

N° d'ordre :

**ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
LABORATOIRE DE PHYSIQUE**

UNIVERSITÉ de LYON

THÈSE

présentée pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'ENS LYON

par

Nicolas Mallick

Sujet :

**Exemples d'invariances d'échelle dans la fracture
des matériaux fragiles désordonnés**

Soutenue le 18 février 2010 devant la Commission d'examen :

M. Daniel Bonamy	
M. Rachid El Guerjouma	Rapporteur
M. Pablo Jensen	
M. Stéphane Roux	Directeur de thèse
M. Loïc Vanel	
M. Jérôme Weiss	Rapporteur

Table des matières

Introduction	5
1 Invariances d'échelle dans la fracture des matériaux fragiles	9
1.1 Invariances d'échelle et lois de puissance	11
1.1.1 Invariance d'échelle en physique	11
1.1.2 Systèmes étudiés : invariances d'échelle en fracture des ma- tériiaux fragiles désordonnés	14
1.2 Tremblements de terre et invariances d'échelle	14
1.2.1 Définir l'importance d'un séisme : la magnitude	15
1.2.2 Distribution des magnitudes	16
1.2.3 Précurseurs et répliques	17
1.2.4 Lois d'Omori	18
1.2.5 Distribution des temps d'attente	20
1.2.6 Invariance d'échelle spatiale dans les tremblements de terre	22
1.3 Etudes des microfractures en laboratoire	23
1.3.1 Microfractures suivies par émissions acoustiques	23
1.3.2 Observation dans le saphir à basse température	25
1.3.3 Autres quantités invariantes d'échelle	28
1.4 Rugosité des fronts de fracture	29
1.4.1 La rugosité ou comment caractériser l'invariance d'échelle spatiale	30
1.4.2 De quoi dépend la rugosité des fronts de fracture?	30
1.5 Modèles et universalité	32
1.5.1 Universalité en fracture?	32
1.5.2 Modèles de réseau de fibres pour la fracture	33
1.6 Conclusion	33
1.7 Objectifs de la thèse	34
2 Fracture par indentation dans le verre	35
2.1 Fracture par indentation	37
2.2 Dispositif expérimental	40
2.2.1 Principe	40
2.2.2 Calibration du capteur de force	41
2.2.3 Expérience à vide à force constante	43

2.2.4	Capteur piézoélectrique	44
2.2.5	Aspect statique de la fracture par indentation	45
2.2.6	Protocole expérimental	45
2.3	Détection et caractérisation des événements	46
2.3.1	Caractérisation du bruit	47
2.3.2	Détection par seuillage simple	47
2.3.3	Détection à l'aide d'une distance spectrale	49
2.3.3.1	Analyse temps-fréquence	49
2.3.3.2	Distance spectrale	51
2.3.3.3	Protocole de détection	52
2.3.4	Influence de la géométrie sur le spectre des événements	55
2.3.5	Conclusion	57
2.4	Etude des émissions acoustiques	58
2.4.1	Distribution des durées des événements	58
2.4.2	Comment définir l'énergie des émissions ?	58
2.4.3	Evanescence des signaux et relation énergie/durée	60
2.4.4	Distribution des énergies	64
2.4.5	Conclusion	65
2.5	Etude de la dynamique de la fracture	65
2.5.1	Dynamique de la force	65
2.5.2	Dynamique des microfractures	67
2.5.3	Détermination de l'énergie absolue des microfractures	69
2.5.4	Distribution des temps d'attente	70
2.5.5	Influence de la température	71
2.5.5.1	Comment caractériser la dynamique ?	72
2.5.5.2	Influence de la température	73
2.5.6	Conclusion	75
2.6	Modélisation par un réseau de fibres	75
2.6.1	Topologie du modèle	77
2.6.2	Résolution analytique approchée	78
2.6.3	Paramètres influant sur la loi d'Omori	82
2.6.4	Conclusion	84
2.7	Retour sur les expériences à basse température	85
2.8	Conclusion	86
3	Etude de l'invariance d'échelle dans la fracture du papier	89
3.1	Aspect théorique de l'invariance d'échelle : le formalisme multifractal	91
3.1.1	Invariance d'échelle d'un signal aléatoire	92
3.1.1.1	Signal aléatoire	92
3.1.1.2	Invariance d'échelle	92
3.1.2	Analyse multifractale	95
3.1.2.1	Notion de régularité locale	95

3.1.2.2	Formalisme multifractal	95
3.1.2.3	Log-cumulants	95
3.1.2.4	Transformée en ondelettes	96
3.1.3	Comment mesure-t-on la rugosité des fractures?	98
3.1.4	Quantités multirésolutions utilisées	99
3.2	Fronts de fracture obtenus par rupture lente du papier	100
3.2.1	Dispositif expérimental	101
3.2.2	Propriétés des échantillons utilisés	101
3.2.3	Protocole expérimental et dynamique de la fracture	103
3.2.4	Extraction des fronts de fracture	104
3.3	Analyse des fronts de fracture	105
3.3.1	Mesure de la rugosité	106
3.3.1.1	Influence de la force	106
3.3.1.2	Estimation à partir des moments et des cumulants	107
3.3.1.3	Influence du régime de croissance	110
3.3.1.4	Présence d'une échelle caractéristique	113
3.3.1.5	Influence de la statistique	114
3.3.2	Caractère multifractal des front de fractures	115
3.3.2.1	Utilisation directe de $C_2(a)$	115
3.3.2.2	Estimation du spectre multifractal $\zeta(q)$	115
3.3.3	Bilan	119
3.4	Discussion	120
3.5	Conclusion	122
Conclusion		123
3.6	Résultats	123
3.7	Perspectives	124
A Mécanique de la rupture lente		127
A.1	Aspects mécaniques de la fracture	127
A.1.1	Concentration des contraintes	128
A.1.2	Les différents modes principaux de fracture	129
A.1.3	Facteur d'intensité des contraintes	129
A.2	Rupture sous-critique	130
A.2.1	Phénoménologie de la rupture retardée	131
A.2.2	Aspect thermodynamiques	132
A.2.3	Croissance thermiquement activée	132
A.3	Conclusion	133
B Articles publiés		135
B.1	Physical Review Letters 98 , 255502, 2007	135
B.2	Acte de colloque, GRETSI, 2007	140

B.3 Acte de colloque, International Conference on Fracture 12, 2009 .	145
Bibliographie	161

Introduction

La compréhension des mécanismes de fracture est un enjeu considérable de la science moderne. Non seulement elle revêt un intérêt fondamental pour la physique statistique et la mécanique des milieux continus, mais elle possède de nombreuses applications pour l'industrie (qui cherche à développer des matériaux toujours plus résistants), ou pour la construction et l'architecture. Et surtout, l'étude de la fracture nous renseigne sur le phénomène naturel le plus meurtrier qui soit, l'activité sismique. En effet, les tremblements de terre et les tsunamis, qui en sont les conséquences, ont déjà fait lors de la première décennie du nouveau millénaire plus de 400.000 morts. Mieux prévoir ces catastrophes nécessite de mieux comprendre leurs mécanismes. Pourtant, malgré de gros efforts, la com-



FIGURE 1 – Le 23 mai 2004, une partie de la voûte coiffant le terminal 2E de l'aéroport Charles de Gaulle à Roissy s'effondre, un an après sa mise en service. L'enquête a conclu à l'effondrement d'une structure dont la réserve de résistance initiale était faible. Ainsi, la structure était stable, mais s'est progressivement fragilisée.

préhension de ces phénomènes reste assez limitée, du fait de leur complexité. Il en va de même dans le domaine des matériaux, où les ingénieurs n'arrivent pas toujours à prévoir la rupture, sur des temps longs, des structures construites.

On peut citer l'exemple récent de l'effondrement de la voûte d'un terminal à l'aéroport Charles de Gaulle figure (1) qui constitue un cas de rupture retardée. Si la résistance des matériaux est souvent connue et bien étudiée, c'est leur stabilité dans le temps qui pose problème. Comme pour les tremblements de terre, la rupture des matériaux peut intervenir sur des temps longs, ce qui la rend difficile à prévoir. Il est remarquable en tout cas que la fracture puisse intervenir sur une très large plage de temps, immédiatement après la mise sous contrainte, ou des années, voire des millions d'années plus tard pour les tremblements de terre.

Une autre chose frappante lorsqu'on parle de fracture est la diversité des échelles spatiales mises en jeu. Dans le verre par exemple, des microfissures peuvent intervenir à l'échelle nanométriques et se propager à l'échelle macroscopique. En observant deux situations bien connues de fractures on peut se rendre compte de cette diversité.



FIGURE 2 – Fracture due à un impact sur le verre d'un pare brise. Taille typique : de 1 à 10 cm.

Il y a ainsi 7 ordres de grandeur entre la taille de la faille de San Andreas (figure 3) en Californie et celle d'une fissure dans le verre d'un pare-brise (figure 2). Il existe néanmoins de nombreuses analogies entre les deux phénomènes, en particulier dans leur caractère intermittent et aléatoire : dans les deux cas,



FIGURE 3 – La célèbre faille de San Andreas en Californie, qui marque la séparation entre les plaques tectoniques de l'Amérique du Nord et du Pacifique. Elle passe notamment par San Francisco. Longueur : presque 1000 km.

une fracture se propage par à-coups, donnant lieu à une interface irrégulière, libérant une énergie élastique par intermittence, lors de séismes dans la croûte terrestre, lors de microfractures dans le verre. Cela suggère que le processus de fracture existe sur une très large gamme d'échelles indépendamment de celles-ci : ce processus serait en quelque sorte invariant d'échelles. D'autre part le caractère aléatoire et intermittent est à mettre en lien avec les matériaux mis en jeu, qui sont fragiles et désordonnés, ce qui a conduit les physiciens à avoir une approche statistique pour les décrire. Dans cette thèse, nous préciserons les comportements singuliers exhibés par la fracture lente des matériaux fragiles, dont les tremblements de terre sont une conséquence, et nous étudierons en détail deux systèmes expérimentaux et les invariances d'échelle auxquels ils donnent lieu : la fracture par indentation dans le verre et la rupture sous-critique du papier. Notre démarche sera de comprendre l'origine physique de ces invariances d'échelle et aussi d'introduire de nouveaux outils développés en traitement du signal.

Invariances d'échelle dans la fracture des matériaux fragiles

Sommaire

1.1 Invariances d'échelle et lois de puissance	11
1.1.1 Invariance d'échelle en physique	11
1.1.2 Systèmes étudiés : invariances d'échelle en fracture des matériaux fragiles désordonnés	14
1.2 Tremblements de terre et invariances d'échelle	14
1.2.1 Définir l'importance d'un séisme : la magnitude	15
1.2.2 Distribution des magnitudes	16
1.2.3 Précurseurs et répliques	17
1.2.4 Lois d'Omori	18
1.2.5 Distribution des temps d'attente	20
1.2.6 Invariance d'échelle spatiale dans les tremblements de terre	22
1.3 Etudes des microfractures en laboratoire	23
1.3.1 Microfractures suivies par émissions acoustiques	23
1.3.2 Observation dans le saphir à basse température	25
1.3.3 Autres quantités invariantes d'échelle	28
1.4 Rugosité des fronts de fracture	29
1.4.1 La rugosité ou comment caractériser l'invariance d'échelle spatiale	30
1.4.2 De quoi dépend la rugosité des fronts de fracture?	30
1.5 Modèles et universalité	32
1.5.1 Universalité en fracture?	32
1.5.2 Modèles de réseau de fibres pour la fracture	33
1.6 Conclusion	33
1.7 Objectifs de la thèse	34

Au cours de la première moitié du vingtième siècle, la prise en compte des défauts structurels des matériaux fragiles dans la mécanique de la fracture a permis de d'expliquer de nombreux phénomènes tels que relative fragilité de ces matériaux. Nous présentons dans l'annexe A certains aspects de cette théorie ainsi que le phénomène de rupture retardée. La mécanique de la fracture est basée sur la théorie des milieux élastiques continus et oublie le caractère désordonné du matériau aux échelles macroscopiques où il peut être considéré comme homogène. Or, elle prédit d'une part pour la fracture lente une croissance régulière et continue à une vitesse définie, et d'autre part la création d'une interface lisse au-delà de l'échelle caractéristique des hétérogénéités. En pratique, ces deux propriétés sont loin d'être observées, et la réalité expérimentale est plus complexe, avec une croissance intermittente et des interfaces rugueuses, le système présentant un comportement invariant d'échelle (un récent article passe en revue ces comportements [1]).

C'est l'étude de ces invariances d'échelle qui va nous intéresser au cours de cette thèse. Nous allons donc dans ce chapitre préciser le concept d'invariance d'échelle, avant de voir comment il se manifeste dans le domaine de la fracture sur l'exemple des tremblements de terre. Nous présenterons ensuite des résultats expérimentaux obtenus en laboratoire sur différents matériaux, fragiles et désordonnés pour la plupart. Ceci nous conduira, après avoir brièvement décrit les modèles utilisés pour décrire ces faits expérimentaux, à définir les objectifs de cette thèse.

1.1 Invariances d'échelle et lois de puissance

1.1.1 Invariance d'échelle en physique

Dans de nombreux systèmes physiques, possédant un très grand nombre de degrés de libertés et de nombreuses interactions entre ses constituants, un phénomène d'invariance d'échelle est observé : le tout se comporte comme la partie. Ceci est observé dans les transitions de phase de second ordre au voisinage du point critique en thermodynamique, ou dans la turbulence en mécanique des fluides par exemple. Dans ces systèmes, les grandeurs globales moyennes (énergie interne, température, vitesse moyenne...) ne suffisent plus pour décrire le système : ce sont les fluctuations qui dominent. Il apparaît aussi qu'il n'existe plus d'échelle pertinente pour étudier le système ; dans la turbulence par exemple, des tourbillons de toutes les tailles entre les échelles microscopiques et macroscopiques apparaissent, interagissent entre eux et conduisent à un comportement à priori désordonné. Néanmoins, le fait qu'aucune échelle ne ressorte de la description du système implique en soit des lois sur les grandeurs physiques, ou plutôt sur leur aspect statistique. Ainsi, si l'on s'intéresse aux fonctions de corrélation de ces systèmes, le fait qu'aucune échelle ne doit être privilégiée implique que

le seul comportement admis pour ces fonctions est un comportement en lois de puissance, puisque ce sont les seules fonctions mathématiques qui ne présentent pas d'échelle caractéristique (telles que $f(a+b) = f(a)f(b)$, c'est à dire que le comportement sur une échelle $2a$ se déduit directement de celui sur échelle a). Ceci implique aussi que les fluctuations locales des grandeurs physiques définies sur une échelle a , a priori aléatoires, sont distribuées selon une loi de puissance. On peut citer l'amplitude moyenne des fluctuations temporelles du champ de vitesses sur une durée τ en turbulence qui évolue en loi de puissance par rapport à cette taille, ou de même l'amplitude moyenne des fluctuations spatiales de densité sur une taille a dans les transitions de phase. Il est important de noter que ce sont toujours les grandeurs moyennes (la moyenne étant réalisée sur le temps et/ou l'espace) qui exhibent ces comportements. Pour généraliser, une grandeur physique F (un champ) verra ses fluctuations sur une taille a , $\delta_a F$ se comporter en moyenne en loi de puissance de cette taille :

$$\langle \delta_a F \rangle = ka^\lambda \quad (1.1)$$

Où k est une constante ayant la dimension de F et λ est un nombre réel sans dimension généralement négatif appelé exposant (l'amplitude des fluctuations décroît avec la taille sur laquelle on les observe).

En outre, il apparaît parfois dans ces systèmes des structures cohérentes de toutes les tailles (les tourbillons en turbulence ou les domaines de Weiss dans le ferromagnétisme au point critique par exemple). Là aussi, si leur apparition semble aléatoire, l'invariance d'échelle impose aux grandeurs physiques caractérisant ces structures (taille, énergie, durée de vie etc...) d'être distribuées en lois de puissance au sens statistique. Ainsi, si l'on prend l'exemple de la taille de ces structures, notée L , la probabilité P_L pour une structure d'avoir une taille L évoluera en loi de puissance avec L :

$$P_L(L) = P_0 L^\alpha \quad (1.2)$$

où P_0 est une constante de normalisation sans dimension et α un exposant, la aussi généralement négatif (les structures de grande taille sont plus rares que les petites).

Une première remarque peut être faite. Une loi de probabilité devant nécessairement être normalisée, on se rend compte qu'il y a là une contradiction car l'intégrale de P_L sur toutes les tailles (de 0 à $+\infty$) diverge, quelles que soient

les valeurs de α . Ceci suggère nécessairement que cette loi de puissance ne correspond à la distribution réelle des tailles que pour un intervalle fini de celles-ci, c'est à dire entre deux échelles que nous appellerons échelles de coupure, l'une basse, l'autre haute. En pratique, c'est effectivement le cas, puisque le système possède une taille finie et ne peut donc pas voir apparaître de structure plus grandes que lui ; de même, la matière étant discrète à l'échelle atomique, il existe forcément aussi une échelle minimale pour la taille de ces structures. Les échelles de coupures ne sont pas nécessairement ces échelles "géométriques" mais elles leur sont au pire égales. Ainsi, en turbulence, l'échelle de coupure basse est la célèbre échelle de Kolmogorov, qui dépend de la viscosité et de la densité du fluide, et de la vitesse macroscopique moyenne, appelée aussi échelle de dissipation : il n'y a pas de tourbillon plus petit que cette échelle. L'échelle de coupure haute est elle plus souvent liée à la taille finie du système, bien qu'elle soit parfois due à un phénomène de décorrélation.

Ceci peut paraître contradictoire, puisque c'est le phénomène d'invariance d'échelle qui nous a conduit à introduire des distributions en loi de puissance, qui à leur tour possèdent deux échelles de coupure, ce qui fait deux échelles caractéristiques. Néanmoins, c'est le fait que ces deux échelles de coupures soient très différentes qui lève le paradoxe : le concept d'invariance d'échelle (le tout est comme la partie, ou autosimilarité) purement mathématique, ne permet de décrire un système physique que dans une certaine gamme d'échelles. Lorsque cette gamme fait plusieurs décades, cette description apparaît dès lors pertinente. Ces échelles de coupures sont néanmoins très importantes d'un point de vue physique, en particulier la basse, car c'est souvent à cette échelle que les phénomènes physiques prennent leur racine. Elle n'est toutefois pas accessible dans la majeure partie des cas. Ainsi, les distributions obtenues expérimentalement en effectuant des mesures sur un grand nombre de structures exhibent donc généralement une échelle de coupure basse artificielle liée en quelque sorte à l'instrument de mesure : la loi de puissance intrinsèque au système continue d'être valable à des échelles plus basses, mais celles-ci ne sont pas accessibles à la mesure.

Nous allons voir que la fracture, dans certains cas, présente elle aussi le phénomène d'invariance d'échelle, tant dans les fluctuations de grandeurs physiques associées, que dans les aspects statistiques des structures qu'elle engendre lors de sa propagation.

1.1.2 Systèmes étudiés : invariances d'échelle en fracture des matériaux fragiles désordonnés

Pour fixer les idées, nous considérerons ici des solides fragiles et désordonnés. Cela signifie, d'une part, que le solide peut être considéré comme élastique jusqu'à la rupture, et cela revient à négliger la plasticité : le solide ne s'écoule pas au cours de la rupture ; d'autre part que le solide présente des hétérogénéités structurelles : ce n'est pas un cristal, où la fracture se propage selon les plans atomiques. La mécanique de la fracture, basée sur les milieux continus, ne permet pas de rendre compte directement des phénomènes observés dans ce type de solides.

De plus, nous nous intéresserons à la rupture lente, ou sous-critique (voir Annexe A), ou la fracture se propage lentement au sein du solide, mis sous contrainte sous-critique, c'est à dire en deçà de la contrainte seuil de rupture. La combinaison de ces deux caractéristiques (rupture lente + désordre) induit des phénomènes complexes lors de l'avancement d'une fracture : celle-ci se fait par sauts et engendre une interface rugueuse. Elle est aussi très intermittente et s'effectue par une succession de microfractures. Dans cette thèse, l'objet de l'étude sera d'une part ces microfractures que nous verrons comme des structures invariantes d'échelle (comme les tourbillons en turbulence), et d'autre part l'interface rugueuse engendrée, dont les fluctuations de hauteur sur une échelle donnée évoluent elles aussi en loi de puissance de cette échelle.

Afin de préciser le phénomène de fracture lente des matériaux fragiles désordonnés et de la relier au phénomène d'invariance d'échelle, nous allons prendre pour exemple un système modèle bien connu, les séquences de séismes.

1.2 Tremblements de terre et invariances d'échelle

Un tremblement de terre, ou séisme, résulte de la libération brusque d'énergie accumulée par les déplacements et les frictions des différentes plaques de la croûte terrestre. La plupart des tremblements de terre sont localisés sur des failles. Plus rares sont les séismes dûs à l'activité volcanique ou d'origine artificielle (explosions par exemple). Il se produit de très nombreux séismes tous les jours, mais la plupart ne sont pas ressentis par les humains. Environ cent mille séismes sont enregistrés par an sur la planète. Les plus puissants d'entre eux comptent parmi les catastrophes naturelles les plus destructrices. On peut s'en convaincre sur la figure 1.1.

Pour le physicien, le tremblement de terre est un objet d'étude passionnant, par sa complexité et par les moyens à mettre en oeuvre pour le caractériser. Celui-



FIGURE 1.1 – Ruines aux alentours de la Poste et de Grant avenue juste après le séisme de San Francisco de 1906, d'une magnitude 7.8. Il fit environ 3000 morts, ce qui en fait le séisme le plus meurtrier de l'histoire des Etats-Unis.

ci se produisant en profondeur dans la croûte terrestre (plusieurs kilomètres en général), les seules informations disponibles¹ sont recueillies grâce aux ondes élastiques émises par le séisme qui voyagent à travers la Terre. C'est l'étude de ces ondes², enregistrées à l'aide de sismographes placés tout autour du globe, qui permet de caractériser les tremblements de terre. On peut ainsi caractériser l'endroit et l'instant où s'est produit le séisme à partir des données recueillies par différents sismographes dans différentes stations d'observation. Une caractéristique importante du séisme est sa magnitude, c'est à dire son amplitude logarithmique.

1.2.1 Définir l'importance d'un séisme : la magnitude

La définition originale donnée par Richter en 1935 [2], appelée désormais magnitude locale, où M_l est une échelle logarithmique simple de la forme $M_l =$

1. De nos jours on accède également aux déplacements grâce au GPS...

2. Ces ondes ne permettent pas uniquement de caractériser les tremblements de terre, mais aussi la structure du globe. Leur étude constitue à elle seule un pan important de la géophysique.

$\log(A) - \log(A_0) + c \log(\Delta)$ où A représente l'amplitude maximale mesurée sur le sismogramme, A_0 est une amplitude de référence correspondant à un séisme de magnitude 0 à 100 km, Δ est la distance épacentrale (en km) et c est une constante de calibration. Outre l'inhomogénéité de cette équation, marquant encore plus son caractère empirique, les constantes de calibration rendent cette définition valable seulement localement. Les ondes utilisées pour mesurer la magnitude ont d'abord été les ondes de surface, puis les ondes de volume (ondes de compression, dites P, qui voyagent plus vite et sont donc détectées plus tôt). Ces échelles posent toutefois des problèmes : elles ne mesurent pas directement l'énergie du séisme, et présentent des saturations pour les forts séismes.

De nos jours, un calcul définitif de la magnitude est effectué après le séisme et passe par une inversion des sismogrammes afin de retrouver conjointement la localisation, le mécanisme au foyer et le moment sismique W . De ce dernier, qui est en fait un calcul absolu de l'énergie élastique relâchée, il est déduit une magnitude appelée magnitude de moment (M_w), qui rejoint l'échelle de Richter pour les séismes faibles. Il s'agit de la magnitude la plus utilisée aujourd'hui. La correspondance entre magnitude de moment M_w et énergie du séisme est donnée par une formule empirique déterminée par Kanamori en 1977 [3] $W = W_0 M_w^{\frac{3}{2}}$. La constante W_0 dépend des unités adoptées, et vaut $10^{9.1}$ pour une énergie en Joules.

1.2.2 Distribution des magnitudes

Si l'on s'intéresse à la distribution des magnitudes des tremblements de terre, il apparaît que celle-ci est en loi de puissance. Historiquement, c'est la distribution intégrale qui a été introduite : on compte le nombre de séismes ayant une magnitude plus grande que m . On trace ensuite le logarithme de ce nombre en fonction de m . La courbe obtenue est une droite (ce qui correspond à une loi de puissance et donc à une invariance d'échelle). Cette distribution est appelée loi de Gutenberg-Richter du nom des auteurs l'ayant introduite [2]. On peut voir la distribution trouvée par Gutenberg et Richter en 1944 figure 1.2. Les pentes des distributions obtenues sont de 1.2 pour les séismes moyennement et très profonds et de 0.9 pour les séismes affleurant. La pente b de cette loi varie peu et est généralement proche de 1. L'ordonnée à l'origine a dépend du volume et de la période de temps aux seins desquels les séismes sont sélectionnés. On peut aussi s'intéresser à la distribution des énergies W des séismes, qui est aussi en loi de puissance :

$$P(W) \propto W^{-\beta} \tag{1.3}$$

Pour la retrouver, il faut dériver la loi de Gutenberg-Richter et se servir de la formule de Kinamori. L'exposant trouvé pour la loi de puissance devient alors :

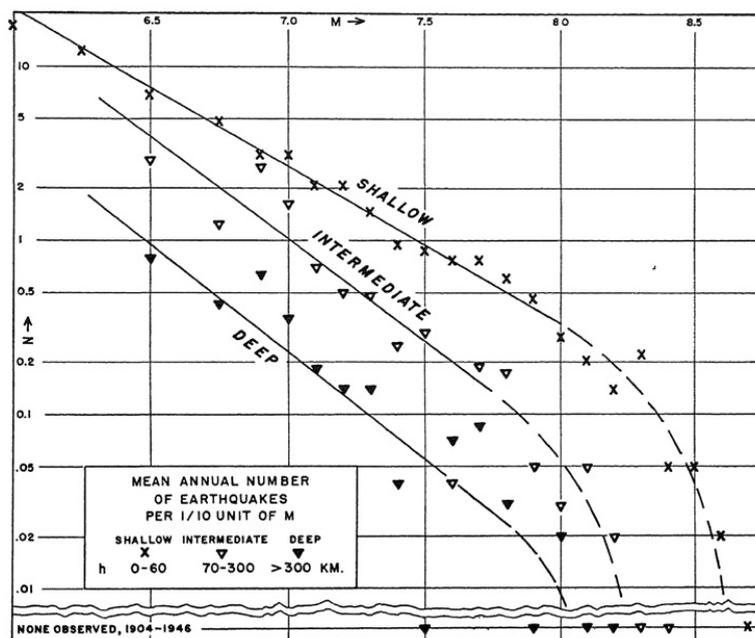


FIGURE 1.2 – Nombre moyen annuel de tremblements de terre de magnitude $M > m$ en fonction de m (par dixième d'unité magnitude). D'après les travaux de Gutenberg et Richter de 1944 [2]. Les tremblements de terre pris en compte sont localisés partout dans le monde et séparés en trois catégories selon leur profondeur

$\beta = \frac{2}{3}b + 1$, soit une valeur proche de 1.6 – 1.7. La loi de Gutenberg-Richter a été intensément étudiée depuis plus d'un demi-siècle, les paramètres influant sur cette loi et ses limites sont toujours l'objet de débats à l'heure actuelle [4].

1.2.3 Précurseurs et répliques

Avant, et surtout après un tremblement de terre, des secousses de moindres magnitudes sont observées dans la zone périphérique au séisme principal. On peut en observer durant des dizaines d'années après le séisme principal. La compréhension de la dynamique de ces secousses est un enjeu important car cela pourrait permettre sinon de prévoir les tremblements de terre, du moins de mieux quantifier le risque d'en observer. Les magnitudes des répliques sont elles-mêmes distribuées selon une loi de Gutenberg-Richter, avec un coefficient b de l'ordre de 1 la aussi.

Prenons l'exemple du séisme de novembre 1975 à Hawaii, le plus important jamais enregistré sur l'île jusqu'à présent. Ce séisme est en fait constitué de nombreux événements comme on peut le voir figure 1.3. En général, plus un séisme

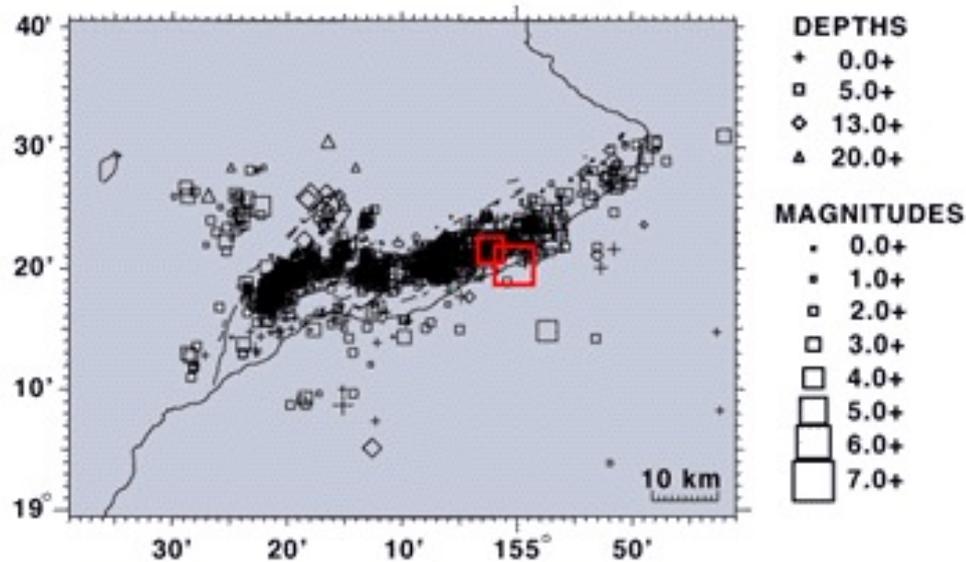


FIGURE 1.3 – Localisation, magnitude, et profondeur des séismes relevés par l’Observatoire Volcanique d’Hawaii sur un mois à partir du 29 novembre 1975. En rouge, le séisme principal de magnitude 7.2, et son plus grand précurseur, de magnitude 5.7. La plupart de ces séismes correspondent à des répliques. Source : United States Geological Survey, www.usgs.com

est d’une magnitude importante, plus ses répliques seront intenses et nombreuses. Les jours suivant le séisme le nombre de répliques observées, tout en étant fortement aléatoire, diminue en moyenne comme on peut le voir figure 1.4. On peut constater que le taux d’événement est extrêmement intermittent, avec un grand nombre de pics témoignant de courtes périodes d’intense activité. Toutefois, le taux moyen présente une décroissance régulière. C’est cette décroissance qui va nous intéresser.

1.2.4 Lois d’Omori

Des lois empiriques ont très vite été proposées pour rendre compte de la dynamique moyenne du taux d’événements sismiques après un tremblement de terre. Il s’agit de la loi d’Omori :

$$\left\langle \frac{dn}{dt} \right\rangle = \frac{K}{t + c} \quad (1.4)$$

Elle porte le nom de celui qui l’a proposée, Fusakichi Omori, d’après des observations sur le tremblement de terre de Nobi de 1891. C’est en 1894 que celui-

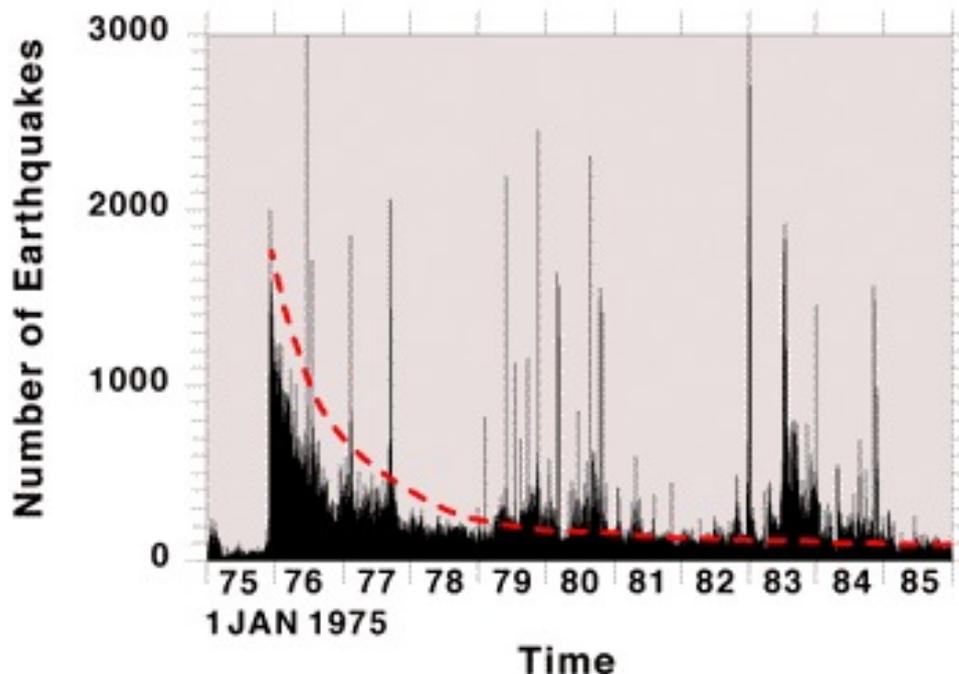


FIGURE 1.4 – Nombre de séismes enregistrés par l’Observatoire Volcanique d’Hawaii par jour sur la période 1975 - 1985. Le séisme principal a lieu en novembre 1975. En pointillés rouge, la décroissance moyenne du taux de séismes. Source : United States Geological Survey, www.usgs.com

ci l’a introduite [5]. Celle-ci décrit la décroissance du taux moyen de répliques par unité de temps. Elle a été généralisée par Utsu en 1961 [6] :

$$\left\langle \frac{dn}{dt} \right\rangle = \frac{K}{(t + c)^p} \quad (1.5)$$

C’est cette dernière loi, que nous appellerons loi d’Omori généralisée, que nous étudierons plus avant. Elle exhibe elle aussi un comportement en loi de puissance, caractéristique d’une invariance d’échelle. Le coefficient K dépend de l’unité de temps choisie pour calculer le taux de répliques. Le temps t a pour origine l’instant où se produit le séisme principal. L’exposant p est généralement compris entre 0.9 et 1.5 et diffère d’une séquence de tremblements de terre à l’autre. Il est en général proche de 1, en moyenne 1.1. Longtemps, les variables influant sur ce paramètre étaient inconnues. En fait, p semble dépendre des conditions tectoniques de la région du séisme comme les hétérogénéités structurales, les contraintes appliquées ou la température [7]. Une étude récente [8], à partir des données sur les tremblements de terre californiens semblent montrer que p

dépend de la magnitude du séisme principal. Toutefois, il est difficile de caractériser la zone d'influence sur laquelle les tremblements de terre seront les répliques d'un séisme principal, à la fois dans le temps et l'espace. Le paramètre c est plus controversé. Sa mesure dépend énormément des séismes non détectés car trop faibles. En effet, $\frac{K}{c^p}$, qui a la dimension d'une fréquence, correspond au taux initial de séisme, qui dépend du nombre de séismes détectés. Il semble en tout cas que c soit positif [7].

Cette loi empirique n'est pas seulement observée dans les tremblements de terre. On la retrouve aussi dans des expériences de fracture en laboratoire, comme nous le verrons, mais aussi dans des domaines très différents et parfois surprenant, comme en finance après un crack boursier [9], ou dans le trafic internet [10], ou encore dans les séries temporelles de réceptions de courriels indésirables (les fameux "spams") [11].

Le même type de loi est observée pour les précurseurs dont l'occurrence précède le tremblement de terre principal, avec cette fois une accélération du taux d'événement. On parle de loi d'Omori inverse :

$$\left\langle \frac{dn}{dt} \right\rangle = \frac{K'}{(-t + c')^{p'}} \quad (1.6)$$

Cette loi est toutefois moins connue malgré son importance (mieux la comprendre pourrait permettre de mieux prédire les tremblements de terre), car les précurseurs sont bien plus rares que les répliques.

1.2.5 Distribution des temps d'attente

D'autre part, les temps d'attente, c'est à dire le temps écoulé entre deux répliques successives sont également distribués en lois de puissance, avec un exposant de l'ordre de -1 qui est généralement le même que celui de la loi d'Omori. On peut voir des distributions de temps d'attente sur la figure 1.5. Celles-ci ont été obtenues par Bak *et al* en 2002 [12] à partir de données sur les séismes californiens³. Alors que la distribution des temps d'attente des tremblements de terre indépendants est exponentielle (loi de Poisson), on observe ici, du moins pour les temps d'attentes faibles, des lois de puissance ce qui indique une corrélation entre les séismes. On voit aussi que cette distribution s'écarte de la loi de puissance pour les temps longs d'autant plus rapidement que la taille de la région prise en compte est grande ou que la magnitude minimale prise en compte est petite.

Les auteurs de cette étude montrent aussi qu'il est possible de superposer les courbes en les renormalisant comme sur la figure 1.6. Cette distribution semble

3. Les données sont accessible sur <http://www.data.scec.org/>.

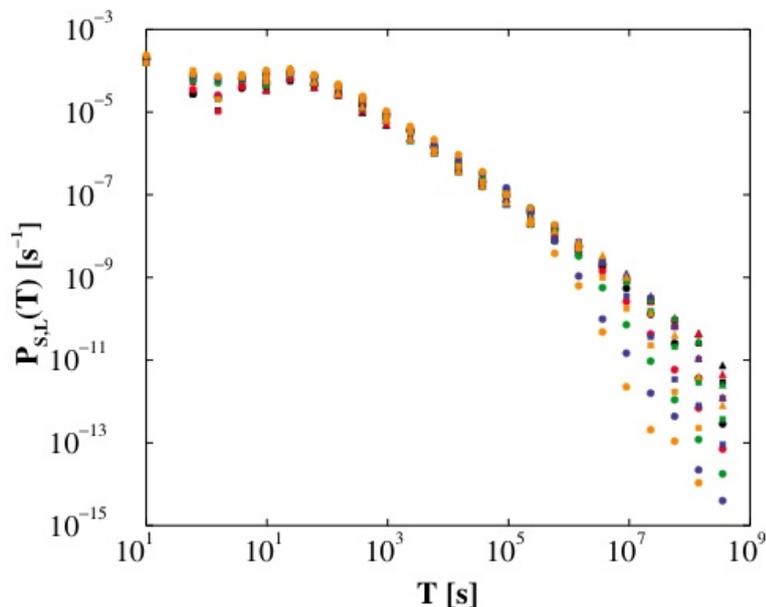


FIGURE 1.5 – Distribution $P_{S,L}$ des temps d'attente T entre les séismes ayant lieu dans des régions de taille L et ayant une magnitude plus grande que $\log(S)$. Les différentes distributions sont calculées en faisant varier L (noir : 30km, rouge : 60km, vert : 120km, bleu : 240km, orange : 480km) et $\log(S)$ (cercles : 2, carrés : 3, triangles : 4). D'après [12].

revêtir dès lors un caractère universel. On a observé donc une distribution en loi de puissance exhibant l'exposant d'Omori, dès que $TS^{-b}L^{d_f}$ est inférieure à 1, où S représente l'amplitude du séisme et L la taille de la région où les séismes sont pris en compte. La présence de b dans cette loi suggère un lien entre les énergies et les temps d'attente. Ceci nous permet aussi de comprendre qu'il n'existe pas de différence entre un séisme principal et ses répliques. On comprend donc que la dichotomie séisme principal/répliques n'a pas vraiment de sens : les séismes sont simplement corrélés entre eux sur un certain temps d'autant plus long qu'ils sont plus proches et plus intenses. Après n'importe quel séisme, les séismes suivants qui auront lieu dans une région de taille L autour de son épicerie lui seront corrélés pendant un certain temps, qui dépend de sa magnitude et de L . Ces séismes pourront être considérés comme ses répliques et suivront une loi d'Omori, alors qu'ils pourront eux aussi être considérés comme des séismes principaux à leur tour. Ces résultats récents ont été depuis confirmés par d'autres études, par Corral *et al* par exemple [13] et d'autres [14] [15] et semble bien être universelle pour les tremblements de terre.

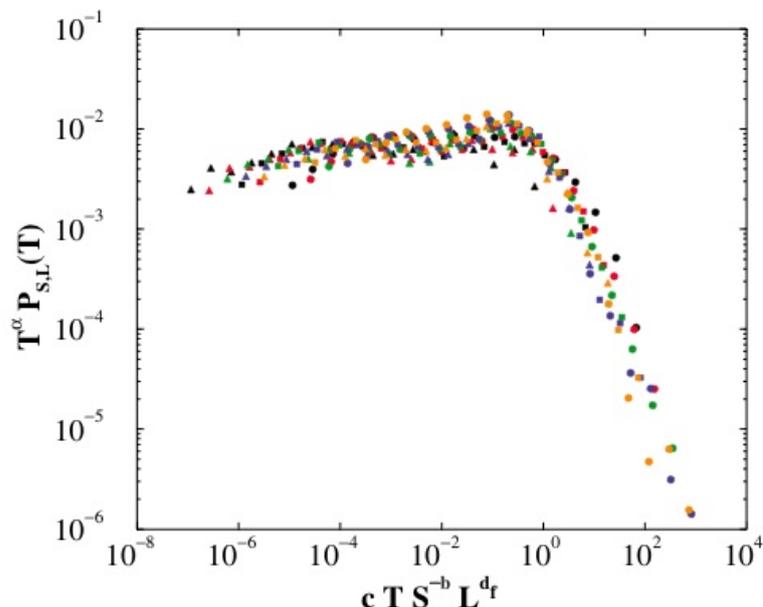


FIGURE 1.6 – Distributions renormalisées des temps d'attente $T^\alpha P_{S,L}(T)$ en fonction de $T S^{-b} L^{-d_f}$, où $\alpha = p = 1$ est l'exposant d'Omori, $b = 1$ l'exposant de Gutenberg-Richter et d_f la dimension fractale associée à la localisation des séismes en surface. Les incertitudes sur les exposants sont de l'ordre de 0.1

1.2.6 Invariance d'échelle spatiale dans les tremblements de terre

Si l'on s'intéresse aux localisations des épicentres des précurseurs et des répliques, il apparaît que celles-ci sont distribuées sur une structure fractale dans la région du séisme principal. C'est la dimension fractale de cet ensemble, d_f qu'on retrouve figure 1.6. Ceci dénote encore une fois un comportement invariant d'échelle [14] [16]. En outre, si l'on s'intéresse à la morphologie des failles créées par les tremblements de terre, celle-ci apparaît comme étant fractale [17] : si l'on note $h(x)$ la position de la faille en fonction de sa direction principale x , les fluctuations $\delta_l h$ sur une taille l évoluent en moyenne comme une puissance de l . Les failles sismiques apparaissent donc là aussi invariantes d'échelle.

Nous allons voir maintenant que ces invariances d'échelle se retrouvent dans des expériences en laboratoire. Les séismes correspondent dans ces expériences aux microfractures observées durant l'expérience, alors que les failles correspondront aux fronts de fracture obtenus par la rupture des échantillons.

1.3 Etudes des microfractures en laboratoire

Les séismes sont détectés à partir des ondes acoustiques émises dans la croûte terrestre. En laboratoire, la technique utilisée pour détecter les microfractures est exactement la même : on utilise des microphones ultrasonores pour détecter des microfractures dans l'échantillon. Nous allons voir dans ce paragraphe que les observations faites sur les séismes se retrouvent à l'échelle du laboratoire.

