme \mathcal{C} est fixe on peut sortir la dérivée temporelle de l'intégrale :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} (\mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\phi(\mathbf{B})_{\Sigma}}{dt} \quad (7.3)$$

avec Σ une surface s'appuyant sur le contour \mathcal{C} . La seconde égalité est obtenue grâce au théorème de Stokes (cf chapitre 1). On désigne par $\phi(\mathbf{B})_{\Sigma}$ le flux de \mathbf{B} à travers la surface Σ . De plus, la circulation de \mathbf{E} s'identifie à celle de la force électromotrice qui met les charges en mouvement (à la charge près). On retrouve bien la loi de Faraday. Ici le champ \mathbf{E} n'a pas de circulation nulle le long d'une courbe fermée puisqu'il n'est plus le champ statique.

La séparation entre les 2 termes de \mathbf{E} avec l'un à circulation nulle et l'autre pas est a priori arbitraire. Cependant en se plaçant dans l'ARQS magnétique on la Jauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ et les équations donnant V et \mathbf{A} sont séparées et on peut identifier le champ induit (celui à circulation non nul) avec $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}_{\text{induit}} \quad : \quad \text{champ de Neumann} \quad (7.4)$$

7.3 Induction de Lorentz

On lit souvent que dans le cas où le circuit se déplace on a :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (7.5)$$

avec \mathbf{v}_e la vitesse d'entraînement du circuit et \mathbf{v}_r la vitesse relative des porteurs par rapport au circuit.

Dans le circuit règne un champ magnétique qu'on suppose permanent donc on a $\mathbf{E} = -\nabla V$. Le seul champ de force appliqué est la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (7.6)$$

Et donc la fem du circuit s'écrit comme le travail par unité de charge de la force de Lorentz :

$$e = \frac{1}{q} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (7.7)$$

En remplaçant :

$$e = - \oint_{\mathcal{C}} \nabla V \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v}_r \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (7.8)$$

La première intégrale est nulle car la courbe \mathcal{C} est fermée et la dernière également car \mathbf{v}_r est parallèle à $d\mathbf{l}$. Donc :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (7.9)$$

ainsi $\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}$ se substitue à $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. On peut réécrire cette expression à l'aide d'un flux en identifiant que ce produit vectoriel correspond à un flux coupé par unité de temps et donc d'une dérivée temporelle par rapport au temps du flux de \mathbf{B} . On parle alors de la règle du flux coupé et on a :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (7.10)$$

avec ϕ le flux de \mathbf{B} coupé par le circuit. Cette approche est celle faite en classe prépa et en licence qui omet beaucoup de choses en adoptant ce point de vue. Essayons de clarifier les choses.

7.4 Transformations des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} suivant les référentiels

Afin de pouvoir préciser l'induction et plus particulièrement le cas de Lorentz, il faut s'intéresser à la transformation du champ électromagnétique lors d'un changement de référentiel car dans ce cas le circuit est en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire où on effectue la mesure.

7.4.1 Cadre de l'étude

Nous nous placerons dans le cas non relativiste où la vitesse de déplacement du circuit \mathbf{v} a une norme bien inférieure à la vitesse de la lumière c . Nous supposons que les axiomes de la théorie de Newton sont vraies et entre autre que la force est invariante par changement de référentiel. On va supposer que la physique est Galiléenne.

Soit une charge q qui se déplace à une vitesse \mathbf{v} par rapport à R_0 et soit R_1 en translation rectiligne uniforme par rapport à R_0 . Dans R_0 on a des champs \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 qui agissent sur q :

$$\mathbf{F}_{/q,R_0} = q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) \quad (7.11)$$

Dans R_1 on a un champ \mathbf{E}_1 et \mathbf{B}_1 et la force qui agit sur q est :

$$\mathbf{F}_{/q,R_1} = q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B}_1) = q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) \quad (7.12)$$

où la deuxième égalité est donnée par l'axiome de Newton et la vitesse v_1 est simplement une composition de vitesse :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d}{dt}(\mathbf{O}_1 \mathbf{M}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_0 + \mathbf{O}_0 \mathbf{M}) = -\mathbf{v}_{R_1/R_0} + \mathbf{v}_{q/R_0} \quad (7.13)$$

Donc :

$$q(-\mathbf{v}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_1) = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0 + \mathbf{E}_0) \quad (7.14)$$

Ce qui mène à (après avoir remarqué que $\mathbf{v}_{R_1/R_0} = -\mathbf{v}_{R_0/R_1}$) :

$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{R_0/R_1} \wedge \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_0 &= \mathbf{B}_1 \end{aligned}$	Transformations \mathbf{T}_1
---	--

Le problème c'est que ces transformations sont FAUSSES! En effet ce n'est pas compatible avec :

- Une particule avec une vitesse rectiligne uniforme. En effet, dans son référentiel propre, elle crée un champ électrostatique mais pas de champ magnétique. Dans le référentiel du laboratoire, elle crée pourtant un champ magnétique non nul ce qui est en contradiction avec la transformation \mathbf{T}_1 .

- Si on considère maintenant un conducteur infini chargé uniformément et qu'on le déplace à une vitesse \mathbf{v}_1 . On a montré que le champ magnétique s'écrit en dehors du conducteur :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{R^2}{2r} j \mathbf{e}_\theta \quad (7.15)$$

avec R le rayon du conducteur, r la distance à laquelle on se place. On a de plus $j = \mathbf{v}_{R_1/R_0} \rho = v_{R_1/R_0} \rho \mathbf{e}_z$ avec ρ la densité de charges uniforme. De plus, on montre que $\mathbf{E} = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} \mathbf{e}_r$. Ainsi le champ magnétique créé par le conducteur en mouvement s'écrit $\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{E}$. Alors on en déduit que la transformation s'écrit dans ce cas là :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1 + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{E}_0 \end{array}} \quad \text{Transformations } \mathbf{T}_2$$

