L3 — Algèbre 1 2013-2014
25 octobre 2013

Partiel

1. Un isomorphisme de groupes

Soit k un corps, et $n \geq 2$ un entier. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de k^n passant par 0.

1. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur k^n induit une action de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur $\mathcal{D}$. En déduire un morphisme de groupes $\phi : \mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{Bij}(\mathcal{D})$.

2. Montrer que le noyau de ϕ est formé des homothéties. On note $\mathrm{PGL}_n(k) = \mathrm{GL}_n(k)/\ker\phi = \mathrm{GL}_n(k)/\{\text{homothéties}\}$.

Dans la suite de cet exercice on prend $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $n = 2$.

3. Montrer que $\mathcal{D}$ est de cardinal 4.

4. Calculer le cardinal de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

5. En déduire un isomorphisme entre $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et $\mathfrak{S}_4$.

2. Classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \{\tau\sigma\tau^{-1}, \tau \in \mathfrak{S}_n\}$ la classe de conjugaison de σ dans $\mathfrak{S}_n$. On note $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \{\tau \in \mathfrak{S}_n, \sigma\tau = \tau\sigma\}$ le centralisateur de σ dans $\mathfrak{S}_n$.

Si $\sigma \in \mathfrak{A}_n$, on note $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) = \{\tau\sigma\tau^{-1}, \tau \in \mathfrak{A}_n\}$ la classe de conjugaison de σ dans $\mathfrak{A}_n$.

1. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{A}_n$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) \subset \mathfrak{A}_n$.

2. Soit $\sigma \in \mathfrak{A}_n$.

a. Montrer que si $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{A}_n$, on a $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \mathcal{C}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$.

b. Montrer que si $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ est contenu dans $\mathfrak{A}_n$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ est l'union disjointe de $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ et de $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}_n}((12)\sigma(12))$.

3. Donner la décomposition de $\mathfrak{A}_4$ en classes de conjugaison.

4. Construire la table des caractères de $\mathfrak{A}_4$.

3. Sous-groupes de Sylow d'un quotient

Soit G un groupe fini, et H un sous-groupe distingué de G. On note $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. On fixe un nombre premier p.

1. Soit P un p-sous-groupe de Sylow P de G.

a. Montrer que $P \cap H$ est un p-sous-groupe de Sylow de H.

b. Montrer que $\pi(P)$ est un p-sous-groupe de Sylow de G/H.

2. Soit P_0 un p-sous-groupe de Sylow de G/H.

a. Montrer qu'il existe un p-sous-groupe de Sylow P de G tel que $\pi(P) = P_0$.

b. Montrer que si H est un p-groupe alors un tel P est unique.

4. Plongements de $\mathbb{H}_8$ dans $\mathfrak{S}_n$

On note $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ formé des éléments suivants : $\{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}$ où $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$.

1. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes injectif de $\mathbb{H}_8$ dans $\mathfrak{S}_8$.

2. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes injectif de $\mathbb{H}_8$ dans $\mathfrak{A}_8$.

3. Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{H}_8$ non réduit à $\{I\}$ contient $-I$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes injectif de $\mathbb{H}_8$ dans $\mathfrak{S}_n$ pour $n \leq 7$.

5. Dimension des représentations irréductibles

Soit G un groupe fini et V une représentation irréductible de G. Montrer que $(\dim V)^2 \leq [G : Z(G)]$. (On pourra comparer $|\chi_V(g)|$ et $\dim V$ pour $g \in G$).