1.3.1 Microfractures suivies par émissions acoustiques

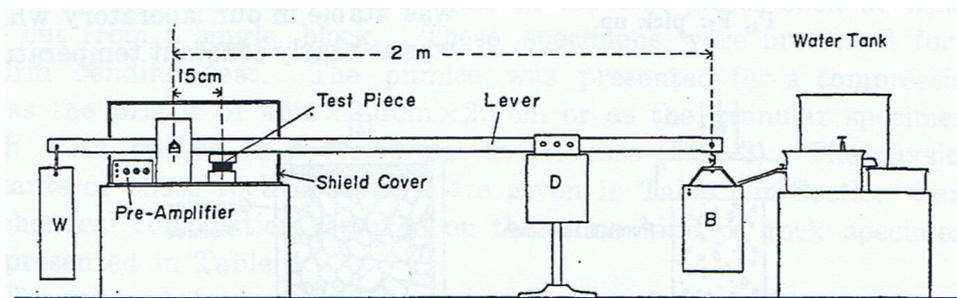


FIGURE 1.7 – Schéma de l'expérience de Mogi de 1962. Les échantillons utilisés sont constitués de pierre ponce plus ou moins poreuse. La contrainte est appliquée à l'aide d'un réservoir d'eau remplissant un récipient fixé au bout d'un levier démultipliant la force appliquée sur l'échantillon par le poids de l'eau. Ce dispositif ingénieux permet d'appliquer des contraintes constantes ou des rampes régulières. D'après [18]

Des études expérimentales en laboratoire ont depuis les années 60 tenté de trouver des analogies entre les expériences en laboratoire et les tremblements de terre. Dans ce domaine les travaux de Mogi publiés en 1962 sur les roches [18] ont été précurseurs. Dans ses expériences Mogi suit l'activité acoustique à l'aide d'un transducteur au sein d'un bloc de roche mis sous contrainte, et détecte des microfractures, comme des "mini" tremblements de terre (voir figure 1.7). Dans cette étude, une contrainte statique est appliquée à l'échantillon jusqu'à rupture. Des émissions acoustiques correspondant à des précurseurs sont recueillies, et les distributions de leurs amplitudes et des temps d'attente entre ces émissions sont calculées. Pour les amplitudes, on retrouve une distribution en loi de puissance : $n(a)da = ka^{-m}da$, avec a l'amplitude. En faisant l'hypothèse, communément admise que l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude, on a $\beta = \frac{1+m}{2}$ pour l'exposant de l'énergie. L'exposant m dépend du matériau, entre 1.5 et 2 (soit β entre 1.2 et 1.5) pour du granite et de l'ordre de 2.5 (soit β de l'ordre de 1.7) pour la pierre ponce. Dans le verre et la résine, l'échantillon se rompt trop

vite et trop peu de précurseurs sont recueillis. Ces valeurs sont proches de celles obtenues pour les tremblements de terre (β entre 1.5 et 2 en général). Pour les temps d'attente, les distributions trouvées par Mogi sont *a priori* exponentielles, ce qui diffère des observations sur les tremblements de terre. De même, le taux d'événements évolue lui aussi en exponentielle du temps⁴ et non comme une loi d'Omori. Toutefois, les ajustements aux lois exponentielles sont imparfaits et ne sont pas satisfaisants aux temps courts (là où il y a le plus d'événements). Ainsi, ils correspondent peut-être aux temps où la loi de puissance n'est plus valable (temps longs), celle-ci étant observée aux temps courts.

Depuis ces travaux, de nombreuses études sur les roches ont été menées, en particulier par les géophysiciens [19] [20], qui ont plutôt retrouvé des lois d'Omori (en fait des lois d'Omori inverse, puisque ce sont généralement les précurseurs avant rupture totale qui sont détectés). Les exposants obtenus sont dans la même gamme que ceux trouvés dans les tremblements de terre. La plupart du temps, l'échantillon est soumis à une rampe de contrainte. Des expériences récentes ont aussi été basées sur un phénomène de corrosion [21], où à une pression en eau augmentant avec le temps dans le gré [22]. Dans la majeure partie des cas donc, un paramètre évolue dans le temps et provoque une accélération de la fracture jusqu'à rupture. Cette non-stationnarité pourrait avoir une influence sur les lois d'Omori inverses observées.

Ces comportements en loi de puissance pour les énergies et/ou les temps d'attente ont également été observés dans d'autres matériaux comme le bois et la fibre de verre [23] ($\beta = 1.5$ et 2 respectivement), les polymères [24] (où β dépend de la température), le papier [25] ($\beta = 1.3$ et α entre 1 et 1.2 pour les temps d'attente, sans qu'il y ait apparemment une loi d'Omori pour le taux d'événement). Dans tous les cas, l'exposant β est compris entre 1 et 2, ce qui signifie que l'essentiel des événements se situent dans les basses énergies, alors que l'énergie acoustique totale libérée est principalement due aux grandes énergies. Très récemment, le même type de distributions observées figure 1.6 a été retrouvée en laboratoire sur le béton [26] [27]. Certaines études se sont aussi intéressées à la localisation des microfractures [28] [24].

Des comportements donnant lieu à des lois d'Omori pour les répliques sont observés bien plus rarement, et essentiellement dans des roches [22] [21], ce qui diffère de ce qui est observé dans les tremblements de terre, où les répliques sont bien plus nombreuses que les précurseurs.

4. Qui correspond ici à $-t$, où t a pour origine l'instant où l'échantillon se rompt.

1.3.2 Observation dans le saphir à basse température

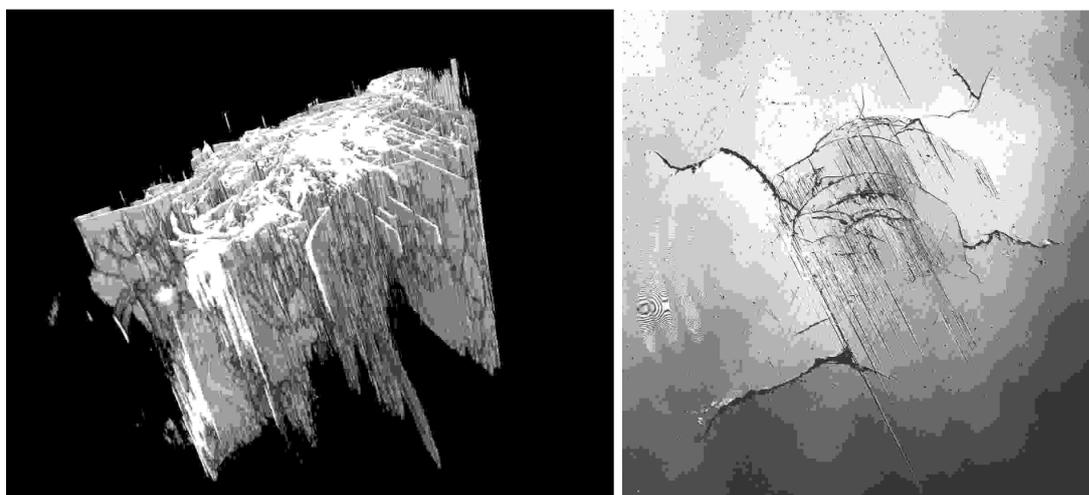


FIGURE 1.8 – Images par microscopie électronique de l’empreinte laissée par l’indentation d’une bille dans bloc de saphir de l’expérience CRESST. D’après [29]

Récemment, des observations originales ont été faites par le détecteur CRESST [30]. Ce détecteur a été construit pour détecter les neutrinos traversant la Terre. Il est basé sur le principe de la calorimétrie : un bloc de saphir monocristallin de quelques centaines de grammes thermostaté à très basse température (10 mK environ) absorbe une très faible partie des neutrinos qui le traversent, ce qui engendre une légère augmentation de sa température qui peut être détectée avec une excellente résolution temporelle (de l’ordre de $50\mu s$) et avec une excellente précision (correspondant à des énergies allant du keV au MeV environ). Ce détecteur est situé dans le massif de Gran Sasso dans les Abruzzes en Italie, enterré à une grande profondeur pour limiter au maximum l’activité parasite liée au rayonnement ou à la radioactivité. Dans ces conditions, l’activité attendue est de l’ordre de quelques événements par heure. Pourtant, lors des premiers tests, réalisés en 1999, une intense activité de l’ordre du millier d’événements par heure est observée. Une origine radioactive est très vite suspectée puis écartée, car ces événements se comportent comme des séquences non-Poissoniennes statistiquement, à la différence de ce qui est observés pour la radioactivité qui correspond à des événements indépendants [31] [29].

Le bloc de saphir constituant le détecteur était maintenu à l’aide de bille en saphir afin de limiter au maximum les surfaces de contact et la transmission de vibrations. Ces billes étaient montées sur du Delrin, un polymère qui se contracte énormément à basse température. Il en résultait une pression importante pou-

vant dépassé le seuil d'apparition d'une fracture par indentation. L'observation de marques sur le bloc de saphir, au niveau des points de contact des billes permet alors d'invoquer des microfractures pour expliquer les observations. On peut voir figure 1.3.2 des images par microscopie des zones d'endommagement.

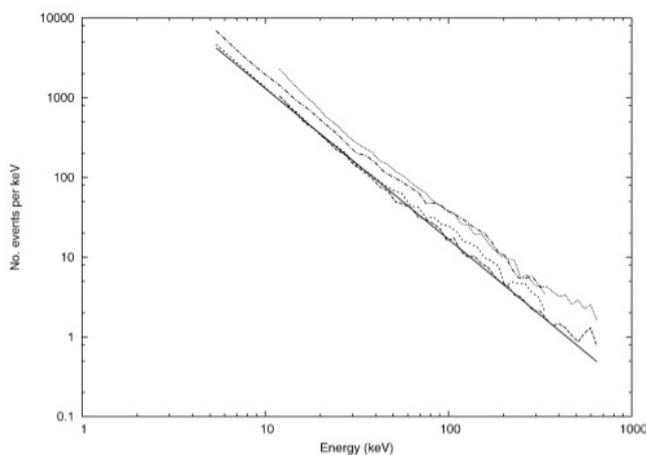


FIGURE 1.9 – Distribution des énergies des microfractures détectées dans le saphir. D'après [31].

De plus, l'hypothèse des microfractures est confirmée par le fait que les énergies des événements détectés étaient distribuées en loi de puissance, avec un exposant proche de ceux observés habituellement dans les lois de Gutenberg-Richter (voir figure 1.9). Cette invariance d'échelle se retrouve aussi dans la distribution des temps d'attente à laquelle il est possible d'ajuster la distribution de Bak [12] introduite au chapitre précédent. Le taux d'événement décroît lui aussi avec une loi de puissance du temps, comme une loi d'Omori généralisée. L'exposant mesuré est par contre assez surprenant, puisqu'il est de l'ordre de 0.2 (voir figure 1.10 alors que dans les tremblements de terre, il reste bien plus proche de 1.

Cette étude, bien que fortuite, est intéressante à plus d'un titre :

- Tout d'abord, les expériences reproduisant des lois d'Omori se font généralement dans des roches où un échantillon est soumis à une rampe de contrainte. C'est cette variation de la contrainte qui active la fracture⁵. Dans ces expériences sur le saphir, il semble plutôt que la déformation soit fixée dès que l'ensemble est thermostaté, et l'activité est observée ensuite

5. La nature des matériaux est ici différentes. Alors que les roches sont amorphes et présentent un désordre structural, le saphir est cristallin. Pourtant un désordre apparaît bien, du fait du processus d'endommagement lui-même, comme on peut le voir figure 1.3.2

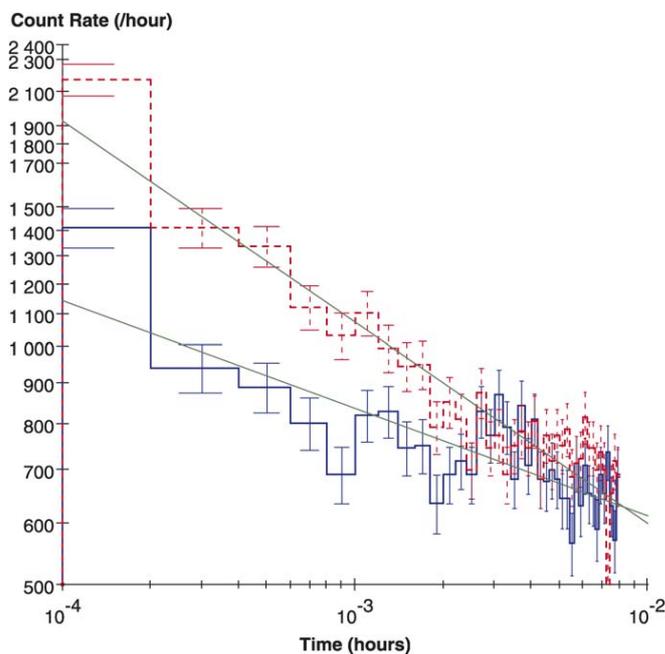


FIGURE 1.10 – Dynamique du taux d'événements dans le saphir. D'après [31].

pendant plusieurs jours. Il existe des simulations qui reproduisent effectivement des lois d'Omori à contrainte stationnaire [32] mais qui mettent en jeu une activation thermique de la rupture. Or, l'expérience se trouve ici à 10mK!! Sachant que les paramètres caractérisant la dynamique de la rupture évoluent en loi exponentielle de la température, l'activation thermique est *priori hors-jeu* pour expliquer ces observations.

- De plus, dans les expériences en laboratoire suivies par émissions acoustiques, il est généralement difficile de déterminer l'énergie absolue des séismes ou des microfractures, alors que grâce au détecteur CRESST, celle-ci est déterminée de façon extrêmement précise, ce qui constitue une nouveauté considérable. Non seulement le fait de disposer d'une mesure de l'énergie des microfractures est remarquable, mais de plus la valeur des énergies mises en jeu est elle-même intéressante. En effet, en s'appuyant sur les émissions acoustiques, on parvient à détecter des microfractures mettant en jeu au minimum de l'ordre de 10^7 liaisons, alors que les énergies les plus basses détectées ici correspondent à la rupture d'un millier de liaisons, ce qui fait des événements détectés les plus petites microfractures jamais observées.
- Enfin, c'est la fracture mise en jeu elle-même qui est originale. En effet, il n'existe pas d'études, à notre connaissance, étudiant les aspects statistiques des microfractures dans la fracture par indentation.

1.3.3 Autres quantités invariantes d'échelle

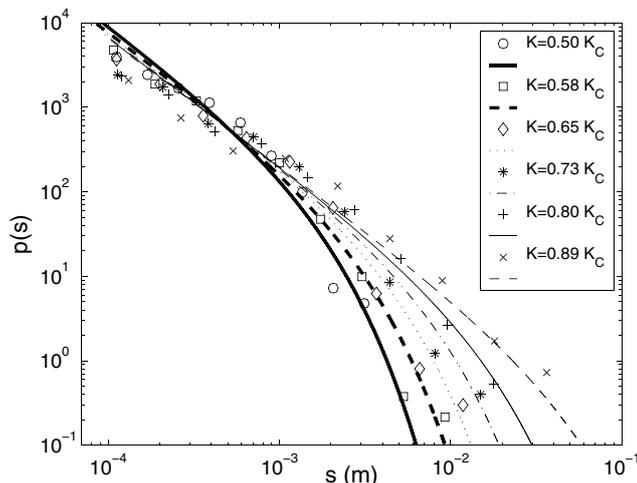


FIGURE 1.11 – Distribution des tailles de sauts dans la fracture sous-critique du papier pour différentes valeurs du facteur d'intensité des contraintes K , avec K_c la valeur critique. Deux ajustements (traits pleins) à partir de l'équation 1.7 sont aussi présentés. D'après [33].

Nous avons donc vu que les grandeurs caractérisant les microfractures présentent des invariances d'échelle. D'autres quantités peuvent être construites à partir de l'étude des fractures qui présentent aussi des distributions en loi de puissance. Un exemple sur lequel nous allons nous attarder quelques temps est la distribution des tailles de sauts dans la fracture du papier. La dynamique de la rupture lente des feuilles de papier soumises, en mode I, à une force constante a été étudiée au laboratoire par Stéphane Santucci puis Pierre-Philippe Cortet au cours de leurs thèses. Dans le régime sous-critique, une entaille initialement pratiquée par l'opérateur au centre de la feuille croît lentement en exhibant une dynamique fortement intermittente : la fracture est piégée et se propage par sauts brusques aléatoires, dont les tailles sont mesurées à l'aide d'une caméra rapide. On peut voir figure 1.11 les distributions $P(s)$ de la taille de ces sauts s pour différentes valeurs du facteur d'intensité des contraintes K (pour une définition, voir le paragraphe A.1.3), qui dépend de la taille de la fissure et de la contrainte appliquée. Celles-ci se comportent en loi de puissance avec une coupure exponentielle pour les tailles plus grande qu'une taille de coupure ξ . Les distributions peuvent être ajustées par la loi suivante :

$$P(s) = k \frac{e^{-\frac{s}{\xi}}}{s^{\frac{3}{2}}} \quad (1.7)$$

où k et ξ sont entièrement déterminés par la donnée de la contrainte appliquée et d'une échelle caractéristique λ , seul paramètre ajustable de la loi, qui vaut environ $50\mu\text{m}$ pour toutes les valeurs de K . Ces comportements sont aussi observés dans d'autres types de matériaux [34]. C'est sur ces expériences dans le papier que nous nous appuyerons au chapitre 3 pour l'étude de la morphologie des fronts de fracture, qui consiste essentiellement à mesurer leur rugosité. .

1.4 Rugosité des fronts de fracture

Une autre manifestation de l'invariance d'échelle concerne les interfaces rugueuses obtenues par la rupture des échantillons. Depuis les travaux pionniers de Mandelbrot dans ce domaine au début des années 80 [35] [36], de nombreuses études se sont intéressées à caractériser et à comprendre les lois d'échelle de ces interfaces. On peut voir figure 1.12 des exemples de tels fronts, obtenus dans différentes expériences sur différents matériaux.

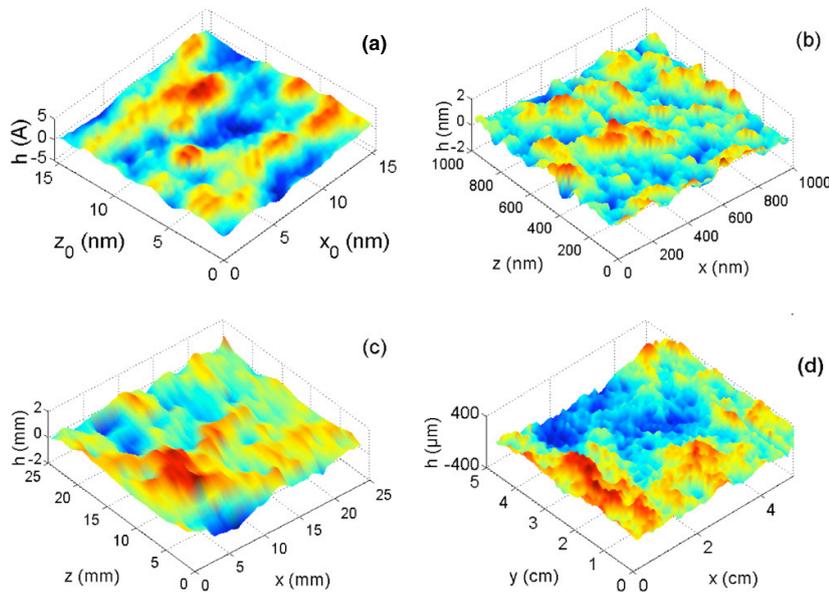


FIGURE 1.12 – Surfaces de fracture pour différents matériaux : (a) quasi-cristal, (b) verre, (c) béton, (d) céramiques. D'après [1].

Il est remarquable de noter la diversité des échelles mises en jeu, du nanomètre au centimètre, selon le matériau utilisé. De ces surfaces, on extrait des signaux $S(x)$ que nous appellerons fronts de fracture (où la direction x peut représenter la direction de propagation de la fracture ou la direction perpendiculaire, ou un mélange des deux). Certaines études se sont aussi intéressées à étudier la

ligne de fracture se propageant au cours de la rupture, en la projetant sur le plan moyen de fracture.

Dans le cas de matériaux fragiles hétérogènes, ces signaux présentent une invariance d'échelle : un agrandissement d'une partie du signal sera semblable au signal en entier. Il n'existe donc pas d'échelle caractéristique pour les décrire. Ce comportement est observé sur une large gamme d'échelles en général, bien au-delà de la taille caractéristique des hétérogénéités du matériau.

1.4.1 La rugosité ou comment caractériser l'invariance d'échelle spatiale

Afin de caractériser ce comportement, on construit en général des quantités dépendant de l'échelle et décrivant les variations du front sur celle-ci. Cet aspect technique sera étudié plus avant au chapitre 3. Les quantités les plus communément utilisées sont les fonctions de structure du signal, et en particulier $\Delta S(a)$ où a représente l'échelle, qui s'écrit :

$$\Delta S(a) = \langle (S(x+a) - S(x))^2 \rangle_x^{1/2} \quad (1.8)$$

qui se comporte en loi de puissance de l'échelle a : $\Delta S(a) \propto a^h$, où h est un nombre sans dimension compris entre 0 et 1, appelé rugosité, et qui caractérise l'invariance d'échelle du front considéré. Le cas $h = 0$ correspond à un signal discontinu (irrégulier à l'extrême!) et le cas $h = 1$ à un signal dérivable (donc régulier). Le cas $h = 0.5$ sépare les signaux corrélés positivement (h plus grand) des signaux corrélés négativement. Un exemple de ce dernier cas est le mouvement brownien, marche aléatoire sans corrélation d'un point à un autre. On peut voir un exemple de détermination de h grâce à un ajustement linéaire de $\Delta(a)$ en échelles logarithmiques. On peut noter que le comportement en loi de puissance a lieu sur près de six décades d'échelles. Nous allons voir maintenant quelles rugosités sont obtenues dans les différentes situations expérimentales.

1.4.2 De quoi dépend la rugosité des fronts de fracture ?

La valeur de la rugosité des fronts ne dépend pas beaucoup du matériau, mais bien plus du type de front étudié. Ainsi pour la fracture d'échantillons 3D (donnant lieu à des surfaces), la rugosité des fronts extraits dans la direction de propagation moyenne de la fracture est de l'ordre de $h_{\parallel} \simeq 0.5$ alors que $h_{\perp} \simeq 0.4$ dans la direction perpendiculaire. Une transition est observée lorsqu'on descend dans les échelles et qu'on se rapproche de celle des hétérogénéités ($h_{\parallel} \simeq 0.6$ et $h_{\perp} \simeq 0.75$). Pour les échantillons 2D (des feuilles donc, donnant lieu à des lignes de fracture), la rugosité est de l'ordre de $h \simeq 0.65$. On peut aussi mesurer la rugosité interfaciale dans le plan de la fracture, comme sur la figure 1.4.1. Le fait que ces valeurs soient peu ou prou les mêmes dans diverses situations expérimentales

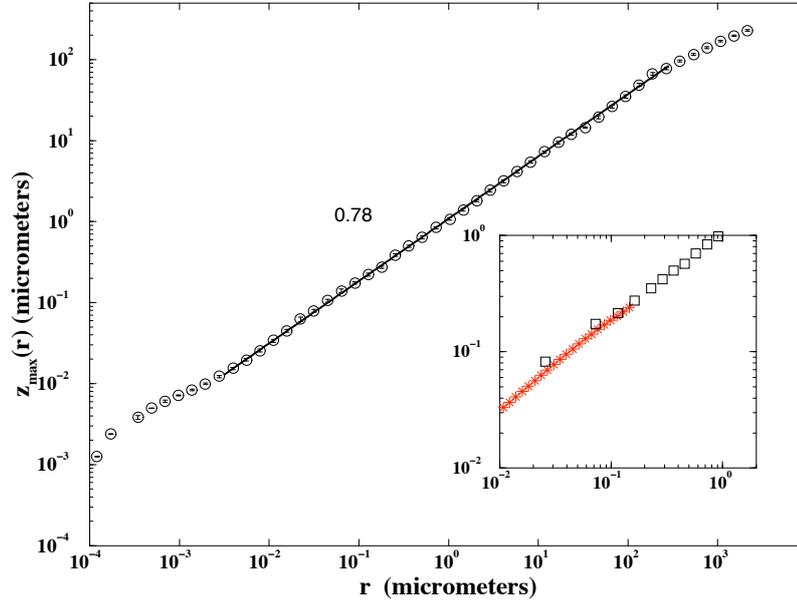


FIGURE 1.13 – Mesure de la rugosité du profil rugueux dans le plan de fracture au cours de celle-ci, dans un alliage Al-Ti. Cette large gamme d'échelle est obtenue en utilisant deux techniques différentes de profilométrie, à l'aide d'un AFM pour les petites échelles, et d'un microscope pour les plus grandes. En médaillon, les échelles où les deux techniques se rejoignent. D'après [37]

et différents matériaux a conduit à l'hypothèse d'une universalité de ceux-ci, par analogie avec les classes d'universalité des transitions de phase. Cette hypothèse a été fortement débattue durant les vingt dernières années [38] [37] [39]. Il existe pourtant de nombreuses évidences expérimentales la mettant à mal. On trouve ainsi des exposants différents (avec certes de faibles différences) selon la nature des hétérogénéités [40] ou une anisotropie du processus de fracture [41] [42]. Un effet de l'anisotropie du matériau lui-même sur la rugosité a également été mis à jour [43]. Les effets de taille finie engendrent eux des lois d'échelles anormales [44].

Par contre, aucune variation n'a été observée avec la vitesse de la progression de la fracture, du moins pour les processus lents (avec une vitesse faible devant la vitesse de Rayleigh des ondes de surfaces) [45] [46] [47] [48] [49] :

- Dans le plexiglas ($v = 10^{-7} - 5 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$),
- Le verre ($v = 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8} \text{ m.s}^{-1}$),
- Les alliages ($v = 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$),
- Le grès ($v = 10^{-4} - 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$).

Pour les fractures très rapides par contre ($v \gtrsim 600 \text{ m.s}^{-1} \simeq 0.45 \times$ la vitesse

de Rayleigh), une variation a été observée, mais le front n'est plus vraiment invariant d'échelle, car ce sont les oscillations qu'il présente qui dominent [50]. En outre, aucun effet de la contrainte appliquée n'a été observé [51]. Le lecteur désireux d'aller plus avant pourra consulter des articles passant en revue ces comportements [52] [37].

Enfin, un article récent a suggéré la présence de multifractalité dans des fronts de fracture du papier [53]. Ceci correspond à une non-unicité de h au sein du front. Ce type de comportement largement observé en turbulence est de plus en plus étudié dans la physique des surface [54]. Dans le chapitre 3 de cette thèse nous discuterons de la multifractalité des fronts de fracture du papier.

1.5 Modèles et universalité

1.5.1 Universalité en fracture ?

Ces comportements invariants d'échelle, que l'on retrouve dans tous types de matériaux fragiles, et à toutes les échelles, du laboratoire à la croûte terrestre, représentent un défi pour la physique théorique. Un enjeu important est de déterminer des lois universelles ne dépendant pas du matériau, dans le but d'établir une classification des phénomènes. Par exemple, les nombreuses analogies avec les transitions de phase ont conduit les théoriciens à interpréter la fracture par les modèles de criticalité auto-organisée [55] [56]. De nombreux modèles, *ad hoc* le plus souvent, cherchent à rendre compte des observations expérimentales. Pour les tremblements de terre par exemple, il existe une foisonnante littérature traitant du modèle épidémique de séquences de répliques (ETAS) (introduit par Ogata [57], voir [58] pour une revue)⁶. Toutefois, les données expérimentales incomplètes et la complexité des systèmes mis en jeu font que la modélisation de la fracture des matériaux désordonnés reste un champ d'étude largement ouvert. D'autant qu'il est souvent difficile d'avoir une compréhension physique de ces modèles complexes possédant souvent beaucoup de paramètres ajustables.

En ce qui concerne l'universalité, comme nous l'avons vu sur l'exemple pour la rugosité, on retrouve souvent expérimentalement des exposants semblables dans des expériences différentes, mais pas rigoureusement égaux. Il semble donc exister une universalité "approchée", à laquelle les expériences adhèrent plus ou moins. D'autant que les observations expérimentales elles-mêmes sont parfois sujettes à débats et constituent *in fine* le facteur limitant. Notre travail étant justement expérimental, nous n'entrerons donc pas plus avant dans ces questions, en renvoyant à [1] et [52] le lecteur désireux de les approfondir. Nous allons

6. Au passage, on peut aussi citer des travaux récents [59] retrouvant la renormalisation de la distribution des temps d'attente vue plus haut.

simplement nous attarder quelques temps sur les réseaux de fibres, que nous utiliserons de manière extrêmement simplifiée pour interpréter certains de nos résultats dans le chapitre 2.

1.5.2 Modèles de réseau de fibres pour la fracture

Afin de rendre compte des comportements de la fracture, en particulier la rupture sous-critique, un modèle numérique intensivement étudié durant ces vingt dernières années est celui des réseaux de fibres. Dans ces modèles, le solide est représenté par un réseau de fibres élastiques possédant un seuil de rupture, la contrainte étant appliquée sur les bords du réseau⁷. A l'aide de ce modèle, on peut simuler la rupture retardée par activation thermique en faisant fluctuer dans le temps les forces individuelles ressenties par les fibres [60], l'amplitude des fluctuations correspondant à une température numérique. On peut aussi modéliser le désordre en distribuant les seuils de rupture, la largeur de la distribution correspondant à une température de désordre. Des variantes plus complexes, mettant en jeu la plasticité [61] ont également été étudiées. Ces modèles ont donné de très bons résultats pour décrire la rupture sous-critique, en particulier pour rendre compte des observations expérimentales présentées en 1.3.3 et les phénomènes observés en fracture fragile, particulièrement en deux dimensions où la modélisation est plus aisée [62]. Dans une situation où la contrainte est imposée en 2D, on retrouve également une loi d'Omori, avant une transition au bout d'un certain temps vers un régime exhibant une loi d'Omori inverse précédant la rupture de l'échantillon [32]. Ces modèles sont en général difficile à résoudre analytiquement, et ne donnent pas toujours des bons résultats dans certaines situations.⁸

1.6 Conclusion

La fracture des matériaux désordonnés met donc en jeu des phénomènes très riches et complexes. La diversité des matériaux et des échelles considérées font que l'étude de ces phénomènes est d'un grand intérêt et couvre un large champ d'applications, de la résistance des matériaux aux tremblements de terre. D'autre part, alors que les modèles théoriques proposés ne décrivent que très mal ces comportements complexes, qui sont encore mal compris, les données expérimentales font parfois défaut, comme cela a été pointé par un article de revue récent [52], quand certaines observations ne sont pas contradictoires entre elles. L'utilisation

7. Du fait de l'analogie formelle, on parle parfois de réseau de fusibles, la contrainte correspondant à l'intensité, le déplacement à la tension...

8. Certaines études ont également tenté de décrire des comportement différents des lois d'Omori simples dans les tremblements de terre [63]

de techniques récentes d'analyse pourrait s'avérer utile pour étudier les phénomènes d'invariances d'échelle qui sont délicats à caractériser. C'est l'ensemble de ces observations qui a motivé cette thèse.

1.7 Objectifs de la thèse

L'objectif de cette thèse est d'étudier les invariances d'échelles dans la fracture des matériaux fragiles lors d'expériences de rupture sous-critique, en apportant à ce domaine les éclairages du traitement du signal. Nous nous concentrerons sur deux matériaux et deux situations expérimentales très différentes :

- La fracture par indentation d'une bille d'échantillons de verre, soumis à un déplacement constant, celle-ci étant suivie par émissions acoustiques. Nous nous attacherons à développer de nouvelles techniques de détections des microfractures. Un enjeu important sera la compréhension de la morphologie des signaux acoustiques. Nous comparerons également les aspects statistiques de cette fracture stable avec ceux des tremblements de terre, attendu que la dynamique semble être de type Omori. Nous essaierons enfin de modéliser simplement cette situation expérimentale afin d'en comprendre la dynamique.
- La rupture sous-critique de feuilles de papier en mode I soumises à une force constante sur leurs bords. Nous nous appuierons sur les expériences réalisées par S. Santucci [64] et P.P. Cortet [65] au cours de leurs thèses afin d'étudier l'influence du régime de fracture sur la rugosité des fronts. Pour cela nous extrairons numériquement les fronts de fracture d'échantillons rompus dont nous analyserons la rugosité à l'aide de différents outils introduits ces dernières années en traitement du signal et utilisés pour certains dans le domaine de la turbulence. Nous comparerons la rugosité dans la croissance sous-critique à celle de la croissance rapide. Nous étudierons également l'aspect multifractal que pourraient éventuellement revêtir ces fronts.

Dans ces deux situations, nous nous attacherons à analyser prudemment les invariances d'échelles et à en donner les limites. Nous essayerons aussi de comprendre de façon simple l'origine des faits expérimentaux observés à l'aide de modèles numériques.

Fracture par indentation dans le verre

Sommaire

2.1	Fracture par indentation	37
2.2	Dispositif expérimental	40
2.2.1	Principe	40
2.2.2	Calibration du capteur de force	41
2.2.3	Expérience à vide à force constante	43
2.2.4	Capteur piézoélectrique	44
2.2.5	Aspect statique de la fracture par indentation	45
2.2.6	Protocole expérimental	45
2.3	Détection et caractérisation des événements	46
2.3.1	Caractérisation du bruit	47
2.3.2	Détection par seuillage simple	47
2.3.3	Détection à l'aide d'une distance spectrale	49
2.3.4	Influence de la géométrie sur le spectre des événements	55
2.3.5	Conclusion	57
2.4	Etude des émissions acoustiques	58
2.4.1	Distribution des durées des événements	58
2.4.2	Comment définir l'énergie des émissions?	58
2.4.3	Evanescence des signaux et relation énergie/durée	60
2.4.4	Distribution des énergies	64
2.4.5	Conclusion	65
2.5	Etude de la dynamique de la fracture	65
2.5.1	Dynamique de la force	65
2.5.2	Dynamique des microfractures	67
2.5.3	Détermination de l'énergie absolue des microfractures	69
2.5.4	Distribution des temps d'attente	70
2.5.5	Influence de la température	71
2.5.6	Conclusion	75
2.6	Modélisation par un réseau de fibres	75

2.6.1	Topologie du modèle	77
2.6.2	Résolution analytique approchée	78
2.6.3	Paramètres influant sur la loi d'Omori	82
2.6.4	Conclusion	84
2.7	Retour sur les expériences à basse température . . .	85
2.8	Conclusion	86

Le travail présenté dans ce chapitre a été motivé par les observations faites dans le saphir à basse température, présentées en 1.3.2. L'enjeu est d'étudier la fracture par indentation à température ambiante afin de voir si on retrouve, comme à basse température, des lois d'Omori. Afin de suivre cette fracture, nous nous appuyerons sur les émissions acoustiques, largement utilisées en laboratoire. Nous nous efforcerons de les caractériser et d'améliorer leur détection à l'aide d'outils de traitement du signal. Ne pouvant pour des problèmes de coût travailler directement sur du saphir, nous utiliserons des échantillons en verre, qui seront mis sous contrainte à l'aide d'un dispositif spécialement conçu au sein du laboratoire.

Nous introduirons tout d'abord brièvement la fracture par indentation. Nous présenterons ensuite le dispositif expérimental puis les techniques de traitement de signal développées pour détecter et caractériser les émissions acoustiques, avant de présenter les résultats obtenus sur les aspects statistiques et dynamiques des microfractures. Enfin, nous tenterons de rendre compte de nos observations à l'aide d'une modélisation simple, ce qui nous conduira alors à discuter nos résultats en lien avec les observations faites dans le saphir.

2.1 Fracture par indentation



FIGURE 2.1 – Photographie d'une fracture par indentation d'une bille dans du verre. Image tirée de la littérature [66].

La fracture par indentation intervient lors du contact entre un solide et un indenteur, c'est à dire un objet de plus petite dimension, sphérique ou pointu. La fracture par indentation est très tôt étudiée en 1880 par Hertz [67] dans un article devenu célèbre : on parle aujourd'hui de contact de Hertz [68] lorsqu'on étudie les propriétés élastiques du contact entre deux sphères de rayons différents, l'indentation représentant le cas limite où l'un des rayons est infini. Lorsqu'on applique graduellement une force à l'aide d'un indenteur sur la surface d'un solide

élastique, une fracture est engendrée au delà d'un certain seuil. Celle-ci apparaît dans le volume et est de forme conique dans le cas d'un indenteur sphérique, la bille s'appliquant à la pointe du cône. La fracture se propage alors par la base. On peut en voir un exemple figure 2.1.

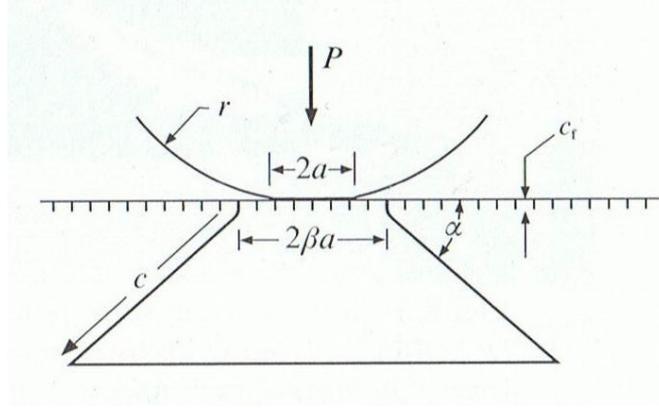


FIGURE 2.2 – Indentation par une sphère d'un solide fragile et paramètres géométriques caractérisant la fracture conique engendrée, connue sous le nom de cône de fracture de Hertz.

Cette fracture est connue pour sa stabilité : elle n'avance plus une fois que la force appliquée est stationnaire. Nous allons maintenant étudier rapidement les propriétés de cette fracture. On peut voir figure 2.2 un schéma représentant la fracture par indentation. L'application en un point de la surface d'un solide semi-infini parfaitement élastique d'une force F conduit au champ dit de Boussinesq. En pratique, le point d'application est en fait une surface (pour éviter une singularité de la contrainte) de taille a . Le champ de Boussinesq est entièrement déterminé par la donnée de a et de la pression moyenne s'exerçant sur la zone de contact, qui s'écrit $P_0 = \frac{F}{\pi a^2}$ dans le cas d'un indenteur sphérique, situation que nous allons étudier. Dans les coordonnées sphériques (ρ, θ, ψ) le champ de contraintes s'écrit, pour $\rho \gg a$:

$$\sigma_{ij} = \frac{a^2}{\rho^2} f_{ij}(\psi) \quad (2.1)$$

où $f(\psi)$ est une fonction bien définie de l'angle ψ . On voit que la décroissance de la contrainte (en ρ^{-2}) est beaucoup plus rapide que dans le cas d'une fissure plane s'ouvrant dans un solide (où elle évolue en $\rho^{-0.5}$, voir paragraphe A.1.3). Le champ dans la région $\rho \leq a$ dépend du comportement du matériau (plasticité, non-linéarités etc...). Une caractéristique importante de cette fracture est sa stabilité. En effet, pour une fracture en mode I (pour une définition des modes de fracture, voir paragraphe A.1.2) par exemple, lorsqu'on applique une force

constante suffisante pour engendrer une fissure, sa taille croit ensuite jusqu'à rupture de l'échantillon. Au contraire dans l'indentation, il est nécessaire d'augmenter la force appliquée pour faire croître la taille de la fracture. La décroissance rapide de la contrainte en fonction de ρ explique en partie cette stabilité.

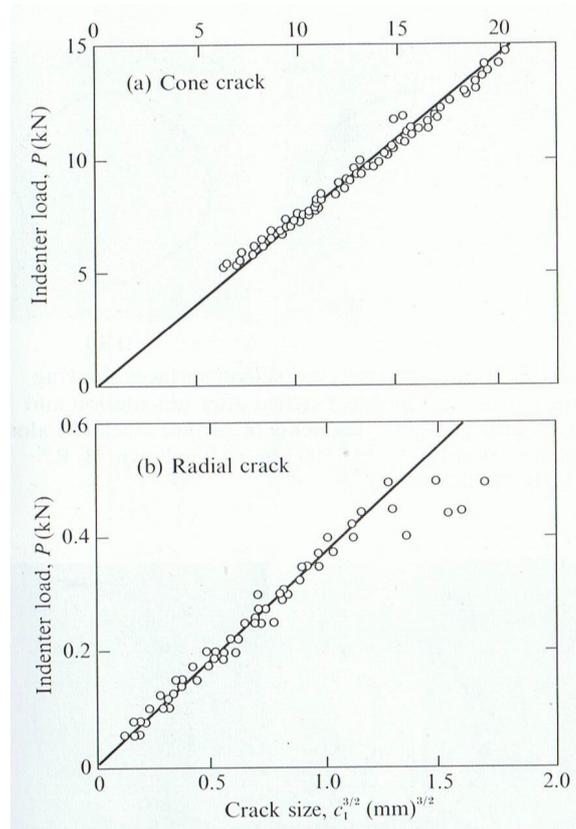


FIGURE 2.3 – Force P appliquée par l'indenteur en fonction $c_i^{3/2}$ de la taille caractéristique de la fracture pour un indenteur sphérique (a) et un indenteur de pyramidal de Vickers (b) dans le verre sodocalcique. D'après [66].

Une fois la fracture initiée, on observe expérimentalement que la force à appliquée pour que la fracture atteigne une taille c évolue en loi de puissance de cette taille, avec un exposant $\frac{3}{2}$, comme on peut le voir figure 2.3. La stabilité de la fracture par indentation a conduit les ingénieurs à s'en servir de référence car elle permet de mesurer convenablement la dureté et les autres paramètres liés à la résistance des matériaux, ce qui constitue sa principale application. Parmi les tests de dureté les plus utilisés, on peut citer celui de Brinell, avec un indenteur sphérique et celui de Vickers, avec un indenteur pyramidal. C'est la mesure de la taille de l'empreinte laissée par l'indenteur après pénétration qui permet d'accéder à la dureté. Nous allons maintenant présenter le dispositif expérimental mis

en place pour notre étude de la fracture par indentation du verre.

2.2 Dispositif expérimental

2.2.1 Principe

Le principe de notre expérience est d'imposer une force, via un ressort monté sur une vis sans fin, à une bille en contact avec une surface lisse du matériau étudié. On peut en voir un schéma figure 2.4.

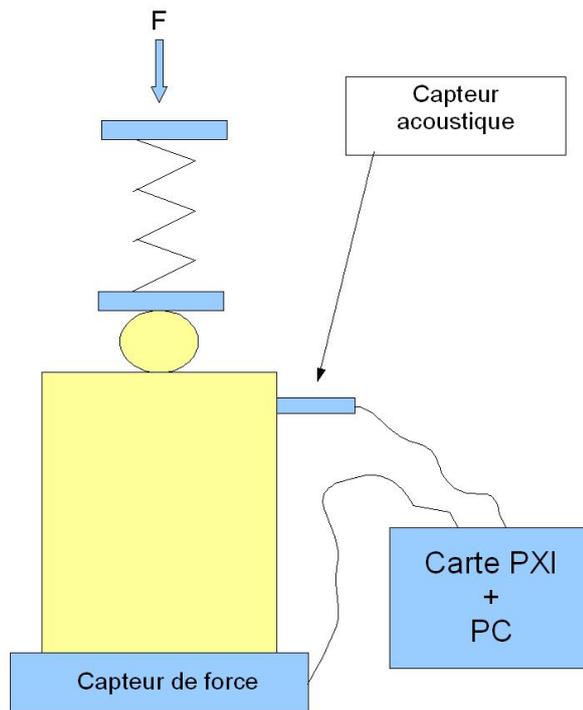


FIGURE 2.4 – Schema de principe de l'expérience d'indentation.

Nous avons choisi une bille plutôt qu'un indenteur pyramidal car cette configuration est plus simple à modéliser et correspond à la situation expérimentale décrite en 1.3.2. La bille est en acier de diamètre 2mm . Nous avons renoncé à utiliser des billes en verre car celles-ci se cassaient au cours de l'expérience, non

pas à cause de l'indentation, mais certainement de la façon dont elles étaient serties sur le bâti. L'utilisation du ressort permet d'appliquer la force graduellement à l'aide d'une manivelle. On peut voir figure 2.5 des photographies du dispositif.

Un capteur de force, suivi d'un conditionneur, mesure la force appliquée par le ressort. L'échantillon en verre, de forme cylindrique, est monté sur le capteur de force. Un capteur piézoélectrique (CPZ) est maintenu en contact avec l'échantillon sur le côté afin de récolter les ondes acoustiques émises par la fracture. Le contact acoustique est assuré par de la graisse silicone ou un gel aqueux spécifique. Directement sur le capteur, un premier étage d'amplification en tension amplifie la tension mesurée par le CPZ avant que celle-ci ne soit transmise à un amplificateur de puissance suivi d'un filtre passe-bande du quatrième ordre. L'ensemble des étages de mise en forme et d'amplification est alimenté de façon indépendante par des batteries de grande capacité, afin de limiter au maximum les fluctuations de la tension d'alimentation et le bruit venant du secteur.