7.4.2 Transformation des champs

Pour effectuer proprement la transformation des champs il faut se placer en relativité restreinte en posant le quadrivecteur \mathbf{v}_C comme vecteur vitesse qui s'identifiera à la vitesse de translation d'un référentiel par rapport à l'autre \mathbf{v}_{R_1/R_0} . Soit $\mathcal{V} = (a, b_1, b_2, b_3)$ un quadrivecteur. On peut alors écrire :

$$\mathcal{V}' = \Lambda \mathcal{V} \quad (7.16)$$

On a alors la transformation :

$$a' = \gamma a - \beta \frac{\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{b}}{c} \quad (7.17)$$

$$\mathbf{b}' = \gamma \mathbf{b} - \gamma \frac{\mathbf{v}_C}{c} a + \frac{(\gamma - 1) \mathbf{v}_C \cdot (\mathbf{v}_C - \mathbf{b})}{c^2} \quad (7.18)$$

avec :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v_C}{c} \quad (7.19)$$

On peut prendre comme quadrivecteur : $(c\rho, \mathbf{j})$, (ct, \mathbf{r}) , $(E, \mathbf{p}c)$, $(V, \mathbf{A}c)$ ou encore $(\mathbf{E}, c\mathbf{B})$ qu'on va expliciter.

$$\mathbf{E}' = \underbrace{\gamma \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_C \wedge c\mathbf{B}}{c} \right]}_1 + \underbrace{(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}_C (\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{E})}{c^2}}_2 \quad (7.20)$$

$$c\mathbf{B}' = \underbrace{\gamma \left[c\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_C}{c} \wedge \mathbf{E} \right]}_3 + \underbrace{(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}_C (\mathbf{v}_C \cdot c\mathbf{B})}{c^2}}_4 \quad (7.21)$$

Chiffrons les différents termes tel que $\beta = \frac{v_C}{c} \ll 1$ (Galiléen).

$$\begin{aligned} 1 &\simeq \beta cB \\ 2 &\simeq (\gamma - 1) \beta^2 E = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \beta^2 E \simeq \beta^4 E \\ 3 &\simeq \beta E \\ 4 &\simeq \beta^4 cB \end{aligned}$$

Si on prend brutalement $c \rightarrow \infty$ alors :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B} + \left[\frac{\beta^2}{2} \mathbf{E} + \mathcal{O}(\beta^4 \mathbf{E}, \beta^3 c\mathbf{B}) \right] \quad (7.22)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{v}_C \wedge \frac{\mathbf{E}}{c^2} + \left[\frac{\beta^2}{2} \mathbf{B}c + \mathcal{O}(\beta^4 \mathbf{B}c, \beta^3 \mathbf{E}) \right] \quad (7.23)$$

Si on ne prend pas le terme d'ordre 2 en β on a pas tout à fait du type T_1 ou T_2 . Cela pose également deux problèmes :

- Pas stable car la transformation $R_0 \rightarrow R_2$ est différent de $R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$
- N'assure pas la covariance

En résumé, si on garde les termes en β dans le développement on suppose qu'on a pas de comportement du type $cB \gg E$ ou $cB \ll E$. Si on a aucun comportement pathologique :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B} \quad (7.24)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{E}}{c^2} \quad (7.25)$$

Mais ce n'est pas stable et n'assure pas la covariance des équations de Maxwell. Peut-on tout de même trouver une transformation de champ acceptable ?

Si on se place dans le cas $E \gg cB$ alors on a :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \quad (7.26)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{E}}{c^2} \quad (7.27)$$

Et on retrouve la transformation de type T_2 . Dans le cadre de l'ARQS électrique on retrouve une transformation précédente.

Si à présent on se place dans l'ARQS magnétique et qu'on prend $E \ll cB$ alors les transformation s'écrivent :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B} \quad (7.28)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad (7.29)$$

Et on retrouve la transformation T_1 .

À présent plaçons dans l'ARQS et regardons comme se transforme le quadri-vecteur $(\rho c, \mathbf{j})$:

$$\rho'c = \gamma\rho c - \frac{\gamma\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j}}{c} \quad (7.30)$$

$$\mathbf{j}' = \gamma\mathbf{j} - \frac{(\gamma-1)\mathbf{v}_C(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j})}{c^2} - \gamma\rho c \frac{\mathbf{v}_C}{c} \quad (7.31)$$

Dans le cas où $\|\mathbf{v}_C\| \ll c$, donc $\gamma \rightarrow 1$ alors :

$$\rho'c = \rho c - \frac{\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j}}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v_C}{c}\right)^2 \quad (7.32)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho c \frac{\mathbf{v}_C}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v_C}{c}\right)^2 \quad (7.33)$$

On a alors en ARQS magnétique que :

$$\rho'c = \rho c - \frac{\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j}}{c} \quad (7.34)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} \quad (7.35)$$

Et en ARQS électrique que :

$$\rho' = \rho \quad (7.36)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho\mathbf{v}_C \quad (7.37)$$

On peut montrer maintenant que dans l'ARQS les équations de Maxwell sont invariantes par transformation de Galilée de la forme :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}_C t \quad (7.38)$$

$$t' = t \quad (7.39)$$

Tout d'abord on a que :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad (7.40)$$

Et donc ainsi on a $\nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}'}$. Et pour le temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -v_{Cx} \frac{\partial}{\partial x'} - v_{Cy} \frac{\partial}{\partial y'} - v_{Cz} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial t'} \quad (7.41)$$

Soit,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - (\mathbf{v}_C \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \quad (7.42)$$

Cas ARQS électrique :

Supposons que dans le référentiel \mathcal{R} , en se plaçant en ARQS électrique, on a les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Et les transformations des champs s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{E}}{c^2} \end{aligned}$$

Si on transforme l'équation de Maxwell-Faraday, comme $\nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}'}$ et $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$, on a :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E} = \nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \mathbf{E}' = 0 \quad (7.43)$$

De même pour l'équation de Maxwell-Gauss comme on a $\rho = \rho'$ alors :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \quad (7.44)$$

Regardons maintenant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B} &= \nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \left(\mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{E}}{c^2} \right) = \nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \mathbf{B}' + \nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \left(\frac{\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{E}'}{c^2} \right) \\ &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 (\mathbf{j}' + \rho \mathbf{v}_C) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} - \frac{(\mathbf{v}_C \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \mathbf{E}'}{c^2} \end{aligned}$$

