Examen partiel

Jeudi 15 novembre 2012 – 14h-16h30.
Notes de cours et de TDs autorisées.
Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Problème.

Soit K un corps quadratique imaginaire. On note d un entier négatif sans facteur carré tel que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. On suppose que 2 n'est pas ramifié dans K et donc $d \equiv 1 \pmod 4$. De plus, l'anneau des entiers de K est $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z}$ où $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Pour $\alpha \in K$, on dénote par $\bar{\alpha}$ son conjugué sur $\mathbb{Q}$, ainsi $\bar{\omega} = 1 - \omega$.

Soit Cl_K le groupe des classes de K. On note $\mathcal{E}_0$, l'ensemble des extensions quadratiques de K auquel on ajoute le corps K et $\mathcal{E}$ le sous-ensemble des extensions non ramifiées sur K. (Note : $K \in \mathcal{E}$). Le but de ce problème est d'établir une bijection entre le sous-groupe $\tilde{\mathrm{Cl}}_K = \{\mathcal{C} \in \mathrm{Cl}_K : \mathcal{C}^2 = 1\}$ de Cl_K et $\mathcal{E}$.

1. On commence par mettre une structure de groupe abélien sur $\mathcal{E}_0$.
   (a) Soit F une extension quadratique de K. Montrer qu'il existe $\delta \in K^\times \setminus (K^\times)^2$ tel que $F = K(\sqrt{\delta})$.
   (b) En déduire que les éléments de $\mathcal{E}_0$ sont en bijection avec les classes de $K^\times/(K^\times)^2$. Pour $F \in \mathcal{E}_0$, on note $\mathcal{D}_F$ la classe de $K^\times/(K^\times)^2$ correspondante.

   On utilise la bijection $F \mapsto \mathcal{D}_F$ pour munir $\mathcal{E}$ d'une structure de groupe abélien. On note $\boxplus$ cette opération.

   (c) Quel est l'élément neutre du groupe $\mathcal{E}_0$?
   (d) Montrer que, pour F_1 et F_2 dans $\mathcal{E}_0$, on a $F_1 \boxplus F_2 = K(\sqrt{\delta})$ pour tout $\delta \in \mathcal{D}_{F_1}\mathcal{D}_{F_2}$.
   (e) Montrer que tout élément non trivial de $\mathcal{E}_0$ est d'ordre 2.

2. Soit F un extension quadratique de K. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K.
   (a) Expliquer pourquoi il existe $\delta \in \mathcal{D}_F$ tel que $\delta \in \mathcal{O}_K$ et $v_\mathfrak{p}(\delta) = 0$ ou 1.
   (b) Montrer que si $v_\mathfrak{p}(\delta) = 1$ alors $\mathfrak{p}$ est ramifié dans F.
   (c) Montrer que si $v_\mathfrak{p}(\delta) = 0$ et que $\mathfrak{p}$ ne divise pas 2 alors $\mathfrak{p}$ n'est pas ramifié dans F.
   (d) On suppose que $v_\mathfrak{p}(\delta) = 0$ et que $\mathfrak{p}$ divise 2.
      i. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tel que $\alpha^2 \equiv \delta \pmod{\mathfrak{p}}$.
      ii. Montrer qu'il existe $\kappa \in K$ tel que $v_\mathfrak{p}(\kappa) = -1$ et $v_\mathfrak{q}(\kappa) \geq 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de K distinct de $\mathfrak{p}$.
      iii. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tel que $\alpha^2 \equiv \delta \pmod{\mathfrak{p}^2}$. Montrer que $\mathfrak{p}$ n'est pas ramifié dans F.
      (Indication : considérer l'élément $\kappa(\sqrt{\delta} - \alpha) \in F^\times$.)

iv. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathcal{O}_K$, on a $\alpha^2 \not\equiv \delta \pmod{\mathfrak{p}^2}$.
- Montrer que $\mathfrak{p}$ n'est pas décomposé dans F.
- Montrer que $\mathfrak{p}$ est ramifié dans F.
(Indication : considérer l'idéal $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}\mathcal{O}_F + (\sqrt{\delta} - \beta)\mathcal{O}_F$ où $\beta \in \mathcal{O}_K$ est tel que $v_{\mathfrak{p}}(\beta^2 - \delta)$ est maximal.)

v. Conclure que F/K est non ramifiée en les idéaux premiers au-dessus de 2 si et seulement si δ est un carré inversible modulo $4\mathcal{O}_K$.

(e) En déduire que $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $\mathcal{E}_0$.

3. Soit $F \in \mathcal{E}$.

(a) Montrer que, pour tout $\delta \in \mathcal{D}_F$, il existe un idéal fractionnaire $\mathfrak{a}_\delta$ de K tel que $\mathfrak{a}_\delta^2 = \delta\mathcal{O}_K$.

(b) En déduire qu'il existe un morphisme de groupe bien défini Φ de $\mathcal{E}$ dans $\tilde{\mathrm{Cl}}_K$ qui associe à F la classe de $\mathfrak{a}_\delta$.

(c) Montrer que Φ est injectif.
(Indication : on pourra considérer séparément les cas $d = -3$ et $d < -3$.)

4. Pour c un entier positif divisant d, on note $\{c\}$ l'idéal de $\mathcal{O}_K$ qui est le produit des idéaux premiers (ramifiés) divisant c. Montrer que la classe de $\{c\}$ est dans $\tilde{\mathrm{Cl}}_K$.

5. Soit $\mathcal{C} \in \tilde{\mathrm{Cl}}_K$. Soit $\mathfrak{a} \in \mathcal{C}$ et soit δ un générateur de $\mathfrak{a}^2$.

(a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $N_{K/\mathbb{Q}}(\gamma) = 1$ où $\gamma = \delta/a$.

(b) Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\gamma\lambda + \bar{\lambda} \neq 0$. On pose $\beta = \gamma\lambda + \bar{\lambda}$. Vérifier que $\gamma = \beta/\bar{\beta}$.

(c) Montrer qu'il existe un idéal $\mathfrak{c}$ dans $\mathcal{C}$ et un entier positif c divisant d tels que $\mathfrak{c}^2 = c\mathcal{O}_K$. (Indication : on pourra commencer en considérant l'idéal $\bar{\beta}\mathfrak{a}$.)

(d) Soit c un entier positif divisant d. On pose $c^\star = c$ si $c \equiv 1 \pmod 4$ et $c^\star = -c$ sinon. Montrer que $K(\sqrt{c^\star})/K$ est non ramifiée.

(e) En déduire que Φ est une bijection.

6. Soient c_1 et c_2 deux entiers positifs divisant d. Déterminer sous quelles conditions $\{c_1\}$ et $\{c_2\}$ sont dans la même classe.

7. Soit t le nombre de nombres premiers divisant d. Montrer que

$$|\mathcal{E}| = |\tilde{\mathrm{Cl}}_K| = 2^{t-1}.$$