Les signaux mis en forme du CPZ et du capteur de force sont ensuite envoyés à une carte d'acquisition NI 4132 14 bit possédant quatre voies avec horloges indépendantes cadencées à $2,5\text{MHz}$ maximum chacune. Les données peuvent être acquises en continu à cette vitesse grâce à deux disques durs rapides montés en parallèle (RAID 0 : vitesse d'écriture en continu jusqu'à 60Mo.s^{-1} sans chute du débit). L'ensemble du dispositif a dû parfois être placé dans une cage de Faraday lors des expériences pour éviter la contamination des signaux par un fort bruit électromagnétique provenant des salles voisines.

Afin de contrôler la température, des résistances chauffantes autocollantes MINCO ont été placées sur le dessus de l'échantillon, ce qui permet d'atteindre environ 100°C à la surface du verre. Des expériences ont également été réalisées en extérieur l'hiver pour avoir des température plus basses (environ 2°C) et dans un caisson thermostaté (environ 38°C).

2.2.2 Calibration du capteur de force

Afin de mesurer la force totale exercée par le ressort mécanique, nous utilisons un capteur T-Hydronics YCS-5k. Celui-ci utilise des jauges de déformation dont la mesure est basée sur la dépendance de la résistance d'un métal avec sa déformation. Le capteur en acier a la forme d'un S qui se déforme lorsqu'une force est appliquée. Ceci déséquilibre le pont formé par les jauges de déformations positionnées sur quatre parties du S. Lorsque le pont est alimenté, une petite f.e.m apparaît alors en sortie, qui en première approximation est proportionnelle à la force appliquée au capteur en S. Cette f.e.m étant très faible, il est néces-

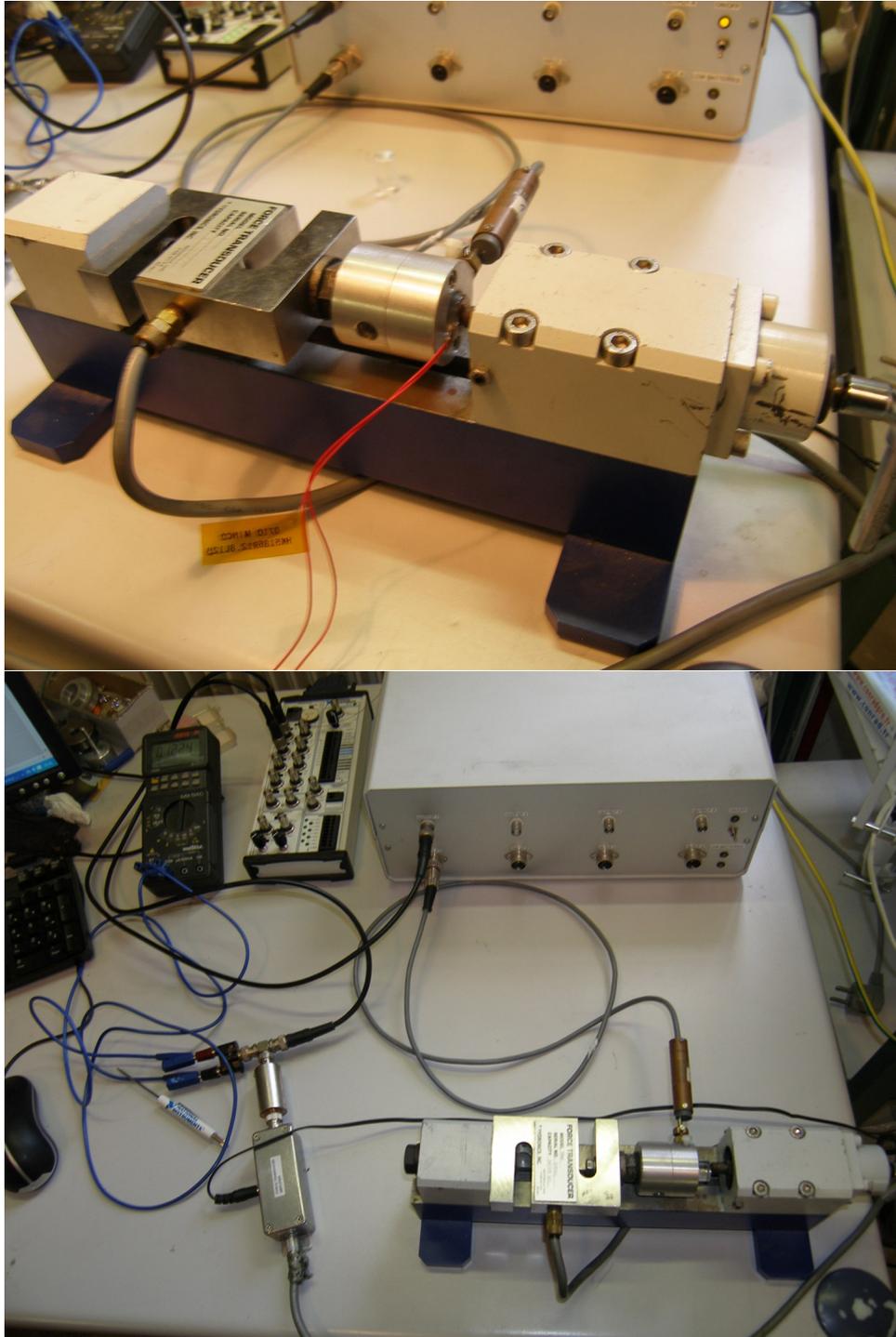


FIGURE 2.5 – Photographies du dispositif expérimental.

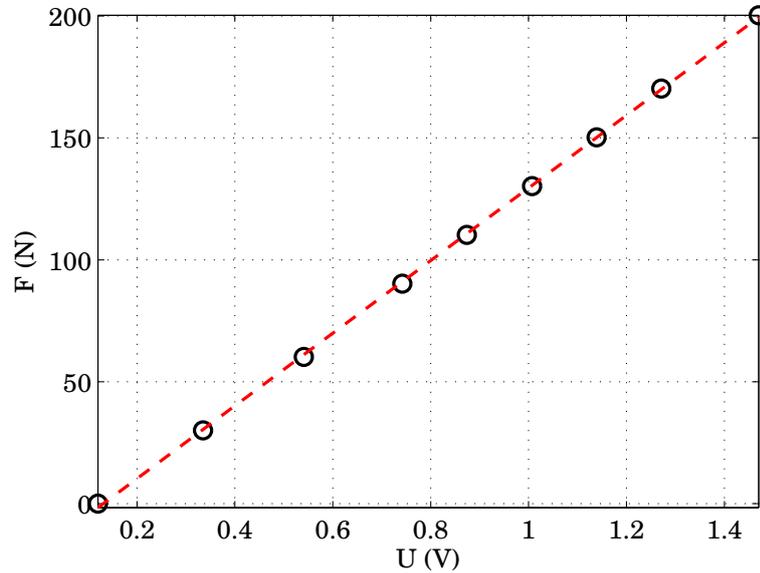


FIGURE 2.6 – Force appliquée F , en newtons, en fonction de la tension mesurée en sortie du conditionneur du capteur de force U , en volts. En rouge, l’ajustement linéaire qui donne $F = 149 \times U + 19.5$.

saire d’amplifier celle-ci en sortie. La figure 2.6 montre une courbe d’étalonnage de l’ensemble capteur + amplificateur. On voit que la relation force-tension est bien linéaire pour les forces considérées ($0 - 200N$). Le conditionneur étant censé être linéaire dans la plage de sortie ($0 - 15V$) et le capteur étant normalement linéaire sur une plage ($0 - 20000N$), nous avons extrapolé l’ajustement obtenu pour des valeurs de forces plus importantes (plage $0 - 1000N$) qui correspond à notre domaine d’étude.

2.2.3 Expérience à vide à force constante

L’ensemble du dispositif étant sous contrainte lors de nos expériences, il est important de s’assurer que seule la fracture par indentation est responsable de la relaxation de la force. Le fluage du métal constituant le ressort, dû à l’émission et la propagation de dislocations¹, pourrait en effet provoquer un changement des propriétés mécaniques de celui-ci et par là une variation de la force mesurée. Nous avons donc mis sous contrainte l’ensemble du dispositif (avec une force de l’ordre de $900N$), sans bille d’indentation, durant 24 heures, en mesurant la force sur cette durée. Aucune fracture n’a été constatée sur le verre, et aucune variation de la force n’a été mesurée compte tenu du bruit du capteur et de la

1. Les dislocations pourraient aussi constituer une source parasite d’émissions acoustiques

résolution du volt-mètre utilisé (précision de l'ordre de $0.2N$ en utilisant un filtre moyennant pour s'affranchir du bruit). Les variations éventuelles que nous observerons lors des expériences de relaxation que nous allons effectuer pourront donc être imputées au phénomène d'indentation.

2.2.4 Capteur piézoélectrique

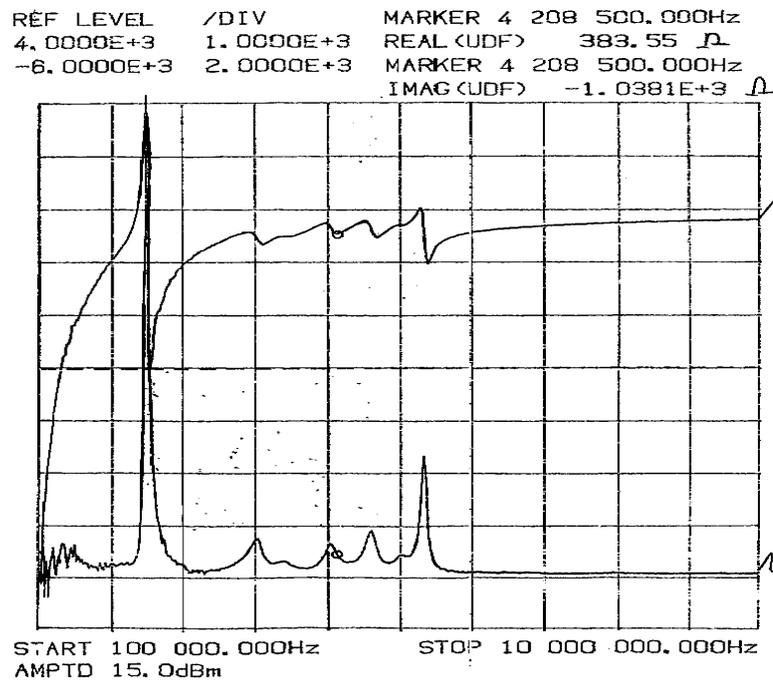


FIGURE 2.7 – Partie réelle (en bas) et imaginaire (en haut) de la fonction de réponse du capteur piézoélectrique en fonction de la fréquence. En abscisse une division correspond à 1MHz. Nous utilisons le capteur essentiellement dans la gamme 0-1 MHz.

Les CPZ utilisés sont de marque KMP modèle VP1093. Leur surface de contact avec le matériau, constitué d'or, est d'un diamètre de $3mm$ environ. Ces capteurs sont très large bande. On peut voir figure 2.7 leur courbe de réponse, fournie par le constructeur. Dans notre cas, la courbe de réponse complète doit prendre en compte les deux étages d'amplification et le filtrage. Ce dernier est très important car la carte d'acquisition seule ne possède pas de filtres anti-repliement. Nous travaillerons donc avec un filtre analogique large bande ($10 - 1000kHz$) lorsqu'il s'agira de caractériser les signaux, et des filtres plus resserrés lorsque nous voudrions améliorer le rapport signal sur bruit ($100 - 500kHz$).

2.2.5 Aspect statique de la fracture par indentation

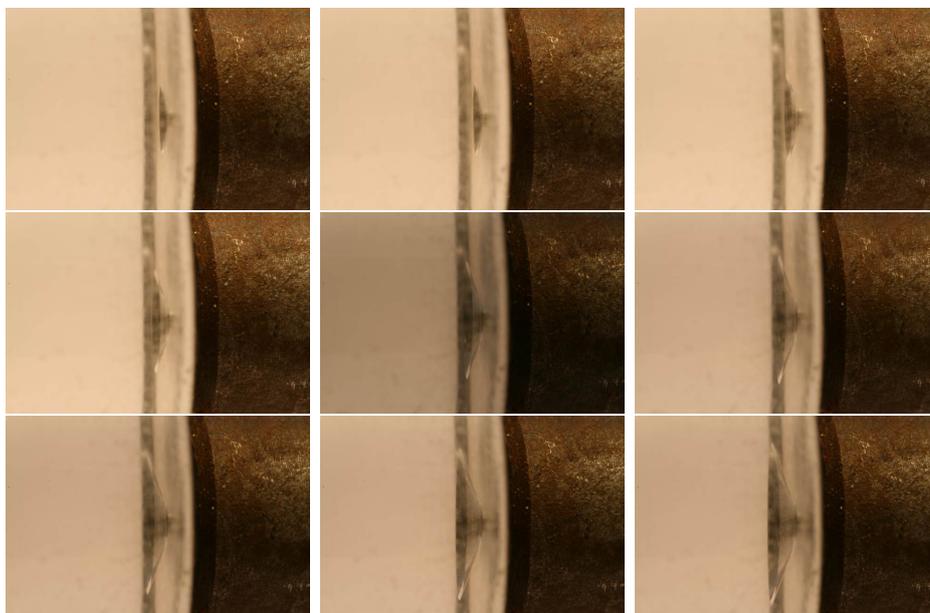


FIGURE 2.8 – Photographies de la fracture par indentation obtenues à l’aide d’un objectif macro de grossissement $\times 3$ prises pour différentes forces appliquées lors du chargement. Les forces sont croissantes de gauche à droite et de haut en bas. Le temps de pose est de 1.5 s, le champ total de chaque photographie est d’une largeur de 1.5cm environ.

On peut voir figure 2.8 des photographies prises successivement lors du chargement de l’échantillon. Après avoir extrait de ces images les tailles c de la fracture, On nous avons tracé figure 2.9 l’évolution de c avec la force appliquée. On observe bien, conformément à la littérature, une loi de puissance avec un exposant de 0.68 ± 0.02 , proche de la valeur $\frac{2}{3}$ donnée paragraphe 2.1. L’angle formé par la fracture est ici de 21° , une valeur là aussi conforme.

2.2.6 Protocole expérimental

Le protocole qui sera mis en oeuvre pour la mesure d’émissions acoustiques est d’imposer une certaine force en comprimant le ressort avec la vis sans fin, suffisante pour provoquer l’apparition d’une fracture dans le matériau, puis de laisser relaxer le système, ceci afin de reproduire la situation expérimentale vue au paragraphe 1.3.2 pour l’indentation du saphir à basse température. La relaxation de la force est alors observée par le capteur de force, alors que les éventuelles microfractures qui pourraient avoir lieu sont détectées par le capteur piézoélectrique.

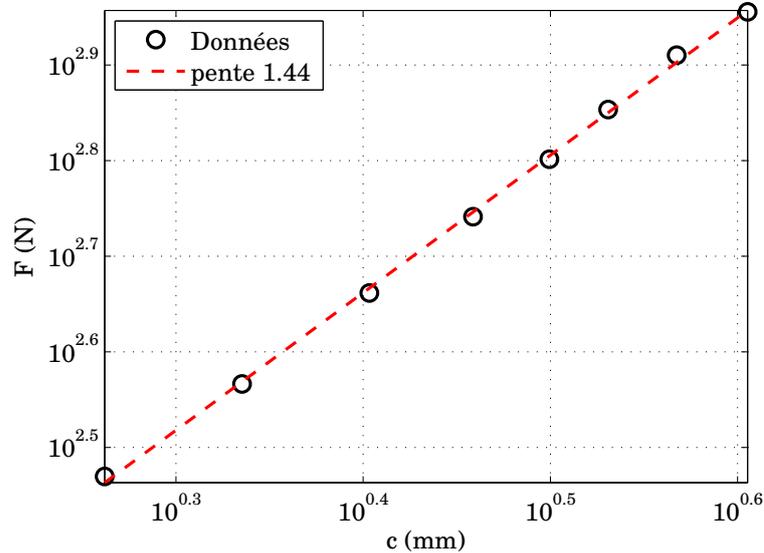


FIGURE 2.9 – Evolution de la taille de la fracture c mesurée à partir des images de la figure 2.8 avec la force appliquée.

2.3 Détection et caractérisation des événements

Comme nous l'avons vu, nous utilisons des capteurs piézo-électriques afin de détecter les microfractures au sein du matériau à l'aide de leurs émissions acoustiques. Cette technique est très utilisée dans le domaine de la fracture depuis près d'un demi-siècle. Pourtant, seul un intérêt relativement limité a été porté à l'amélioration des techniques de détection des émissions acoustiques, puisque c'est presque systématiquement l'application d'un seuil sur l'amplitude du signal acoustique qui est choisi pour détecter les microfractures. Des techniques de détections plus sophistiquées sont très peu utilisées dans le domaine de la fracture. De plus, peu d'études se sont intéressées aux caractéristiques des signaux eux-mêmes ou encore à l'interprétation physique de ces caractéristiques.² Nous allons tenter, dans cette partie, de relever ces défis en adoptant une démarche inspirée par le domaine du traitement du signal.

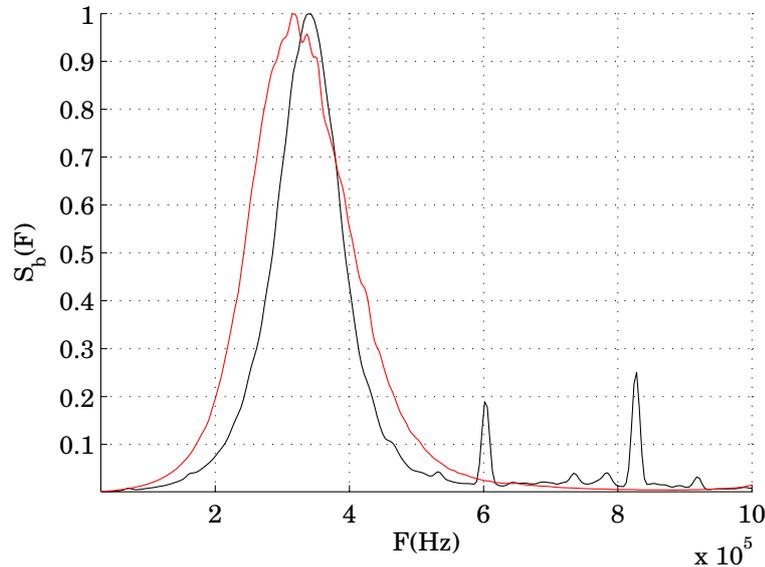


FIGURE 2.10 – Spectre sans dimension du bruit en fonction de la fréquence, pour deux filtres : en noir, passe-bande 50-600 kHz ; en rouge 10-1000 kHz. Les pics à 600 et 800 kHz sont d’origine inconnue. Ce spectre est obtenu en effectuant une moyenne sur 100 réalisations indépendantes. L’écart type est de l’ordre de grandeur de la moyenne

2.3.1 Caractérisation du bruit

Avant de caractériser des signaux acoustiques provenant de microfractures, il est important de caractériser le bruit de fond provenant de système capteur+amplificateur+filtre. On peut voir figure 2.10 le spectre du bruit moyenné en fonction de la fréquence. Il faut noter que le bruit étant aléatoire, son spectre instantané l’est aussi et fluctue beaucoup autour de ce spectre moyen, avec un écart-type du même ordre de grandeur que le spectre lui-même.

2.3.2 Détection par seuillage simple

Habituellement, l’acquisition du signal acoustique correspondant à une microfracture est déclenchée par un seuillage sur l’amplitude du signal. Lorsque l’amplitude du signal dépasse un certain seuil, celui-ci est enregistré pendant un certain temps. La difficulté consiste donc à enregistrer des signaux aussi faibles que possibles mais correspondant à des microfractures, sans jamais déclencher

2. On peut citer par exemple [69] où des outils mathématiques de reconnaissance de formes sont utilisés pour discriminer les signaux acoustiques en fonction du type d’endommagement les engendrant.

l'acquisition dans le bruit. Pour simplifier, nous allons modéliser le bruit b par un bruit gaussien d'écart-type σ , tiré au hasard à une fréquence f_b ³, ce qui ne change pas fondamentalement le résultat mais simplifie les calculs. Nous allons aussi supposer que la fréquence d'échantillonnage du signal est supérieure au double de la fréquence propre du bruit (ce qui revient à s'affranchir des problèmes d'échantillonnage). Enfin, nous pouvons introduire la durée T de l'expérience. La distribution du bruit s'écrit :

$$P(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} \quad (2.2)$$

On peut alors écrire la probabilité pour b de dépasser un certain seuil s :

$$P(b > s) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) \quad (2.3)$$

Ici, on se place dans le cas où cette probabilité est très faible (on ne veut pas déclencher dans le bruit) et on peut donc utiliser l'approximation suivante :

$$P(b > s) \approx \frac{\sigma}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} \quad (2.4)$$

Nous allons considérer que la probabilité P_T qu'il n'y ait pas déclenchement sur la durée T doit être supérieure à une valeur p (comprise entre 0 et 1). Cette probabilité s'écrit :

$$P_T = (1 - P(b > s))^{f_b T} = \left(1 - \frac{\sigma}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}\right)^{f_b T} \quad (2.5)$$

La condition s'écrit donc :

$$\left(1 - \frac{\sigma}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}\right)^{f_b T} > p \quad (2.6)$$

Soit, en introduisant $n = \frac{s}{\sigma}$:

$$\sqrt{2\pi} n e^{-\frac{n^2}{2}} \times \ln 1/p > f_b T \quad (2.7)$$

Ceci permet de déterminer la valeur de n en fonction de la durée de l'expérience pour éviter de déclencher dans le bruit. Dans notre cas, avec $f_b = 400\text{kHz}$ environ, on peut déterminer n grâce à la courbe figure 2.11.

On voit que pour une expérience de l'ordre de l'heure, il faudra définir un seuil de l'ordre de 6 à 7 fois la déviation standard du bruit. Ceci peut avoir comme conséquence d'"oublier" de nombreux événements. En effet, les signaux

3. Cela revient, dans notre cas, à remplacer le spectre du bruit par une fonction porte, dont le spectre vaut 1 entre 0 et 400kHz et 0 ailleurs.

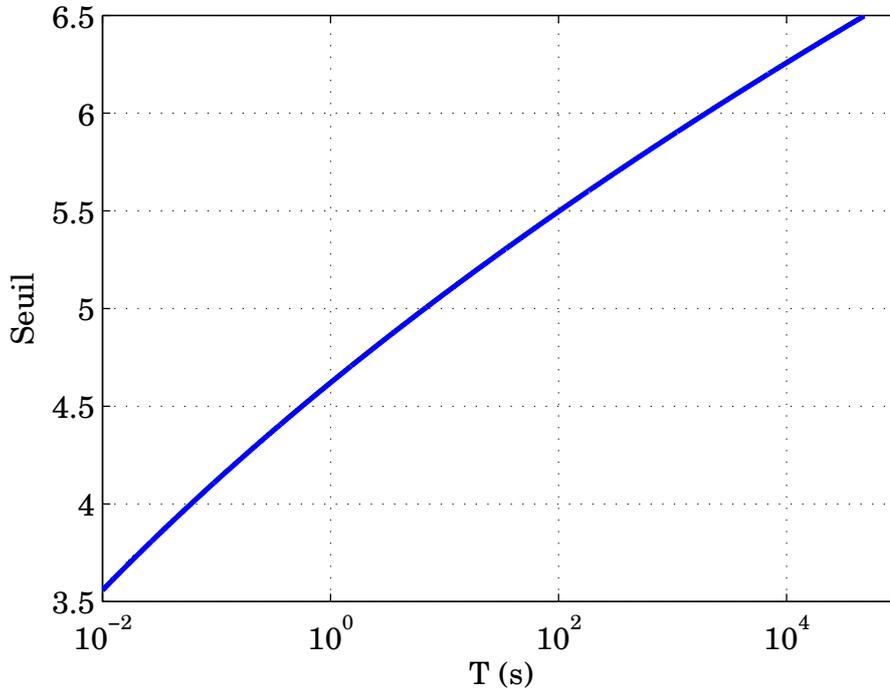


FIGURE 2.11 – Seuil normalisé $n = \frac{s}{\sigma}$ en fonction de la durée de l'expérience pour ne pas avoir de déclenchement dans le bruit avec une probabilité $p = 90\%$ et une fréquence de bruit typique $f_b = 400kHz$.

d'émission acoustique voient souvent leurs amplitudes distribuées en loi de puissance : la plage d'amplitude où on trouve le plus de signaux est justement celle des faibles amplitudes. Dans notre cas, où les signaux correspondant à des microfissures ont des signatures fréquentielles particulières et une certaine durée (comparativement à un pic du bruit), il est possible d'améliorer la détection en s'appuyant sur ces caractéristiques. Nous avons développé une technique basée sur la transformée de Fourier afin de détecter des événements plus faibles.

2.3.3 Détection à l'aide d'une distance spectrale

2.3.3.1 Analyse temps-fréquence

Afin de prendre en compte l'aspect spectral des signaux au moment de leur détection, le meilleur moyen est d'utiliser une transformée de Fourier glissante (TFG), qui dépend du temps et de la fréquence. Elle permet la localisation des caractéristiques d'un signal $x(t)$, de longue durée et non stationnaire, et consiste en un spectre à court terme calculé au voisinage de l'instant t à partir d'une

restriction du signal sur un intervalle $[t - \tau/2, t + \tau/2]$. Ce spectre local est obtenu par transformation de Fourier du produit du signal $x(t)$ par une fenêtre $w_\tau(t)$ qui est translatée lorsque t varie et qui annule toute les contributions du signal qui n'appartiennent pas à l'intervalle $[t - \tau/2, t + \tau/2]$:

Le calcul numérique de cet outil requiert de nombreux paramètres :

- choix des temps t_n où ce spectre est évalué ;
- forme de la fenêtre glissante ;
- taille de cette fenêtre ;
- fréquences prises en compte lors du calcul.

Etant donnée la durée caractéristique des émissions acoustiques (de l'ordre de la milliseconde) et de la fréquence d'échantillonnage (2MHz), nous avons choisi une fenêtre glissante de largeur à mi-hauteur de 200 points (soit 100 μs) et de forme gaussienne. Afin d'être sûr d'observer les variations de la TFG, nous avons calculé un spectre toutes les 10 μs . L'inconvénient qui en découle est qu'étant donnée la largeur de la fenêtre, ceci engendre une redondance et un temps de calcul plus long. La TFG du signal $x(t)$ s'écrit donc, en fonction du temps t et de la fréquence f :

$$TFG(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\tau^2}} x(t_0) e^{-2\pi f t} dt_0 \quad (2.8)$$

où τ est la demi-largeur à mi-hauteur de la fenêtre glissante. L'algorithme utilisé pour le calcul du spectre est la fonction FFT de Matlab. La taille de la fenêtre (à mi-hauteur) étant de 200 points, nous avons pris en compte au total 512 points, ce qui fournit 512 fréquences lorsque nous avons calculé la FFT du signal.⁴

On peut voir sur la figure 2.12 un exemple de transformée de Fourier glissante alors qu'une intense microfracture a lieu. L'énergie est initialement distribuée dans toutes les fréquences puis elle se dissipe rapidement sauf dans quelques bandes. Nous allons donc utiliser ces bandes pour détecter des signaux correspondant à des microfractures moins intenses que ceux détectés par la technique habituellement utilisée qui basée sur un simple seuillage de l'amplitude.

Une différence notable avec la plupart des autres études est que le signal est acquis en continu dans sa totalité, la détection étant effectuée après coup, car elle nécessite un temps de calcul plus long que la durée de l'acquisition. Si cela introduit une certaine lourdeur dans l'acquisition, et engendre des difficultés techniques supplémentaires (il faut pouvoir écrire les données assez vite) mais constitue un atout pour l'analyse, car il sera possible d'adapter les paramètres de détection lorsque celle-ci n'aura pas été satisfaisante. Une fois la TFG calculé

4. Nous avons utilisé les algorithmes de Flandrin *et al* pour le calcul de la TFR, voir <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/logiciels2.html>.

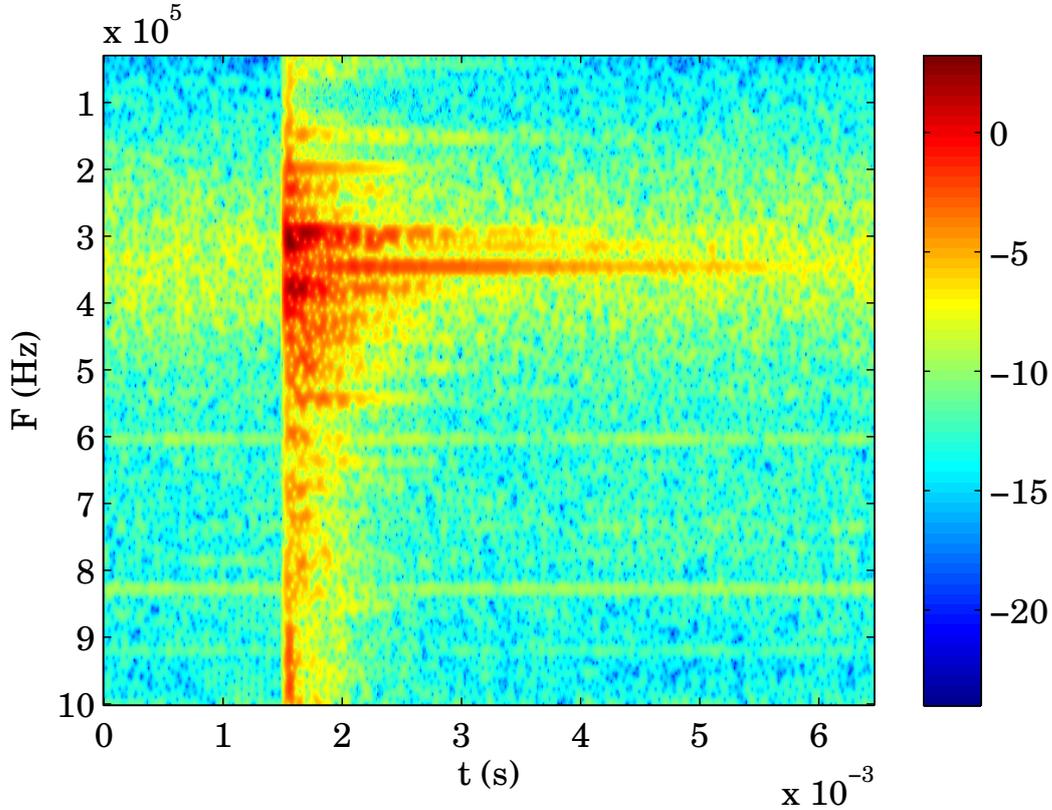


FIGURE 2.12 – Transformée de Fourier glissante (en couleurs) en fonction du temps (en abscisses) et de la fréquence (en ordonnées). Le signal a été acquis à $2MHz$, la T.F.G. est calculée sur une fenêtre gaussienne de largeur à mi-hauteur de $0.1ms$ toutes les $10\mu s$

lée, nous avons comparée celle-ci au spectre du bruit, en calculant une distance spectrale.

2.3.3.2 Distance spectrale

Une distance spectrale consiste en une mesure, à l'aide d'une norme de la différence entre le spectre de bruit $S_2(f)$ d'un processus aléatoire et le spectre $S_1(f)$ d'un événement oscillatoire qui peut avoir des fréquences caractéristiques, f désignant la fréquence. Dans notre étude, nous avons utilisé différents types de distances spectrales[70], avec en particulier :

- Distance log-spectrale :

$$Dl_q(S_1, S_2) = \|\log(S_1/S_2)\|_q; \quad (2.9)$$

Où $\| \cdot \|_q$ désigne la norme q dans L_q ⁵. Nous avons utilisé $q=1,2$ et ∞ .

– Distance "Itakura-Saito"

$$D_{is}(S_1, S_2) = \text{norm}_1(S_1/S_2 - \log(S_1/S_2) - 1); \quad (2.10)$$

– Une distance que nous avons nous-même introduite :

$$d_m(S_1, S_2) = \int_{S_1 > S'_2} (S_1 - S'_2) \quad (2.11)$$

Avec $S'_2 = S_2 + m \times \text{std}(S_2)$ qui correspond au spectre moyen du bruit (figure 2.10) relevé d'un certain nombre m de fois sa déviation standard, qui est elle-même obtenue, en fonction de la fréquence, à partir de 50 mesures du spectre du bruit. Nous ne prenons donc en compte dans la mesure que les fréquences pour lesquelles S_1 dépasse un spectre de référence S'_2 . m est donc un paramètre de l'analyse, nous avons en général pris m entre 5 et 10.

Le point important est qu'on pourra sélectionner des bandes de fréquences lors du calcul de cette distance. Nous utiliserons dans la suite la distance d_m car elle nous permet d'ajuster l'amplitude des fluctuations de la distance *via* le paramètre m , que nous prendrons égal à 5.

2.3.3.3 Protocole de détection

Pour résumer, nous avons utilisé le protocole suivant afin de détecter les émissions acoustiques :

1. Acquisition du bruit avant chargement de la force.
2. Acquisition en continu du signal acoustique amplifié collecté par le transducteur à haute fréquence (en général nous avons choisi une fréquence de 2MHz).
3. Un spectre de référence moyen est calculé.
4. Calcul de la transformée de Fourier glissante du signal. Un exemple d'une telle transformée est donné figure 2.12.
5. Calcul de la distance spectrale d_5 comparant la TFG avec le spectre de référence.
6. Détection des événements en appliquant un seuil sur la distance spectrale.

5. C'est à dire $\|f\|_q = (\int |f(x)|^q dx)^{1/q}$, et $\|f\|_\infty = \max_x f(x)$.

7. Post traitement visant à retirer les artefacts, lorsque le seuil était trop bas (présence de bruit), lorsque deux événements se chevauchent, ou lorsque des signaux venant de l'extérieur parasitent la mesure.

La phase de post-traitement est bien sur la plus laborieuse. Afin d'éviter de refaire toute l'analyse sur le signal complet, ce qui prend du temps, nous effectuons une première détection grossière avec un seuil volontairement bas, que nous affinons par la suite (on peut "jeter" ainsi 99 % du signal). Nous n'entrerons pas ici dans les détails des différentes techniques utilisées pour retirer les artefacts, et nous concentrerons sur les résultats physiques obtenus. A la fin, nous disposons pour chaque manip d'un ensemble d'événement avec les informations suivantes : temps d'arrivée, durée, puissance spectrale, distance spectrale maximale, fréquences les plus énergétiques...

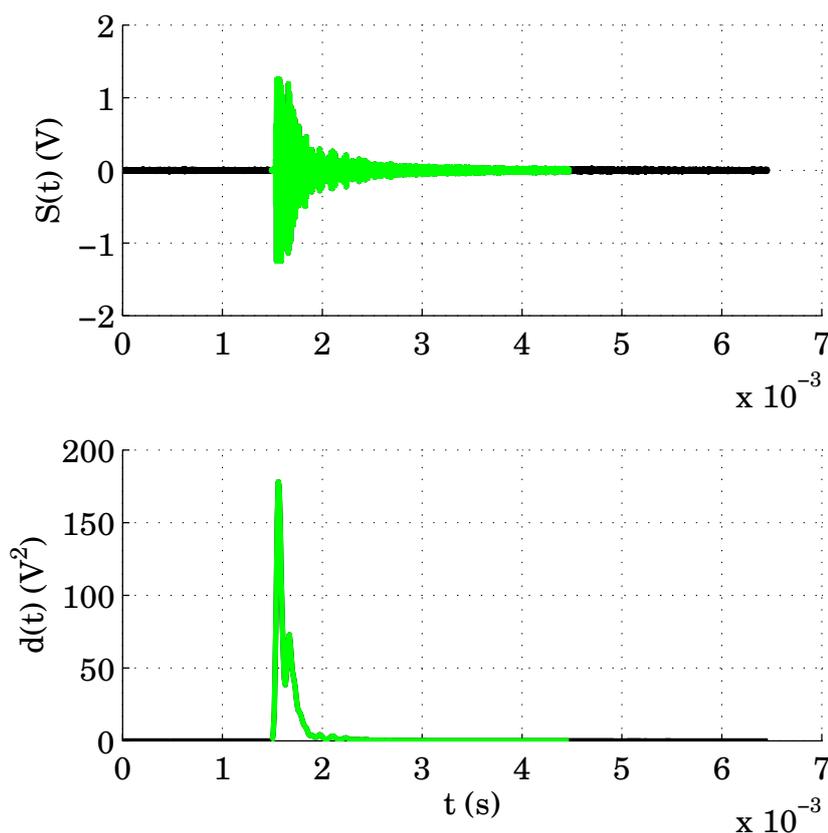


FIGURE 2.13 – Signal $S(t)$ (a) et distance spectrale $d(t)$ (b) en fonction du temps. Le seuillage est réalisé sur la distance. L'événement détectés est tracé en clair. Il correspond à la TFG montrée figure 2.12.

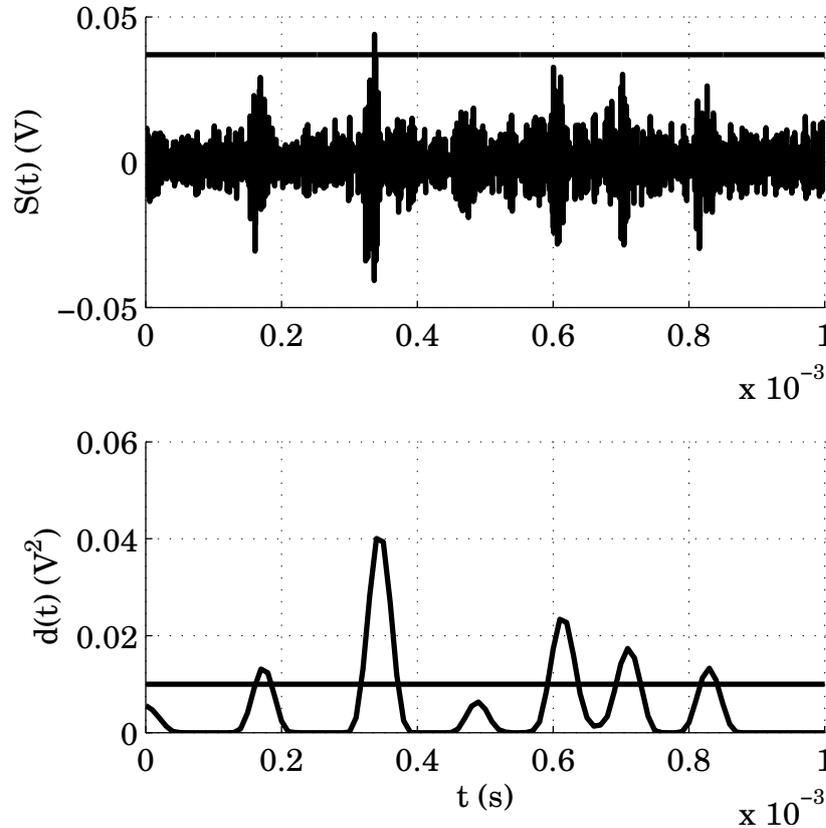


FIGURE 2.14 – Signal $S(t)$ (a) et distance spectrale $d(t)$ (b) en fonction du temps pour une série d'événement faible. On a aussi tracé les seuils correspondants, qui correspond pour l'amplitude à 7 fois l'écart-type du bruit environ.

En guise d'illustration, on trouvera figure 2.13 un exemple de détection d'un événement intense. En pratique, l'utilisation d'une distance spectrale nous permet de détecter des événements dont l'amplitude est jusqu'à deux fois inférieure à la valeur du seuil utilisé par la technique classique, et ce sans sélectionner de bandes de fréquence particulière, comme on peut le voir sur la figure 2.14. Ceci vient du fait qu'on prend en compte les caractéristiques du bruit, et qu'on utilise une distance spectrale prenant en compte une certaine durée du signal et non un simple point comme lors d'un seuillage simple. Les seuils pour la distance spectrale et l'amplitude sont ici déterminés "à la main", correspondant à la valeur minimale (que nous avons légèrement relevée par précaution) pour laquelle aucun événement n'est détecté dans une réalisation du bruit d'une durée d'une minute. Pour l'amplitude ce seuil vaut environ 7 fois la déviation standard du bruit, ce qui est cohérent avec notre modélisation figure 2.11. On constate enfin que la distance spectrale d_5 avec $m = 5$ utilisée ici présente un excellent contraste 2.14. Ceci est

dû au fait que nous ne prenons en compte que les fréquences pour lesquelles le spectre de S dépasse le spectre de référence, d_5 étant ainsi souvent nulle. Nous allons maintenant étudier plus avant les spectres des événements détectés.

2.3.4 Influence de la géométrie sur le spectre des événements

Dans les expériences suivies par émissions acoustiques, la morphologie (contenu fréquentiel, comportement dynamique) des signaux acoustiques est peu étudiée. La TFG que nous utilisons est justement un outil particulièrement adapté pour effectuer cette étude. On peut voir figure 2.12 que le signal, s'il a un large contenu fréquentiel au départ, voit son énergie se concentrer rapidement sur quelques bandes de fréquences avant de décroître. Dans les échantillons étudiés (15mm de diamètre sur 18mm de hauteur), nous avons constaté la présence de deux bandes qui ressortaient bien lorsqu'on faisait des moyennes sur les spectres (à 300 et 370kHz). Le rapport de ces fréquences (qui vaut 1.22) est très proche du rapport d'aspect de l'échantillon cylindrique (1.20). Ceci nous a conduit à supposer que c'était la géométrie de l'échantillon qui sélectionnait les fréquences, qui correspondent alors aux fréquences de résonances du cylindre de verre.

Afin de tester expérimentalement cette hypothèse, nous avons fait fabriquer de nouveaux échantillons en changeant le rapport d'aspect. Nous avons ainsi trois géométries différentes dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Géométrie	1	2	3
Diam. (mm)	15	15	25
Hauteur (mm)	18	24	19
Rapport d'aspect	1.20	1.67	0.72

TABLE 2.1 – Dimensions et rapports d'aspect pour les trois géométries utilisées

On peut voir sur les figures 2.15 (a), (b) et (c) les spectres obtenus dans les géométries 1, 2 et 3. On voit dans la figure (a) un doublet (mal résolu) aux fréquences $\{300-312\text{ kHz}\}$. Nous pouvons l'associer à celui se situant à $\{232-244\text{ kHz}\}$ pour la figure (b) et à celui à $\{285-297\text{ kHz}\}$ dans la figure (c). Ces doublets sont repérés par des croix vertes claires sur la figures. Les rapports de ces fréquences pour différentes géométries correspondent parfaitement aux rapports des hauteurs des échantillons. La largeur de ces trois doublets étant à peu près la même. De la même façon, on peut associé le pic à 368 kHz de la figure (a) que l'on retrouve figure (b) avec le pic intense à 232 kHz qu'on voit figure (c), ces

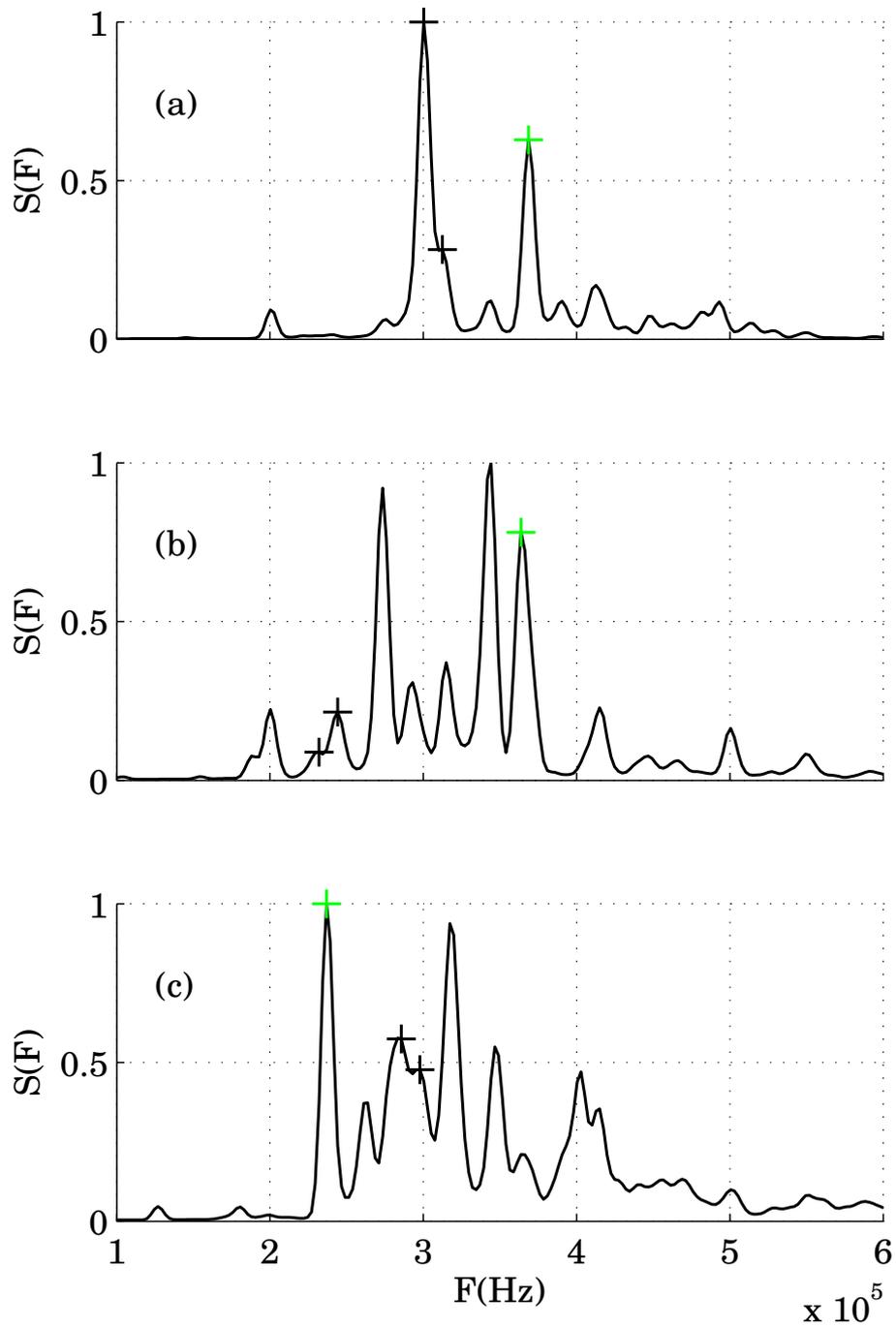


FIGURE 2.15 – Spectre moyennés sur plusieurs événements et plusieurs expériences obtenus dans différentes géométries : (a) :1, (b) :2 et (c) :3. Les spectres sont normalisés par leurs maxima.

pics sont marqués d'une croix noire. Cette fois-ci c'est le rapport des diamètres qui correspond aux rapports des fréquences. De plus, étant donnée la vitesse du son c dans le verre utilisé, de l'ordre de 6000 m.s^{-1} , les fréquences obtenues correspondent assez bien avec les dimensions de l'échantillon (on a $\frac{c}{f} \simeq d$, où d est une dimension de l'échantillon, et f une des deux fréquences retenues). Nous ne pouvons pas interpréter l'ensemble des pics observés de cette manière, et l'étude théorique des modes acoustiques d'un solide cylindrique est complexe : leurs fréquences ne s'expriment pas directement à partir des données géométriques. Ces résultats semblent toutefois cohérents, et apportent un indice tangible sur l'origine des fréquences observées.