On utilise la relation vectorielle :

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B} &= \nabla'_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}_C}{c^2} (\nabla'_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}') - \left(\frac{\mathbf{v}_C}{c^2} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \right) \mathbf{E}' \\
&= \nabla'_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}_C \rho'}{c^2 \epsilon_0} - \left(\frac{\mathbf{v}_C}{c^2} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \right) \mathbf{E}' \\
&= \nabla'_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}' + \mu_0 \mathbf{v}_C \rho' - \left(\frac{\mathbf{v}_C}{c^2} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \right) \mathbf{E}'
\end{aligned}$$

Donc :

$$\nabla'_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}' + \mu_0 \mathbf{v}_C \rho' - \left(\frac{\mathbf{v}_C}{c^2} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \right) \mathbf{E}' = \mu_0 (\mathbf{j}' + \rho' \mathbf{v}_C) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} - \frac{(\mathbf{v}_C \cdot \nabla'_{\mathbf{r}}) \mathbf{E}'}{c^2} \quad (7.46)$$

Donc :

$$\nabla'_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{j}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} \quad (7.47)$$

De même on trouve que :

$$\nabla'_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad (7.48)$$

Pour l'ARQS magnétique, voir TD.



Ainsi l'ARQS (dans le cas électrique ou magnétique) est la limite dans laquelle les transformations galiléennes des champs font sens.

7.5 Courants de Foucault

On considère un conducteur de volume \mathcal{V} dans un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_a , créé par des sources extérieures. Ce champ magnétique induit un champ électrique \mathbf{E}_1 tel que :

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_1 + \frac{\partial \mathbf{B}_a}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (7.49)$$



Si le conducteur a une conductivité finie σ , alors des courants, appelés **courants de Foucault**, vont se former tel que :

$$\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}_1 \quad \nabla \wedge \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_a}{\partial t} \quad (7.50)$$

On peut analyser cela dans une géométrie simple : un conducteur cylindrique de rayon R et de hauteur h . On applique un champ magnétique $\mathbf{B}_a(t)$ parallèle à l'axe de révolution. En supposant que le champ magnétique s'identifie au champ appliqué alors on a en un point M distant de r du centre :

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{2} r \frac{dB_a}{dt} \mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{j}_f = -\frac{\sigma r}{2} \frac{dB_a}{dt} \mathbf{e}_\theta \quad (7.51)$$

Ainsi les courants de Foucault sont plus intenses en périphérie du conducteur et leur direction obéit à la loi de Lenz : le champ magnétique qu'il engendrent tend à s'opposer à \mathbf{B}_a .

Pour le cas d'un champ sinusoïdal pour voir la dépendance en fréquence :

$$\mathbf{B}_a = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z \quad (7.52)$$

on trouve :

$$\mathbf{j}_f = \frac{\sigma \omega}{2} r B_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_\theta \quad (7.53)$$

La puissance dissipée par effet Joule s'écrit :

$$\langle P \rangle = \left\langle \int d\tau \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E}_1 \right\rangle = \int d\tau \frac{\langle \mathbf{j}_f^2 \rangle}{\sigma} = \frac{\mathcal{V}}{8} \sigma \omega^2 B_0^2 R^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle \quad (7.54)$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\langle P \rangle}{\mathcal{V}} = \frac{\sigma \omega^2 B_0^2 R^2}{16}} \quad (7.55)$$

La puissance dissipée par les courants de Foucault est proportionnelle à ω^2 et donc possède une forte dépendance en la fréquence du champ magnétique appliqué. Ceci permet soit d'en tirer profit soit de tenter de l'éviter en fonction des applications.

Il faut faire attention car ici nous nous sommes contentés de l'ordre 1 des équations de Maxwell. En effet nous nous sommes limités au cas où le champ magnétique se confondait avec le champ magnétique appliqué, ce qui n'est pas strictement le cas puisque les courants induits vont créer un champ magnétique qui va lui aussi induire un courant, qui vont eux même créer un nouveau champ magnétique, etc... Dans le cas où $\mathbf{B} = \mathbf{B}_a$ n'est plus vérifié, typiquement pour les hautes fréquences il vaut mieux résoudre directement les équations de Maxwell en prenant en compte la loi d'Ohm.

Chapitre 8

Rayonnement dipolaire

Lorsqu'une charge est accélérée elle rayonne de l'énergie sous la forme d'un champ électromagnétique. Ce rayonnement a mis en défaut le modèle planétaire de Bohr mais permet de créer des champs électromagnétique à partir de courant sinusoïdaux : ce sont des antennes. Le calcul du champ électromagnétique est assez fastidieux et nécessite certaines hypothèses qu'il est important de préciser et développer.

8.1 Cadre de l'étude et hypothèses

Considérons le système suivant : un domaine \mathcal{D} limité dans l'espace et en son sein des charges et des courants. Quels sont les propriétés d'un tel système ? On notera les charges q_i qui auront une vitesse \mathbf{v}_i . Trois hypothèses sont nécessaires dans le cadre du rayonnement dipolaire :

- **Hypothèse 1** : Les charges sont non relativistes et on peut alors écrire le potentiel vecteur pour des charges continues ou en discrètes sous la forme :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} d\tau \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{PM}\|}{c}\right)}{\|\mathbf{PM}\|} \quad (8.1)$$

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in \mathcal{D}} \frac{q_i \mathbf{v}_i\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{P}_i \mathbf{M}\|}{c}\right)}{\|\mathbf{P}_i \mathbf{M}\|} \quad (8.2)$$

De plus nous avons la Jauge de Lorenz qui est valable $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ ainsi si \mathbf{A} est connu alors V l'est également avec :

$$V(M, t) = V(M, 0) - c^2 \int_0^t \nabla \cdot \mathbf{A}(M, t') dt' \quad (8.3)$$

Le problème est que dans le cas général, même dans une géométrie simple on ne peut pas calculer \mathbf{A} . Une simplification est alors nécessaire.

