Examen final du 10 janvier 2014

1. Table des caractères de $\mathbb{H}_8$

Soit $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ formé des 8 éléments suivants : $\{\pm I, \pm A, \pm B, \pm C\}$ où $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$.

1. Donner la liste des classes de conjugaison de $\mathbb{H}_8$ avec leur cardinal.

2. Donner (avec justification) la table des caractères de $\mathbb{H}_8$.

2. Dual d'un groupe abélien fini

Soit G un groupe abélien fini. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de groupe de G dans $\mathbb{C}^*$, et on munit $\widehat{G}$ une structure de groupe en posant, si ϕ et ψ sont dans $\widehat{G}$, $(\phi\psi)(x) = \phi(x)\psi(x)$ pour $x \in G$.

1. Calculer $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ pour tout entier n non nul.

2. Montrer que si H et K sont deux groupes abéliens finis, $(\widehat{H \times K})$ est isomorphe à $\widehat{H} \times \widehat{K}$.

3. Montrer que G est isomorphe (non canoniquement) à $\widehat{G}$.

4. Montrer que l'application $u : G \to \widehat{\widehat{G}}$ définie par $u(x) = (\phi \mapsto \phi(x))$ est un isomorphisme.

3. Normes de Dedekind-Hasse

Soit A un anneau intègre. Une norme multiplicative sur A est une application $N : A \to \mathbb{N}$ telle que $N(ab) = N(a)N(b)$ pour tous a et b dans A, $N(a) = 0$ si et seulement si $a = 0$, et $N(a) = 1$ si et seulement si a est inversible. On note K le corps des fractions de A.

1. Soit k un corps et $A = k[X]$. Montrer que l'application N définie par $N(P) = 2^{\deg P}$ si $P \neq 0$, et $N(0) = 0$, est une norme multiplicative sur A.

2. Montrer que si N est une norme multiplicative sur A, elle s'étend de façon unique en une fonction $N : K \to \mathbb{Q}$ avec $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tous x et y dans K. Dans la suite on considérera indifféremment les normes multiplicatives comme étant définies sur A ou sur K.

3. Montrer que si A est factoriel, alors il existe une norme multiplicative sur A.

4. On dit qu'une norme multiplicative est une norme de Dedekind-Hasse si elle vérifie la propriété : pour tout $x \in K \setminus A$, il existe a et b dans A avec $0 < N(ax - b) < 1$.

a. Montrer que si A est euclidien et si son stathme ν est en même temps une norme multiplicative, alors c'est une norme de Dedekind-Hasse.

b. Montrer que A admet une norme de Dedekind-Hasse si et seulement si A est principal.

4. $\mathbb{Z}$-modules de type fini

1. Déterminer un système de représentants des classes d'isomorphisme de groupes abéliens de cardinal 540.

2. Soit $a \in \mathbb{Z}$, et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Soit M le sous-module de $\mathbb{Z}^3$ engendré par les colonnes de A. Décrire le module $\mathbb{Z}^3/M$ (on donnera son cardinal, son exposant et ses facteurs invariants).

5. Modules semi-simples

Soit A un anneau. On dit qu'un A-module M est semi-simple si tout sous-module de M admet un supplémentaire.

1. Montrer que si A est un anneau intègre qui n'est pas un corps, A n'est pas un A-module semi-simple.

2. Montrer que si M est un A-module semi-simple, tout sous-module de M est semi-simple.

3. Dans cette question A est supposé principal, et p désigne un irréductible de A.

a. Montrer que (p) est un idéal maximal de A.

b. Montrer que $(A/(p))^m$ est semi-simple pour tout $m \geq 0$.

c. Montrer que $A/(p^n)$ est semi-simple si et seulement si $n \leq 1$.

d. Soit M un A-module de type fini de torsion, et $M(p) = \{x \in M, \exists n, p^n x = 0\}$ sa partie p-primaire. Montrer que M est semi-simple si et seulement si $M(p)$ est semi-simple pour tout irréductible p de A.

e. Donner une description explicite des A-modules de type fini qui sont semi-simples.

4. Soit k un corps, V un espace vectoriel de dimension finie sur k, $u \in \mathrm{End}_k(V)$. **En utilisant les questions précédentes**, montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(1) tout sous-espace vectoriel de V stable par u admet un supplémentaire stable par u.

(2) le polynôme minimal de u est produit de polynômes irréductibles distincts.