Ceci suggère que dans les expériences suivies par émissions acoustiques, le contenu fréquentiel des signaux acoustiques est lié aux propriétés de l'échantillon (en particulier à sa géométrie). Dès lors le processus de fracture en lui-même ne semble pas jouer un grand rôle, du moins dans les spectres moyens observés. Toutefois, une grande disparité est observée entre les spectres de différents événements dans une même géométrie, et ce n'est qu'en moyennant un nombre suffisant de signaux que ressortent les bandes propres de l'échantillon. Ainsi, le processus de fracture n'exciterait pas systématiquement toutes les fréquences, mais uniquement une partie d'entre elles, qui varient à chaque microfractures. Ceci est corroboré par certaines études théoriques basées sur la théorie des dislocations (voir par exemple la thèse d'Ojala où ces études sont présentées [71]), qui attribuent le contenu fréquentiel des signaux au processus de micro-fracturation lui-même. A la lumière de notre étude, il semblerait plutôt que certaines parmi ces fréquences sont sélectionnées par la géométrie de l'échantillon. Les bandes de fréquence que nous observons expérimentalement correspondent à des périodes de $2\mu\text{s}$, alors qu'une microfracture se produit sur un temps beaucoup plus court (on pourrait l'évaluer comme L/c , où L est la taille de la microfracture, *a priori* très inférieure au mm et c la vitesse du son, qui vaut environ 6000m.s^{-1}), et excite donc un spectre beaucoup plus large que les bandes observées. Il est intéressant de mentionner, ici aussi, l'étude réalisée dans le saphir à basse température [31]. Le détecteur utilisé dans ce cas, sensible à l'énergie, est très bien résolu temporellement (sur une durée de l'ordre de la microseconde). Il a permis de montrer que l'énergie libérée se met rapidement sous la forme d'un gaz de phonons, qui se dissipent alors plus lentement au niveau des parois. Ce comportement pour les phonons correspond pour les ondes à des réflexions imparfaites sur les parois.

2.3.5 Conclusion

Nous avons introduit des techniques basées sur une transformée de Fourier glissante, permettant de mieux détecter les émissions acoustiques des microfrac-

tures. Ceci permettra de mieux caractériser la distribution des énergies et la dynamique globale de la fracture comme nous le verrons par la suite. L'étude du contenu fréquentiel des émissions nous a conduit à formuler l'hypothèse que le spectre du signal est sélectionné par des réflexions sur les parois de l'échantillon. Ces observations sont importantes, car en sélectionnant convenablement la géométrie des échantillons utilisés dans les expériences de fracture, il est possible de sélectionner les fréquences des émissions acoustiques, ce qui pourrait permettre d'améliorer encore leur détection.

2.4 Etude des émissions acoustiques

Les émissions acoustiques sont habituellement caractérisées par leurs énergies et leurs durées, qui sont le plus souvent distribuées en loi de puissance. Les constatations faites au paragraphe précédent nous conduisent ainsi à nous interroger sur la définition de l'énergie et de la durée du signal acoustique, puisque d'après ce qui précède, les signaux acoustiques recueillis sont en fait des ondes réfléchies plusieurs fois sur les parois de l'échantillon après la microfracture. Nous allons donc nous intéresser au comportement des signaux eux-mêmes en fonction du temps.

2.4.1 Distribution des durées des événements

On peut observer la distribution des durées des événements figure 2.16, obtenues à partir d'une dizaine d'expériences réalisées dans les mêmes conditions en géométrie 1 ($15mm \times 18mm$). On voit bien une distribution en loi de puissance jusqu'à une certaine durée, au-delà de laquelle la distribution s'estompe, ainsi que cela est souvent observé.

2.4.2 Comment définir l'énergie des émissions ?

Dans les expériences de fracture suivies par émissions acoustiques, on fait généralement l'hypothèse que l'énergie acoustique mesurée est proportionnelle à l'énergie de la microfracture. Il existe plusieurs façons de définir l'énergie des émissions acoustiques des microfractures. Le plus souvent dans la littérature elle est définie comme le carré de l'amplitude maximale du signal (dans [18] par exemple), mais d'autres définitions sont aussi utilisées comme par exemple l'intégrale du carré du signal sur la durée de l'événement [23] [72]. Ces définitions ne sont généralement que peu discutées, ce qui est problématique alors que la distribution des énergies des événements est une donnée importante dans ce type d'expérience. On peut voir figure 2.17 les distributions trouvées dans les deux cas. Celles-ci sont en loi de puissance, mais l'exposant β trouvé diffère, étant égal à 1.20 pour l'intégrale et à 1.45 pour le maximum. On voit aussi un décrochage

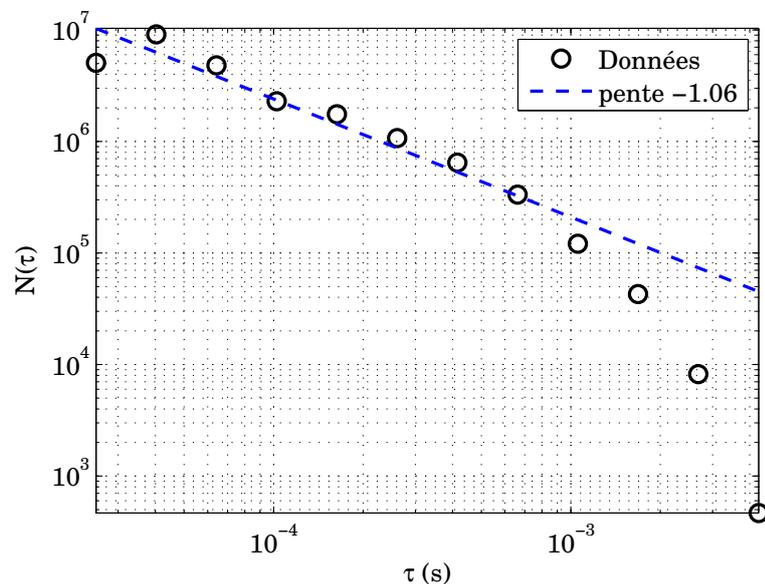


FIGURE 2.16 – Distribution des durées des événements obtenues par seuillage de la distance spectrale.

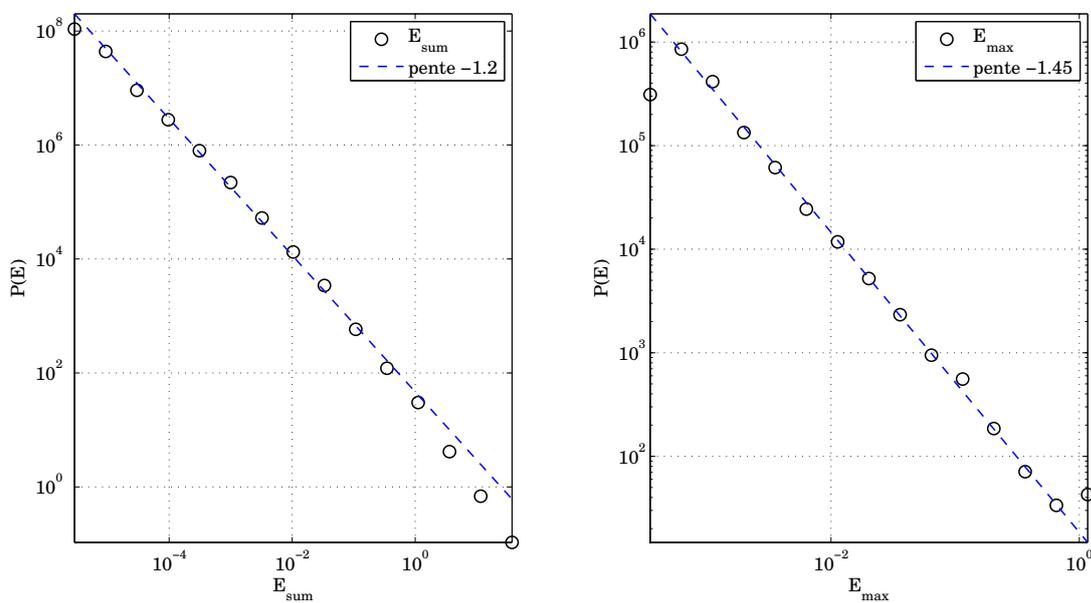


FIGURE 2.17 – Distribution expérimentale des énergies des émissions acoustiques calculée de deux façons différentes à partir du carré du signal : intégrale sur tout le signal (à gauche) et maximum (à droite).

pour les basses énergies, qui est dû au seuillage, et pour E_{max} un pic pour la plus grande échelle, lié quant à lui à la saturation en tension de la carte d'acquisition. L'exposant β étant une caractéristique importante des observations expérimentales, on voit que le choix d'une définition n'est pas anodin. Ceci pourrait aussi en partie expliquer les disparités entre exposants observées dans la littérature. Comment choisir la bonne expression qui correspondra à l'énergie des microfractures? Nous allons maintenant étudier le comportement du signal acoustique pour tenter de répondre à cette question.

2.4.3 Evanescence des signaux et relation énergie/durée

Nous avons déjà constaté que l'énergie acoustique se condensait rapidement dans quelques bandes avant de décroître (voir figure 2.12). Les deux bandes de fréquences principales sont autour de (voir figure 2.15) 300 et 370kHz sélectionnées par les dimension de l'échantillons. Ainsi, si on émet l'hypothèse que la décroissance de l'énergie est due à des réflexions imparfaites sur les parois de l'échantillon, ceci devrait engendrer un comportement en exponentielle décroissante. Supposons donc que l'intégrale de la TFG, E_B , sur ces deux bandes (dimensions d'une énergie) subisse une telle décroissance avec un temps caractéristique τ_1 , lié au facteur de qualité de la cavité résonante que constitue le cylindre de verre. $E_B(t)$ s'écrit donc :

$$E_B(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \quad (2.12)$$

Pour un événement donné, nous avons effectué un ajustement de $E_B(t)$ avec la loi 2.12 sur la figure 2.18. Le résultat semble très correct, et permet de mesurer un temps τ_1 . La moyenne de ces temps de décroissance sur l'ensemble des événements étudiés se situe autour de 150 μs , avec une forte dispersion. On peut aussi observer de faibles oscillations de l'amplitude de la TFG avec une période d'environ 70 μs . Ceci peut s'interpréter par des réflexions sur l'ensemble dispositif du côté du bâti contenant l'échantillon (de l'autre côté la très faible surface de contact bille-verre ne transmet sans doute que très peu le signal acoustique). La distance parcouru sur un aller-retour serait alors de $2 \times 20 = 40cm$ avec une vitesse du son dans ces matériaux (verre puis acier) de l'ordre de 5000 $m.s^{-1}$, ce qui fait un temps de l'ordre de 80 μs . Cette estimation est tout à fait cohérente avec l'observation et renforce encore l'hypothèse selon laquelle ce sont des réflexions multiples qui façonnent le signal.

On peut, à partir de l'équation précédente, écrire la durée τ d'un événement qui est calculée comme le temps durant lequel $E_B(t)$ reste supérieure à un seuil E_s :

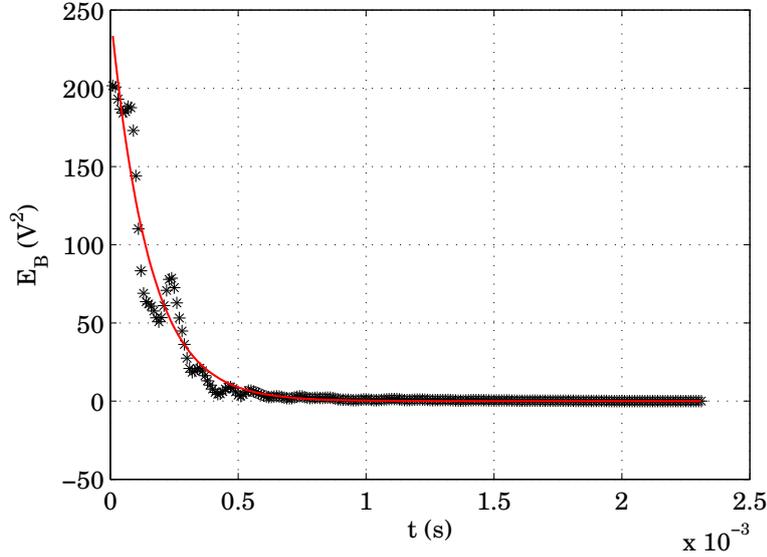


FIGURE 2.18 – Décroissance de l'énergie $E_B(t)$ en fonction du temps t (cercles bleus) et ajustement exponentiel (ligne rouge). La fréquence d'échantillonnage est ici de 2MHz, la TFG est calculée toutes les $10\mu s$. Seules les deux bandes de fréquences principales ont été prises en compte lors du calcul de la TFG.

$$\tau = \tau_1 \ln \frac{E_0}{E_s} \quad (2.13)$$

On peut voir figure 2.19 un ajustement de cette loi avec les données. On trouve $\tau_1 = 140\mu s$ proche de celle mesurée plus haut, et l'ordonnée à l'origine nous permet de déterminer E_s qui vaut ainsi $8.4 \times 10^{-3} V^2$, ce qui est proche de l'énergie de coupure qui est de l'ordre⁶ de $5 \times 10^{-3} V^2$. Bien qu'on observe une forte dispersion, ces valeurs sont donc cohérentes.

L'énergie cumulée E_{tot} , intégrale de $E_B(t)$ sur la durée τ de l'événement, s'écrit :

$$E_{tot} = \int_0^\tau E_B(t) dt \quad (2.14)$$

6. En réalité, le seuillage est effectué sur la distance spectrale et non sur E_B . On observe donc une énergie de coupure en dessous de laquelle la distribution de E_B tend rapidement vers 0.

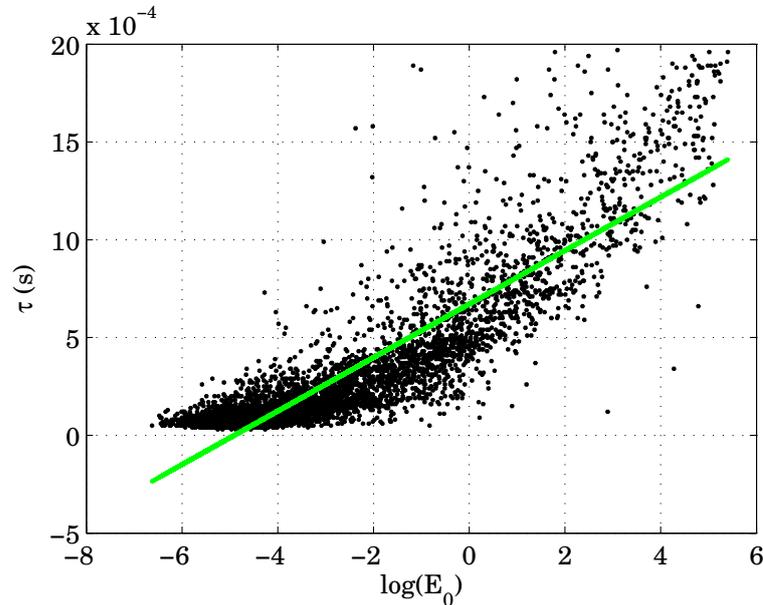


FIGURE 2.19 – Durée de l'événement τ en seconde en fonction du logarithme de l'énergie maximale dans la bande considérée $\ln(E_0)$ (croix noires). En vert clair, ajustement linéaire correspondant, d'après 2.13, qui donne $y = 0.00014x + 0.00067$.

Elle peut dès lors s'exprimer en fonction de la durée τ de l'événement et de son amplitude E_s :

$$E_{tot} = \tau_1 E_s \left(\exp\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) - 1 \right) \quad (2.15)$$

Nous pouvons ainsi ajuster directement E_{tot} en fonction de la durée du signal à partir de l'équation 2.15. Ce résultat est présenté figure 2.20. On peut voir que l'ajustement donne un bon accord entre le modèle et les données expérimentales. Le temps caractéristique de décroissance obtenu est ici de $218\mu s$, *a priori* différent des $140 - 150\mu s$ mesurés plus haut mais l'accord est néanmoins correct compte tenu de la forte dispersion. Ceci confirme notre interprétation à partir des réflexions des ondes acoustiques sur les parois de l'échantillon, dont la décroissance exponentielle est la signature. De plus, nous montrons que la distribution des durées des émissions acoustiques n'est pas une donnée pertinente pour décrire les expériences de fracture puisqu'elle est directement reliée à (eq 2.13 l'énergie initiale. Le décrochage observé pour les grandes durées (fig. 2.16) s'expliquent bien à partir de l'équation 2.13 qui prédit un comportement exponentiel décroissant pour la distribution des durées. Nous laisserons désormais cette distribution

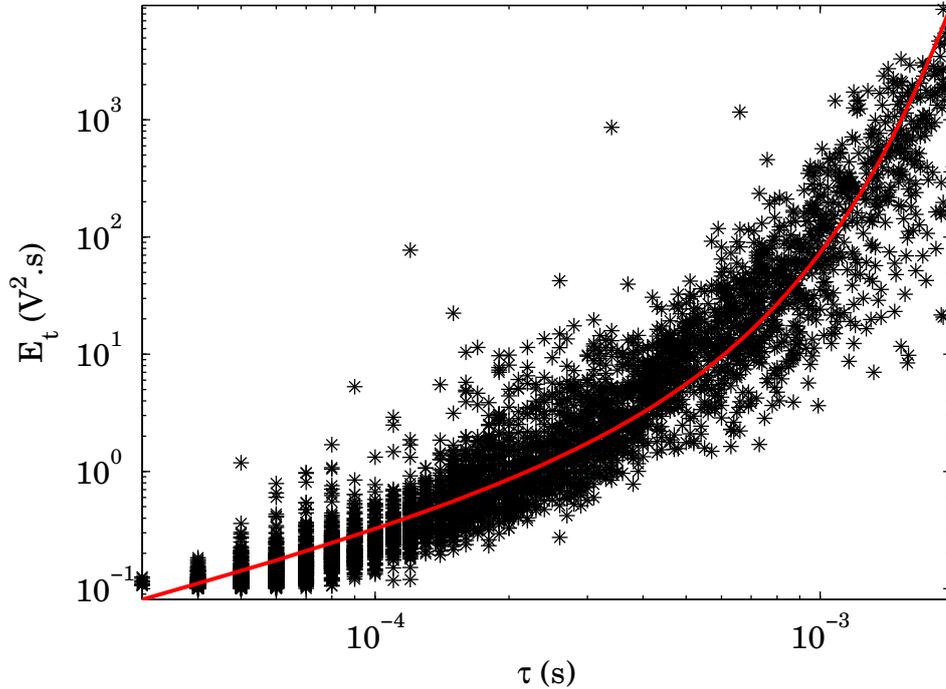


FIGURE 2.20 – Energie cumulée E_{tot} des événements détectés en fonction de leur durée (croix noires) et ajustement à partir de l'équation 2.15

de coté et nous allons nous intéresser à celle des énergies, dont nous pouvons désormais donner une définition pertinente.

Il apparaît évident, d'après les observations qui précèdent, qu'il ne faut pas prendre en compte l'ensemble du signal acoustique sous forme d'une intégrale pour évaluer l'énergie d'une microfracture (comme par exemple sa somme quadratique). C'est plutôt l'énergie initiale qui doit être considérée. Ainsi, le maximum du carré de l'amplitude du signal (majoritairement utilisé dans la littérature) semble être un bon candidat. Toutefois, le signal acoustique étant fortement oscillant, cette définition ne semble pas très stable et sujette à une forte dispersion. Nous allons donc lui préférer le maximum (dans le temps) de la TFG sommée sur toutes les fréquences. Il n'apparaît pas opportun ici de ne prendre en compte que les bandes exhibées par les signaux car c'est la géométrie qui les sélectionne. La microfracture se produit sur un temps très court et libère de l'énergie dans toutes les fréquences accessibles, comme on peut le voir figure 2.12. Le fait de s'appuyer sur la TFG revient plus ou moins à effectuer un léger lissage de l'énergie et constitue potentiellement une définition qui devrait être plus stable et moins marquée par la dispersion.

2.4.4 Distribution des énergies

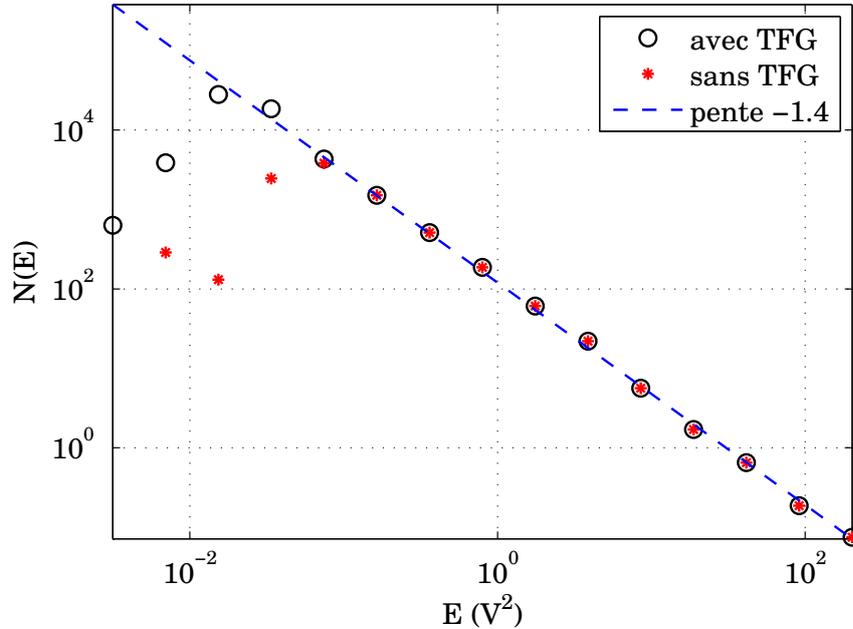


FIGURE 2.21 – Distribution des énergies en log-log. Afin d’avoir des points régulièrement espacés, la distribution $P(E)$ est obtenue à partir de celle de $P(\log(E))$. En rouge (resp. noir), les énergies obtenues à partir des événements détectés par seuillage simple (resp. à l’aide d’une distance spectrale). Dans tous les cas, l’énergie est définie comme le maximum de la TFG sommée sur les fréquences $40kHz - 1MHz$ afin de supprimer le bruit à basse fréquence.

Nous pouvons donc présenter maintenant la distribution des énergies des microfractures obtenue à partir des émissions acoustiques est présentée 2.21. Cette distribution est moyennée à partir de 10 expériences. On peut voir que cette distribution est très clairement en loi de puissance, avec un exposant β de -1.4 ± 0.05 , proche de celui trouvé dans des expériences de fracture en laboratoire dans différents matériaux [21, 22, 25], et cohérent avec ceux observés dans les répliques de tremblements de terre [2, 7], bien que ceux-ci soient très différents selon le sismographe utilisé et le type de tremblement de terre. Pour ce qui est des expériences dans le saphir à basse température, l’exposant trouvé était de l’ordre de 1.7 [31], valeur du même ordre de grandeur. Il est notable que nous obtenons une distribution en loi de puissance sur quatre décades. Ceci est rendu possible par notre technique de détection, qui nous fait gagner près d’une décade dans les basses énergies. La coupure des distributions pour les basses énergies s’explique par le fait du seuillage : même s’il n’est pas direct, nous en effectuons

un, ce qui fait que nous ne pouvons détecter des événements en dessous d'une certaine énergie spectrale. Nous n'avons donc aucune idée de la plage sur laquelle la distribution reste inchangée vers les basses énergies inaccessibles. On ne constate pas de décrochage pour les hautes énergies comme cela est parfois observé pour les tremblements de terre [2], ni de saturation comme on peut l'observer avec E_{max} (voir figure 2.17).

Dans les expériences en laboratoire, une variation de l'exposant β est parfois observée en fonction du temps à mesure que l'on s'éloigne de l'instant de rupture de l'échantillon. Dans notre cas, nous n'observons aucune variation de l'exposant en fonction du temps (les variations constatées sont inférieures à l'erreur sur la détermination de β , qui est de l'ordre de 0.05).

2.4.5 Conclusion

Nous avons dans ce paragraphe confirmé l'hypothèse des réflexions sur les parois de l'échantillon émise au paragraphe précédent en étudiant la décroissance de l'énergie d'un échantillon. Cela nous a aussi permis de relier directement la durée d'une émission acoustique à l'énergie de la microfracture et de proposer, en la justifiant, une définition pertinente de cette énergie, ce qui fait souvent défaut aux autres travaux dans le domaine de la fracture.

2.5 Etude de la dynamique de la fracture

Nous allons maintenant étudier les aspects dynamiques de la fracture par indentation. Nous discuterons de l'influence des paramètres de l'expérience sur ces résultats, ce qui nous conduira à avancer un mécanisme d'activation thermique pour en rendre compte. Nous allons accéder à la dynamique de la fracture par deux biais : en observant la décroissance de la force appliquée et en étudiant la dynamique du nombre d'événements détectés en fonction du temps.

2.5.1 Dynamique de la force

Dans notre expérience, la force est libre de varier, c'est le déplacement total du système verre+bille+ressort qui est imposé. Nous choisirons de négliger la compression des solides⁷ que nous allons considérer comme indéformables en dehors de la zone de contact bille/verre ou la force pressante est concentrée sur une

7. hors ressort, ce qui revient à considérer la raideur du ressort très faible devant celle des solides, ce qui est tout à fait raisonnable.

très petite surface et donc la contrainte très forte. Lors de la fracture par indentation, un cône se détache progressivement à l'intérieur de l'échantillon. Lorsque le sommet du cône se déforme en s'écrasant sous l'effet de la pression exercée par la bille, le ressort se détend légèrement, ce qui a pour conséquence de faire décroître la force appliquée. On peut voir figure 2.22 le comportement de la force en fonction du temps.

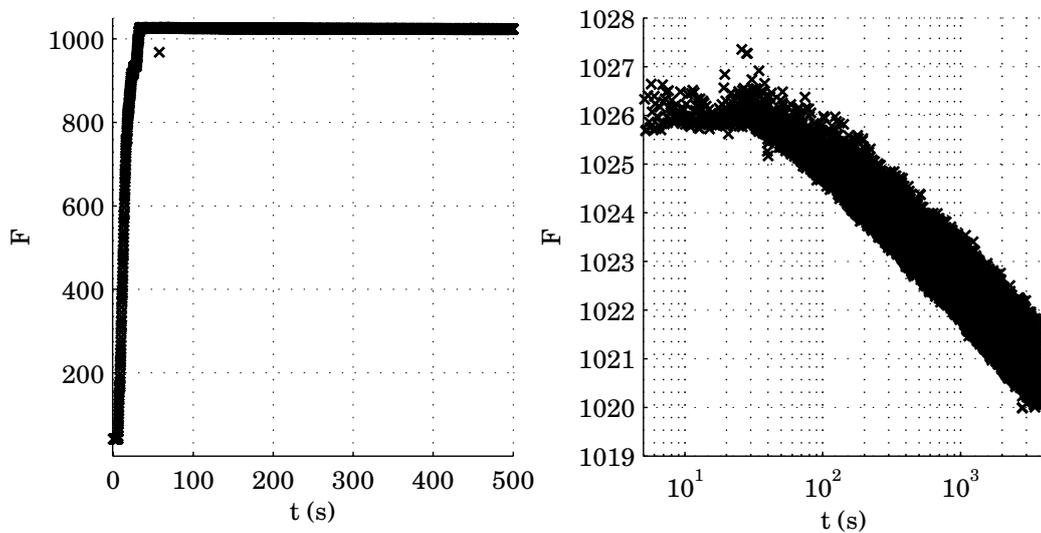


FIGURE 2.22 – Evolution de la force en fonction du temps (en s). (a) Sur les 500 premières secondes de l'expérience, avec une mise sous contrainte effectuée manuellement sur une minute environ. (b) Zoom sur la décroissance lente de la force, avec un temps en échelle logarithmique.

Une fois la force appliquée à l'aide de la manivelle, le système est laissé libre de toute contrainte extérieure. La force semble rester constante sur la figure 2.22 (a) après une légère décroissance dans les premières secondes, mais on peut voir figure 2.22 (b) qu'une faible décroissance a lieu, engendrant une diminution de l'ordre de 1% de la force appliquée. Grâce à l'échelle logarithmique on peut voir que cette décroissance est en $-\ln(t)$, ce qui correspond à une décélération en $\frac{1}{t}$. On notera que cette décroissance n'est réellement logarithmique qu'après une dizaine de secondes, ce que nous interprétons par le temps nécessaire pour que le mécanisme d'activation thermique (qui règne aux temps longs) l'emporte sur la croissance de la fracture par l'instabilité mécanique du système (qui a lieu aux temps courts).

Si l'on revient sur l'hypothèse de déplacement imposé, la force ayant décré de 1 % environ, on peut estimer que le ressort s'est décomprimé de $400\mu m$ (le

ressort comprimé ayant une longueur de 5cm).

On peut voir ainsi que l'expérience se fait quasiment à déplacement ET à force constante lors de la relaxation du système. Néanmoins, la variation de la force, même si elle est faible, nous donne des informations intéressantes sur la dynamique de la fracture, qui vont être confirmées par la suite.

2.5.2 Dynamique des microfractures

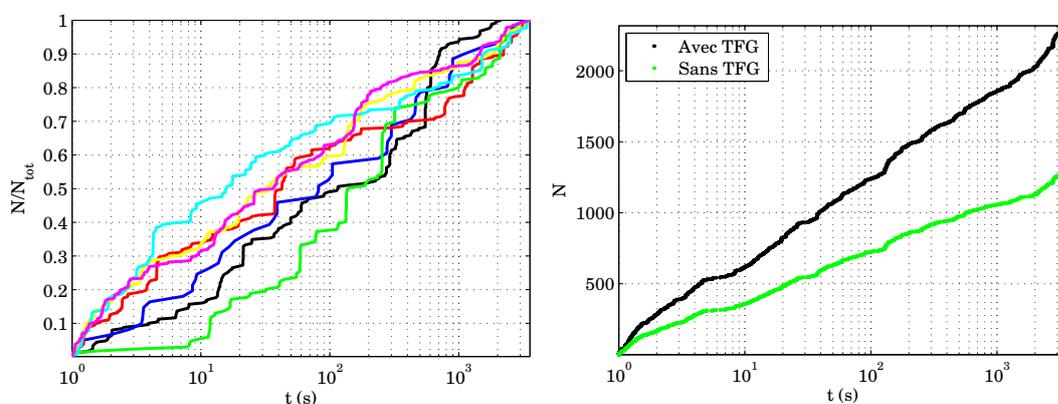


FIGURE 2.23 – **A gauche** : Nombre d'événement détectés N en fonction de t en seconde (échelle log) pour différentes réalisations dans les mêmes conditions. **A droite** : Nombre d'événements cumulés sur 10 expériences en fonction du temps. Les événements sont obtenus par seuillage direct (vert clair) et par seuillage à l'aide d'une distance spectrale utilisant une TFG (noir)

Les résultats présentés ici sont obtenus à partir de 9 expériences différentes réalisées dans les mêmes conditions (température de 25°C environ et force initiale de 950N environ, sur des échantillons de géométrie 1). Les événements sont détectés soit par seuillage simple de l'amplitude du signal acoustique soit à l'aide d'une distance spectrale. On peut voir figure 2.5.2 (gauche) la dynamique du nombre des événements en fonction du temps pour les événements se produisant après l'arrêt du chargement, qui correspond à la formation d'une fracture macroscopique initiale. Dans un souci de clarté, le nombre d'événements est normalisé par le nombre total détecté au cours de l'expérience, qui dure une heure. L'instant exact prise pour origine des temps est celui où la force mesurée est maximale. On voit que le taux d'événement décroît en fonction du temps (tendance linéaire avec le logarithme du temps du nombre d'événement). Toutefois, il apparaît que les courbes sont loin de se superposer et sont très aléatoires.

Nous allons donc cumuler les événements obtenus sur ces 9 expériences afin de dégager plus clairement les tendances que contient leur dynamique, ce qu'on peut voir figure 2.5.2 (droite). Le nombre cumulé d'événements croît manifestement de façon linéaire avec le logarithme du temps, ce qui signifie que le taux d'événements par unité de temps décroît avec l'inverse du temps. Ainsi, les microfractures lors de la relaxation d'une expérience de rupture par indentation suivent une loi d'Omori, comme les répliques d'un tremblement de terre. Ce type de loi est très rarement observé en laboratoire. Son observation est à notre connaissance inédite dans une expérience par indentation. On voit aussi que le comportement logarithmique ne s'établit qu'après une dizaine de secondes comme pour la force. On peut aussi constater que notre technique de détection par TFG permet d'améliorer sensiblement la détection puisqu'on détecte environ 80 % d'événements en plus par rapport à la technique classique.

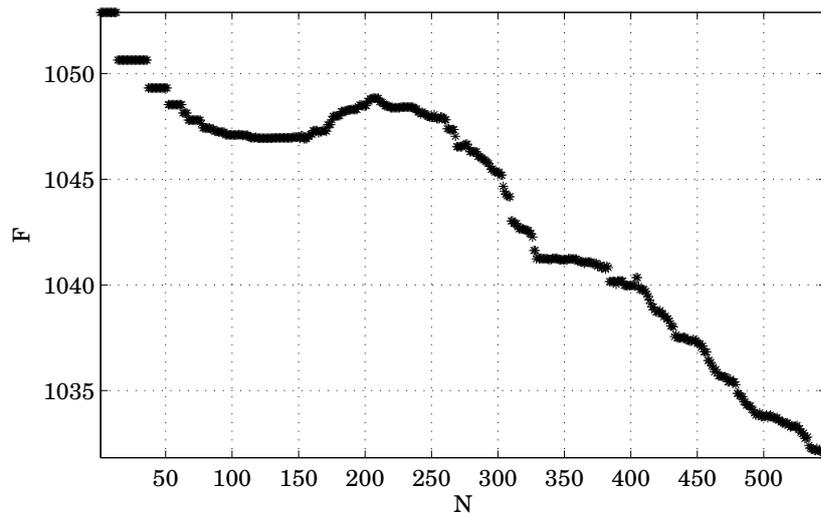


FIGURE 2.24 – Force (en Newton) en fonction du nombre d'événements. Le régime linéaire qui s'établit pour $N > 200$ correspond à $t = 12s$ environ.

On peut aussi voir figure 2.24 que la force mesurée et le nombre d'événements évoluent de façon proportionnelle au cours de l'expérience, du moins à partir d'un certain temps qui de l'ordre de la dizaine de seconde. Le facteur de proportionnalité varie assez peu d'une réalisation de l'expérience à l'autre compte tenu des fluctuations importantes du nombre total N_{tot} d'événements détectés à chaque réalisation

2.5.3 Détermination de l'énergie absolue des microfractures

A ce stade, il est important de souligner que nous n'avons aucune idée de l'énergie réellement libérée par les microfractures, mais simplement de l'énergie acoustique prélevée par le capteur, qui est censée lui être proportionnelle, notre capteur étant sensible aux déplacements [71]. Nous identifierons donc les énergies des émissions acoustiques e mesurées avec les énergies des microfractures ϵ , reliées par un coefficient de proportionnalité γ : $\epsilon = \gamma e$. C'est ce coefficient de proportionnalité que nous allons essayer d'estimer dans ce paragraphe.

Notre dispositif expérimental nous permet de mesurer d'une autre manière l'énergie totale délivrée par la fracture, à partir de l'énergie élastique libérée par le ressort au cours de l'expérience.

En considérant que la force appliquée par le ressort varie peu, nous pouvons calculer l'énergie libérée par le ressort E_L :

$$E_L = \frac{F_0}{k} \Delta F \quad (2.16)$$

Où F_0 est la force initiale appliquée, k la raideur du ressort et ΔF la variation de la force sur la durée de l'expérience. Cette énergie correspondra à l'énergie libérée par la fracture si on peut négliger les autres variations d'énergie élastique dans le système (capteur de force, bâti, etc). Or, ces énergies se mettent sous la même forme, et la raideur du ressort est bien plus petite que toutes les autres raideurs. On peut donc considérer que toute l'énergie libérée par le ressort est dissipée dans la fracture. (La seule énergie que nous ne pouvons évaluer est celle de la compression du cône de fracture, finalement notre calcul revient donc à majorer légèrement l'énergie des microfractures).

Il faut maintenant estimer l'énergie totale des microfractures. Notons $n(\epsilon)$ le nombre moyen de microfractures ayant une énergie comprise entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$ sur une expérience. Conformément à nos observations et à la littérature, cette distribution est en loi de puissance, et ce sur une certaine gamme d'énergie, en tendant vers zero rapidement en dehors de cette gamme. L'existence d'énergies de coupure finies, l'une haute ϵ_{max} , l'autre basse ϵ_{min} , est nécessaire. En effet, pour un exposant compris entre 1 et 2, tel qu'observé pour les microfractures, une énergie de coupure basse nulle engendrerait un nombre total de microfractures infini, ce qui est contradictoire avec le caractère discret de la matière à l'échelle atomique. De la même façon, une énergie de coupure haute infinie engendrerait une énergie totale infinie, ce qui est contradictoire avec la taille finie de l'échantillon.

Dans notre cas, nous avons accès à toutes les énergies au-delà d'une énergie de seuil ϵ_{seuil} . L'énergie totale E_{tot} des microfractures s'écrit :

$$E_{tot} = \int_0^{\infty} \epsilon n(\epsilon) d\epsilon \simeq \int_{\epsilon_{min}}^{\epsilon_{max}} \epsilon k \epsilon^{-b} d\epsilon = \frac{k}{2-\beta} \left(\epsilon_{max}^{2-\beta} - \epsilon_{min}^{2-\beta} \right) \quad (2.17)$$

Où k est une constante liée au nombre total moyen de microfractures. Expérimentalement, les énergies auxquelles nous avons accès sont celles supérieures à ϵ_{seuil} , ce qui revient à remplacer dans l'expression ci-dessus ϵ_{min} par ϵ_{seuil} si l'on calcule l'énergie totale accessible. Or, comme nous accédons à une gamme de quatre décades, avec β de l'ordre de 1.4, et donc $2-\beta$ de l'ordre de 0.6, le terme en $\epsilon_{min}^{2-\beta}$ (ou en $\epsilon_{seuil}^{2-\beta}$) est négligeable devant le terme en $\epsilon_{max}^{2-\beta}$, qui est au moins 100 fois plus grand avec ces valeurs. Ainsi l'énergie totale accessible est très proche de l'énergie totale des microfractures.

Lors d'une expérience, nous pouvons réaliser une *estimation* (\doteq , au sens statistique du terme) d' E_{tot} à l'aide des émissions acoustiques détectées.

$$E_{tot} \simeq \int_{\epsilon_{seuil}}^{\infty} \epsilon n(\epsilon) d\epsilon \doteq \sum \gamma e_{detectees} \quad (2.18)$$

En notant E_A cette somme des énergies acoustiques détectées (qui s'exprime en Volts²), on a donc $E_{tot} = \gamma E_A$

Prenons ici l'exemple d'une expérience faite en géométrie 1 (15 × 18mm²) à 25°C. Nous avons $F_0 = 1054N$, $\Delta F = 21.6N$, $k = 5.8980 \times 10^4 N.m^{-1}$, ce qui donne $E_L = 376mJ$ d'après l'équation 2.16. Avec $E_A = 1.610 \times 10^3 V^2$, on peut faire une *estimation* de γ : $\gamma = 2.34 \times 10^{-4} J.V^{-2}$. Ce coefficient dépend *a priori* du capteur utilisé, de sa position et du couplage acoustique entre capteur et échantillon (chose que nous ne contrôlons pas).

En moyenne sur une dizaine d'expérience dans les mêmes conditions, γ vaut $2.1 \times 10^{-4} J.V^{-2}$ avec une déviation standard de $6 \times 10^{-5} J.V^{-2}$, ce qui est somme toute assez stable. Les énergies les plus faible sont de l'ordre de 5 microjoules, alors que les plus fortes sont de l'ordre de 50 millijoules. A notre connaissance, cette estimation est assez rarement pratiquée, essentiellement car les protocoles expérimentaux mis en oeuvre sont souvent différents et ne rendent pas aisé ce type de calcul. On peut toutefois citer [72] où les auteurs, dans une expérience de pelage de papier, trouvent des énergies entre 1 μJ et 1 mJ , soit typiquement le même ordre de grandeur.

2.5.4 Distribution des temps d'attente

On peut voir figure 2.25 la distribution des temps d'attentes (c'est à dire le temps écoulé entre deux événements successifs) obtenue à partir des neuf expé-

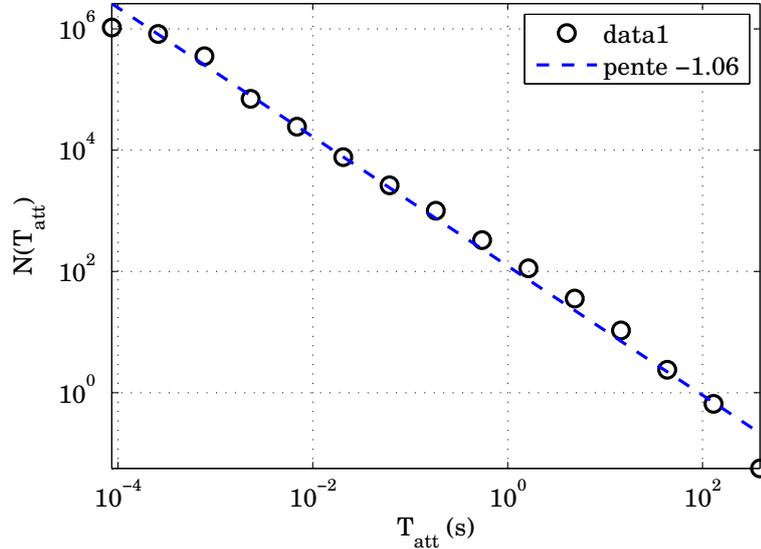


FIGURE 2.25 – Distribution des temps d’attente entre les événements, en log-log, obtenue à partir de la distribution de $\log(t_{att})$. Les temps d’attente sont obtenus en différenciant chacune des séries de temps obtenus pour chaque expérience, puis en mélangeant les temps d’attente indifféremment. La technique utilisée est le seuillage de la distance spectrale.

riences. On obtient une loi de puissance avec un exposant de 1.05 ± 0.05 . Il est remarquable de voir que cette loi semble valable sur plus de 6 décades. Les temps les plus longs (un peu moins de 10^3 secondes) sont de l’ordre de grandeur de la durée de l’expérience, et on voit que la loi de puissance commence à être mise en défaut comme on peut s’y attendre. A l’opposé, aux temps courts, la distribution commence vers $100\mu s$, ce qui correspond à la limite de résolution de deux événements, ce qui est aussi cohérent. Cette valeur est très proche de celles observées en laboratoire et dans les tremblements de terre, et pourrait être une mesure de l’exposant d’Omori (que nous avons trouvé égal à 1, puisque nous trouvons des comportements en $\log(t)$), bien que le lien ne soit pas tout à fait clair.