- **Hypothèse 2** : Si a est la taille typique de \mathcal{D} et O le barycentre des charges de la distribution alors on se place en un point M de l'espace suffisamment loin, c'est-à-dire tel que :

$$\|\mathbf{OM}\| \gg a \quad (8.4)$$

c'est l'hypothèse dipolaire.

- **Hypothèse 3** : On suppose que les retards entre les différents points des sources sont identiques. Prenons deux points P_1 et P_2 de la distribution distant de a . La différence de retard entre les deux points est a/c . Si les charges et les courants varient sur un temps typique τ alors on doit avoir :

$$\frac{a}{c} \ll \tau \quad \Rightarrow \quad a \ll \tau c \quad (8.5)$$

c'est l'ARQS des sources.

Si on a les trois hypothèses vérifiées alors il est possible de faire quelques calculs. Dans l'expression de \mathbf{A} l'hypothèse 2 nous permet de remplacer le $\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|}$ par $\frac{1}{\|\mathbf{OM}\|}$ et l'hypothèse 3 nous permet de remplacer dans la dépendance temporelle de \mathbf{jv}_i de $\|\mathbf{PM}\|$ par $\|\mathbf{OM}\|$. Et donc :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} d\tau \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right)}{\|\mathbf{OM}\|} \quad (8.6)$$

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in \mathcal{D}} \frac{q_i \mathbf{v}_i\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right)}{\|\mathbf{OM}\|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{OM}\|} \sum_{i \in \mathcal{D}} q_i \mathbf{v}_i\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right) \quad (8.7)$$

Définissons $t' = t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}$ alors on a :

$$\mathbf{v}_i\left(t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right) = \frac{d}{dt'} \left[\mathbf{r}_i\left(t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right) \right] \quad (8.8)$$

Soit :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{OM}\|} \frac{d}{dt'} \left[\sum_{i \in \mathcal{D}} q_i \mathbf{r}_i\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right) \right] \quad (8.9)$$

Or on peut définir le moment dipolaire de la distribution par :

$$\mathbf{P}(t') = \sum_i q_i \mathbf{r}_i(t') \quad (8.10)$$

Et la limite continue donne :

$$\mathbf{P}(t') = \int d\tau \rho(P, t') \mathbf{OP} \quad (8.11)$$

Et donc on a pour la description discrète ou continue :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{P}}(t')}{\|\mathbf{OM}\|} \quad \text{avec} \quad \dot{\mathbf{P}}(t') = \frac{d\mathbf{P}(t')}{dt'} \quad (8.12)$$

8.2 Expression du champ électromagnétique

Si le point d'observation M est situé à une grande distance de la distribution alors la connaissance du potentiel vecteur est suffisante pour déterminer le champ électromagnétique. En effet comme $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ on peut calculer \mathbf{B} et l'intégration de l'équation de Maxwell-Ampère permet de remonter à \mathbf{E} . Pour le calcul on fixe l'axe z selon le moment dipolaire de la distribution :

$$\mathbf{P}(t') = P(t') \mathbf{e}_z \quad (8.13)$$

Ceci n'est pas une perte de généralité car si on a un mouvement quelconque alors on pourra toujours par superposition linéaire exprimer le moment dipolaire de la distribution comme la somme de trois moments dipolaires de directions fixées. On a :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{P}(t')}{\|\mathbf{OM}\|} \mathbf{e}_z \quad (8.14)$$

On se place en coordonnées cylindrique (ρ, φ, z) ¹. On note $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ et θ l'angle que fait le vecteur \mathbf{r} avec l'axe z . Alors en utilisant l'expression du rotationnel en cylindrique :

$$\mathbf{B}(M, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(M, t) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi \quad (8.15)$$

1. On ne pourra pas confondre avec la densité de charge car elle n'apparaîtra pas.

et comme on a $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$, $t' = t - r/c$ et $\sin \theta = \rho/r$:

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{p}}{\partial \rho} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \rho} = \ddot{p}(t') \frac{\partial(t - r/c)}{\partial \rho} \frac{\partial r}{\partial \rho} = -\frac{\ddot{p} \sin \theta}{c} \quad (8.16)$$

Soit :

$$\mathbf{B}(M, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial \dot{p}}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi - \frac{\mu_0 \dot{p}}{4\pi} \frac{\partial(1/r)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{p}}{cr} + \frac{\dot{p}}{r^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \quad (8.17)$$

On peut le réécrire comme :

$$\boxed{\mathbf{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{\mathbf{p}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r^2} \right) \wedge \mathbf{e}_r} \quad (8.18)$$

On voit que la contribution majoritaire du champ magnétique provient majoritairement, à grande distance, aux modifications temporelles du dipôle électrique de la distribution.

Dans la zone où est calculé le champ on a par hypothèse que le courant est nul. On a donc par Maxwell-Ampère :

$$\mathbf{E}(M, t) = \mathbf{E}(M, 0) + c^2 \int_0^t dt'' \nabla \wedge \mathbf{B}(M, t'') \quad (8.19)$$

On peut effectuer le calcul et on trouve² :

$$\boxed{\mathbf{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \cos \theta \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} \right) + \frac{Q_{\text{tot}}}{r^2} \right] \mathbf{e}_r + \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right] \mathbf{e}_\theta} \quad (8.20)$$

où Q_{tot} est la charge totale de la distribution qui est nécessairement invariante au cours du temps pour assurer la conservation globale de la charge électrique.

Si à présent on revient sur les hypothèses qu'on a faites, à savoir l'observation à grande distance et négliger le retard entre deux points de la sources, on peut regarder en ordre de grandeur :

$$\frac{\dot{p}(t')}{r^2 c} \simeq \frac{p}{r^2 c \tau} \quad \frac{\ddot{p}(t')}{rc^2} \simeq \frac{p}{rc^2 \tau^2} \quad (8.21)$$

On peut alors envisager deux limites :

- **Zone de champ proche** ($a \ll r \ll c\tau$) : même si la distance est grande devant la taille de la distribution elle reste petite devant la distance parcourues par l'information sur une durée typique de variation. Dans ce cas on a :

$$\boxed{\mathbf{B}(M, t) \simeq \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}(t) \wedge \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad , \quad \mathbf{E}(M, t) \simeq \frac{3(\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}(t)}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r} \quad (8.22)$$

et les champs perçus sont alors conformes à ceux calculés dans une limite quasi-stationnaire. Ils décroissent au moins proportionnellement à l'inverse du carré de la distance aux sources. On note de plus que l'état électrique du système de sources est perçu sans retard ($\mathbf{p}(t)$ et non plus $\mathbf{p}(t')$).