2.5.5 Influence de la température

Nous allons tenter ici de voir comment la température influe sur la dynamique de la fracture, ceci afin de pouvoir mieux modéliser cette dynamique, et de justifier d’autre part l’approche de l’activation thermique que nous avons adopté pour ce faire. En effet la température est connue pour être un paramètre important

dans la fracture lente du verre [73].

2.5.5.1 Comment caractériser la dynamique ?

Afin de caractériser l'influence des paramètres sur la dynamique de la rupture, il est difficile de se servir des courbes obtenues à l'aide des émissions acoustiques. En effet, lors de la mise en place du capteur sur l'échantillon, le couplage entre les deux parties se fait de façon aléatoire, et la sensibilité du capteur n'est donc pas toujours la même. La distribution des énergies des signaux acoustiques étant une loi de puissance, on ne peut déterminer cette sensibilité à partir de nos observations. Ainsi, le nombre d'événements détectés fluctue énormément d'une réalisation de l'expérience à une autre (parfois d'un facteur 10), tous les paramètres étant identiques. La seule grandeur caractéristique de la dynamique étant la pente de l'endommagement en fonction du logarithme du temps, l'endommagement évalué par émissions acoustiques donne des pentes qui fluctuent aussi énormément. L'utilisation de l'émission acoustique est donc délicate.

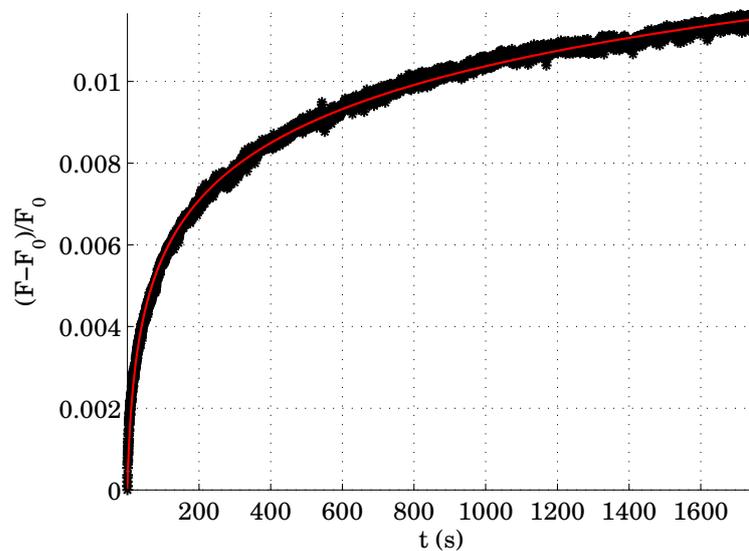


FIGURE 2.26 – Exemple d'un ajustement de $\frac{F_0-F}{F_0}$ avec $\alpha \log(1 + \frac{t}{c})$. Un lissage a été pratiqué sur la force afin d'améliorer l'acuité de l'ajustement.

Néanmoins, on a déjà montré qu'après quelques secondes, la force appliquée évoluait proportionnellement à l'endommagement évalué par émissions acoustiques (voir figure 2.24). La force étant bien mieux définie, nous utiliserons la dynamique de cette grandeur pour estimer l'endommagement. Nous supposons

que celui-ci sera proportionnel à $F_0 - F(t)$ où F_0 est la force appliquée initiale et $F(t)$ la force mesurée au cours de la relaxation. Notre mesure étant la pente de cette décroissance, celle-ci aura la dimension d'une force. Afin d'adimensionner cette mesure nous normaliserons la force par la force initiale. En remarquant que cette quantité adimensionnée vaut 0 pour $t=0$, et en supposant que l'on ait une loi d'Omori pour la force, nous pouvons écrire :

$$\frac{F_0 - F}{F_0} = \alpha \log\left(1 + \frac{t}{c}\right) \quad (2.19)$$

où c a la dimension d'un temps (c'est le temps qui apparaît dans la loi d'Omori) et où α est un nombre sans dimension. On peut voir figure 2.26 un exemple d'ajustement de $\frac{F_0 - F}{F_0}$.

2.5.5.2 Influence de la température

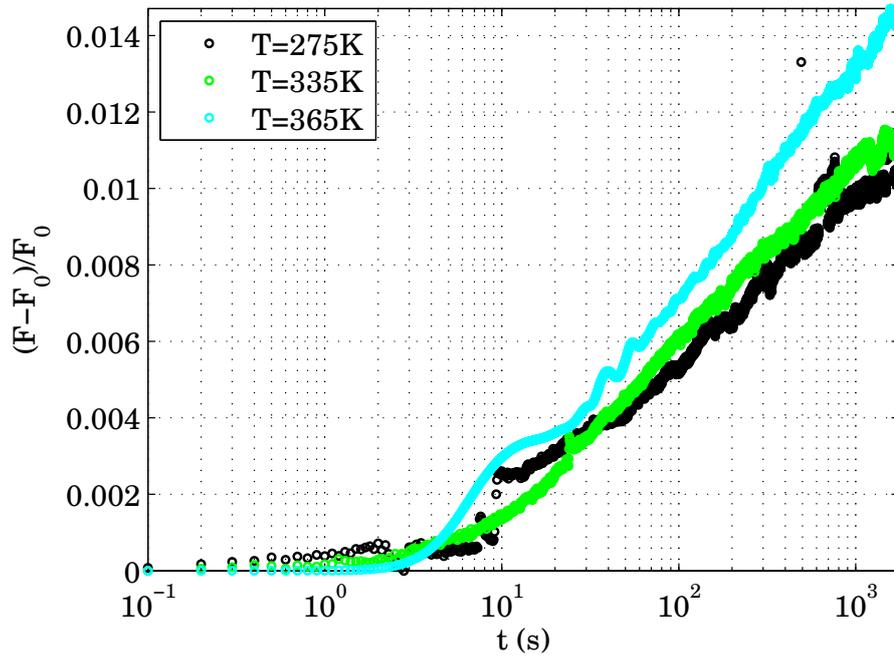


FIGURE 2.27 – $\frac{F_0 - F}{F_0}$ en fonction du temps en seconde pour trois températures différentes.

Les valeurs de α présentée ici sont obtenues avec une géométrie 1, pour cinq températures différentes : 3°C, obtenue sur le rebord de la fenêtre en hiver ; 25°C obtenue dans la salle de manip, 36°C obtenue dans un caisson où la température était contrôlée, 65°C et 95°C obtenues à l'aide d'une résistance chauffante. On a

mesuré α , tout autre paramètre étant constant (géométrie, force appliquée, environnement) pour les différentes températures. On peut voir un exemple de trois courbes obtenues pour trois températures différentes figure 2.27. On voit que la pente semble bien dépendre de la température. Néanmoins, la décroissance de la force étant très faible, le signal est extrêmement bruité. De plus on constate une importante dispersion selon les expériences. Celle-ci peut être due à l'état de surface du verre qui n'est pas parfaitement lisse, ce qui peut engendrer des différences entre expériences faites dans les mêmes conditions. Ainsi il arrive que le cône de fracture soit légèrement désaxé. De plus les échantillons cylindriques sont obtenus à partir de barreau de verre découpés à chaud. L'état microscopique du verre pourrait ainsi différer selon les échantillons.

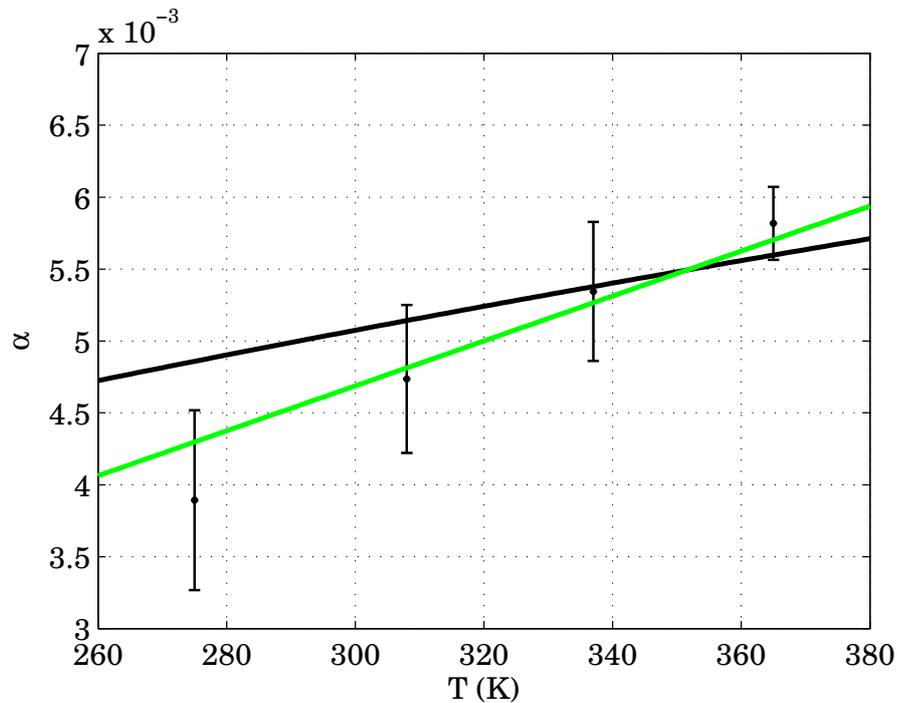


FIGURE 2.28 – Moyenne des pentes de $\frac{F_0 - F}{F_0}$ en fonction de la température en Kelvins. Les moyennes sont obtenues sur plusieurs expériences. Les barres d'erreurs correspondent aux déviations statistiques. En traits plein, les ajustements correspondant à un comportement $\propto T$ (vert clair) et $\propto \sqrt{T}$ (en noir).

Pour toutes ces raisons, il est nécessaire de faire des moyennes sur plusieurs expériences. On peut voir figure 2.28 les valeurs moyennes de α obtenues pour différentes températures. On voit nettement (en dehors des barres d'erreur) que α croît avec la température : la fracture est d'autant plus rapide que la tempé-

rature est grande. Ce fait est systématiquement observé lors des expériences de croissances lentes thermiquement activées, en particulier dans le verre [73]. Dans notre cas, α semble évoluer de façon linéaire, avec la température. Ceci aurait pour conséquence l'expression suivante pour le temps moyen $\langle t \rangle$ mis pour le système pour engendrer N microfractures :

$$\langle t \rangle = ce^{\frac{N}{\alpha}} = ce^{\frac{U}{k_B T}} \quad (2.20)$$

On retrouve donc à une loi d'Arrhenius, analogue à la loi observée pour les temps moyen de rupture dans la rupture retardée (voir paragraphe A.2.3). La barrière d'énergie U s'écrit : $U = N/\lambda$, où λ est la pente de $\alpha(T)$. On peut interpréter ce résultat de la façon suivante : au fur et à mesure du processus, la barrière d'énergie à franchir pour engendrer une microfracture est de plus en plus grande, ce qui se traduit par le ralentissement de type Omori observé.

L'estimation du temps c conduit quand à elle à des valeurs de l'ordre de la seconde, avec une très forte dispersion (les valeurs s'étalant entre 0.3s et 8s). Nous n'avons pas constaté d'influence de la température sur c . Certaines études [64] ayant montré que les variations de ce temps caractéristiques avec T étaient moins marquées que pour α , elles ne sont peut-être pas observables compte tenu de la dispersion.

2.5.6 Conclusion

Nous avons donc observé des lois d'Omori dans la fracture par indentation du verre, avec des exposants dans la gamme de ceux observés dans la littérature, à la fois en sismologie et en fracture. L'étude elle-même de cette fracture constitue une observation expérimentale originale. De plus, nous obtenons une loi d'Omori après avoir pratiqué une fracture macroscopique dans l'échantillon et nous observons l'analogue des répliques des tremblements de terre, alors qu'habituellement ce sont plutôt l'équivalent des précurseurs qui sont observés en laboratoire. Qui plus est, le système est laissé en relaxation, sans modifications des contraintes extérieures, ce qui le plus souvent n'est pas le cas. Nous avons également mis en évidence l'influence de la température sur la dynamique de la fracture, grâce à l'étude de la relaxation de la force appliquée, qui nous a également permis d'effectuer une estimation absolue de l'énergie des microfractures. Nous allons maintenant tenter d'interpréter ces observations à l'aide d'une modélisation.

2.6 Modélisation par un réseau de fibres

Pour comprendre les mécanismes conduisant à des lois d'Omori dans notre expérience, nous allons utiliser un outil bien connu, les réseaux de fibres [60] [61].

Nous nous sommes orientés dans cette voie car les modèles de réseaux de fibres sont basés sur l'activation thermique dont nous soupçonnons qu'elle gouverne la dynamique du système, et sont particulièrement adaptés aux matériaux fragiles désordonnés.

Le principal problème est que la topologie de la fracture par indentation est très différente de celle étudiée à l'aide de ce modèle qui est un modèle scalaire et donc adapté à la modélisation d'une fracture en mode unique 1, 2 ou 3 (voir paragraphe A.1.2 pour une définition). Ainsi, il est impossible de modéliser par un réseau de fusible simple une fracture en mode mixte. La fracture par indentation n'étant pas dans un mode pur, il est délicat de la modéliser directement par un réseau de fibres.

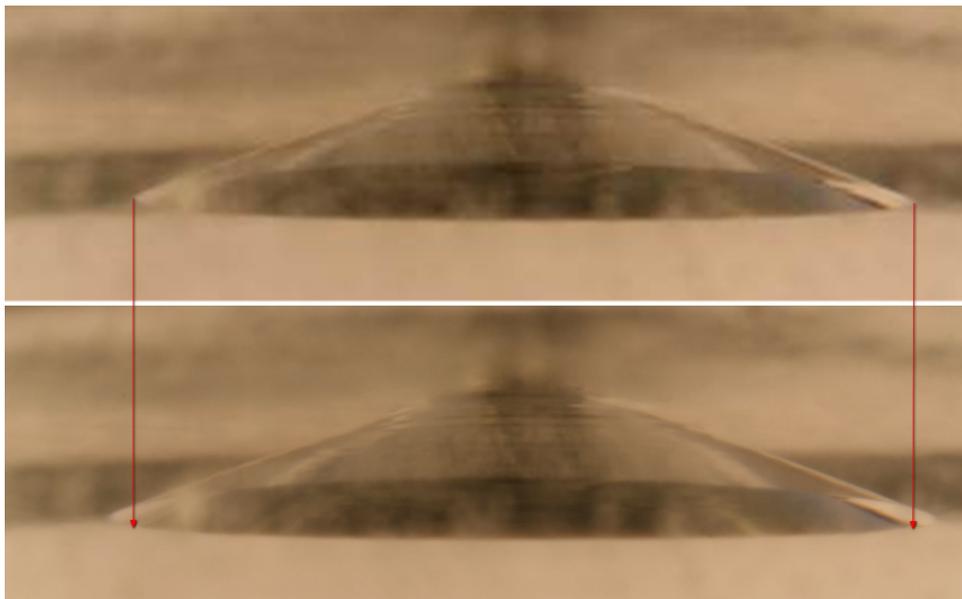


FIGURE 2.29 – Photographies prises juste après le chargement de l'échantillon (en haut) et après 30 minutes lors de la relaxation (en bas). Les flèches indiquent l'avancement de la fracture.

Néanmoins, nous ne nous intéressons pas à tout le processus de fracture, mais uniquement à la fracture lente intervenant au cours de la relaxation du système après qu'une fracture importante a déjà été initiée. Il est légitime de supposer que l'avancement de la fracture est très faible. Un argument pour valider cette hypothèse est que la force appliquée décroît très peu, de l'ordre de 1 ou 2%. On peut aussi s'en rendre compte visuellement sur les photos figure 2.29. On distingue bien un avancement de la fracture plus important dans la deuxième

photo, même si la différence est faible.

On supposera donc que les microfractures ont lieu sur un cercle, à la base du cône de fracture. Nous modéliserons très simplement le système par un réseau de fibre unidimensionnel. De plus, le paramètre imposé n'étant pas la force appliquée (même si celle-ci varie peu) mais l'allongement de l'ensemble verre/bille/ressort, nous soumettrons le réseau à un déplacement constant, ce qui revient dans le cas d'un réseau 1D à imposer la force par fibre.

2.6.1 Topologie du modèle

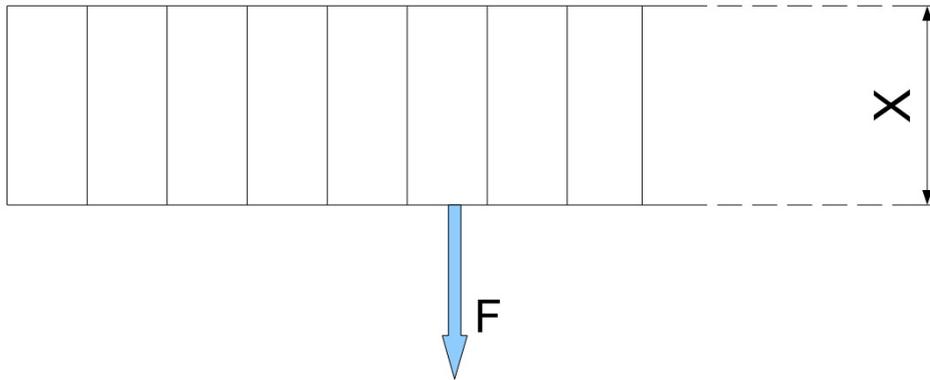


FIGURE 2.30 – Topologie du réseau de fibre utilisé. C'est le déplacement X qui est imposé. La force totale F est alors égale à $F = (N - n)kX$ où k est la raideur d'une fibre (ici $k = 1$) et n le nombre de fibre rompues.

Nous soumettons donc N fibres en parallèles, constituées par des ressorts de rigidité $k = 1$, à un déplacement constant (c'est à dire à une force moyenne par fibre f_0 constante). Afin de rendre compte du caractère désordonné du réseau, les seuils de rupture des fibres f_s sont distribués aléatoirement autour de 1. Nous avons choisi, de façon arbitraire, une distribution gaussienne de variance T_d , où T_d représente une température de désordre. Nous ajoutons ensuite une composante fluctuante $\eta(t)$ à la force par fibre, pour obtenir la force instantanée par fibre $f(t) = f_0 + \eta(t)$. Cette composante fluctuante est tirée au sort à chaque pas de temps et pour chaque fibre indépendamment avec une distribution gaussienne de variance T , où T correspond à la température. On peut voir figure 2.30 un schéma du réseau. Nous comptons ensuite le nombre de fibres cassées n en fonction du temps t (le pas de temps ayant une durée de 1). On peut voir immédiatement que

par construction la force moyenne totale F , qui correspond à la force mesurée dans notre expérience, va décroître linéairement avec n : $F = f_0 \times (N - n)$. C'est ce qui est observé expérimentalement, ce qui conforte les hypothèses du modèle, en particulier celle du déplacement constant.

Nous allons nous intéresser ici au comportement moyen de la fracture (sur plusieurs réalisations) c'est à dire à $\langle n(t) \rangle$.

2.6.2 Résolution analytique approchée

Les modèles de réseaux de fibres sont habituellement difficiles à résoudre dans le cas où le paramètre imposé est la force totale (conformément à la plupart des expériences de rupture en mode 1), ce qui conduit la force par fibre f_0 à dépendre de $n(t)$. Ceci rend impossible un calcul direct de $n(t)$, celui-ci ne pouvant être qu'approché. Dans notre situation toutefois, f_0 est une constante, et les calculs sont beaucoup plus simples.

Nous allons tenter ici de déterminer une expression approximative du taux de fibres rompues par unité de temps en fonction du temps $\frac{dn}{dt}(t)$, plus facile à déterminer ici que $n(t)$. Pour une fibre unique, de seuil de rupture f_s , il est facile de calculer le temps moyen de rupture $\tau(f_s)$, qui est l'inverse de la probabilité pour que la force dépasse le seuil f_s , c'est à dire que η soit plus grand que $f_s - f_0$. Si η est distribuée selon une loi gaussienne cette probabilité s'écrit :

$$P(\eta > f_s - f_0) = \int_{f_s - f_0}^{\infty} p(\eta) d\eta = \int_{f_s - f_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp \frac{-\eta^2}{2T} d\eta \quad (2.21)$$

On en déduit $\tau(f_s)$ ⁸ :

$$\tau(f_s) = P(\eta > f_s - f_0)^{-1} \quad (2.22)$$

Si η est distribuée selon une loi gaussienne, on peut calculer cette probabilité, inverse de la fonction *erreur*, qui lorsque son argument atteint une valeur de l'ordre de 3, peut être approchée avec une excellente précision par une exponentielle. Cette approximation correspond dans notre cas à supposer que la température de notre modèle est suffisamment petite (c'est à dire $T \ll (f_s - f_0)^2$) ou

⁸. Cette formule est vraie pour $P \ll 1$, ce qui est le cas pour des processus lents comme ceux que nous considérons ici.

en d'autres termes que le processus est suffisamment lent (τ grand), ce qu'il est légitime de supposer ici puisque nous nous intéressons à des processus lents.

Ainsi, on obtient pour $\tau(f_s)$ l'expression suivante :

$$\tau(f_s) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} (f_s - f_0) e^{\frac{(f_s - f_0)^2}{2T}} \quad (2.23)$$

Pour poursuivre le calcul, nous allons faire une hypothèse simple : chaque fibre contribue à la dynamique moyenne comme si elle mettait *exactement* son temps moyen de rupture à rompre. Cette hypothèse est assez raisonnable sachant que la rupture d'une fibre est indépendante de celle des autres. Revenons à la distribution P_s des seuils de rupture, qui s'écrit :

$$P_s(f_s) = \frac{1}{2\pi T_d} e^{-\frac{(f_s - f_0)^2}{2T_d}} \quad (2.24)$$

Cette distribution engendre une distribution de temps de rupture $P_\tau(\tau)$. On peut écrire :

$$P_s(f_s)df_s = P_\tau(\tau)d\tau \quad (2.25)$$

Et ainsi :

$$P_\tau(\tau) = P_s(f_s(\tau)) \frac{df_s}{d\tau}(\tau) \quad (2.26)$$

Pour calculer P_τ , il faut donc inverser $\tau(f_s)$ pour avoir $f_s(\tau)$. Prenons le logarithme de l'équation 2.23 :

$$\ln(\tau) = \ln \sqrt{4\pi} + \ln \frac{f_s - f_0}{\sqrt{2T}} + \left(\frac{f_s - f_0}{\sqrt{2T}} \right)^2 \quad (2.27)$$

Ici encore en faisant l'hypothèse que $T \ll (f_s - f_0)^2$ le terme quadratique dans l'équation l'emporte nettement sur les deux logarithmes et devient le principal contributeur à $\ln(\tau)$:

$$\ln(\tau) = \left(\frac{f_s - f_0}{\sqrt{2T}} \right)^2 \quad (2.28)$$

D'où :

$$f_s(\tau) = f_0 + \sqrt{2T \ln(\tau)} \quad (2.29)$$

En dérivant :

$$\frac{df_s}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{T}{2 \ln(\tau)}} \quad (2.30)$$

En faisant l'approximation que chaque fibre contribue à l'endommagement moyen en mettant exactement son temps moyen de rupture pour rompre, on peut écrire :

$$n(t) = N \int_0^t P_\tau(\tau) d\tau \quad (2.31)$$

Ce qui implique que :

$$\frac{dn}{dt} = P_\tau(t) \quad (2.32)$$

Et ainsi :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{N}{t} \sqrt{\frac{T}{T_d}} \frac{1}{2\sqrt{\pi \ln t}} \exp \left[-\frac{(f_0 + \sqrt{2kT \ln t} - f_c)^2}{2kT_d} \right] \quad (2.33)$$

On voit dans l'équation 2.33 que pour des temps suffisamment longs, la principale contribution aux variations de $\frac{dn}{dt}$ est le terme en t^{-1} , car les termes logarithmiques n'évoluent alors quasiment plus. Ainsi le taux d'événements évoluera quasiment en t^{-1} , c'est à dire selon une loi d'Omori, entre deux échelles de temps. L'échelle de temps courts correspond au temps nécessaire pour que le terme en t^{-1} l'emporte, qu'on peut rapprocher expérimentalement du temps nécessaire (une dizaine de seconde) pour que la loi d'Omori s'établisse. Aux temps longs, il faut que $\sqrt{kT \ln t}$ reste petit devant $f_0 - f_c$, ce qui est le cas pour des endommagements faible (n petit devant N), soit expérimentalement tant que l'échantillon n'est pas complètement rompu.

On peut voir figure 2.31 une comparaison entre la résolution approchée de l'équation 2.33 et la simulation numérique directe. On peut observer un excellent accord entre la simulation et la résolution approchée. On voit que $\frac{dn}{dt}$ se comporte

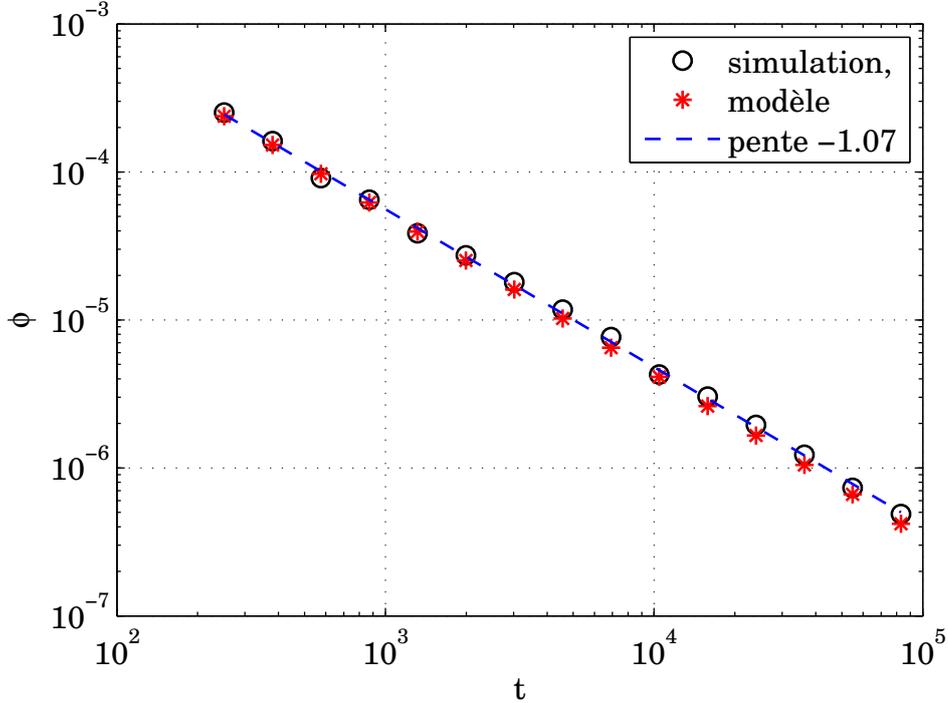


FIGURE 2.31 – Temps moyen de rupture en fonction du temps (log-log) pour la solution analytique approchée (croix) et la simulation directe du réseau de fibres (cercles). Pour la simulation, les points sont obtenus à partir de 50 réalisations de l’expérience numérique. La pente mesurée est de -1.05 ± 0.03 . Les paramètres utilisés sont $N = 1000$, $f_0 = 0.75$, $T = 0.005$, $T_d = 0.02$.

comme t^{-k} avec k proche de 1 (entre 0.9 et 1.1 selon les paramètres d’entrée). Ceci correspond à une loi d’Omori généralisée, introduite dans les années soixante et observée dans les répliques lorsqu’on veut décrire leur dynamique plus finement qu’avec une loi d’Omori simple. Ceci nous permet de valider notre étude approchée. Nous avons vérifié la plage de paramètres sur laquelle l’accord avec la simulation numérique directe est valable ce qui est le cas car $T < (1 - f_0)^{2.9}$ et $T_d > T$. Notre modèle, pourtant très simple, a donc permis de recréer la dynamique observée expérimentalement dans l’indentation du verre.

Intéressons nous maintenant à l’influence de la température. Comme nous l’avons fait expérimentalement, si l’on s’intéresse à la force, celle-ci s’écrit $F = f_0 \times (N - n)$. Avec comme force initiale $F_0 = N f_0$, $\frac{F_0 - F}{F_0} = \frac{n}{N}$. On peut ainsi exprimer α (défini équation 2.19) à partir de $\frac{dn}{dt}$:

9. Ce qui correspond à l’approximation faite pour obtenir la résolution approchée

$$\alpha = \frac{d\left(\frac{F_0 - F}{F_0}\right)}{d \ln(t)} = \frac{t}{N} \frac{dn}{dt} \quad (2.34)$$

Ainsi :

$$\alpha = \sqrt{\frac{T}{T_d}} \frac{1}{2\sqrt{\pi \ln t}} \exp \left[-\frac{(f_0 + \sqrt{2kT \ln t} - f_c)^2}{2kT_d} \right] \quad (2.35)$$

On voit donc que α s'il dépend du temps, est quasiment constant pour des temps longs. Il dépend de la température en \sqrt{T} ce qui est plutôt compatible avec les observations expérimentales¹⁰ (voir figure 2.28) et constitue un nouvel accord, au moins qualitatif, entre les deux points de vue. De plus cela nous permet de dire que le choix de α pour évaluer la dynamique de la fracture est pertinent puisqu'il représente ici la pente de $\frac{dn}{dt}$ en fonction de $\frac{1}{t}$ normalisée par N .

2.6.3 Paramètres influant sur la loi d'Omori

On peut voir figure 2.32 les exposants obtenus par simulation directe du modèle pour différents paramètres. Les exposants sont compris généralement entre 0.5 et 2 sauf dans les cas où $T > T_d$ et où la force est grande, où les valeurs obtenues sont plus importantes, mais où le modèle n'est plus réaliste (les approximations ne sont plus valables). Le comportement de $\frac{dn}{dt}$ s'écarte alors d'une loi de puissance de t . Nous voyons donc une dépendance de l'exposant d'Omori avec des paramètres du modèle. Celui-ci peut être défini comme l'opposé de la pente de $\ln\left(\frac{dn}{dt}\right)$ en fonction de $\ln(t)$. En se servant de la loi 2.33, on peut écrire :

$$\ln \left(\frac{dn}{dt} \right) = -\left(1 + \frac{T}{T_d}\right) \ln(t) - \frac{1}{2} \ln(\pi \ln(t)) + (f_c - f_0) \frac{\sqrt{2kT}}{2kT_d} \sqrt{\ln(t)} + K \quad (2.36)$$

On voit que la fonction obtenue n'est pas une droite pure, du fait des termes en $\ln \ln t$ et en $\sqrt{\ln t}$. Toutefois, ces termes deviennent négligeable devant $\ln t$ pour des temps très longs (en fait pour des $\ln t$ grands). La pente mesurée serait alors de $1 + \frac{T}{T_d}$. Qu'en est-il pour l'expérience d'indentation dans le verre ?

La question est de savoir si expérimentalement $\ln(t)$ est effectivement grand. Pour cela, il faut connaître la période caractéristique τ_f des fluctuations thermiques de la contrainte à la pointe de la fissure. Celle-ci est liée au temps caractéristique exhibé par la fonction de réponse, conformément au théorème de

10. On avait plutôt observé un comportement en $\propto T$, mais nous retrouvons en tout cas $\alpha(T)$ croissant avec T .

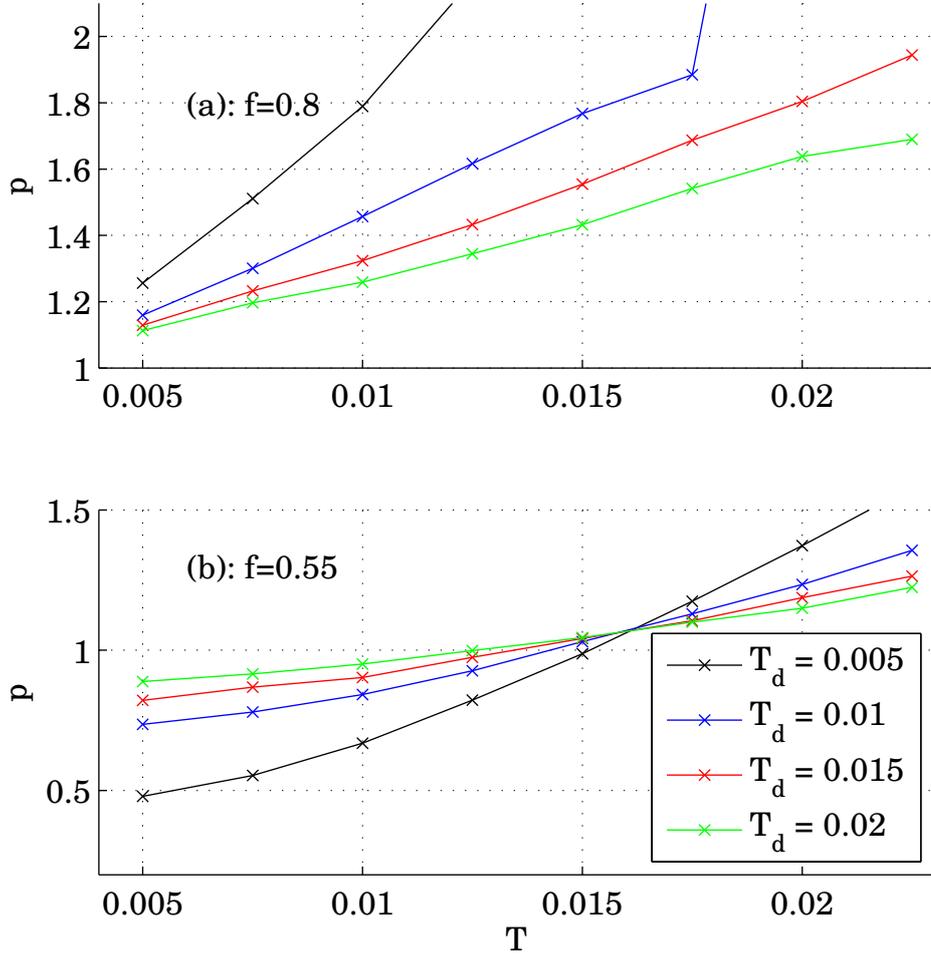


FIGURE 2.32 – Exposant d’Omori p en fonction de la température T pour différentes températures de désordre T_d et pour deux forces différentes avec $N = 1000$. Les exposants sont obtenus par ajustement de la moyenne de $\frac{dn}{dt}$ sur 50 expériences.

fluctuation dissipation. Afin de l’évaluer, il faut estimer tout d’abord la taille sur laquelle la contrainte fluctue. Il apparaît raisonnable d’estimer celle-ci par la taille caractéristique de la structure microscopique du matériau considéré, de l’ordre de quelques nanomètres pour du verre. En le divisant par la vitesse du son, de plusieurs milliers de mètres par seconde dans le verre, on obtient un temps caractéristique de l’ordre de la picoseconde. Ainsi, le ”pas de temps” expérimental vaut $\tau_f = 10^{-12}$ s. Il faut noter ici que τ_f dépend du matériau.

Dans les formules établies précédemment, t doit donc être remplacé par $\frac{t_{exp}}{\tau_f}$, où t_{exp} est le temps en seconde mesuré au cours de l’expérience. Ainsi, $\ln t$ est

de l'ordre de 30 pour $t_{exp} = 10s$ et 36 pour pour $t_{exp} = 1h$. Sur cet intervalle de temps, la contribution du terme en $\ln \ln t$ est alors minime par rapport au terme en $\ln t$ (quelques pourcents), alors que l'importance relative du terme en $\sqrt{\ln t}$ dépend des paramètres. Toutefois, ce dernier voit sa pente en fonction de $\ln t$ varier peu (d'environ 7%), et donc sa contribution est essentiellement linéaire (et positive).

En première approximation, on a donc une loi d'Omori approchée, avec un exposant $p = 1 + \frac{T}{T_d} - k(f_c - f_0) \frac{\sqrt{2kT}}{2kT_d}$, où k dépend de l'intervalle de temps sur lequel p est estimé. On voit donc que pour $T = k(f_c - f_0) \sqrt{\frac{T}{2k}}$, p ne dépend plus de T_d et vaut 1, ce qui correspond aux points où toutes les courbes de la figure 2.32 semblent se croiser (pour une valeur de p de l'ordre de 1). On peut noter que p augmente avec le désordre.

Peu d'études expérimentales ont mis en évidence une variation de p avec la température. On peut citer la thèse d'Ojala [71] qui met en évidence dans des expériences de corrosion sous contraintes d'échantillon de grès soumises à un test de compression triaxial une variation de p avec la température. La variation suivait $p = 0.0055T + 0.90$. Au niveau des tremblements de terre, si l'hypothèse d'un accroissement de p avec la température de la croûte terrestre est souvent émise [7], il n'y a quasiment aucune étude quantitative portant sur ce fait. On peut aussi citer [74] qui s'appuie sur des séquences de répliques d'origine volcaniques au Japon et trouve $0.692 + 0.000994T$. L'interprétation de ces observations repose sur la variation des propriétés rhéologiques des solides considérés avec la température. Dans notre cas, c'est le fait que l'amplitude des fluctuations augmente avec la température qui explique cette dépendance. De plus, nous pouvons relier la pente exhibée par cette dépendance au désordre, et dans une moindre mesure à la contrainte appliquée, ce qui pourrait expliquer les différences observées dans ces deux études, et permettrait d'accéder à une mesure du désordre. Une étude plus poussée expérimentalement sur l'indentation du verre pourrait être envisagée, la mesure de p étant pour le moment imparfaite dans notre dispositif.

2.6.4 Conclusion

Cette modélisation, bien que très simple, reproduit bien les comportements observés expérimentalement : on retrouve une loi d'Omori, et le taux initial d'événements décroît avec la température selon une loi en \sqrt{T} . De plus, l'exposant exhibé par la loi d'Omori dépend des paramètres imposés, en particulier de la température ce qui constitue un résultat intéressant dépassant le cadre de l'indentation puisqu'on peut le mettre en lien avec les tremblements de terre où

des expériences en laboratoire. Néanmoins, ce modèle ne permet pas de rendre compte de la distribution des énergies, ou des "tailles" des microfractures, puisqu'il y a au plus une seule fibre qui rompt à chaque pas de temps¹¹. Il serait nécessaire de complexifier le modèle pour tenter de retrouver une distribution de taille, en rendant possible des cascades de rupture par exemple (ce qui revient à introduire des interactions entre les fibres). On peut aussi noter que nous trouvons des lois d'Omori pour le comportement collectif des fibres alors que celles-ci sont totalement indépendantes les unes des autres dans notre modèle.

2.7 Retour sur les expériences à basse température

Revenons maintenant aux observations expérimentales effectuées dans le saphir à basse température [31], qui ont en partie motivé notre étude. Au premier abord, le mécanisme d'activation thermique semblait hors jeu pour expliquer la dynamique des microfractures observées, du fait de la très faible température où se trouvait l'échantillon (quelques millikelvins). Toutefois, cela n'est pas forcément contradictoire comme nous nous proposons de le montrer ici. Déjà, l'exposant de la loi d'Omori mis en évidence dans ces expériences est très faible : de l'ordre de 0.2. Ceci peut s'expliquer par le fait que, comme nous l'avons observé numériquement, l'exposant d'Omori diminue avec la température. Le principal problème réside dans l'abondance de microfractures détectés à basse température, alors que l'activité caractérisée par le paramètre α évolue en \sqrt{T} , si l'on se réfère à notre étude. Le taux moyen trouvé par les auteurs est en effet de l'ordre du millier par heure (voir figure 1.10), en partant de plusieurs milliers initialement, ce qui est légèrement supérieur aux taux que nous observons (quelques centaines par heure en moyenne). Dans notre cas, le taux de microfractures détectées est du même ordre de grandeur, alors qu'il devrait être 200 fois plus faible compte tenu de l'écart de températures ; les contraintes, la taille des billes utilisées étant comparables. Nous ne pouvons par contre pas mesurer le désordre, ni dans l'une, ni dans l'autre situation.

Il ne faut cependant pas perdre de vue que les gammes d'énergie sont très différentes, et compte tenu de la loi de Gutenberg-Richter, les microfractures de faibles énergies sont beaucoup plus nombreuses. Ainsi la gamme accessible pour nous est $10^{-9}J - 10^{-4}J$ (à un ordre de grandeur près), alors que dans le saphir elle correspond à $10^{-16}J - 10^{-13}J$. Il y a donc un décalage de 7 décades en énergie (en prenant pour référence les énergies les plus faibles qui concentrent

11. Le modèle n'interdit pas à deux fibres de rompre au même pas de temps, mais comme nous sommes dans un régime très lent, cela n'arrive quasiment jamais numériquement.

le plus grand nombre d'événements). On peut donc évaluer le rapport des taux moyens χ ainsi :

$$\frac{\chi_2}{\chi_1} = \left(\frac{e_2}{e_1} \right)^{1-b} \quad (2.37)$$

Où β est l'exposant associé à la distribution de l'énergie, et e_1 et e_2 les deux énergies les plus petites détectées. Etant données les valeurs estimées de celles ci, et en prenant β de l'ordre de 1.5 (valeur intermédiaire entre les valeurs de [31], 1.7 et la notre, 1.4 , on trouve un facteur 1000 entre les taux de répliques. Autrement dit, à une température de 10mK, et dans la gamme d'énergie du détecteur de [31], le nombre d'événements détectés dans notre expérience aurait été environ cinq fois supérieur à celui que nous avons détecté dans notre étude. Ceci est cohérent avec les observations faites à basse température.

En conclusion, un mécanisme d'activation thermique pourrait très bien expliquer la dynamique d'une fracture à 10mK!!!! Les ordres de grandeurs donnés ici étant très approximatifs, d'autres mécanismes pourrait également être considérés, comme une activation d'origine quantique (par effet tunnel). L'interprétation rigoureuse de cette expérience aux caractéristiques uniques, effectuée par erreur dans un détecteur de neutrinos reste donc une question ouverte. Mais le mécanisme par activation thermique devient tout de même un candidat sérieux.

2.8 Conclusion

Dans cette étude, nous avons abordé une configuration de fracture peu étudiée en termes de physique statistique. La phénoménologie de la fracture par indentation s'avère très riche et présente de nombreuses analogies aussi bien avec d'autre type de fracture qu'avec les tremblements de terre. A ce titre, le fait que dans notre expérience ce soit la relaxation des contrantes qui engendre des lois d'Omori pour la dynamique de la fracture est intéressant, sachant que la plupart des études en laboratoires se font à vitesse constante lorsqu'il s'agit de retrouver ces types de loi.

Nos observations expérimentales, combinées à une modélisation simple, nous ont permis de proposer une explication pour rendre compte des observations faites dans le saphir à très basse température, qui ont en partie motivé notre étude.

Les résultats obtenus à l'aide de cette modélisation sont en outre intéressant pour comprendre l'apparition de lois d'Omori liées à l'activation thermique, et

nous ont permis de caractériser la variation de p avec les paramètres du modèle.

Ces résultats encourageant permettent d'entrevoir de nombreuses perspectives, à la fois dans les techniques de détections, l'étude de la fracture par indentation, et la modélisation.