- **Zone de rayonnement** ($a \ll c\tau \ll r$) : la distance d'observation est cette fois-ci très grande et le retard induit par la vitesse finie de propagation de l'information est primordial. On a alors :

$$\boxed{\mathbf{B}(M, t) \simeq \frac{\mu_0 \ddot{p}(t') \sin \theta}{4\pi cr} \mathbf{e}_\varphi \quad , \quad \mathbf{E}(M, t) \simeq \frac{\ddot{p}(t') \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\theta} \quad (8.23)$$

2. On pourra trouver certains détails de calculs dans le Pérez d'électromagnétisme.

et les champs perçus décroissent proportionnellement à l'inverse de la distance aux sources. Dans la zone de rayonnement on a donc des champs qui décroissent lentement.

Pour la majorité des applications, les situations physiques rencontrées sont celles de la zone de rayonnement et il convient de détailler ce cas. Les champs perçus à grande distance possèdent plusieurs caractéristiques :

1. Ils décroissent lentement (en $1/r$)
2. Ils sont anisotropes et sont nuls en tout point situé suivant l'axe du moment dipolaire
3. La dépendance temporelle en $t' = t - r/c$ indique que le champ créé à grande distance se propage suivant \mathbf{e}_r à une vitesse c
4. Localement, les deux champs sont perpendiculaires entre eux et le champ électromagnétique a une structure d'onde plane.
5. Le champ électromagnétique à grande distance est généré par les dérivées temporelles secondes du moment dipolaire, c'est-à-dire qu'il n'existe que si les charges en mouvement sont accélérées.

8.3 Comportement énergétique du rayonnement

8.3.1 Le vecteur de Poynting

En statique on veut en général interpréter $\frac{\epsilon_0}{2} E^2$ et $\frac{B^2}{2\mu_0}$ comme des termes d'énergie volumique. Soit \mathcal{V} un volume de l'espace et S la surface fermée qui le délimite. Notons $U(t)$ l'énergie électromagnétique stockée au temps t dans le volume. On a alors :

$$U(t + dt) = U(t) + \delta U(t) \quad (8.24)$$

où on a :

$$\delta U(t) = \delta U_{\text{surface}}(t) + \delta U_{\text{volume}}(t) \quad (8.25)$$

Soit $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)$ le vecteur dont le flux à travers $d\mathbf{S}$ indique la puissance transmise à \mathcal{V} à travers cette surface :

$$\delta e = -\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (8.26)$$

Soit $\sigma(\mathbf{r}, t)$ la source volumique d'énergie dans le volume $d\tau$ et pendant le temps dt :

$$\delta e = \sigma(\mathbf{r}, t) d\tau dt \quad (8.27)$$

Le bilan s'écrit alors :

$$U(t + dt) = U(t) + \iiint_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}' \sigma(\mathbf{r}', t) dt - \iint_S \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}', t) \cdot d\mathbf{S} dt \quad (8.28)$$

Donc :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}' \sigma(\mathbf{r}', t) - \iint_S \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}', t) d^3\mathbf{r}' \quad (8.29)$$

Ceci est vrai pour tout volume \mathcal{V} et donc en notant u la densité d'énergie volumique alors :

$$\boxed{\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sigma(\mathbf{r}, t) - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)} \quad (8.30)$$

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs des grandeurs que nous avons introduites. Pour cela il faut utiliser les équations de Maxwell :

$$(\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) \quad (8.31)$$

Or on a $\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A})$ donc :

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (8.32)$$

Au final on trouve :

$$-\nabla \cdot \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \quad (8.33)$$

Il faut comparer ça à :

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \Pi(\mathbf{r}, t) = -\sigma(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (8.34)$$

Le choix naturel pour est le *choix de Poynting* :

$$\boxed{\Pi = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \quad \sigma = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} B^2} \quad (8.35)$$

Mais on aurait pu prendre :

$$\Pi = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} + \nabla \wedge \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} \quad \sigma = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} B^2 - \nabla \cdot \mathbf{Y} \quad (8.36)$$

Qu'on appelle *jeu de Mac Arthur*.

8.3.2 Cas du rayonnement dipolaire

Dans le cas du rayonnement dipolaire à grande distance (c'est-à-dire dans la zone de rayonnement) on trouve directement que :

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{p}^2(t') \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{e}_r \quad (8.37)$$

On voit que dans cette expression l'anisotropie car il n'y a pas d'énergie rayonné le long de l'axe du moment dipolaire. La dépendance en $1/r^2$ montre la conservation de l'énergie.

Le diagramme de rayonnement consiste à tracer la fonction :

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\|\Pi(r, \theta, \varphi, t')\|}{\|\Pi_{\max}(r, \theta_{\max}, \varphi_{\max}, t')\|} \quad (8.38)$$

où Π_{\max} est la valeur maximale à r et t' fixé. Dans le cas présent on a :

$$F(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta \quad (8.39)$$

Ce qui correspond à deux lobes symétriques.

On peut regarder la puissance rayonnée par une sphère :

$$\mathcal{P}(t) = \oint_{\text{sphère}} \Pi(\mathbf{r}', t') \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta \frac{\ddot{p}^2(t) \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} = \frac{\ddot{p}^2(t')}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \sin^3 \theta \quad (8.40)$$

or l'intégrale vaut $4/3$ donc :

$$\boxed{\mathcal{P}(t') = \frac{\ddot{p}^2(t')}{6\pi \epsilon_0 c^3}} \quad (8.41)$$

On voit alors que la puissance varie comme le carré de \ddot{p} et également qu'elle ne dépend pas de r .

On peut alors traiter deux cas :

1. Cas d'une charge isolée : Dans ce cas là on a $\mathbf{P}(t) = \mathbf{OP}(t)q$ et donc en prenant l'accélération selon une direction on a : $\ddot{\mathbf{P}}(t) = q\ddot{z}(t)\mathbf{e}_z = qa(\mathbf{r}, t')\mathbf{e}_z$. On a donc :

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = \frac{a^2(\mathbf{r}, t')q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}} \quad (8.42)$$

Ainsi une charge accélérée rayonne de la puissance et c'est pourquoi le modèle planétaire de Bohr ne peut pas marcher dans ce cas là.

2. Dipole de Hertz qui vérifie :

$$\mathbf{P}(t') = qa \cos \omega t' \quad (8.43)$$

On se place alors dans le cas non relativiste, dipolaire ainsi que dans l'ARQS des sources c'est-à-dire que $a\omega \ll c$. On peut alors calculer la puissance rayonnée sur une période :

$$\langle \mathcal{P} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T P(t') dt' = \frac{a^2 \omega^4 q^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (8.44)$$

8.4 Rayonnement d'antenne

8.4.1 Antenne électrique

Une antenne est un morceau de conducteur avec des charges en mouvement. On notera l la taille du conducteur et S la section du conducteur. On a des charges q_i possédant chacune une vitesse \mathbf{v}_i alors on a :

$$\mathbf{P} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i \quad \mathbf{j} = \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i}{lS} \quad (8.45)$$

Et donc :

$$I = jS = \frac{\sum_i q_i \mathbf{v}_i}{l} \quad (8.46)$$

Soit :

$$\frac{d\mathbf{P}(t')}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left(\sum_i q_i \mathbf{r}_i(t') \right) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t') = I(t')l \quad (8.47)$$

Soit :

$$\ddot{\mathbf{P}}(t') = \dot{I}(t')l \quad (8.48)$$

La puissance rayonnée est donc donnée par :

$$\mathcal{P} = \frac{\dot{I}^2(t')l^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (8.49)$$

Ainsi pour gagner de la puissance à intensité fixé il faut augmenter la longueur du conducteur l mais si on augmente l on va perdre la condition d'ARQS $l \ll c\tau$. De plus si l'ARQS des sources est vérifiée on a :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left(l \sin \theta \frac{dI}{dt} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{e}_\theta \quad (8.50)$$

8.4.2 Antenne réelle

Si on prend une antenne rectiligne réelle, le problème est que celle-ci n'est pas dans l'ARQS. En revanche, on peut la décomposer en morceaux élémentaires qui le sont. On est toujours dans l'approximation dipolaire et donc pour une portion d'antenne dz située au point P :

$$d\mathbf{E}_P(M) = \frac{dz \sin \theta \frac{dI}{dt}(z)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{E}(M, t') = \int_P d\mathbf{E}_P(M) \quad (8.51)$$

On fait alors une TF temporelle du signal $I(z, t)$:

$$I(z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int d\omega e^{j\omega t} \mathcal{I}(z, \omega) \quad (8.52)$$

Pour une pulsation ω fixé ou si on considère que I est monochromatique alors on aurait $\mathcal{I}(z, \omega) = f(z)$.

On a alors :

$$I(t, z) = f(z) e^{j\omega t} \quad I(t', z) = f(z) e^{j\omega(t-r/c)} \quad (8.53)$$

On a alors :

$$\mathbf{E}(M, t) = \int_{\text{antenne}} \frac{dz \sin \theta f(z) j\omega e^{j\omega(t-PM/c)}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\theta \quad (8.54)$$

On est dans la zone de rayonnement et on a :

$$\|\mathbf{PM}\| = \|\mathbf{PO} + \mathbf{OM}\| = \|\mathbf{OM}\| \left(1 - 2 \frac{\mathbf{OM} \cdot \mathbf{OP}}{\|\mathbf{OM}\|^2} \right)^{1/2} \simeq r - z \cos \theta \quad (8.55)$$

$$\mathbf{E}(M, t) = \frac{j\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \int_{\text{antenne}} dz \sin \theta f(z) e^{j\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{z}{c} \cos \theta)} \mathbf{e}_\theta \quad (8.56)$$

$$\mathbf{E}(M, t) = \frac{j\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} e^{j\omega t'} \int_{\text{antenne}} dz \sin \theta f(z) e^{j\omega \frac{z}{c} \cos \theta} \mathbf{e}_\theta = \frac{j\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} e^{j\omega t'} \underbrace{\int_{\text{antenne}} dz \sin \theta f(z) e^{j \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \theta}}_{\mathcal{F}(\theta)} \mathbf{e}_\theta$$

Ainsi le champ électrique est proportionnel à la transformée de Fourier de la répartition de courant $f(z)$. Par exemple pour une antenne rectiligne on a :

$$f(z) = I_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(|z| - \frac{l}{2} \right) \right) \quad (8.57)$$

où λ est la longueur d'onde associé à la pulsation ω dans le vide.

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{\cos \left(\frac{\pi l}{\lambda} \right) - \cos \left(\frac{\pi l}{\lambda} \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta} \quad (8.58)$$

Ainsi pour avoir la résonance d'antenne il faut avoir une longueur d'antenne $l = \frac{n\lambda}{2}$.

Le lecteur pourra se demander comme faire pour avec 4 antennes on peut émettre dans une direction donnée.

8.5 Rayonnement de la matière

8.5.1 Expérience introductive

On place du lait (entier de préférence) dans une cuve à eau. On fait traverser un rayon, on constate :

- La lumière au bout est plus rouge
- On constate un effet de polarisation
- Une diffusion bleuté

8.5.2 Un modèle simple

On considère un atome soumis à un champ \mathbf{E} . On suppose que :

- Le noyau est très lourd par rapport aux électrons : pas de mouvement du noyau
- On suppose que les électrons répartis de façon sphérique et on note Z le numéro atomique de l'atome donc le nombre d'électron ou de protons.