Etude de l'invariance d'échelle dans la fracture du papier

Sommaire

3.1 Aspect théorique de l'invariance d'échelle : le formalisme multifractal	91
3.1.1 Invariance d'échelle d'un signal aléatoire	92
3.1.2 Analyse multifractale	95
3.1.3 Comment mesure-t-on la rugosité des fractures?	98
3.1.4 Quantités multirésolutions utilisées	99
3.2 Fronts de fracture obtenus par rupture lente du papier	100
3.2.1 Dispositif expérimental	101
3.2.2 Propriétés des échantillons utilisés	101
3.2.3 Protocole expérimental et dynamique de la fracture	103
3.2.4 Extraction des fronts de fracture	104
3.3 Analyse des fronts de fracture	105
3.3.1 Mesure de la rugosité	106
3.3.2 Caractère multifractal des front de fractures	115
3.3.3 Bilan	119
3.4 Discussion	120
3.5 Conclusion	122

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux propriétés fractales des fronts de fracture des matériaux fragiles désordonnés et en particulier ceux obtenus dans des expériences de rupture lente du papier en mode I, en utilisant des outils modernes et puissants pour les caractériser.

Au cours des deux dernières décennies, de nombreuses études ont en effet mis en évidence l'invariance statistique d'échelle des fronts de fracture obtenus dans différentes géométries et sur différents matériaux fragiles. Nous allons donc tout d'abord présenter certains de ces résultats et les techniques mathématiques pour caractériser l'invariance d'échelle. Ces dernières sont souvent rudimentaires et il n'est pas rare qu'elles conduisent à des conclusions contestables. Nous définirons donc clairement la notion de signal fractal avec une approche rigoureuse emprunté au domaine du traitement de signal et nous présenterons plusieurs techniques mathématiques de détection en discutant des avantages qu'ils apportent.

Nous appliquerons ensuite ces techniques aux fronts de fracture du papier, en nous appuyant sur les données obtenues par S. Santucci au cours de son doctorat au sein du laboratoire de physique de l'ENS Lyon complétées par de nouvelles données obtenues aux cours de notre étude. Plus précisément, nous nous intéresserons à l'influence du régime physique de croissance de la fissure sur la rugosité des fronts engendrés par celle-ci, mais aussi aux propriétés multifractales de ces fronts. Cela nous permettra aussi de discuter à partir de nos données de l'efficacité des différentes techniques de caractérisation.

3.1 Aspect théorique de l'invariance d'échelle : le formalisme multifractal

Le terme fractale a été introduit dans les années 70 par le mathématicien Benoît Mandelbrot [17]. Après la publication de ses travaux, l'étude des structures fractales, qui étaient connues depuis longtemps¹ a ensuite connu un essor considérable dans les décennies suivantes. Un objet fractal est un objet qui possède des détails similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes, plus exactement qui est statistiquement ou exactement autosimilaire (c'est à dire que le tout est semblable à une de ses parties).

On peut voir sur les figures 3.1 et 3.2 des exemples célèbres de fractales. Le succès de ce champs d'études tient au fait que ces objets permettent de modéliser des systèmes naturels (les alvéoles pulmonaires, les feuilles de fougère, le relief des cotes, les nuages etc...). Une caractéristique importante des objets fractals est leur dimension fractale, qui généralise la notion de dimension d'un objet (1D, 2D, 3D...) aux valeurs non entières. Le flocon de Koch, par exemple, est une ligne

1. On peut citer les travaux du mathématicien français Gaston Julia publiés en 1917 sur les variables complexes qui introduisaient l'ensemble fractal qui porte son nom.

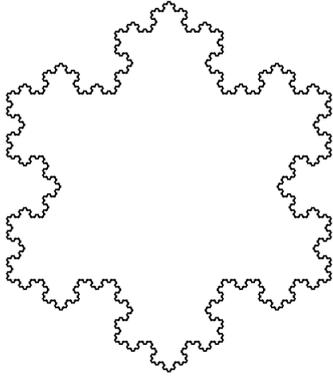


FIGURE 3.1 – Flocon de Koch

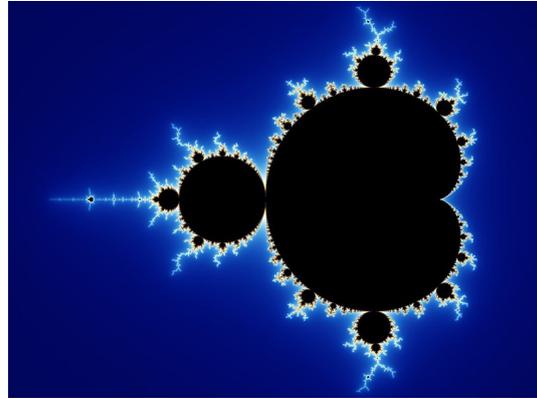


FIGURE 3.2 – Ensemble de Mandelbrot (en noir)

fermée qui s'inscrit dans une surface finie de l'espace, mais dont la longueur est infinie. Ainsi, sa dimension fractale sera comprise entre 1 et 2. Dans la suite, nous allons nous intéresser aux propriétés fractales des signaux aléatoires.

3.1.1 Invariance d'échelle d'un signal aléatoire

3.1.1.1 Signal aléatoire

Un signal aléatoire $S(x)$ est la séquence indexée d'une variable aléatoire S . On peut par exemple imaginer un opérateur qui joue à pile ou face et lance la pièce toutes les secondes, N fois de suite. Le traitement est formellement identique si N opérateurs lancent N pièces une fois en même temps, l'indexation se faisant non plus avec la date du lancer, mais selon le numéro de l'opérateur. On parle ici de processus temporel à temps discret, cette notion se généralisant aux processus à temps continu. Une réalisation du processus génère ainsi un signal aléatoire $S(x)$. Deux réalisations d'un même processus engendrent des signaux qui sont *a priori* différents mais qui présentent les mêmes propriétés statistiques. L'étude d'un processus aléatoire consiste donc à étudier statistiquement les signaux aléatoires qu'il génère. Dans le cas qui nous intéresse, le processus sera la fracture d'un échantillon, le signal aléatoire étant la hauteur de la ligne de fracture indexée par sa position sur l'axe de propagation de la fracture.

3.1.1.2 Invariance d'échelle

Nous allons définir la notion d'invariance, qui correspond à un processus fractal. Pour se faire nous allons nous intéresser aux incréments du signal aléatoire généré. En notant $S(x)$ un signal aléatoire, on appelle incrément de S à l'échelle a et à la position x_0 la quantité $\delta_S(x_0)$ définie par :

$$\delta S(x_0, a) = S(x_0 + a) - S(x_0) \quad (3.1)$$

Si le processus est à temps discrets, les valeurs accessibles de a le seront aussi. Dans la suite, nous allons nous intéresser aux processus stationnaires pour lesquelles les propriétés de δS ne dépendent que de a et pas de x_0 .

On peut aussi définir les moments d'une variable aléatoire. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité (pdf) $P(X)$. Le moment d'ordre q de la variable aléatoire, noté $\langle X^q \rangle$ est définie par :

$$\langle M_q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X^q P(X) dX \quad (3.2)$$

En pratique, la pdf de la variable aléatoire est inconnue. Pour estimer les moments on tire au sort la variable un grand nombre de fois et on calcule :

$$\widehat{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^q \quad (3.3)$$

A la limite $N \rightarrow \infty$, la loi des grands nombres stipule que $\widehat{X}_N \rightarrow \langle X^q \rangle$.

Par définition, on appellera *processus fractal* un processus pour lequel les moments des incréments à l'échelle a évoluent en lois de puissance avec a . Ceci constitue la définition d'un signal invariant d'échelle.

Pour des processus symétriques, les incréments étant eux aussi symétriques, les moments des incréments du signal aléatoire sont nuls pour des valeurs impaires de q . Ainsi, on préfère en pratique étudier les moments de la valeur absolue des incréments. La moyenne d'ensemble, sous l'hypothèse d'ergodicité peut être remplacée par une moyenne temporelle sur les temps t_0 ². Les grandeurs ainsi définies, notées $M_q(a)$, qui dépendent de q et de l'échelle a sont appelées les fonctions de structure du signal $S(x)$:

$$M_q(a) = \langle |\delta S(x_0, a)| \rangle_{x_0} \quad (3.4)$$

La fractalité du signal S se traduit donc par le fait que $M_q(a)$ se comporte en loi de puissance de a . En notant $\zeta(q)$ l'exposant de cette loi, on a :

$$M_q(a) = A_q a^{\zeta(q)} \quad (3.5)$$

Où A_q est une constante. On peut donc écrire :

2. Pour que cela soit valable, il faut que la somme sur les temps t_0 converge au sens de la loi des grands nombres, c'est à dire pour des signaux discrets que le nombre de points du signal soit suffisamment grand. Ce n'est pas forcément le cas pour des signaux physiques. Dans ce cas, on fera en plus une moyenne sur plusieurs réalisations du signal, dans notre cas, sur plusieurs fronts de fractures.

$$\ln M_q(a) = \ln A_q + \zeta(q) \ln(a) \quad (3.6)$$

On peut constater que pour un signal fractal, les fonctions de structures sont reliées entre les échelles :

$$M_q(a_2) = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\zeta(q)} M_q(a_1) \quad (3.7)$$

Le signal est dit **monofractal** si le spectre des exposants $\zeta(q)$ est linéaire en q : $\zeta(q) = Hq$. Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité, noté H , est appelé l'exposant de Hurst du signal³. C'est lui qui caractérise à lui seul le comportement fractal du signal. Dans ce cas, il est facile de mesurer H à partir de n'importe lequel des moments (en général, on utilise M_2) par régression linéaire de $\ln M_q(a)$ en fonction de $\ln a$.

Le cas où $\zeta(q)$ n'est pas linéaire en q correspond lui à un signal dit **multifractal**. Dans ce cas, l'invariance d'échelle est plus complexe et un seul exposant ne suffit pas à la caractériser⁴.

En physique, des signaux invariants d'échelle ont été communément observés dans de nombreuses applications aux natures très différentes. (hydrodynamique [75, 76]) , physique statistique, météorologie [77] ...). En pratique, on observe un comportement en lois de puissance des fonctions de structure pour une large gamme d'échelles : $a \in [a_m, a_M], \frac{a_M}{a_m} \gg 1$.

Les incréments du signal, qui donnent les fonctions de structure, présentent néanmoins certains défauts, comme nous allons le voir par la suite. On peut aussi utiliser d'autres quantités dépendant à la fois de la position et de l'échelle pour déterminer ζ_q . On peut donc généraliser les notions introduites ci-dessus en définissant simplement des coefficients multi-résolution du signal $S(x)$ que nous écrirons $T_S(a, x)$ qui dépendent à la fois de l'échelle a et de x . Ceci peuvent être les incréments, mais aussi les coefficients d'une transformée en ondelette du signal par exemple. Ce sont les lois d'échelle des moments de ces quantités $M_q(a)$ qui permettent de déterminer $\zeta(q)$.

Nous allons maintenant préciser le protocole d'analyse pour le cas général, que $\zeta(q)$ soit linéaire ou non.

3. Dans notre cas, c'est cet exposant qui correspond à la rugosité du front de fracture.

4. On peut montrer en utilisant l'inégalité de Hölder pour les moments de variables aléatoires que $\zeta(q)$ est nécessairement concave.

3.1.2 Analyse multifractale

3.1.2.1 Notion de régularité locale

Pour un signal aléatoire invariant d'échelle $S(x)$, on peut définir en tout point un exposant de régularité local, appelé exposant de Hölder, noté $h(x)$ qui décrit localement le comportement du signal. Il existe toujours en tout point x du signal invariant d'échelle S un entier n et une constante m tels que :

$$S(x + \epsilon) \sim \sum_{k=0}^n S^{(k)}(x) \frac{\epsilon^k}{k!} m \epsilon^{h(x)} \quad (3.8)$$

où $h(x) \in [n, n + 1]$ est un nombre réel, qui correspond donc à l'exposant caractérisant le reste du développement de Taylor.⁵ On note $E_h = \{x, h(x) = h\}$ l'ensemble des points du signal ayant un exposant de Hölder égal à h et $D(h)$ la dimension fractale (ou plus précisément de Hausdorff) de E_h . $D(h)$ est appelé spectre de singularité de S [78].

3.1.2.2 Formalisme multifractal

Le formalisme multifractal relie les exposants $\zeta(q)$ au spectre des singularités $D(h)$ par une transformée de Legendre :

$$D(h) \leq \min_{q \neq 0} (1 + qh - \zeta(q)); \quad (3.9)$$

Ce formalisme a été introduit sur les incréments par Frisch et Parisi pour l'étude de la turbulence [75] puis généralisé entre autre par Arneodo [79] aux ondelettes. Pour un signal monofractal, $D(h)$ se résume à un point : $D(H) = 1, D(h) = 0$ pour $h \neq H$. Le signal a donc le même comportement en tout point, et la seule donnée de H suffit à décrire ce comportement. Pour un signal multifractal, la concavité de $\zeta(q)$ impose à $D(h)$ une forme "en cloche" : il existe dès lors une infinité d'exposants de Hölder dans le signal, et c'est la donnée de l'ensemble du spectre de singularité $D(h)$ qui est nécessaire pour décrire l'invariance d'échelle. Pour l'obtenir il faut donc passer par $\zeta(q)$ et donc analyser plusieurs moments M_q .

L'analyse multifractale, envisagée comme modèle d'invariance d'échelle, est aujourd'hui considérée comme un outil classique pour l'étude de données expérimentales.

3.1.2.3 Log-cumulants

Récemment, il a été suggéré de ré-exprimer ces $\zeta(q)$ par un développement limité au voisinage de $q = 0$:

5. Dans le domaine de la fracture, toutefois, h est toujours compris entre 0 et 1.

$$\zeta(q) = \sum_{p \geq 0} c_p \frac{q^p}{p!} \quad (3.10)$$

Il a, de plus été montré que les coefficients c_p de ce développement peuvent être exprimés par :

$$C_p(a) = c_{0,p} + c_p \ln a, \quad (3.11)$$

où les $C(a)_p$ sont les cumulants des $\ln T_S(a, x)$ [80, 81, 82, 83] définis comme :

$$C_1(a) = \langle \ln |T_S(a, x)| \rangle_x \quad (3.12)$$

$$C_2(a) = \langle \ln |T[s](a, x)|^2 \rangle_x - \langle \ln |T_s(a, x)| \rangle_x^2 \quad (3.13)$$

et ainsi de suite pour les entiers $q > 2$. Ce développement est motivé par le fait que ces *log-cumulants*, c_p , soulignent directement la différence entre les processus invariants d'échelle monofractals ($\forall q > 1, c_q = 0$) et multifractals. Le coefficient c_2 mesure ainsi la principale déviation à la monofractalité, la concavité de $\zeta(q)$ imposant $c_2 \leq 0$. On peut aussi voir les cumulants comme un outil de mesure des déformations des distributions des $T_s(a, x)$. En effet, pour un signal monofractal, ces distributions sont gaussiennes pour toutes les échelles a , alors que pour un signal multifractal elles présentent des queues lourdes d'autant plus marquées que l'échelle est petite. Les coefficients c_p mesurent l'écart au comportement gaussien de ces distributions.

Les équations 3.6 et 3.11 motivent l'estimation des $\zeta(q)$ et des c_p à partir de régressions linéaires de $\log M_q(a)$ et $C_p(a)$ contre $\log a$. Nous noterons ζ_m l'estimation directe de ζ à partir des moments et ζ_c l'estimation de ζ à partir des cumulants en utilisant l'équation 3.10.

3.1.2.4 Transformée en ondelettes

Il reste maintenant à définir les coefficients multi-résolution $T_s(a, x)$ du signal $s(x)$. La transformée en ondelette (TO) constitue le meilleur candidat, car elle est bien résolue à la fois en temps et en fréquence (donc en échelle). Elle est largement utilisée en traitement du signal pour toutes sortes d'application, entre autre pour l'étude des propriétés fractales des processus aléatoires stationnaires, mais aussi en traitement des images (standard de compression JPEG), pour la reconnaissance des contours, etc... [84]. Elle consiste en un produit scalaire du signal avec une fonction appelée ondelette obtenue par translation et dilatation d'une ondelette mère ψ :

$$T_s(a, x) = \int_{x_0 \in \mathbb{R}} s(x_0) \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x_0 - x}{a}\right) dx_0. \quad (3.14)$$

Cette ondelette mère doit satisfaire certaines propriétés :

- ψ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$,
- La moyenne de ψ est nulle : $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$,
- ψ est de norme unité : $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)^2 dx = 1$,
- En général, ψ est une fonction infiniment dérivable.

L'ensemble de ces propriétés assure à ψ une bonne résolution à la fois en temps *et* en fréquence, ce qui est une grande différence par rapport à la transformée de Fourier qui n'est résolue qu'en fréquence et oublie la description locale du signal. L'ondelette mère est aussi caractérisée par son nombre de moments nuls $N \geq 1$, défini par :

$$\int x^k \psi(x) dx = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, N \quad (3.15)$$

Ce nombre N est aussi appelé ordre de l'ondelette mère ψ . Il convient d'être convenablement choisi, car une TO utilisant des ondelettes d'ordre N ne permettent d'accéder qu'à des valeurs de h plus petites que N . On peut voir figure 3.3 des exemples d'ondelettes mères de différents ordres. Selon la grille d'échelle utilisée, on parlera de transformée en ondelette continue TOC (calculée sur un grand nombre d'échelles a formant un quasi-continuum, le plus souvent régulièrement espacées en log) ou de transformée en ondelettes discrète (TOD) où la grille d'échelles est restreinte à une suite géométrique d'échelles, généralement de raison 2⁶. On parle dans ce cas de transformée en ondelette diadique. (TOD).

Les incréments du signal, autre candidat pour le calcul de $T_s(a, x)$ que nous utiliserons, peuvent être vus comme une TO "du pauvre" avec une pseudo-ondelette mère obtenue par somme de distributions de Dirac : $\delta_1 = (\delta(x+1) - \delta(x))$, $\delta_2 = \delta(x+2) - 2\delta(x+1) + \delta(x)$, $\delta_3 = \delta(x+3) - 3\delta(x+2) + 3\delta(x+1) - \delta(x)$ pour les ordres 1, 2 et 3. La dénomination d'ondelette est abusive car ces objets ne vérifient pas la conditions de régularité exigée (ce ne sont d'ailleurs pas des fonctions). Le principal défaut des incréments est qu'ils sont fortement irréguliers qu'ils fournissent donc des coefficients très sensibles à la discrétisation des signaux étudiés.

6. La TOC présente donc une grande redondance, la TOD étant nettement moins volumineuse. On préférera donc la TOD pour la compression d'image alors que la TOC permet de mieux apprécier les lois d'échelle en général.

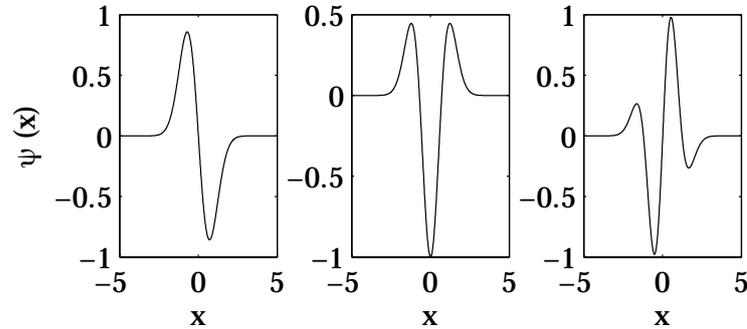


FIGURE 3.3 – Ondelettes mères d'ordres successifs (de gauche à droite 1, 2 et 3) obtenues en dérivant successivement une courbe gaussienne.

3.1.3 Comment mesure-t-on la rugosité des fractures ?

Dans la littérature, de nombreuses techniques sont utilisées pour mesure la rugosité h des fronts de fracture invariants d'échelle (voir entre autre [85] et [37] qui les récapitulent, ou [86] et [87] qui comparent leurs vertus) :

- La technique la plus couramment utilisée se base sur le moment d'ordre 2 des incréments du signal. Certaines études, plus rares, se basent aussi sur le moment d'ordre 1.
- La méthode dite Z_{max} est aussi largement utilisée. Dans ce cas, le signal est divisé en segment de taille donnée L , centrés sur des positions x . Z_{max} est alors défini comme l'amplitude maximale du signal sur le segment. En faisant la moyenne de Z_{max} sur les positions des segments, celle-ci se comporte en loi de puissance de la taille L avec : $Z_{max} \propto L^h$. Cette technique est très sensible aux tendances linéaires à grande échelle et présente souvent des biais qui faussent l'estimation.
- Le spectre de puissance du signal $P(f)$ qui se comporte comme une loi de puissance de la fréquence avec $P(f) \propto f^{-1-\zeta(2)}$, avec $h = \zeta(2)/2$ dans le cas monofractal. Cette technique est reliée directement au moment d'ordre 2 des incréments. Les effets de taille fini sont souvent sources d'erreurs pour cette technique [86].
- Une technique utilisée marginalement est celle dite de la probabilité de retour. Pour chaque x du signal s , on cherche la distance d minimale telle que $s(x+d) = s(x)$. On peut alors montrer que la densité de probabilité de d se comporte en loi de puissance avec $p(d) \propto d^{-\tau}$, avec $\tau = 2 - h$ dans le cas monofractal. Cette technique est très sensible elle aussi aux effets de taille finie [86].
- La transformée en ondelettes continue, largement utilisées en turbulence, est aussi utilisée en fracture, à partir de ses moments. Il a déjà été établie

qu'elle était moins sensible aux effets de taille finie et plus précise pour les faibles nombres d'échantillons, en plus d'être moins sensible au bruit, comparé au spectre de puissance [87].

Ces techniques, souvent obsolètes, ne sont pas toujours utilisées rigoureusement, la multifractalité n'étant en général pas étudiée, et les incréments privilégiés alors même qu'ils peuvent engendrer des problèmes dans l'estimation des lois d'échelle. Nous allons donc introduire des techniques plus récentes développées par ailleurs que nous appliquerons à l'analyse des fronts de fracture expérimentaux dont nous disposons.

3.1.4 Quantités multirésolutions utilisées

Nous allons utiliser 5 types de coefficients multirésolutions plus ou moins récents et qui repose sur la transformée en ondelette continue ou discrète :

- Les incréments du signal calculés sur une grille continue, pour les ordres 1 à 3 (INCR1, INCR2, ...)
- La transformée en ondelette continue calculée en prenant comme ondelettes mères les dérivées successives d'une fonction gaussienne (l'ordre de l'ondelette mère étant égal au nombre de dérivation successives). Nous avons utilisé des ondelettes d'ordre 1 à 3 (TOC1, TOC2, TOC3).
- Les coefficients de la transformée en ondelettes discrète (TOD) calculés sur une grille dyadique en utilisant les ondelettes de Daubechies (classes d'ondelettes orthogonales) là aussi d'ordre 1 à 3 (TOD1,...). Cette transformée bénéficie notamment d'un coup de calcul significativement plus faible que la précédente.
- On utilisera aussi une version squelettisée de la TOC, **les maxima du module de la transformée en ondelette**, MMTO, développée par A. Arnéodo et ses collaborateurs [88]. Pour la calculer on extrait, à chaque échelle, les maxima du module de la transformée en ondelettes. De manière récursive et en partant de la plus petite échelle, on relie chaque maximum obtenu à cette échelle au maximum le plus proche de l'échelle supérieure. On obtient ainsi un ensemble de lignes de maxima, un *squelette*, noté \mathcal{L} . Sur ce squelette, on remplace ensuite les $T_s(a, x) \in \mathcal{L}$ par leurs maxima, observés à une échelle plus fine sur la même ligne du squelette :

$$M_X(a, t) = \sup_{(t, a') \in \mathcal{L}, a' < a} |T_X(a', t)| . \quad (3.16)$$

Le calcul des moments et des cumulants se fait alors en ne prenant en

compte que ces coefficients.

- À partir de la TOD a été très récemment proposée une analyse dite des **coefficients dominants**, CD, [78]. Ces coefficients dominants se définissent par :

$$L_X(j, k) = \sup \left\{ \bigcup_{0 \leq j' \leq j} \left\{ \bigcup_{m=m_1}^{m_2} \{|d(j, m)|\} \right\} \right\}, \quad (3.17)$$

avec $m_1 = 2^{j-j'}(k-2) + 1$, $m_2 = 2^{j-j'}(k+1)$ et $L_X(0, \cdot) = 0$. Cela signifie simplement que le coefficients leader $L_X(j, k)$ est obtenu comme le maximum dans un voisinage local de tous les $d_X(j, k)$ situés à des échelles inférieures. Le voisinage temporel local est défini par les deux coefficients adjacents à celui considéré.

Dans notre étude, nous utiliserons ces cinq ensembles de coefficients dans les équations 3.6 et 3.11. Nous calculerons ainsi les moments successifs $M_q(a)$, avec q prenant des valeurs de 0.2 à 10 avec un pas de 0.2^7 . Quant à eux, les log-cumulants $C_q(a)$ seront calculés pour q entier de 1 à 3.

L'étude comparée des performances d'estimation des quantités multifractales à partir de ces coefficients montre [89, 90, 91] que les estimations pour les processus multifractals sont meilleures avec les techniques MMT0 et CD et moins sensibles à la discrétisation. En ce qui concerne les incréments, le problème de quantification des données entraîne une détérioration de l'estimation des moments à petite échelle [92] et les méthodes utilisant des ondelettes avec une bonne résolution fréquentielle est préférable.

3.2 Fronts de fracture obtenus par rupture lente du papier

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés aux propriétés d'échelle des fronts de fracture obtenus dans le papier. Pour l'essentiel nous avons analysé les fronts obtenus par Stéphane Santucci au cours de sa thèse [64] sur des échantillons de papier pour fax à l'aide d'une machine de traction. Nous présentons ici les principales caractéristiques de ces échantillons ainsi que le protocole utilisé lors des expériences de rupture.

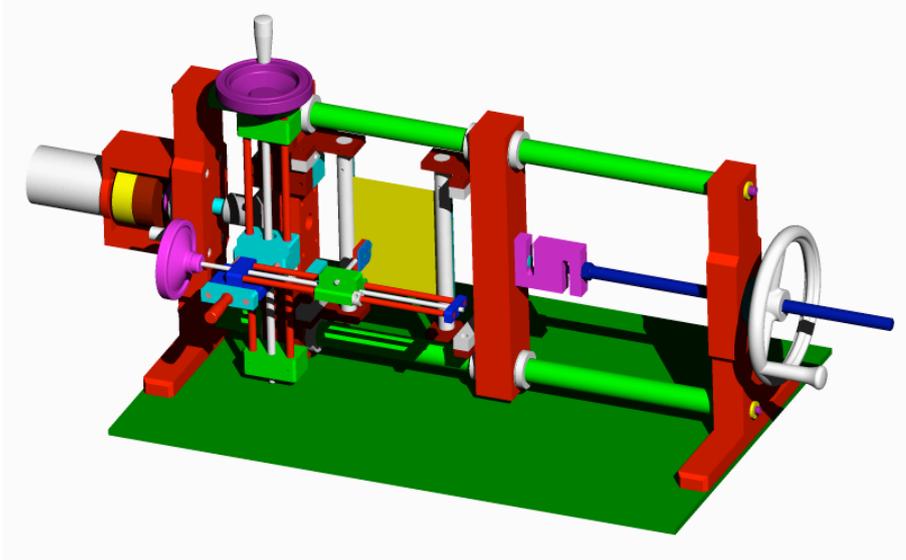


FIGURE 3.4 – Schema de la machine de traction.

3.2.1 Dispositif expérimental

On peut voir figure 3.4 un schéma de la machine de traction utilisée. Les feuilles de papier sont placées entre deux mâchoires. Un capteur mesure la force appliquée en traction. Un système d'asservissement permet de maintenir cette force constante. Celle-ci est exercée par un moteur pas à pas (Microcontrôle UE42) monté sur une vis sans fin. L'utilisation d'un démultiplicateur permet de contrôler avec une précision de 400 pas par μm le déplacement imposé à la feuille. L'ensemble est placé dans une enceinte permettant de contrôler le taux d'humidité, qui influe énormément sur la dynamique de la fracture du papier.

3.2.2 Propriétés des échantillons utilisés

Le choix du papier comme matériau d'étude a été dicté par le fait qu'il constitue un matériau fragile quasi-bidimensionnel modèle présentant de fortes hétérogénéités à une échelle mésoscopique : il est facile de suivre la dynamique intermittente de croissance de la fissure à l'aide d'une caméra et d'extraire les fronts de fracture rugueux à l'aide d'un scanner commercial. Le papier pour fax a été choisi car il se présente sous forme de rouleaux de 50 mètres de long s'insérant dans les récepteurs de fax ce qui permettait de choisir la longueur de l'échantillon et d'avoir des propriétés mécaniques stables au moins pour les échantillons

7. pour des valeurs de q plus petites que 0, M_q ne converge pas, sauf pour MMTO, qui nous autorisera à utiliser des q négatifs.

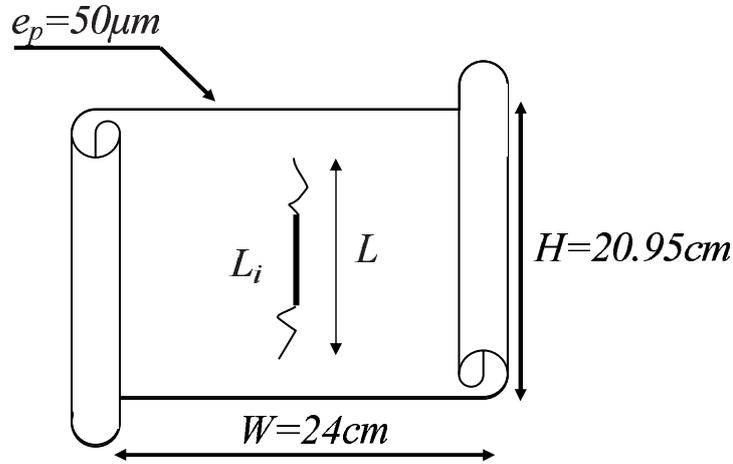


FIGURE 3.5 – Caractéristiques géométriques des échantillons utilisés.

provenant d'un même rouleau.

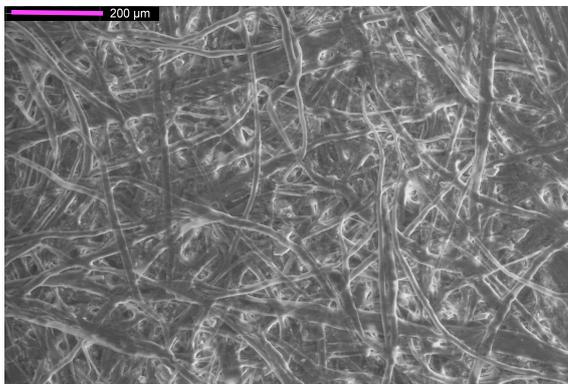


FIGURE 3.6 – Imagerie réalisée à l'aide d'un microscope à balayage électronique à l'INSA de Lyon

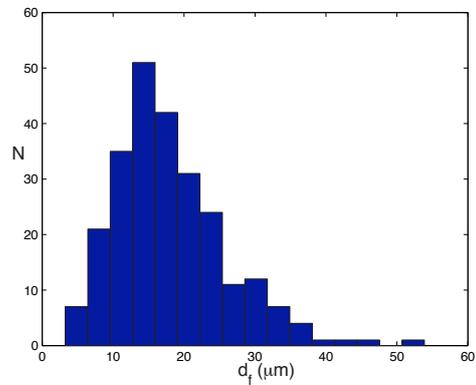


FIGURE 3.7 – Histogramme du diamètre des fibres d_f du papier utilisé.

Une fois l'échantillon découpé, il est placé dans les mâchoires de la machine de traction. Une entaille d'une taille L_i est alors pratiquée en son centre, parallèlement aux mâchoires. On peut voir figure 3.5 les caractéristiques géométriques de l'échantillon monté sur la machine. Le papier est un matériau fibreux hétérogène. On peut voir figure 3.6 une image par microscope électronique du papier utilisé et figure 3.7 l'histogramme des diamètres de 250 fibres qui en sont extraits. Le diamètre moyen des fibres est d'environ $18\mu\text{m}$ avec un écart type de $8\mu\text{m}$. La longueur des fibres est de l'ordre du millimètre. A noter que les fibres sont

elles-mêmes constituées de microfibrilles dont la taille est de l'ordre de quelques nanomètres.

3.2.3 Protocole expérimental et dynamique de la fracture

Lors d'une expérience, une force constante est appliquée à l'échantillon, celle-ci étant sensiblement inférieure à la force seuil de rupture. La fracture est alors quasi-gelée, mais avance tout de même grâce au phénomène d'activation thermique [33, 93]. La contrainte à la pointe exhibe des fluctuations thermiques locales et dépasse parfois le seuil local de rupture. On parle de croissance lente ou sous-critique. Au fur et à mesure de la progression de la fracture, la force reste constante grâce à l'asservissement, mais la longueur de feuille restante supportant la contrainte diminue, ce qui fait que la contrainte à la pointe augmente. La vitesse de croissance augmente donc jusqu'à ce que la contrainte atteigne le seuil de rupture, lorsque la taille de la fracture atteint une longueur critique L_c . On observe alors une transition dans la vitesse de croissance, qui augmente alors subitement de plusieurs ordres de grandeur, passant d'une valeur de l'ordre du $cm.s^{-1}$ à environ $300m.s^{-1}$. L'échantillon est alors presque instantanément rompu, au bout d'un temps τ .

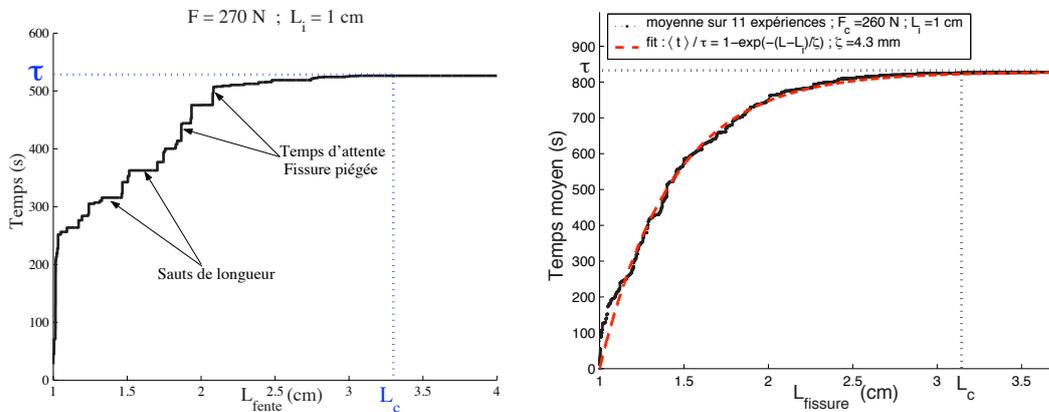


FIGURE 3.8 – **A gauche** : Temps pris par la fracture pour atteindre une taille L à partir de la longueur initiale $L_i = 1cm$, avec une force $F = 270N$. **A droite** : Temps moyen sur 11 expériences en fonction de L avec un ajustement exponentiel, $L_i = 1cm$, avec une force $F = 260N$

Au cours de la croissance, une caméra rapide (Photron Ultima 1024) déclenchée par le déplacement des mâchoires prend des photos de l'échantillon. Un traitement des images est réalisé après la rupture et la taille L de la fracture en est extraite. On peut voir figure 3.2.3 (à gauche) un exemple typique des courbes de croissance obtenues. On voit que la vitesse n'est pas continue et que la fracture

avance par sauts comme nous l'avons déjà signalé au chapitre I, exhibant une dynamique fortement intermittente. On constate également un fort écart type pour la distribution des temps d'attente, ce qui conduit à s'intéresser aux grandeurs moyennes. Le temps moyen mis par la fracture pour atteindre une taille L s'ajuste parfaitement avec une exponentielle, comme on peut le voir figure 3.2.3 (à droite).

On peut noter que la vitesse de la fissure suit donc une loi de type Omori inverse : $\frac{dL}{dt} = \frac{\lambda}{\tau-t}$, où λ est une taille caractéristique provenant de l'ajustement $\zeta \lesssim L_i$, et τ le temps moyen de rupture, qui correspond au temps moyen mis par la fracture pour atteindre la taille critique L_c . Alors que τ dépend fortement de la température, λ dépend uniquement de la force appliquée F et évolue en F^{-2} .

3.2.4 Extraction des fronts de fracture

Nous avons digitaliser les échantillons rompus à l'aide d'un scanner commercial, avec une résolution de $16\mu.\text{pixel}^{-1}$ (1600 dpi). Le choix de cette résolution a été motivé par le fait que les fibres du papier ont un diamètre moyen de cet ordre et que les phénomènes d'invariance d'échelle qui nous intéressent concernent donc des échelles plus grandes. Les fronts de fractures ont alors été extraits par contraste, sous la forme d'une courbe $\Gamma(x, y)$, où l'axe des x correspond à la direction principale de la fracture et l'axe des y à la direction perpendiculaire. Un problème rencontré à ce stade est qu'il existait parfois plusieurs points de Γ pour une abscisse x donnée, du fait que des fibres dépassent du front. Nous n'avons donc gardé que le point ayant l'ordonnée maximale, pour finalement obtenir une courbe $s(x)$ 1D que nous avons analysée. Nous avons alors séparé cette courbe en 5 parties (figure 3.9) :

- Une partie centrale de taille L_i correspondant à la fracture initiale, inutile dans notre étude, zone (a).
- Deux parties correspondant à la croissance rapide de la fracture, aux deux extrémités du signal, de part et d'autre d'une taille L_c , zone (c).
- Deux parties correspondant à la rupture sous-critique entre les parties rapides et la partie centrale, zone (b)

La valeur de L_c prise en compte est celle obtenue à partir de la relation empirique mesurée entre F et L_c . On peut voir figure 3.9 un exemple de front et le signal $s(x)$ extrait et découpé en cinq parties. Nous avons numériser ainsi un total de 51 échantillons. Pour chacun, nous disposons donc de deux fronts (à partir des deux morceaux de l'échantillon rompu), mais qui ne sont pas indépendants. Chaque front peut être séparé en deux parties *a priori* indépendantes (de part et d'autre de la fracture initiale). On peut donc considérer que nous disposons de 102 fronts indépendants, donnant chacun une partie sous-critique et une partie rapide.

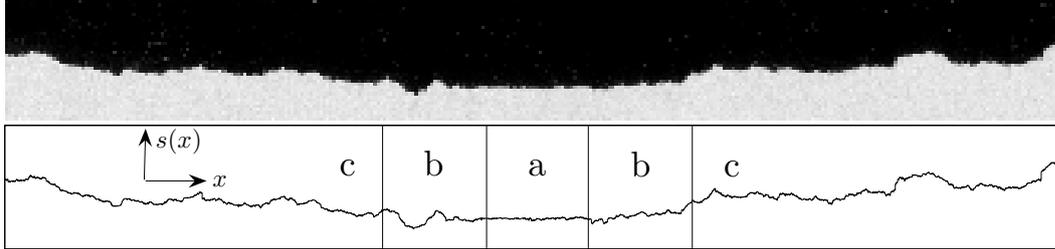


FIGURE 3.9 – Echantillon *post mortem* digitalisé et les différentes parties extraites correspondantes : (a) fracture initiale ($L_i = 2$ cm ici), (b) croissance sous-critique, (c) croissance rapide.

Ces fronts proviennent de plusieurs séries d'expériences, réalisées avec des longueurs initiales L_i et des forces F différentes :

- $F = 280N, L_i = 1cm$
- $F = 250N, L_i = 1cm$
- $F = 250N, L_i = 2cm$
- $F = 230N, L_i = 1cm$
- $F = 200N, L_i = 2cm$

Au total, les fronts obtenus ont une longueur de l'ordre de 14000 points, avec environ un millier de points pour les parties lentes (entre 700 et 1400 points en fonction de F et L_i) et 6000 points pour les parties rapides. Nous allons maintenant nous intéresser aux lois d'échelles exhibés par ces signaux.

3.3 Analyse des fronts de fracture

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la rugosité en discutant l'apport des différentes techniques utilisées, et en comparant le comportement de la partie sous-critique à celui de la partie rapide. Nous discuterons ensuite le caractère multifractal des fronts de rupture.

Les moments et log-cumulants sont obtenus en faisant des moyennes sur la position x . Les signaux dont nous disposons étant courts, ces grandeurs sont assez mal définies, et nous avons dû effectuer des moyennes sur des séries de plusieurs réalisations de l'expérience (c'est à dire sur plusieurs fronts). Cela revient à mélanger les positions x des différents fronts de la série, et nous permettra également de donner des déviations statistiques de ces quantités. Dans la suite, l'échelle a_0 correspond à la taille d'un pixel, c'est à dire $16\mu m$, et nous noterons simplement

a l'échelle normalisée a/a_0 , qui correspond ainsi directement à l'échelle en pixels. Pour faciliter la lecture des courbes, nous avons choisi de représenter l'échelle par son logarithme en base 10. Ainsi, dans la suite les cumulants que nous avons tracés sont en fait $C_q(a)/\ln(10)$ pour exhiber les mêmes pentes, mais nous les avons noté $C_q(a)$ pour ne pas alourdir les légendes. Sur les courbes présentées, par souci de clarté, nous n'avons en général pas tracé toutes les échelles pour lesquelles les $T_s(a, x)$ ont été calculés, mais seulement une sur trois pour les méthodes continues.

Il faut noter au passage que le choix de la gamme d'échelle utilisée pour les ajustements est crucial. En effet, aux petites échelles, la discrétisation fausse l'estimation [94], alors qu'à grande échelle, c'est le manque de statistique. Le choix des échelles prises en compte sera discuté au fur et à mesure de notre étude, et les valeurs obtenues seront données lors du bilan.

3.3.1 Mesure de la rugosité

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la rugosité des fronts de fracture, en étudiant les moments et le log-cumulant d'ordre 1.

3.3.1.1 Influence de la force

Les échantillons dont nous disposons ont été obtenus dans des expériences avec différentes forces appliquées. Nous présentons figure 3.10 les cumulants et les moments d'ordre 1 obtenus par la méthode des incréments pour différentes séries de réalisations pour une même force. On observe bien une invariance d'échelle puisque moments et cumulants évoluent bien en loi de puissance de l'échelle. On voit aussi qu'il semble y avoir une rupture de pente autour de $a = 8a_0$. Entre $a = a_0$ et $a = 8a_0$ la pente est de l'ordre de 1 alors qu'elle est de l'ordre de 0.65 au-delà. Ceci est dû à la discrétisation du signal [94], et la pente 1 obtenue aux petites échelles n'est pas pertinente. Nous nous focaliserons donc sur les échelles plus grandes que $10a_0$ où le caractère discret du signal étudié ne se fait plus sentir⁸.

On voit que la force n'a pas d'influence sur les lois d'échelle : les différentes courbes sont indiscernables. Les mêmes constatations peuvent être faites pour les autres techniques utilisées et les moments et cumulants d'ordre supérieur. Dans la suite nous considérerons donc tous nos fronts comme étant des réalisations

8. A noter que dans le cas des ondelettes, les petites échelles ne sont de toutes façon pas pertinentes puisque les ondelettes ne sont pas définies.

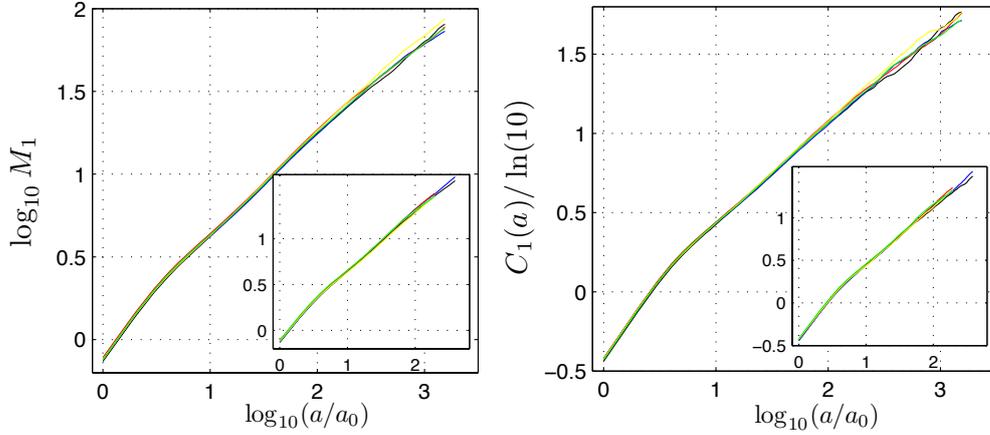


FIGURE 3.10 – Moments et cumulants d'ordre 1 obtenus par la méthode des incréments (premier ordre) pour différentes forces (avec différentes couleurs) en fonction de l'échelle a . Les forces appliquées valent $200N$, $230N$, $250N$ et $280N$. Les courbes sont obtenues pour la partie rapide dans la fenêtre principale et en médaillon, les mêmes courbes sont obtenues pour la partie lente.

d'une seule et même expérience⁹.