Au repos les barycentres des charges positives et négatives sont confondus. Avec un champ électrique extérieur alors les barycentres ne sont plus confondus et on note $\mathbf{r} = \mathbf{PN}$ avec P le barycentre des charges positives et N le barycentre des charges négatives. Appliquons le PFD pour la sphère électronique :

$$Zm_e\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{P/N} + (-Ze)\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{\text{magnétique}} + \mathbf{f}_{\text{dissip}} \quad (8.59)$$

Regardons les termes un à un :

- Le second terme correspond à la force électrique du champ sur les électrons. Si la longueur d'onde λ du rayonnement est grande devant la taille du nuage électronique a alors on peut supposer que le champ est uniforme sur la sphère électronique et donc $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\text{ext}}(t)$ dans l'équation
- Le troisième terme est la partie magnétique de la force de Lorentz qui est négligeable si $\|q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\| \ll \|q\mathbf{E}\|$. Or on peut écrire que $\|\mathbf{E}\| \simeq v_\varphi \|\mathbf{B}\|$ avec v_φ la vitesse de phase de l'onde. On suppose alors que la vitesse des particules est très petite devant v_φ ce qu'il faudra vérifier par la suite.
- Le quatrième terme est un terme de dissipation dont on ne connaît pas a priori la forme. On prend alors une forme linéaire et simple $\mathbf{f}_{\text{dissip}} = -\frac{m_e}{\tau}\mathbf{v}$ ce qui donne une puissance dissipée en ω^2
- Pour exprimer le premier terme qui est la force électrostatique du noyau positif sur la sphère négative on va commencer par utiliser le principe de réciprocité et dire que $\mathbf{F}_{P/N} = -\mathbf{F}_{N/P}$. Or comme on considère le noyau comme ponctuel on a :

$$\mathbf{F}_{N/P} = \mathbf{E}_{\text{sphère}}(P).Ze \quad (8.60)$$

Or on montre facilement que :

$$\mathbf{E}_{\text{sphère}} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\mathbf{e}_r = \frac{-Zer}{4\pi a^3\epsilon_0}\mathbf{e}_r = \frac{-Ze\mathbf{NP}}{4\pi a^3\epsilon_0} \quad (8.61)$$

Et donc :

$$\mathbf{F}_{P/N} = -\mathbf{F}_{N/P} = \frac{(Ze)^2\mathbf{NP}}{4\pi a^3\epsilon_0} = \frac{-(Ze)^2\mathbf{PN}}{4\pi a^3\epsilon_0} \quad (8.62)$$

Donc le PFD s'écrit alors :

$$Zm_e\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Z^2e^2}{4\pi a^3\epsilon_0}\mathbf{r} - Ze\mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{Zm_e}{\tau}\dot{\mathbf{r}} \quad (8.63)$$

Si on introduit alors le moment dipolaire $\mathbf{P} = -Ze\mathbf{r} = -Ze\mathbf{NP}$ alors :

$$\ddot{\mathbf{P}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e}\mathbf{P} - \frac{Ze^2}{m_e}\mathbf{E}_{\text{ext}}(t) + \frac{\dot{\mathbf{P}}}{\tau} \quad (8.64)$$

On peut alors distinguer deux cas :

- Si on prend un champ électrique constant $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ et qu'on prend $\mathbf{P} = \epsilon_0\alpha_0\mathbf{E}_0$, où $\alpha_0 \simeq 4\pi a^3$ qui est à peu près le volume de la sphère. Si à $t = 0$ on coupe le champ alors l'équation de la forme :

$$\frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{P} = 0 \quad \omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e} \quad (8.65)$$

Et on a l'équation différentielle de relaxation de la polarisation et on voit apparaître τ comme le temps de relaxation.

- Si maintenant on se place en notation complexe pour voir la réponse en fréquence du système :

$$-\mathbf{P}_\omega \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} \mathbf{P}_\omega + \omega_0^2 \mathbf{P}_\omega = \frac{Ze^2}{m_e} \mathbf{E}_\omega \quad (8.66)$$

Et donc :

$$\mathbf{P}_\omega = \frac{\frac{Ze^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} \mathbf{E}_\omega \quad (8.67)$$

Puis pour remonter à $\mathbf{P}(t)$ on peut effectuer la TF inverse. On peut alors poser :

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i\frac{\omega}{\tau\omega_0^2}} \quad \alpha_0 = \frac{Ze^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2} \quad (8.68)$$

Et on obtient la polarisabilité du matériau en fonction de la fréquence et on peut tracer son module sur la FIGURE 8.1 qui a un comportement compliqué avec une résonance :

$$|\alpha(\omega)| = \frac{\alpha_0}{\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^{1/2}} \quad \tan \Phi = \frac{\frac{1}{Q^2} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \quad (8.69)$$

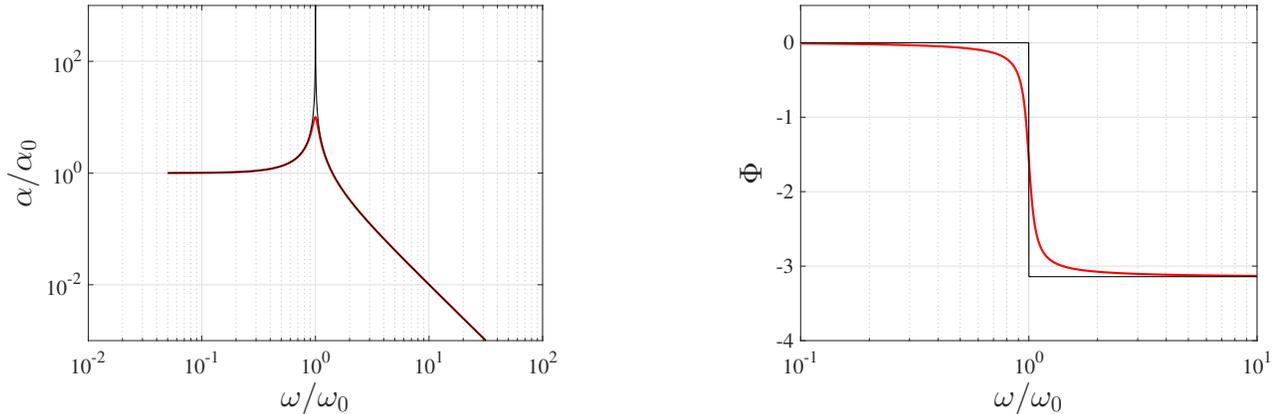


FIGURE 8.1 – Variation du module et de la phase de la polarisabilité normalisée $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ en fonction de la pulsation normalisée $\frac{\omega}{\omega_0}$. La courbe rouge correspond à un $Q = 10$ et la courbe noire à $Q = 10^6$.

On peut alors distinguer 3 régimes particuliers :

- **Régime de Rayleigh** ($\omega \ll \omega_0$) : Dans ce cas là : on trouve :

$$|\alpha(\omega)| \simeq \alpha_0 \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) \right) \quad \Phi = 0 \quad (8.70)$$

Lorsque les fréquences d'excitation sont faibles devant la fréquence propre de vibration de l'atome, le dipôle généré voit son amplitude contrôlée majoritairement par la susceptibilité statique et celui-ci oscille en phase avec le champ inducteur.

- **Régime de résonance** ($\omega \simeq \omega_0$) : La résonance a lieu lorsque $|\alpha(\omega)|$ est maximum c'est à dire pour :

$$\omega = \omega_r = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q^2} \right) \quad (8.71)$$

Or en pratique le facteur de qualité de l'oscillateur est très grand (10^8 pour le césium par exemple) et la fréquence de résonance s'identifie à la fréquence propre de vibration du nuage électronique. Dans le régime de résonance on a alors :

$$|\alpha(\omega)| \simeq \frac{\alpha_0 Q}{\left[1 + 4Q^2 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2\right]^{1/2}} \quad \Phi = -\frac{\pi}{2} \quad (8.72)$$

On remarque alors que pour $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, la polarisabilité de l'atome évolue de façon lorentzienne.

- **Régime de Thomson** ($\omega \gg \omega_0$)

$$|\alpha(\omega)| \simeq \alpha_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right) \quad \Phi = -\pi \quad (8.73)$$

Lorsque les fréquences d'excitation sont beaucoup plus grandes que la fréquence propre de vibration de l'atome alors l'amplitude du dipôle induit décroît proportionnellement au carré de la pulsation. Le dipôle induit est alors en opposition de phase avec le champ inducteur.

On peut maintenant calculer la puissance totale rayonnée par un dipôle :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{\omega^4 |E_\omega|^2 |\alpha(\omega)|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (8.74)$$

Dans l'expérience abordée en début de chapitre, le champ électrique employé appartient au domaine visible $\omega \simeq 10^{14}$ rad.s⁻¹ et les particules qui vont se polariser sous l'action du champ électrique sont des molécules lipidiques du lait. Si la quantité de lait introduite dans l'eau est faible alors ces molécules ne se regroupent pas sous forme de micelles géantes et leurs tailles restent petites devant les longueurs du spectre visible. On a alors $\omega_0 \simeq 10^{16}$ rad.s⁻¹ et nous sommes dans le cas $\omega \ll \omega_0$. La puissance rayonnée devient alors :

$$\mathcal{P}_{\text{rayRayleigh}} = \frac{\omega^4 |E_\omega|^2 \alpha_0^2}{12\pi c^3 \epsilon_0} \quad (8.75)$$

La puissance rayonnée par les dipôles, proportionnelle à ω^4 , est donc d'autant plus importante que la fréquence est élevée. Le rayonnement bleuté observé vient précisément de cela : les dipôles absorbent une partie du rayonnement incident et le réémettent sous forme de rayonnement dipolaire et dans tout l'espace. C'est pour les pulsations les plus importantes (correspondant au bleu) que ce phénomène est le plus important. Le faisceau de lumière blanche initial va donc au cours de son parcours dans la cuve, s'appauvrir petit à petit en rayonnement haute fréquence. Tout ceci est bien entendu à relier avec la couleur bleue du ciel ainsi que la couleur rouge du coucher de soleil. On peut également remarquer que la lumière diffusée est polarisée et ici encore les caractéristiques du rayonnement dipolaire permettent d'expliquer cette propriété : la lumière émise initialement est non polarisée et le champ électrique oscillateur est transverse. Si la direction de propagation est selon l'axe z alors des moments dipolaires sont excités de façon équiprobable selon la direction x ou y . Si la direction d'observation se fait selon l'axe x alors aucune puissance des dipôles ne nous parvient des dipôles excités suivant cette direction et donc le champ électrique reçu par l'observateur ne provient que des dipôles polarisés selon l'axe y qui émettent un champ électrique polarisé suivant cette direction : on a donc bien polarisation de la lumière.

8.5.3 Auto-consistance du modèle

On a pris comme force de dissipation une force proportionnelle à la vitesse des électrons. Est-ce que ceci est bien consistant avec la puissance rayonnée ?

A priori non car pour une excitation sinusoïdale on a la puissance mécanique dissipée en ω^2 alors que la puissance rayonnée par un dipôle est en ω^4 . On peut alors considérer deux situations physiques simples :

1. Le cas d'une charge uniformément accéléré. On peut alors comparer l'énergie mécanique de la particule à l'énergie rayonnée pendant un temps T :

$$E_{\text{ciné}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(aT)^2 \quad (8.76)$$

$$E_{\text{ray}} = \frac{q^2 a^2 T}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\tau_c}{T} E_{\text{ciné}} \quad \tau_c = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} \simeq 10^{-14} \text{ s} \quad (8.77)$$

Si l'accélération est constante sur un temps $T \gg \tau_c$ alors l'énergie rayonnée est une faible quantité d'énergie cinétique.

2. Sur un mouvement périodique de la forme :

$$d = d_0 \cos \omega_0 t \quad (8.78)$$

On a alors comme $T = 2\pi/\omega_0$:

$$E_{\text{méca}} = m\omega_0^2 d^2 \quad E_{\text{ray}} = \frac{q^2 d_0^2 \omega_0^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2\pi}{\omega_0} \simeq E_{\text{méca}} \frac{\tau}{T} \quad (8.79)$$

Ainsi pour des systèmes usuels, on a que le rayonnement est une faible perturbation.

On peut prouver que à faible perturbation la forme qu'on a prise est la bonne au premier ordre.