3.3.1.2 Estimation à partir des moments et des cumulants

Dans cette partie, nous allons comparer les différentes techniques pour mesurer la rugosité h . Pour cela nous nous focaliserons sur la partie rapide car elle est bien plus longue que la partie lente et les fonctions d'échelles ont donc un support plus long et convergent mieux statistiquement.

En théorie pour un signal monofractal, il est possible de calculer la rugosité h à partir de n'importe lequel des moments de ses coefficients multi-échelle. On a alors en effet $\zeta(q) = qh$ et donc :

$$M_q^{1/q}(a) \propto a^h \quad (3.18)$$

et la pente de la courbe des moments réduits $\log M_q^{1/q}$ en fonction de a donne une mesure de h .

9. Ceci nous permet d'améliorer la statistique sur la mesure de la rugosité, ce qui est crucial comme nous le verrons par la suite.

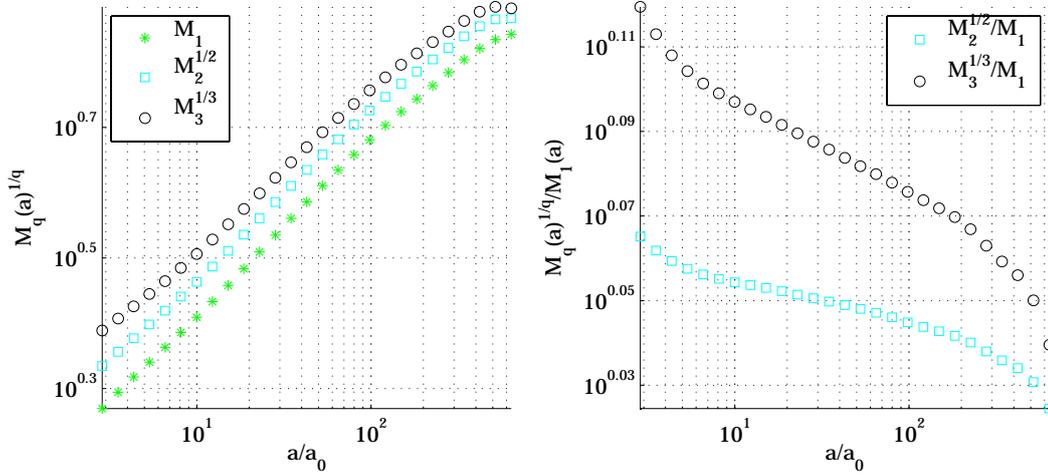


FIGURE 3.11 – (a) $M_1(a)$, $M_2^{1/2}(a)$ et $M_3^{1/3}(a)$ en fonction de a en log-log, pour INCR1. (b) : les mêmes quantités normalisées par $M_1(a)$.

On peut voir figure 3.11(a) un tracé de ces quantités obtenus pour les incréments du signal. Elles exhibent toutes à première vue des lois de puissance, indiquant une invariance d'échelle sur environ trois décades, l'exposant étant voisin de 0.65, valeur typique observée pour la rugosité des fronts de fracture en deux dimensions. On voit d'autre part que les courbes semblent présenter une saturation pour les grandes échelles, ce qui pourrait être du à un effet de taille finie. Il apparaît aussi clairement, particulièrement sur la figure 3.11(b) que les exposants de ces courbes ne sont pas exactement les mêmes, et que celui-ci diminue lorsque q augmente (variation de 0.01 environ pour M_2 et de 0.02 pour M_3). Cela signifie que le signal n'est sans doute pas monofractal (c'est à dire que $\zeta(q)$ n'est pas linéaire) mais que son invariance d'échelle est plus complexe. Dès lors, l'utilisation des moments ne semble pas pertinente pour caractériser l'invariance d'échelle. On peut alors se demander s'il est encore possible de définir une rugosité pour ces fronts. Le fait que la pente varie en fonction de q indique qu'il n'existe pas d'exposant de Hölder unique pour le signal, mais plusieurs exposants de singularité $h(x)$ en chacun de ces points. En tout état de cause, la seule façon pertinente de définir une rugosité est de la prendre égale à la moyenne sur tous les points du signal, supposé singulier partout, de l'exposant de Hölder $\langle h(x) \rangle$. C'est la définition que nous adopterons pour la rugosité.

Précisément, la rugosité $\langle h \rangle$ peut donc être mesurée directement comme la pente du log-cumulant en fonction de $\log(a)$, $\langle h \rangle = c_1$. On peut voir figure 3.12 les cumulants pour trois techniques différentes, avec des ondelettes d'ordre 1. Nous avons aussi représenté les barres d'erreur statistiques à chaque échelle.

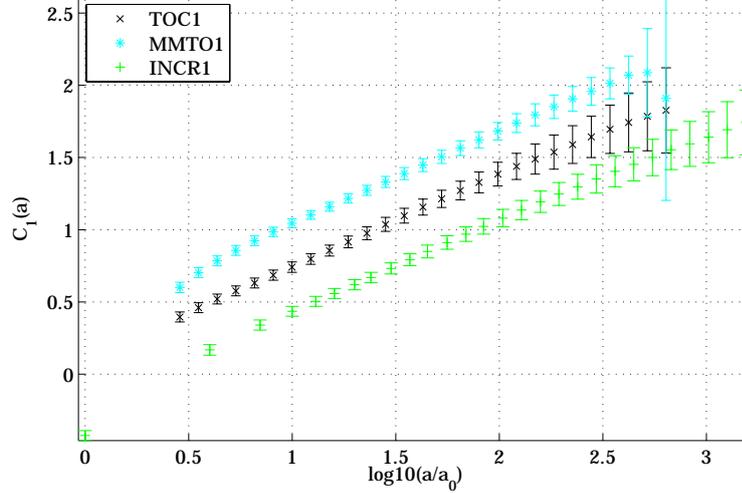


FIGURE 3.12 – Cumulants d’ordre 1 $C_1(a)$ en fonction de $\log(a)$ pour les techniques MMTO, TOC et les incréments. Les barres d’erreurs correspondent à l’erreur statistique.

Il apparaît que les pentes de ces cumulants sont sensiblement les mêmes, on trouve une rugosité $h = 0.64 \pm 0.015$ quelle que soit la technique utilisée. La méthode MMTO présente l’intérêt d’avoir des erreurs plus faibles que les deux autres techniques du moins pour $\log(a)$ compris entre 1 et 2, la croissance subite de l’erreur pour les grandes échelles indique un manque de statistique : il n’y a plus assez de lignes de maxima à ces échelles.

A ce stade, les incréments semblent donc fournir une technique équivalente en terme de résultat, néanmoins si l’on s’intéresse à la distribution des coefficients multi-résolution, comme on peut en voir un exemple figure 3.13, on constate que celle-ci est extrêmement bruitée avec de nombreux pics. Ceux-ci correspondent au fait que le signal est discrétisé non seulement en abscisse, mais aussi en ordonnées. Le signal prend des valeurs discrètes, et l’incrément étant une différence entre deux points du signal prend lui aussi des valeurs discrètes, d’où ces pics. La TOC, quant à elle, présente un histogramme beaucoup plus régulier : elle régularise le signal, puisqu’elle résulte de la convolution de celui-ci par une fonction régulière. Ces pics dans la distribution des incréments, s’ils ne semblent pas affecter la mesure de rugosité, peuvent conduire à des erreurs de mesure et des biais dans la détermination des exposants comme nous le verrons lors de l’étude de la multifractalité.

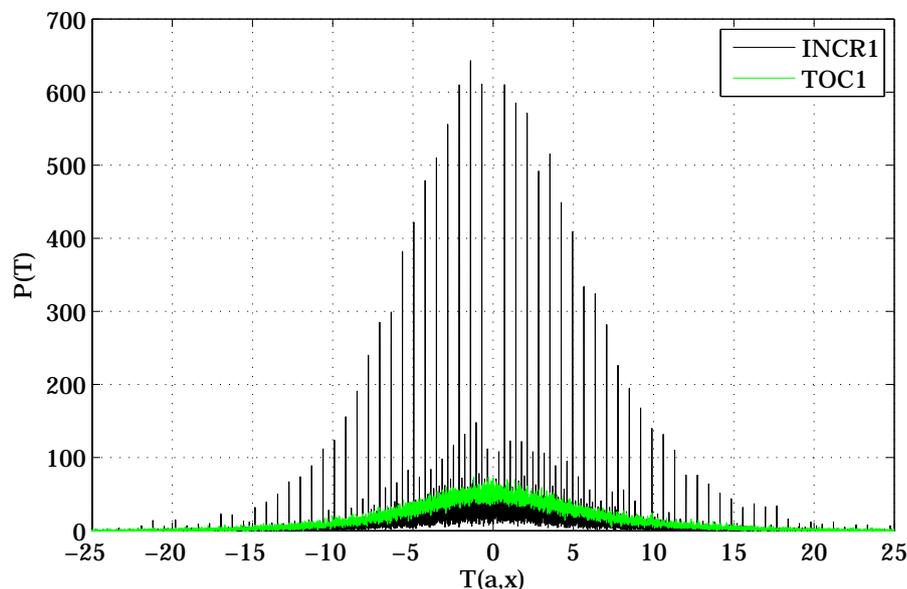


FIGURE 3.13 – Histogrammes des coefficients multi-résolution pour une même échelle de $a = 12a_0$

3.3.1.3 Influence du régime de croissance

Un point fondamental de notre étude porte sur l'influence du régime de croissance de la fracture sur la rugosité. Sur la figure 3.14 (a), on voit le cumulatif d'ordre 1 de la TOC1 pour les deux régimes : On constate qu'il existe bien une différence nette entre les deux régimes. S'il l'on observe attentivement la courbe, on voit aussi qu'il existe une faible inflexion de celle-ci. Afin de mieux se rendre compte des variations de pentes, nous avons également tracé la pente locale du cumulatif, calculé par la technique des moindres carrés sur N_w échelles successives, et ce à chaque échelle (avec $N_w = 8$).

On constate qu'il existe bien une différence nette entre les deux régimes. S'il l'on observe attentivement la courbe, on voit aussi qu'il existe une faible inflexion de celle-ci. Afin de mieux se rendre compte des variations de pentes, nous avons également tracé la pente locale du cumulatif figure 3.14 (b), calculée par la technique des moindres carrés sur N_w échelles successives, et ce à chaque échelle (avec $N_w = 8$). On constate effectivement qu'il existe un point d'inflexion et que la dérivée $c_1(a)$ de $C_1(a)$ par rapport à $\log(a)$ possède donc un maximum, pour $a = 10^{1.5}a_0$ soit environ $500\mu m$ que nous allons discuter au paragraphe suivant. D'autre part, on voit que la différence de pente entre les deux régimes est elle plus ou moins constante, de l'ordre de 0.06 ± 0.01 . Ce résultat semble robuste car il est obtenu quelle que soit la technique utilisée (voir figure 3.14 (c)).

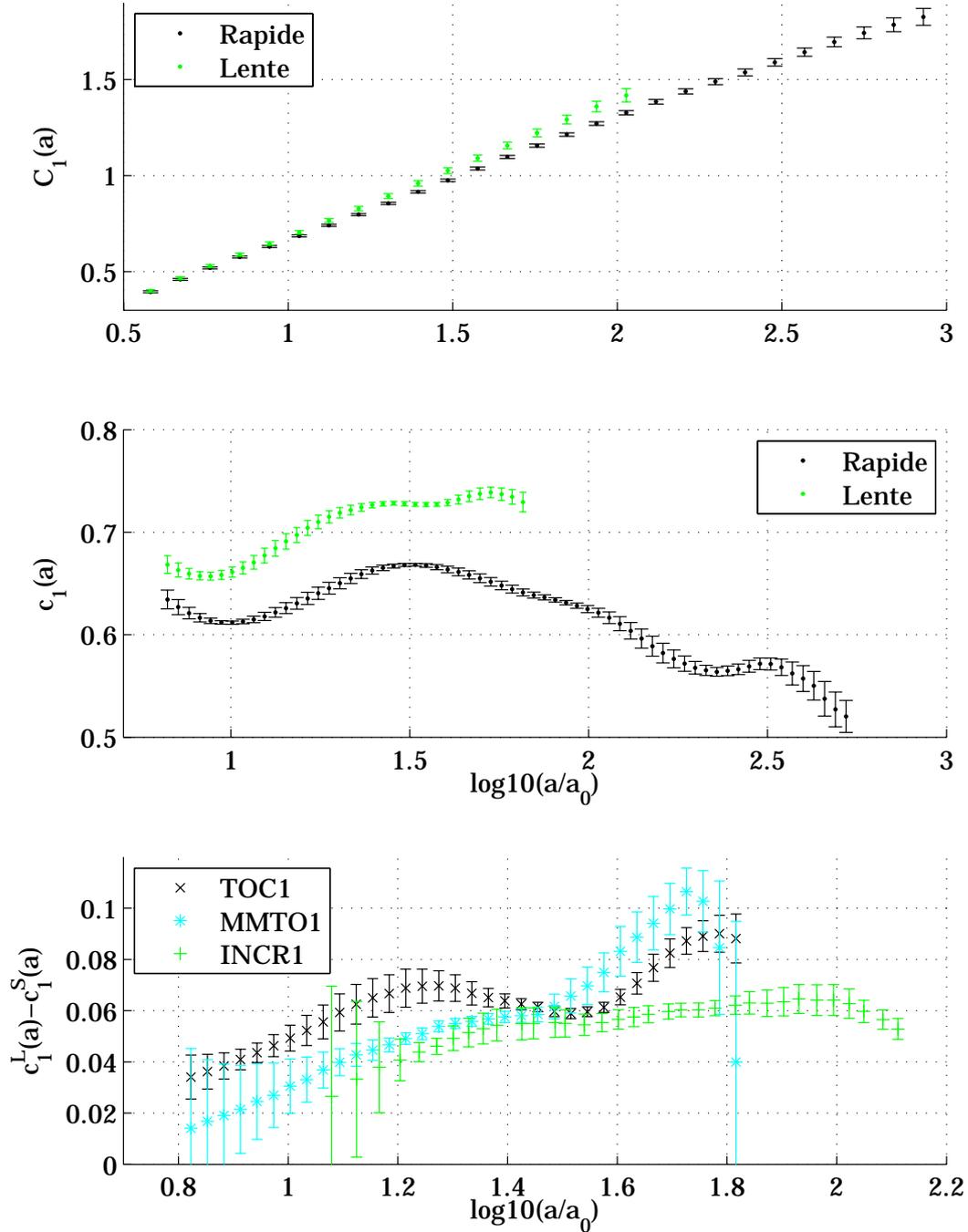


FIGURE 3.14 – (a) : Tracé de $C_1(a)$ pour la partie lente et rapide, avec les barres d'erreur statistiques. (b) : Pentés locales $c_1(a)$ correspondantes, en fonction de l'échelle $\log(a)$. Les barres d'erreur correspondent à l'écart à la linéarité de C_1 qui domine l'erreur statistique, avec $N_w = 8$. (c) : Différence des pentés locales (lente-rapide) en fonction de l'échelle.

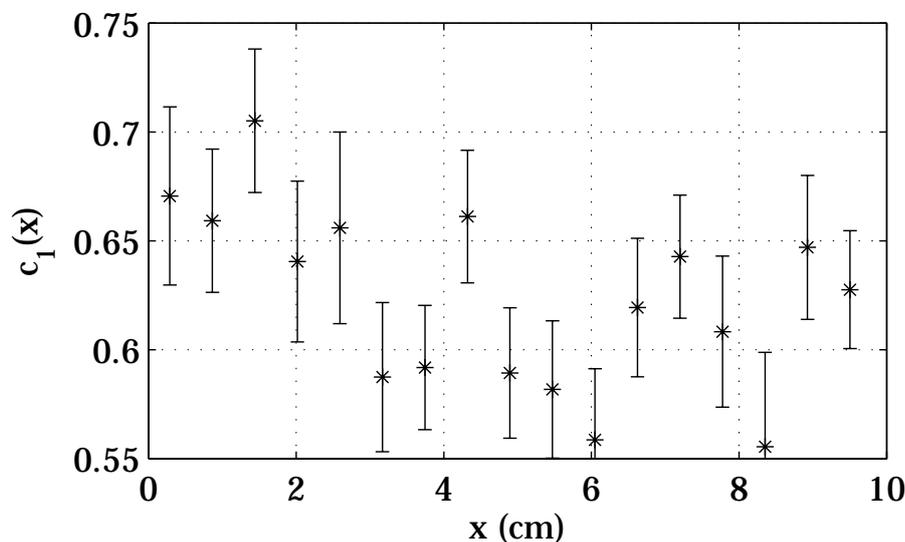


FIGURE 3.15 – Rugosité h en fonction de la position x (en cm) obtenue en découpant le signal en segments de 360 points, pour $F = 230N$ et $L_i = 1cm$ avec des barres d'erreurs statistiques (22 fronts). x mesure la position par rapport à la fracture initiale.

Ce résultat est inédit, aucune étude n'ayant montré jusqu'à présent une influence de la vitesse ou du régime de croissance sur la rugosité des fronts de fracture. Ceci remet un peu plus en cause l'idée d'universalité des exposants de rugosité des fronts de fracture souvent formulée dans certaines études. Le fait que cette différence n'ait pas été observée précédemment s'explique sans doute par le fait que celle-ci est très faible, et nécessite donc une étude attentive et prudente s'appuyant sur un jeu d'échantillons assez grand.

Afin de tenter de voir la transition en les deux régimes, nous avons aussi tracer figure 3.15 (d) les valeurs de c_1 obtenues en effectuant une régression linéaire de $C_1(a)$ pour un découpage du signal en plusieurs échantillons. Les erreurs statistiques sont trop importantes pour observer correctement la transition. En effet, nous n'avons pu prendre en compte qu'une seule série d'expérience (une force et une longueur initiale) la position supposée de la transition changeant d'une série à l'autre. On voit tout de même que les premières valeurs sont plus importantes que les suivantes, ce qui permet de s'assurer que la différence obtenue n'est pas un effet de taille finie (attendu que le régime sous-critique fournit un signal plus court) ou d'un effet de non-stationarité au sein du signal sous-critique.

3.3.1.4 Présence d'une échelle caractéristique

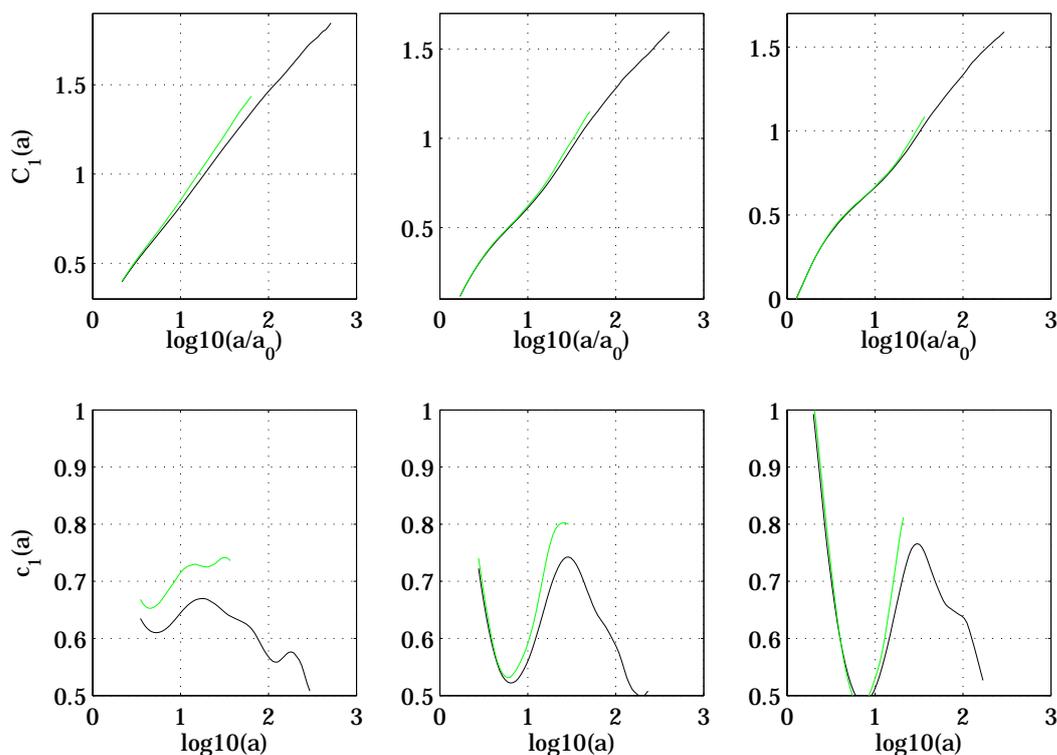


FIGURE 3.16 – Premiers cumulants $C_1(a)$ pour le régime rapide (noir) et sous-critique (jaune) ainsi que les pentes locales $c_1(a)$ respectives en fonction de $\log(a)$ pour trois ordres d'ondelette 1(a), 2(b) et 3(c)

Un autre paramètre de notre analyse est l'ordre de l'ondelette mère ψ utilisée. Nous avons tracé les premiers cumulants pour les deux régimes pour des ordres d'ondelettes 1, 2 et 3 figure 3.16. On constate que le point d'inflexion est de plus en plus marqué au fur et à mesure que l'ordre de l'ondelette augmente. On sait que l'utilisation d'ordres élevés permet de s'affranchir de tendances polynomiales au sein du signal. La présence de telles tendances peuvent influencer sur la valeur de $\langle c \rangle$ (et conduire à une surestimation en général, un polynôme ayant une régularité égale à son degré, plus grand que 1 et donc que la rugosité attendue des fronts de fracture). Pourtant, les valeurs des pentes moyennes sont sensiblement les mêmes quelque soit l'ordre de l'ondelette utilisée, seule l'exacerbation du point d'inflexion est observée. Celui-ci n'est donc pas dû à une tendance. C'est plutôt une autre propriété qui est à invoquer pour comprendre cette observation : au fur et à mesure que l'ordre de l'ondelette augmente, celles-ci présentent de plus en plus d'oscillations, comme on peut le voir figure 3.3 sur l'exemple des ondelettes

gaussiennes que nous utilisons. Ainsi, la TO est de plus en plus sensible à la présence d'oscillations¹⁰ et on peut donc interpréter ce maximum de la pente du cumulatif comme la présence d'une oscillation à l'échelle considérée. Ceci peut être mis en regard avec des études théoriques [95]. Une autre explication pourrait être que cette échelle caractéristique soit liée à la longueur caractéristique des fibres, qui est du même ordre de grandeur. En effet, le fait que celles-ci dépassent du front pourrait avoir une influence sur les lois d'échelle.

3.3.1.5 Influence de la statistique

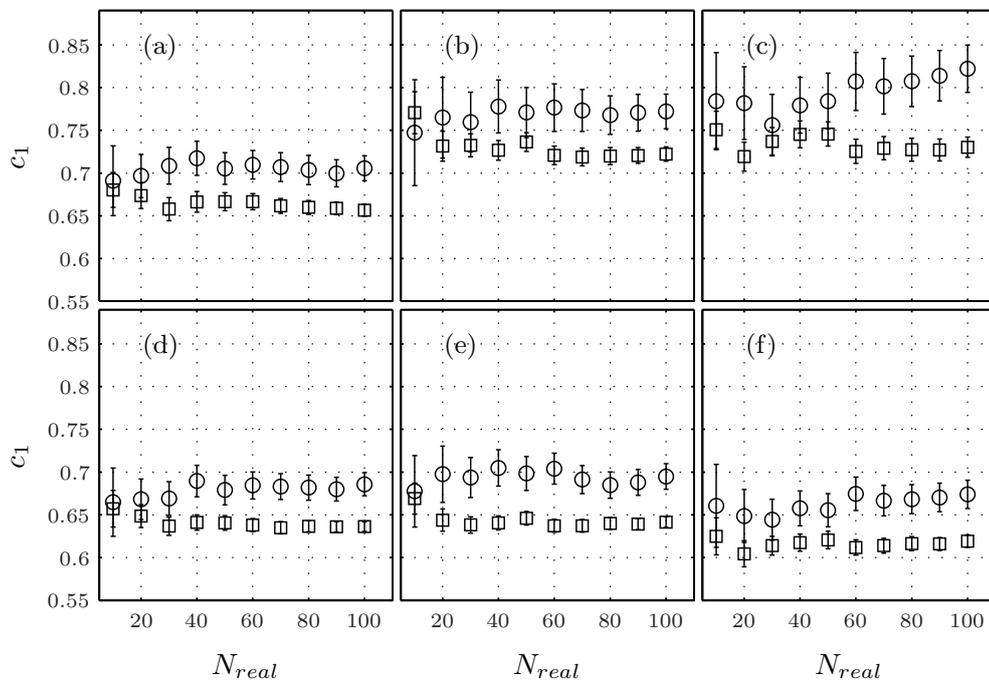


FIGURE 3.17 – Moyennes et erreurs statistiques des pentes moyennes pour le régime sous-critique (cercles) et rapide (carrés) en fonction du nombre de réalisations prises en compte N_{real} . Méthode TOC (a,b,c) et MMTO (d,e,f) pour des ondelettes d'ordre 1 (a,d), 2 (b,e) et 3 (c,f)

On l'a déjà dit, les aspects statistiques sont importants pour notre étude. Afin de mieux s'en rendre compte, nous avons tracé figure 3.17 les valeurs des rugosité pour différentes techniques pour les deux régimes. On peut constater qu'il faut prendre en compte au moins 20 fronts pour qu'une différence nette se

¹⁰. A la limite où l'ordre de l'ondelette tend vers l'infini, le support de l'ondelette devient lui aussi infini ainsi que le nombre d'oscillations, et on se rapproche d'une transformée de Fourier en quelque sorte.

dégage entre les deux régimes pour des ondelettes d'ordre 1 et près de 60 pour des ondelettes d'ordre 3. On voit aussi que globalement sur les trois ordres la technique MMTO permet une meilleure résolution que la technique TOC.

3.3.2 Caractère multifractal des front de fractures

Nous allons maintenant discuter du caractère multifractal des fronts, en étudiant tout d'abord les cumulants puis en estimant $\zeta(q)$ à partir des moments.

3.3.2.1 Utilisation directe de $C_2(a)$

L'intérêt de l'utilisation de C_2 est qu'il permet de caractériser immédiatement la déviation principale à la monofractalité. On montre figure 3.18 les C_2 en fonction de $\log_{10}(a)$ pour les parties lentes et rapides. Il apparaît que la pente c_2 est clairement non-nulle pour les techniques TOC1, TOC2, INCR2 et CD1 (pour le régime rapide) du moins dans une certaine gamme d'échelles (avec une variation de l'ordre de 0.02 par décade). On constate aussi l'effet de la discrétisation, qui engendre une pente forte jusqu'à $\log(a) = 1.5$ environ. Dans la plupart des cas, la partie sous-critique est trop courte et ne permet d'analyser le scaling que sur trop peu d'échelles (en particulier pour CD, basée sur une TOD) pour faire des estimations avec certitudes. Rien un comportement multifractal différent par rapport à la partie rapide.

Les incréments à l'ordre 1 ne semblent par contre pas présenter de pente significative (variation de moins de 0.005 par décade), alors que MMTO1 présente une sorte de plateau sur une demi décade avant de décroître significativement (variation de l'ordre de 0.03 par décade). Sur les courbes présentant des méthodes directes (TOC, INCR), on a tracé la droite horizontale d'ordonnée $\frac{\pi^2}{8 \ln(10)}$ qui est la valeur théorique minimale du C_2 et correspond à la valeur obtenue pour de statistique gaussienne. Le fait que C_2 devienne inférieur à cette valeur pour les grandes échelles indique un manque de statistique intervenant lorsque l'échelle se rapproche de la taille du signal. Pour ces échelles, les C_2 n'ont plus vraiment de sens, elles ne doivent donc pas être prises en compte lors des estimations des pentes c_q . Ceci nous conduit, lors des estimations de c_2 , à prendre en compte les échelles telles que $1.5 \leq \log(a) \leq 2.5$ pour estimer les c_q et les exposants des moments $\zeta(q)$. En ce qui concerne la multifractalité, sauf pour INCR1, les autres méthodes semblent indiqué un c_2 non nul avec une valeur de l'ordre de 0.02 ± 0.01 .

3.3.2.2 Estimation du spectre multifractal $\zeta(q)$

Nous allons maintenant nous intéresser à $\zeta(q)$, que nous avons estimé à l'aide des moments $\zeta_m(q)$ (eq. 3.6) et à partir des cumulants comme $\zeta_c(q) = c_1 q + c_2 \frac{q^2}{2}$ d'après l'équation 3.10. Nous nous sommes restreint à l'étude du régime rapide,

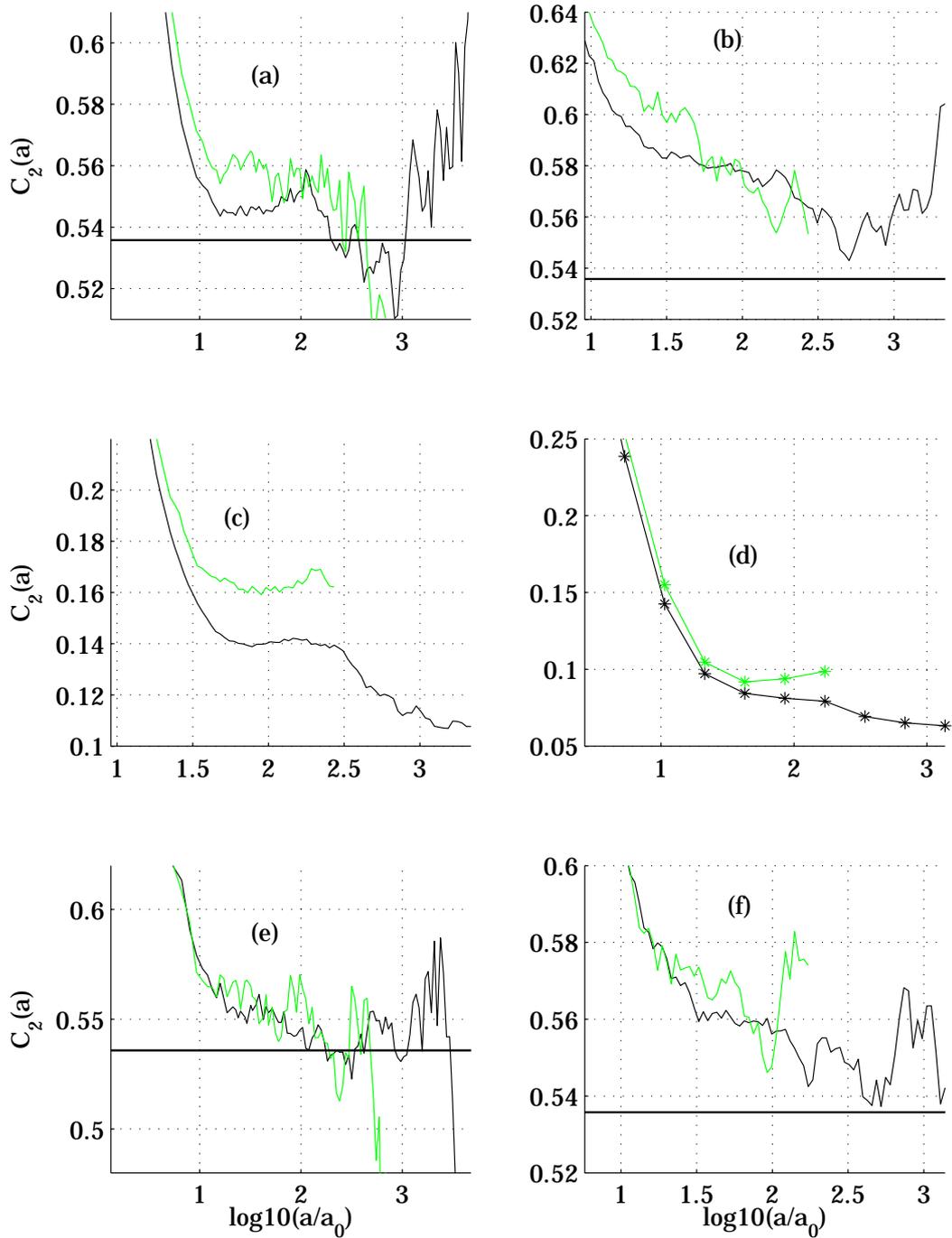


FIGURE 3.18 – Deuxième cumulant $C_2(a)$ en fonction de $\log(a)$ pour le régime rapide (en noir) et lent (en jaune) à partir de différentes techniques. De gauche à droite et de haut en bas : SF1, TOC1, MMT01, CD1, SF2, TOC2.

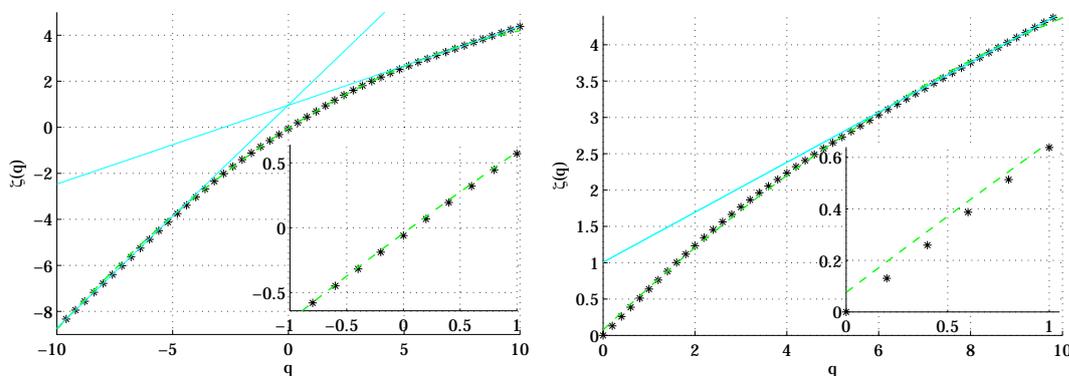


FIGURE 3.19 – **A gauche** $\zeta_m(q)$ en fonction de q (avec $|q| \leq 1$) pour MMTO1 (points noirs). En bleu clair trait plein, des ajustements affines pour les grandes valeurs de q (pente de 0.35 pour $q > 0$ et 0.95 pour $q < 0$). En vert clair (pointillés), l'ajustement par $c_{m1}q + c_{m2}\frac{q^2}{2}$, en prenant en compte toutes les valeurs accessibles pour q . **A droite** : Même chose pour TOC1, avec restriction aux $q > 0$. On trouve également 0.35 pour la pente de la loi affine. En médaillon, un zoom sur la gamme $|q| \leq 1$.

les résultats étant identiques pour la partie lente mais beaucoup moins nets. Afin de comparer les deux estimations, nous avons réalisé un ajustement de $\zeta_m(q)$ par la fonction $c_{m1}q + c_{m2}\frac{q^2}{2}$ ce qui constitue finalement une estimation de c_1 et c_2 .

On peut voir figure 3.19 le tracé de $\zeta_m(q)$ pour MMTO1 et TOC1. On voit que pour les grandes valeurs de q , ζ_m se comporte avec une loi affine de q . Ceci s'explique par le fait que pour les grands q , les moments sont mal estimés du fait d'un problème de statistique. L'estimation de ζ_m est donc biaisée pour $|q|$ grand, ce qui peut conduire à une mauvaise estimation de $D(h)$. Pour les deux techniques, MMTO1 et TOC1, les ajustements par $c_{m1}q + c_{m2}\frac{q^2}{2}$ semblent satisfaisant, mais on peut se rendre compte en observant les médaillons de la figure 3.19 que celui-ci est plutôt mauvais pour TOC1 pour les petits q . On trouve en effet $c_{m1} = 0.60$ alors qu'on attend 0.64 ± 0.02 . Ceci est dû aux tendances affines observées, la technique MMTO y étant moins sensible. Afin d'estimer convenablement c_{m1} et c_{m2} , nous allons donc nous restreindre aux valeurs de q telles que $q \leq 1$ lors de l'ajustement.

Afin de comparer les techniques entre elles, nous avons tracer figure 3.20 les différentes estimations pour MMTO1, INCR1 et TOC1. Sur la figure 3.20 (a), on voit que les estimations de ζ_m semblent se superposer pour les trois techniques. Nous avons tracé un ajustement de ζ_m (traits verts pointillés) pour $|q| \leq q_c = 1$ ainsi que ζ_c (traits bleus pleins) figures 3.20 (b), (c) et (d) pour MMTO1, INCR1 et TOC1. Pour MMTO1, les deux courbes se superposent parfaitement, et ne décroche que faiblement de ζ_m lorsque $|q|$ grandi, avec c_2 et c_{m2} très proches (-0.019

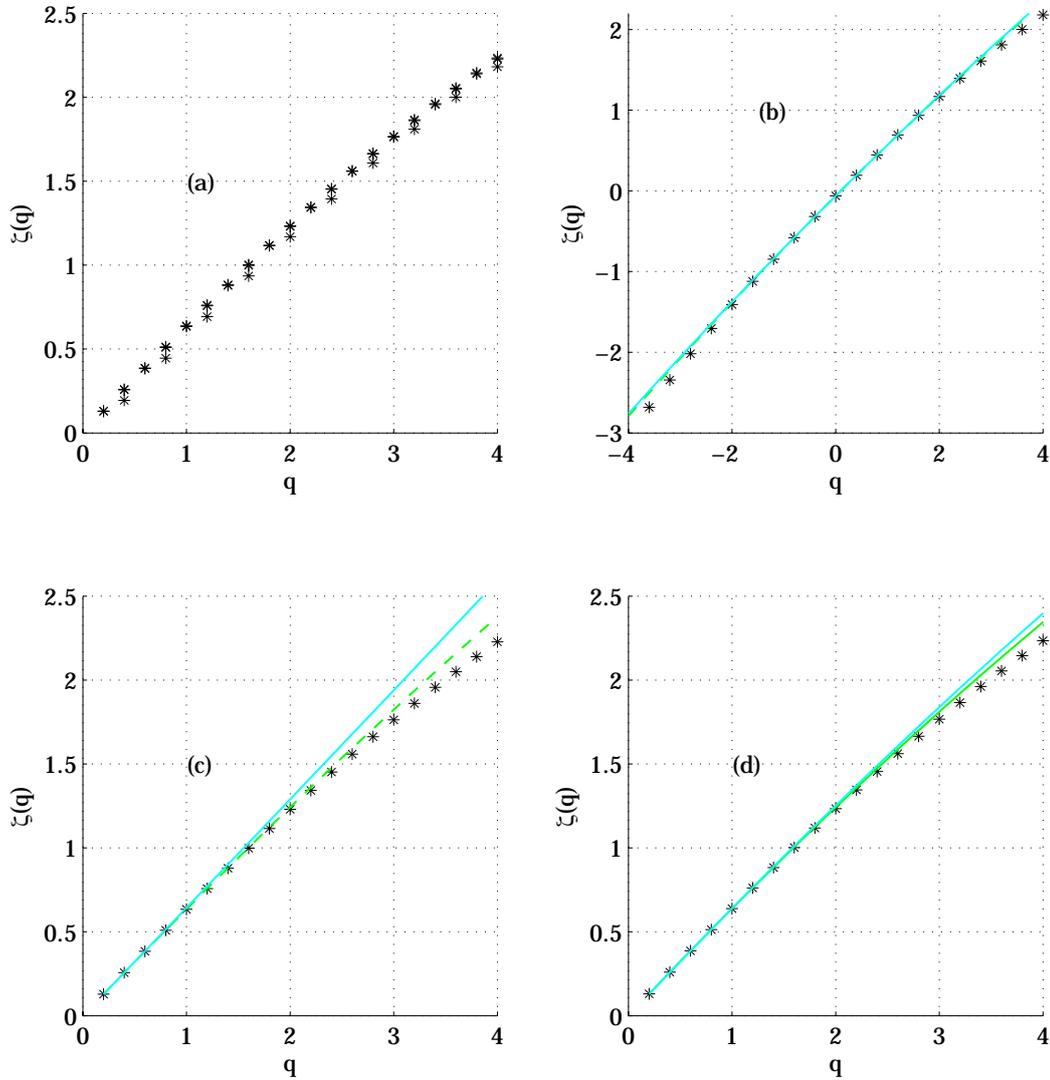


FIGURE 3.20 – (a) : $\zeta_m(q)$ en fonction de q pour MMT01, TOC1 et INCR1. (b),(c),(d), pour respectivement MMT01, INCR1, TOC1 : ζ_m (point noirs) ; en vert clair (pointillés), $\zeta_m(q)$ (points noirs) pour $|q| \leq 4$; en bleu clair (trait plein) l'estimation à partir des cumulants $\zeta_c(q)$. En vert pointillé, son ajustement par $c_{m1}q + c_{m2}\frac{q^2}{2}$ pour $|q| \leq 1$. On trouve $c_{m1}=0.640, 0.648$ et 0.655 et $c_{m2}=-0.021, -0.027$ et -0.035 respectivement.

et -0.021 respectivement). Pour TOC1 et surtout INCR1, c_2 et c_{m2} diffèrent, et le décrochage à ζ_m est plus marqué. Cela s'interprète par le fait que les tendances affines se font sentir pour des q plus petit que pour MMT01. Ces observations restent valables pour les ordres d'ondelettes plus élevés ainsi que pour le régime

de croissance sous-critique, les résultats étant toutefois moins propres. Dans tous les cas, à l'exception notable de INCR1, où $c_2 = 0$, les valeurs mesurées de c_{m2} et c_2 sont proches, comme pour c_{m1} et c_1 .

Ces observations montrent la puissance de la méthode MMTO pour l'estimation de ζ_m . Non seulement elle apparaît moins sensible aux biais numériques, mais elle fournit en plus le double de valeurs de q pour les ajustements. À l'inverse, il convient de se méfier des incréments, particulièrement à l'ordre 1, qui peuvent conduire à des estimations erronées. Nous pouvons aussi constater que les estimations de ζ_m à partir des moments sont à utiliser avec précaution, en particulier dans le choix des q pertinents. Il apparaît donc amplement préférable d'utiliser C_2 pour tester et caractériser la multifractalité. D'autant plus que son utilisation est beaucoup plus simple : il n'y a qu'une seule grandeur à calculer et à ajuster en fonction de l'échelle, quand en utilisant les moments on doit le faire pour une collection de q .

3.3.3 Bilan

On peut trouver table ci-dessous les estimation de c_1 et c_2 pour les différentes techniques, pour différents ordres et pour les parties lentes et rapides.

Partie	Ordre	Technique	c_1	c_2	c_3
Rapide	1	TOC	0.65 ± 0.01	-0.03 ± 0.01	0.00 ± 0.02
		MMTO	0.64 ± 0.01	-0.02 ± 0.00	0.01 ± 0.00
		SF	0.64 ± 0.01	0.00 ± 0.01	-0.10 ± 0.01
	2	TOC	0.68 ± 0.01	-0.02 ± 0.01	-0.00 ± 0.01
		MMTO	0.63 ± 0.01	-0.01 ± 0.00	0.01 ± 0.00
		SF	0.66 ± 0.01	-0.02 ± 0.00	0.16 ± 0.04
	3	TOC	0.68 ± 0.01	-0.02 ± 0.01	0.00 ± 0.01
		MMTO	0.62 ± 0.01	-0.01 ± 0.00	0.01 ± 0.00
		SF	0.65 ± 0.01	-0.02 ± 0.00	0.13 ± 0.04
Lente	1	TOC	0.73 ± 0.02	-0.14 ± 0.02	0.20 ± 0.04
		MMTO	0.70 ± 0.02	-0.07 ± 0.01	0.00 ± 0.01
		SF	0.70 ± 0.01	-0.04 ± 0.01	-0.06 ± 0.02
	2	TOC	0.73 ± 0.02	-0.06 ± 0.02	0.04 ± 0.03
		MMTO	0.67 ± 0.01	-0.04 ± 0.01	0.01 ± 0.00
		SF	0.71 ± 0.01	-0.05 ± 0.01	0.19 ± 0.10
	3	TOC	0.69 ± 0.02	-0.09 ± 0.02	0.09 ± 0.04
		MMTO	0.61 ± 0.02	-0.04 ± 0.01	0.01 ± 0.00
		SF	0.69 ± 0.01	-0.06 ± 0.01	0.15 ± 0.10

Nous pouvons donc donner, au regard de ces valeurs, une estimation globale des lois d'échelle dans la fracture du papier. Pour la rugosité, dans la partie correspondant à une croissance rapide, on obtient :

$$\xi^R = 0.64 \pm 0.015 \quad (3.19)$$

L'incertitude que nous donnons est plus grande que la déviation statistique, et correspond en fait à l'amplitude des fluctuations de $c_1^r(a)$ en fonction de l'échelle, ce qui engendre une indétermination de ξ . De même, pour la croissance lente :

$$\xi^L = 0.70 \pm 0.015 \quad (3.20)$$

On a ainsi une différence :

$$\Delta\xi = \xi^L - \xi^R = 0.06 \pm 0.01 \quad (3.21)$$

C'est cette fois-ci l'erreur statistique qui domine, la différence entre les deux régimes fluctuant moins. Enfin nous avons observé que les fronts de fracture du papier présentait une multifractalité, caractérisée pour les deux régimes par :

$$c_2 = 0.025 \pm 0.01 \quad (3.22)$$

Les valeurs de c_3 ne sont pas pertinentes, car C_3 est mal estimé. Pour finir, on peut tracer le spectre de singularité $D(h)$, que l'on peut voir figure 3.21, estimé par les moments (pour $|q| \leq 1$ et les cumulants, en utilisant la technique MMTO, les courbes étant similaires.

3.4 Discussion

Nous avons montré que le régime de croissance pouvait avoir une influence sur la rugosité des fronts de fracture. Ces deux régimes de croissances sont très différents. Dans la croissance sous-critique, c'est le processus d'activation thermique qui gouverne la croissance qui est très intermittente et se fait par sauts brusques de tailles aléatoires (voir paragraphe 1.3.3), avec une vitesse moyenne faible, comprise entre 10^{-5} et $10^{-2} m.s^{-2}$. Dans le régime rapide, la fracture est mécaniquement instable et la croissance est brutale avec une vitesse de l'ordre de $300 m.s^{-1}$. Une interprétation de la différence observée entre les exposants de rugosité dans ces deux régimes pourrait être que dans le régime lent la fracture choisit un chemin de façon à minimiser l'énergie de surface créée. Or la surface libre engendrée est d'autant plus petite qu'elle est régulière, et donc que son exposant de rugosité est grand, ce qui pourrait être un début d'explication. On observe également dans le régime sous-critique un phénomène de nucléation en avant de la fracture. Ceci pourrait renforcer les corrélations spatiales du front et par là l'exposant de rugosité. Enfin, le caractère intermittent de la croissance par

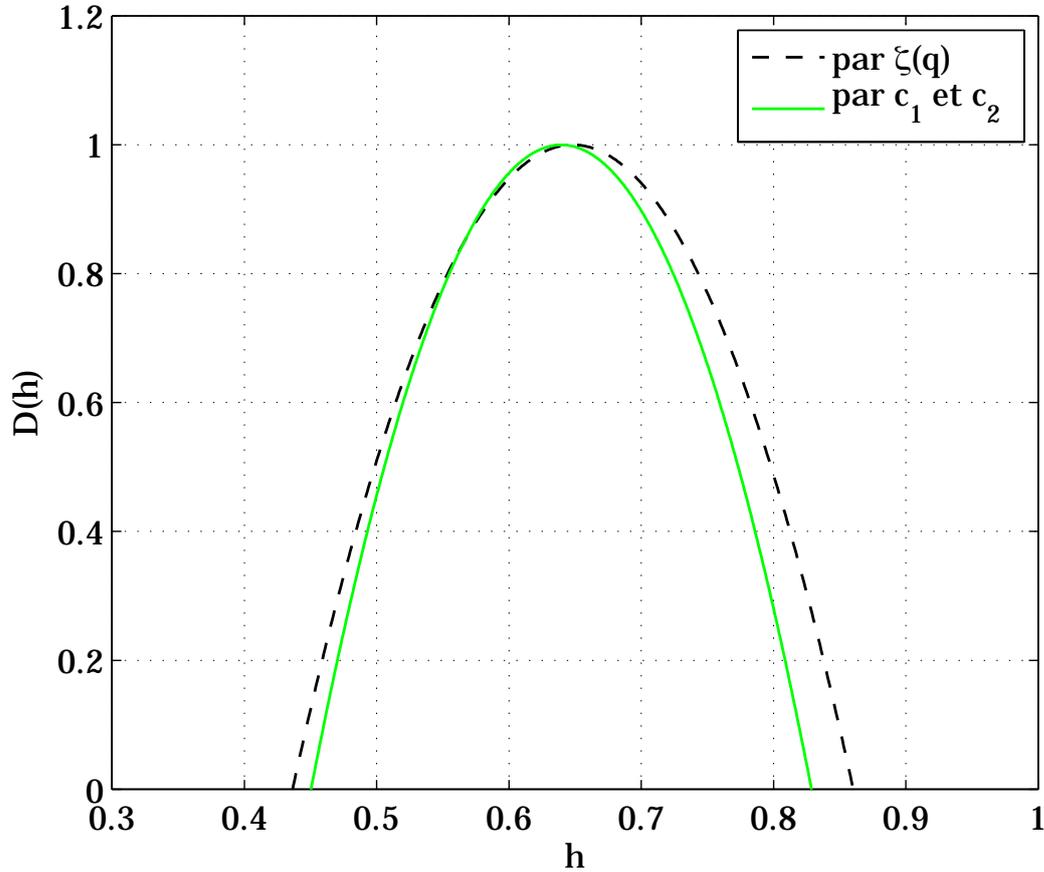


FIGURE 3.21 – Spectre de singularité obtenu par transformée de Legendre de $\zeta_m(q)$ et par calcul direct avec c_1 et c_2 .

sauts aléatoire pourrait également expliquer cet écart. Pour la croissance rapide, il a aussi été observé [50] que des instabilités dynamiques pouvaient engendré une décroissance de la rugosité.

Par ailleurs, la multifractalité n'est que très rarement observée en fracture. Or celle-ci ne peut exister que sur un nombre limité d'échelle. On peut en effet montrer qu'il existe nécessairement une échelle de coupure au-delà de laquelle le processus devient gaussien et monofractal, et la gamme d'échelle où la multifractalité est observée est d'autant plus restreinte que c_2 est grand. Dans le cas particulier du papier, la taille des hétérogénéités est grande, et il n'existe que deux ordres de grandeurs entre la longueur d'une fibre (typiquement de l'ordre de 1 mm) et les dimensions des échantillons que nous avons utilisé (de l'ordre de 10 cm). On pourrait donc imaginer à l'inverse que c_2 est d'autant plus grand que

la gamme d'échelle accessible à partir du désordre est restreinte. La multifractalité pourrait aussi être reliée aux hétérogénéités elles-mêmes, qui sont très fortes dans le papier.

3.5 Conclusion

Nous avons observé des comportements d'échelles originaux dans les fronts de fracture du papier. Ceci a été rendu possible par l'exploitation d'un jeu d'échantillons de fronts de fracture considérable et l'utilisation de techniques jusqu'ici peu ou pas utilisées dans le domaine de la fracture. Ceci nous a permis de montrer l'importance des outils d'analyses utilisés dans l'étude des lois d'échelle. Nous avons vu que l'emploi des incréments et les procédures d'estimations s'appuyant sur les moments pouvaient conduire à des artefacts au cours de l'analyse. L'utilisation des cumulants nous a permis de décrire directement et simplement la multifractalité, et nous avons aussi montré que les coefficients MMTO donnaient d'excellents résultats et des erreurs bien plus faibles. Alors qu'il existe un manque de données expérimentales dans le domaine et où les signaux sont souvent très courts, la mise en oeuvre de telles techniques apparaît comme un investissement payant.

Nous avons aussi constaté que les lois d'échelles dans le papier ne sont pas idéales, présentent une échelle caractéristique. L'invariance d'échelle apparaît comme une approximation, de même que l'unicité des exposants de rugosité.

En définitive, il est difficile d'interpréter rigoureusement ces observations. En ce qui concerne la variation de l'exposant de rugosité, la construction de signaux synthétiques prenant en compte la distribution des sauts dans une marche aléatoire pourrait peut-être permettre de comprendre qualitativement ce phénomène. L'étude d'autres types de papier ou de matériaux, présentant par exemple des hétérogénéités plus faibles ou d'un autre type apparaît également nécessaire pour mieux comprendre nos observations, en particulier la multifractalité.

Conclusion

3.6 Résultats

Dans ce travail de thèse, nous avons étudié deux situations expérimentales distinctes et obtenu un certains nombres de résultats.

Lors de l'étude de la fracture par indentation du verre, que nous avons présentée au chapitre II, nous avons mis au jour des comportements intermittents et aléatoires présentant de nombreuses analogies avec les tremblements de terre ce qui à notre connaissance n'avait jamais été observé pour ce type de fracture. Les microfractures exhibent une loi d'Omori pour leur dynamique et des lois de puissance pour la distribution des temps d'attente et des énergies, avec à chaque fois des exposants dans la gamme de ceux observés habituellement en laboratoire ou dans les séquences de répliques de séismes. Contrairement à la plupart des études expérimentales en laboratoire, nous trouvons une loi d'Omori alors que nous laissons relaxer le système. Nous avons modélisé la fracture à l'aide d'un réseau de fusibles extrêmement simple, mais qui nous a permis d'obtenir de nombreux résultats théoriques cohérents avec notre expérience et les observations dans le saphir à basse température, qui avaient motivé notre étude. Nous avons même pu proposer une interprétation de ces observations basée sur l'activation thermique, malgré la température expérimentale très faible de l'ordre de 10 mK. Nous avons également interpréter le contenu fréquentiel et l'évanescence des signaux acoustiques à l'aide d'un modèle là aussi extrêmement simple, mais qui nous a fourni des résultats très satisfaisant, nous permettant de justifier une définition pertinente de l'énergie des émissions acoustiques et d'exprimer une relation entre celle-ci et la durée de l'émission acoustique. En ce qui concerne les aspects énergétiques, nous avons pu donner une estimation approchée de l'énergie absolue des microfractures, et de sa relation avec l'énergie acoustique récoltée, ce qui n'est pas courant dans la littérature. Nous avons enfin développé une technique de détection plus sophistiquée qu'un simple seuillage, qui nous a permis d'augmenter le nombre d'événements détectés et d'étendre la gamme des énergies, ce qui a renforcé la qualité de nos résultats.

Nous avons aussi étudié dans le chapitre III à l'aide d'outils récents et performants de traitement du signal les lois d'échelle dans les fronts de fracture. Nous

avons mis en évidence une variation de la rugosité avec le régime de croissance de la fissure ce qui constitue un résultat inédit. Grâce à un large jeu d'échantillons, nous avons pu estimer les lois d'échelle avec une grande précision, ce qui nous a permis de mettre à jour de faibles variations de l'exposant avec l'échelle et donc une imperfection de l'invariance d'échelle. Nous avons enfin étudié la multifractalité des fronts à l'aide des outils parmi les plus récents et les plus efficaces existant à l'heure actuelle. L'utilisation de différentes techniques et leur comparaison a aussi donné de la robustesse à nos résultats expérimentaux. À la lumière de notre analyse, nous avons aussi suggéré d'utiliser les log-cumulants pour estimer les lois d'échelle, qui sont à la fois plus simple à utiliser et une moins grande source d'erreur que les fonctions de structure. Nous avons aussi constaté que les incréments, principal outil utilisé dans la littérature de la fracture, possédaient une efficacité limitée pour les estimations, donnant lieu à des mesures parfois biaisées pour les exposants d'échelle. On pourra plutôt utiliser la transformée en ondelettes ou mieux encore les maxima du module de celle-ci comme coefficients multirésolution.

Nous avons donc étudié deux systèmes physiques bien distincts, mais ayant en commun des comportements invariants d'échelle comme ceux que nous avons introduit dans le chapitre I. Les outils de traitement du signal introduits dans cette étude se sont avérés très utiles pour décrire ces systèmes exhibant des comportements complexes et fortement aléatoires.

3.7 Perspectives

Beaucoup de nos résultats, particulièrement pour l'indentation, sont qualitatifs ou encore imprécis par manque de réalisations, comme pour le comportement en fonction de la température des lois d'Omori par exemple. Expérimentalement, de nombreuses voies restent à explorer : variation de β avec la température, influence de la force appliquée avec la température... Il serait sans doute intéressant d'étudier le rôle du taux d'humidité, qui est connu pour influencer beaucoup la fracture dans le verre. Il serait aussi intéressant d'étudier le comportement d'un matériau ne présentant pas de désordre structurel, comme le saphir par exemple, ou plus généralement d'étudier expérimentalement le rôle du désordre. En ce qui concerne les techniques de détection, nous avons déjà commencé à automatiser celle-ci, dans le but de rendre cet outil facilement utilisable par d'autres personnes. Il serait aussi intéressant de poursuivre ce travail. Enfin, le modèle numérique que nous avons utilisé pourrait être amélioré afin d'exhiber des avalanches et des distributions d'énergie. L'inconvénient est que cela engendrerait sans doute une plus grande complexité qui enlèverait son principal atout : sa

simplicité.

Concernant la fracture du papier et la rugosité des fronts, il apparaît important d'étudier un autre type de papier ou de matériau afin de voir quels comportements parmi ceux que nous avons observé dans le papier de fax persistent. Des travaux dans ce sens ont déjà été entrepris au sein de l'équipe, sur du papier calque, qui est structurellement très différent du papier de fax, mais il est nécessaire d'avoir un grand nombre d'échantillons pour répondre à ces questions ce qui n'est pas le cas pour le moment. Des travaux numériques, basés sur des signaux synthétiques, pourraient également être entrepris afin d'expliquer par exemple la variation de la rugosité lors du changement de régime de croissance.

Mécanique de la fracture lente

Lorsqu'on applique une contrainte sur un échantillon, puis qu'on augmente celle-ci indéfiniment, on peut observer schématiquement deux comportements : à partir d'un certain seuil de contrainte le matériau sort du régime élastique, et soit il se déforme irréversiblement (il coule), soit il casse. Un matériau sera dit fragile s'il se casse avant de s'écouler (comme les roches, le verre à température ambiante, les matériaux fibreux...) au contraire d'un matériau ductile qui se déformera irréversiblement (comme les polymères, certains métaux...). Cette classification est bien sûr arbitraire, et un matériau pourra être classé dans l'une ou l'autre catégorie selon l'échelle de temps sur laquelle la contrainte varie (par exemple pour les matériaux visco-élastiques). En outre, les matériaux ductiles finissent souvent par casser à leur tour au delà d'un certain seuil.

Dans le cas des matériaux fragiles on peut distinguer les matériaux ordonnés (cristaux) et désordonnés (verres, alliages, matériaux hétérogènes...). Dans le cas des matériaux ordonnés, les cristaux, la fracture est nette, et la nouvelle interface créée par la rupture en deux parties du matériau est lisse, on parle de clivage. Dans le cas des matériaux désordonnés, l'interface est rugueuse et irrégulière.

A.1 Aspects mécaniques de la fracture

Material	Young's Modulus Y (10^{11} dyne/cm ²)	$Y/5$ (10^{11} dyne/cm ²)	Theoretical strength (10^{11} dyne/cm ²)	Practical strength (10^{11} dyne/cm ²)
Iron	16	3	3	.085
Copper	19	4	3	.049
Silicon	18	4	3	.062
Glass	7	1	4	.002

FIGURE A.1 – Contraintes seuils de rupture pour différents matériaux, obtenues théoriquement à partir de modèles atomiques et mesurés expérimentalement. D'après [96]

Alors que la contrainte à appliquer pour rompre des liaisons atomiques est de l'ordre de grandeur du module d'Young, les contraintes seuils mesurées sur des échantillons macroscopiques sont nettement plus faibles, de deux ou trois ordres de grandeur. Des exemples sont donnés figure A.1. Ce paradoxe apparent a été levé par les travaux pionniers de Griffith et Inglis au début du siècle. Dans leurs études, c'est l'hypothèse de la pré-existence de micro-fissures dans le matériau qui engendrent une concentration des contraintes en leur pointe qui permet d'expliquer ce phénomène.

A.1.1 Concentration des contraintes

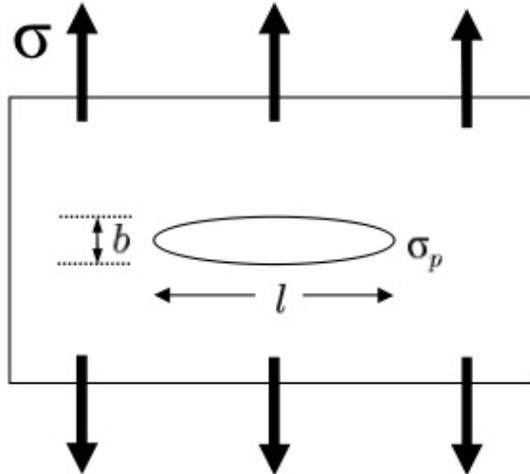


FIGURE A.2 – Échantillon bi-dimensionnel comportant une fissure elliptique de longueur l et de rayon de courbure $\rho_c = \frac{b^2}{l}$, soumis à une contrainte σ constante sur ses bords, en mode I.

Lorsqu'une fissure est présente dans le matériau, l'application d'une contrainte sur les bords de l'échantillon donne lieu autour de la fissure à une réorganisation des contraintes qui se concentrent à la pointe. Considerons, comme sur la figure A.2, un échantillon bi-dimensionnel avec un défaut initial elliptique de longueur l et de rayon de courbure ρ_c soumis à une contrainte σ perpendiculaire à la fissure (mode I). Dans cette situation, Inglis [97] détermine la contrainte à la pointe du défaut σ_p :

$$\sigma_p = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{l}{\rho_c}} \right) \quad (\text{A.1})$$

De cette équation, on en déduit que pour l de l'ordre du centimètre et ρ_c de l'ordre du micron, on obtient une contrainte à la pointe 200 fois plus importante que la contrainte appliquée au bord de l'échantillon. Ceci permet de comprendre pourquoi les contraintes seuils de rupture sont si faibles.

A.1.2 Les différents modes principaux de fracture

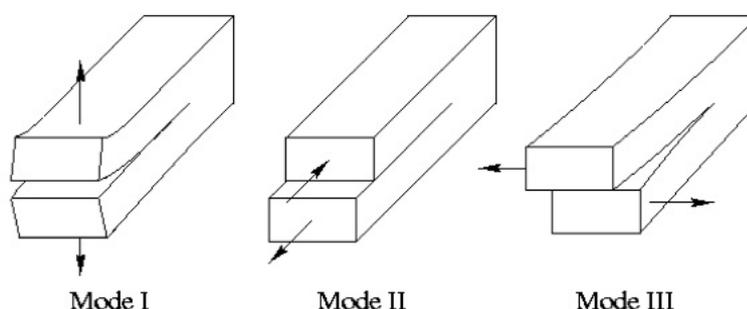


FIGURE A.3 – Modes principaux d'ouverture d'une fissure

Considérons une fissure idéale, infiniment plate dans un matériau élastique. Les contraintes qui s'exercent sur les lèvres de la fissures peuvent se décomposer selon trois modes principaux d'ouverture indépendants, qui sont représentés sur la figure A.3. Le mode I est un mode de traction pure, les modes II et III sont des modes de cisaillement dans le perpendiculairement à la fissure et dans le plan de la fissure, respectivement. Si l'on s'intéresse plus particulièrement au mode I, le champs de contraintes se décompose comme suit figure A.4 :

Ainsi, le mode I correspond à $\sigma_{yy} \neq 0$ et $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$.

A.1.3 Facteur d'intensité des contraintes

En 1958, Irwin [98] exprimer les champs de contraintes σ_{ij} et de déplacements u_i au voisinage d'une fissure infiniment plate dans un solide parfaitement élastique, qui s'écrivent sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) u_i = \frac{K}{\sqrt{2Y}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i(\theta) \quad (\text{A.2})$$

où les fonctions f_i et f_{ij} ne dépendent que de θ et où Y est le module d'Young du matériau considéré. Ainsi, on voit qu'au voisinage de la pointe de la fissure, la contrainte diverge en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ lorsque r tend vers 0. Le facteur K , qui ne dépend que de la contrainte appliquée, de la longueur de la fissure et de la géométrie

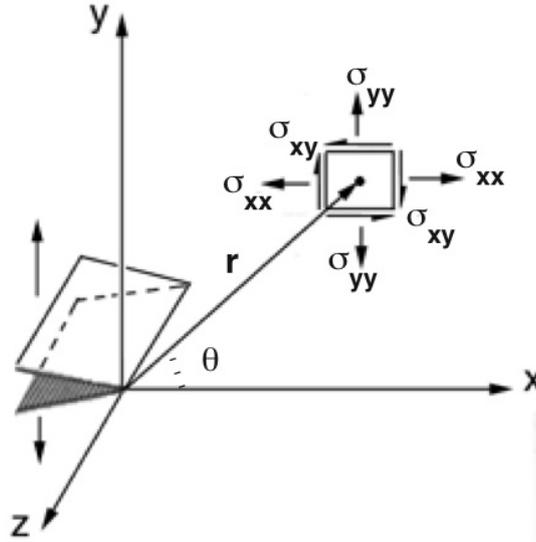


FIGURE A.4 – Composantes du champs de contraintes dans le voisinage de la pointe de la fissure en mode I

de l'échantillon [66]. Il s'écrit $K = \sigma\sqrt{l\psi}$ avec ψ un facteur géométrique. Le fait que la contrainte diverge à la pointe, a priori paradoxal, s'explique par le fait qu'il faut prendre en compte la structure microscopique du matériau lorsque r tend vers 0. En fait la contrainte atteint un plateau pour les faibles valeurs de r correspondant à la taille caractéristique cette structure (taille des grains dans un échantillon de grès par exemple).

Le facteur K , appelé facteur d'intensité des contraintes, donne donc une mesure de l'amplitude du champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure. La condition de propagation de la fissure va donc plutôt être une condition sur K que sur σ , car il est mieux défini. Ainsi, la fissure se propage si $K > K_c$ où K_c , le facteur d'intensité des contraintes critique, est aussi appelé ténacité. Cette notion est largement utilisée par les ingénieurs pour caractériser la résistance des matériaux.

A.2 Rupture sous-critique

En plus de l'effet de concentration des contraintes, un autre effet surprenant est observé : la rupture de solide mis sous une contrainte engendrant $K < K_c$. Dans ces conditions, la fissure, censée être gelée, se propage tout de même mais très lentement dans le solide. Ce phénomène appelé rupture sous-critique ou

rupture retardée, voit le matériau se cassé au bout d'un temps τ très sensible à la contrainte appliquée et à la température.

A.2.1 Phénoménologie de la rupture retardée

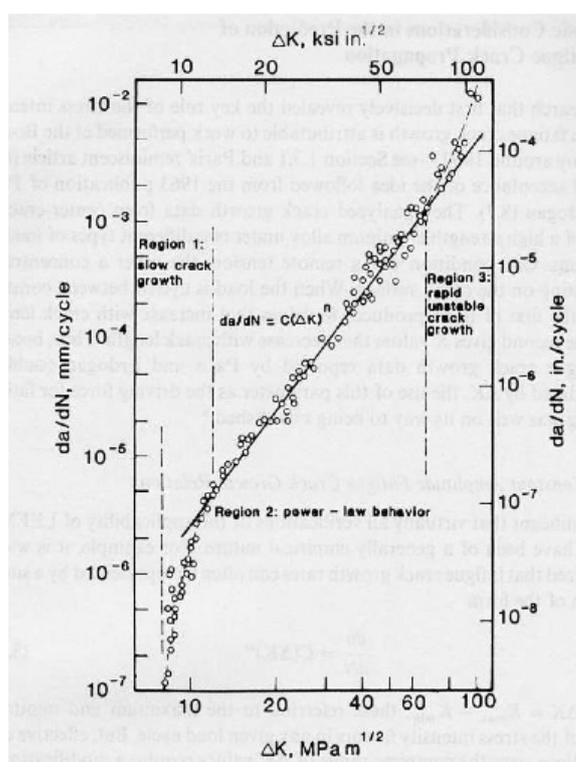


FIGURE A.5 – Avancement de la fissure par cycle au cours du chargement en fonction du facteur d'intensité des contraintes $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ au cours d'expérience de fatigue sur des échantillons d'aluminium [99].

Longtemps, la description de ce phénomène n'était que qualitative. Les différentes observations (voir [49] pour un exemple récent) sont toutes assez proches de la loi de Paris (figure A.5), qui décrit la propagation de la fissure au cours d'expérience de fatigue. Dans ces expériences, un échantillon est soumis à des cycles de chargement, le facteur d'intensité variant entre K_{min} et K_{max} , tout en restant sous le seuil K_c . Il apparaît que l'accroissement de la fissure $\frac{da}{dN}$ varie en puissance de ΔK , l'exposant et le pré-facteur dépendant des conditions expérimentales (température, humidité, fréquence des cycles). Le même type de dynamique est observée pour des expériences de corrosion sous contraintes (où $\frac{da}{dt}$ varie en puissance de K). Des variantes plus complexes sont également observées

dans certaines situations. L'activation thermique peut être proposée comme une explication de ces phénomènes.

A.2.2 Aspect thermodynamiques

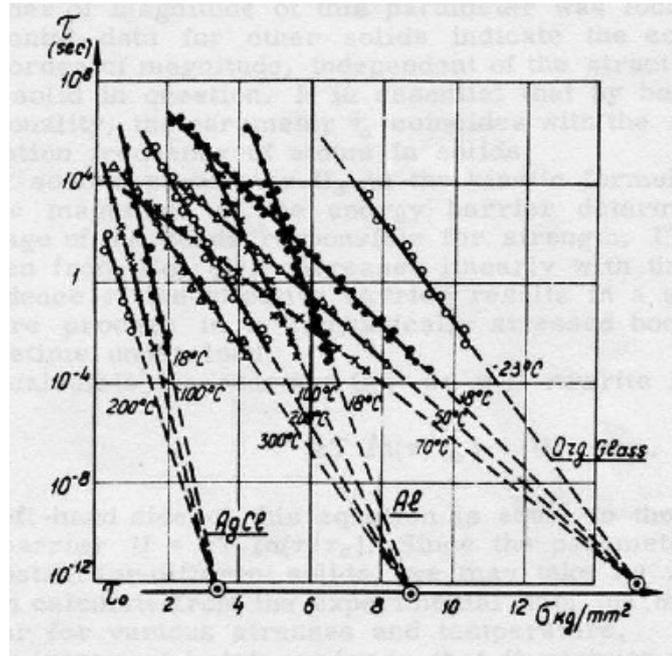


FIGURE A.6 – Temps de rupture τ en fonction de la contrainte pour différents matériaux et différentes températures [100].

Les travaux de Zhurkov [100] ont étudié l'influence de la température sur le temps moyen de rupture d'échantillons de différents matériaux au cours d'expérience de fluage (chargement à contrainte constante en dessous du seuil de rupture). Les résultats établis par Zhurkov, remarquables, montrent que le temps de rupture τ peut varier de plusieurs ordres de grandeurs en changeant la température (voir figure A.6. Pour le plexiglas par exemple, τ devient environ 1.000.000 de fois plus petit en passant de -23°C à 70°C ! Il observe aussi une décroissance exponentielle de τ avec la contrainte appliquée.

A.2.3 Croissance thermiquement activée

Ces expériences ont permis à Zhurkov de décrire de façon phénoménologique le comportement du temps de rupture, qui suit une loi d'Arrhenius :

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{U}{kT}} \quad (\text{A.3})$$

où $U = U_0 - \alpha\sigma$ correspond à une barrière d'énergie à franchir par la fissure pour rompre le matériau, barrière qui décroît avec la contrainte appliquée. Ceci permet de rendre compte des observations expérimentales.

Récemment, des travaux ont montré que la physique statistique permettait de décrire l'apparition de fissures en régime sous-critique grâce aux fluctuations thermiques de la contrainte dans un milieu homogène qui devient métastable sous contrainte.

A.3 Conclusion

Nous avons survolé quelques aspects de la mécanique de la fracture, qui a permis, par une approche au départ essentiellement phénoménologique, de d'interpréter de façon satisfaisante de nombreux phénomènes. Par contre, elle ne permet pas de rendre compte de l'intermittence et des phénomènes d'invariance d'échelle dont l'étude est l'objet de cette thèse. Les travaux théoriques cherchant à modéliser ces comportements s'appuient le plus souvent sur des simulations numériques.

ANNEXE B

Articles publiés

B.1 Physical Review Letters 98, 255502, 2007

Discrepancy between sub-critical and fast rupture roughness: a cumulant analysis

N. Mallick, P.-P. Cortet, S. Santucci* and S. G. Roux, and L. Vanel†

Laboratoire de physique, CNRS UMR 5672, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

Rough crack fronts in a sheet of paper, obtained during a creep experiment, do not follow true scaling laws. Local roughness exponents are estimated using the first order cumulant, a quantity recently introduced in the turbulence literature [1]. Using a large data set (102 fronts), we find a significant difference in local roughness between the slow (sub-critical) and the fast growth regime.

PACS numbers: 68.35.Ct, 62.20.Mk, 02.50.-r

Since the early description of rough fractures as self-affine surfaces [2], the existence of universal roughness exponents has been strongly debated [3]. There are now many experimental evidences for a non-universal value of the roughness exponent of fracture surfaces. Different exponents can be found due to the anisotropy of the fracturation process [4], the heterogeneity of the material structure [5] or anomalous scaling related to finite-size effects [6]. A recent observation suggests that, in rupture of paper, the crack interface would be multifractal [7].

Roughness exponents appear usually independent of crack velocity. For rather slow velocities, no effect of the velocity on roughness has been observed in plexiglas ($v = 10^{-7} - 5 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$), glass ($v = 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8} \text{ m.s}^{-1}$), intermetallic alloys ($v = 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$) or sandstone ($v = 10^{-4} - 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$) [8]. There is also no effects of applied strain rate on crack roughness in paper [9]. On the contrary, in dynamic fracture of plexiglas ($v \gtrsim 600 \text{ m.s}^{-1} \simeq 0.45 \times$ Rayleigh wave speed), variations of the roughness exponents with the velocity have been observed [10]. As pointed out in a recent review [11], there is a need for experimental studies concerning the influence of fracture kinetics on roughening.

In this Letter, we study the roughness of a crack interface in a sheet of paper [12] fractured in a creep experiment [13]. During each experiment, crack growth starts in a sub-critical regime where the growth is slow ($v = 10^{-5} - 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$) and reaches at a critical length a fast growth regime ($v \sim 300 \text{ m.s}^{-1}$). We compare the scaling properties of moments [14] to the scaling properties of cumulants, a new quantity recently introduced in the turbulence literature [1]. We find that there is a systematic difference between the scaling properties of the sub-critical and the fast rupture regime. In contrast to moments, the first cumulant is insensitive to deviations from monofractal behavior and allows us to extract reliably a roughness exponent.

Experiments. We recall briefly the experimental setup described in [13]. We break bi-dimensional brittle samples made of fax paper sheets (Alrey) with size $24 \times 21 \text{ cm}^2$. Each sample has an initial centered crack and is loaded in a tensile machine with a constant force F perpendicular to the crack direction (mode I). The stress intensity factor $K(L) \propto F\sqrt{L}$, where L is the crack

length, determines the stress magnitude near the crack tip and is the control parameter of crack growth. For a given initial length L_i , sub-critical crack growth is obtained by choosing F so that $K(L_i)$ is smaller than a critical threshold K_c corresponding to the material toughness. During an experiment, L increases, and so does $K(L)$. It will make the crack accelerate until reaching the critical length L_c for which $K(L_c) = K_c$ and above which a sudden transition to fast crack propagation occurs. Using a high speed camera (Photron Ultima 1024), we have determined which part of the *post mortem* crack interface corresponds to slow or fast growth, and measure the velocity of the crack in each one. In the sub-critical regime, the velocity ranges from 10^{-5} to 10^{-2} m.s^{-1} . Recording at 4000 fps, we find a crack velocity about 300 m.s^{-1} in the fast regime. Note that there are four to seven decades between the two growth regime velocities.

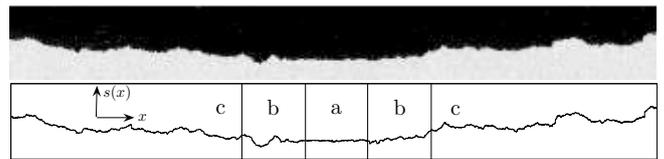


FIG. 1: Digitized *post mortem* sample and corresponding extracted front showing three stages: (a) initial crack ($L_i = 2 \text{ cm}$), (b) sub-critical growth, (c) fast growth.

Crack profiles. *Post mortem* samples are digitized with a scanner at 1600 dpi. The pixel size $a_0 = 16 \mu\text{m}$ is close to the typical diameter of cellulose fibers. On Fig. 1, we show an example of a digitized sample compared with the extracted crack front $s(x)$. We distinguish between different stages corresponding to: (a) the initial crack, (b) the sub-critical crack growth and (c) the fast crack growth. We have digitized 51 fractured samples, obtained for different forces (200 N, 230 N, 250 N, 280 N) and initial crack sizes (1 cm, 2 cm). Since the initial crack is centered, each sample give rise to two fronts. Thus, we have a total of 102 independent fronts of about 10^3 points for slow growth and 10^4 points for fast growth.

Scale invariance. Let $\{s(x), x \in \mathbb{R}\}$ be a signal as a function of a coordinate x . Scale invariance of s means that there is no characteristic scales in the signal. The scaling properties of s can be characterized by introduc-

ing a multiresolution coefficient $T[s](x, a)$ defined at scale a and position x . Scale invariance implies that the q -th order moments of the multiresolution coefficient follow a power law with exponents $\zeta(q)$:

$$M_q \equiv \langle |T[s](x, a)|^q \rangle \sim C a^{\zeta(q)}, \quad (1)$$

where the bracket denotes the average over the x space. The increments over a scale a , $T[s](x, a) = s(x+a) - s(x)$, are standard multiresolution coefficients and the corresponding moments are the structure functions [15]. It has been shown that a more general framework for defining multiresolution coefficients is the wavelet transform [16, 17, 18]. When the signal s follows Eq. (1) with $\zeta(q)$ proportional to q , the signal is monofractal. The complete analysis of the deviations of $\zeta(q)$ from monofractality can be made through the multifractal formalism.

Multifractal analysis. Multifractal formalism is based on the mathematical definition of a local singularity exponent $h(x)$. Using the multiresolution coefficient $T[s](x, a)$, we write at each position x [17]:

$$|T[s](x, a)| \sim C a^{h(x)}, \quad (2)$$

where $h(x)$ is the Hölder exponent or local roughness exponent describing how singular the signal is at position x : the larger $h(x)$, the smoother $s(x)$. The statistical distribution of the Hölder exponents is quantified by the singularity spectrum $D(h)$ defined as [15, 17]:

$$D(h) = d_H \{x | h(x) = h\}. \quad (3)$$

where d_H is the Hausdorff dimension. The probability to observe an exponent h at scale a is then proportional to $a^{1-D(h)}$. Thus, the $\zeta(q)$ spectrum can be related to the singularity spectrum $D(h)$ by a Legendre transform, i.e. $\zeta(q) = \min_h (1 + qh - D(h))$. When $s(x)$ is monofractal, $h(x)$ is a constant H independent of x , $D(H) = 1$ and $\zeta(q) = qH$ is proportional to q . Conversely, if $s(x)$ is multifractal, $h(x)$ takes different values at different positions x , and $\zeta(q)$ is not proportional to q .

In practice, the values $\zeta(q)$ are obtained by fitting straight lines (when power law behavior is observed) on log-log plots of M_q versus scale a for different moment orders q . The singularity spectrum $D(h)$ is then deduced from $\zeta(q)$. To verify if $\zeta(q)$ differs from a linear monofractal behavior, one needs to obtain $\zeta(q)$ for a large range of q values and then proceed to fit the $\zeta(q)$ curve (for instance, $1 \leq q \leq 8$ in [7], see also [19]).

While this has been the traditional way of estimating $\zeta(q)$, an alternate method introduced recently in the turbulence literature [1, 20], involves only a few straight line fits (as low as 3) while still accurately estimating the non-linear behavior of the $\zeta(q)$ spectrum. To summarize this method, we start with the general expansion [1]:

$$\ln M_q = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(a) \frac{q^n}{n!}, \quad (4)$$

where $C_n(a)$ are the cumulants of $Q_a \equiv \ln |T[s](x, a)|$. One can demonstrate that the first two cumulants are the mean and standard deviation Q_a :

$$C_1(a) = \langle Q_a \rangle, \quad C_2(a) = \langle Q_a^2 \rangle - \langle Q_a \rangle^2 \quad (5)$$

Identifying the first derivative of Eq. (4) and of the logarithm of Eq. (1) with respect to $\ln(a)$, one finds:

$$\zeta(q) = c_1 q + c_2 q^2 / 2! + \dots \quad (6)$$

where $c_i \equiv dC_i(a)/d\ln(a)$ are constants in the case of scale invariant signals. It turns out that the average value of the Hölder exponent is $\langle h \rangle = c_1$ and its variance $\langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2 = -c_2 / \ln(a)$. When the multiresolution coefficient $T[s](x, a)$ has Gaussian statistics (for example, when s is a Brownian motion), $C_2(a) = \pi^2/8$ and $c_2 = 0$.

The above developments imply that $\zeta(q)$ can be estimated from linear regressions of the cumulants $C_n(a)$ vs $\ln(a)$ [1]. For a monofractal signal, $c_n = 0, \forall n \geq 2$ and only one linear regression is needed. For a multifractal signal, a quadratic $\zeta(q)$ approximation requires only two linear regressions. In comparison with the standard method based on the q -th order moments, the efficiency of the cumulant method becomes apparent.

If one simply wants a reliable estimate of the roughness exponent without questioning whether the signal is multifractal or not, it is best to measure c_1 rather than the commonly used exponent $\zeta(2)$. Indeed, any deviations from monofractality leading to a non-zero value of c_2 (either the signal is actually multifractal or is perturbed by experimental errors) will strongly influence the value of $\zeta(2)$. Note that a better estimator based on moment analysis would be $\zeta(1)$, proportionally less influenced by c_2 than $\zeta(2)$. In the following, we will illustrate these remarks looking at moments and cumulants obtained with the increments as multiresolution coefficients.

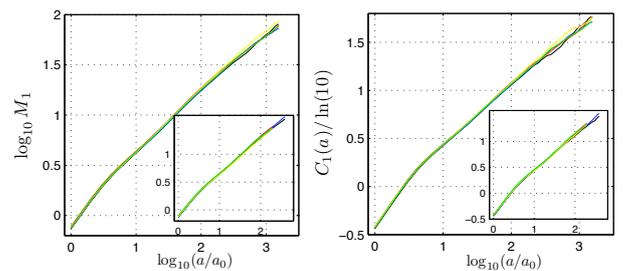


FIG. 2: (a) $\log_{10} M_1$ and (b) $C_1/\ln(10)$ versus scale calculated by the increments method for five different couples (F, L_i) during fast (slow in insert) crack growth.

Influence of force and initial length. On Fig. 2, we plot $\log_{10} M_1$ and $C_1/\ln(10)$ versus $\log_{10}(a/a_0)$ for five different couples of values (F, L_i) during the fast growth stage. First, we see that near the discretization scale a_0

the slope is close to unity. This effect can be attributed to the discreteness of the signal [21]. In the following, we will concentrate on larger scales $a > 4a_0$ (\simeq maximum fiber diameter) where this effect can be neglected. Second, we see no dependence of M_1 and C_1 on the force or the initial crack size. The same independence is observed for the slow growth stage. Thus, we can average the moments or cumulants over all the 102 crack fronts whatever are the forces or initial crack lengths. For each front, we also compute the derivative of the moments or cumulants and average over all the fronts to get the mean local slope and statistical error of the mean as a function of scale. The large number of crack fronts allows us to greatly improve the precision of the statistical analysis.

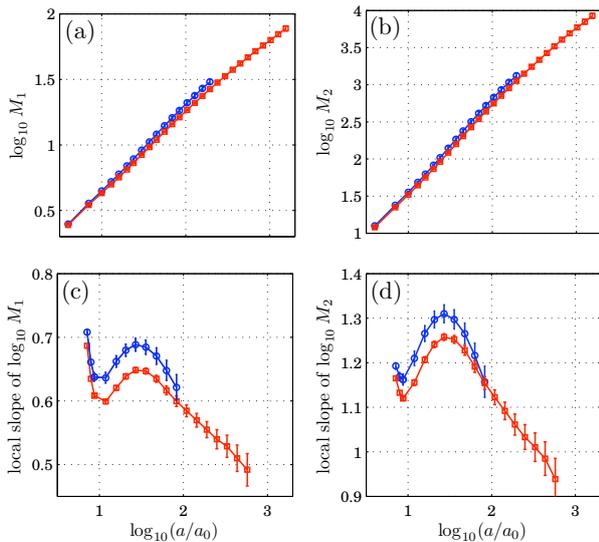


FIG. 3: (a), (b): M_1 and M_2 for slow (circles) and fast (squares) crack growth; (c), (d): Corresponding local slope. The error bars are determined as statistical errors of the mean (\equiv standard deviation $/\sqrt{N}$ with $N = 102$).

First and second order moments. Fig. 3(a) and (b) show log-log plots of M_1 and M_2 versus a/a_0 for slow and fast growth, and Fig. 3(c) and (d) the corresponding mean local slopes $m_1(a)$ and $m_2(a)$. Whatever are the exact scaling properties of M_1 and M_2 , a systematic difference, larger than the error bars, between the slopes of the two growth regimes is observed in a wide range of scales. Since M_1 and M_2 are not perfect straight lines, we can question the existence of true scaling laws. Assuming scaling laws do exist would mean that the signal is not monofractal since $\langle m_1 \rangle \neq \langle m_2/2 \rangle$. In the present case, it is better to estimate the roughness exponent by looking at the first order cumulant, which is by construction insensitive to deviations from monofractality.

First and second order cumulants. On Fig. 4(a) and (b), we plot $C_1(a)$ and $C_2(a)$ divided by $\ln(10)$ versus $\log_{10}(a/a_0)$ for the two growth regimes. For later use, the mean local slope of $C_1(a)$ (Fig. 4(c)) will be noted

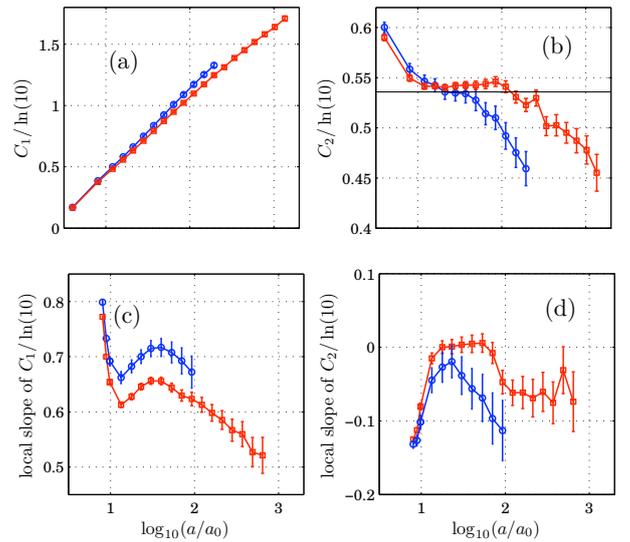


FIG. 4: (a), (b): C_1 and C_2 versus scale with statistical error bars. In (b), the horizontal solid line corresponds to a signal with Gaussian statistics. (c), (d): Corresponding local slope of cumulants. Error bars give the statistical error of the mean.

$c_1^F(a)$ for the fast regime, $c_1^S(a)$ for the slow one and $\Delta c_1(a) = c_1^S(a) - c_1^F(a)$ the slope difference. There is a clear difference between slow and fast crack growth (Fig. 4(c)) and much less overlap between the values of $c_1^F(a)$ and $c_1^S(a)$ than for m_1 or m_2 . As for M_1 or M_2 , $C_1(a)$ is not perfectly linear and, in a certain range of scales ($10 < a/a_0 < 10^2$), C_2 is close to the theoretical value for a signal with Gaussian statistics [22]. The local extremum observed in both regimes for $a/a_0 \simeq 10^{1.5}$ ($a \simeq 500 \mu\text{m}$) in Fig. 4(c), 3(c) and 3(d) might correspond to a characteristic scale of the material. Indeed, this scale is of the same order than the fiber length in paper.

Scaling laws. From the various plots, we can already conclude that it is not so easy to find a range of scales for which true scaling laws are observed. For $a/a_0 \lesssim 10$, the slope of $C_1(a)$ is changing a lot because we start to feel the discretization effect previously discussed [21]. We clearly see that for $a/a_0 \gtrsim 10^2$, the slope of $C_1(a)$ is again changing significantly and seems to go towards 0.5. Thus, if a scaling law exists, it is observed mainly at intermediate scales where the slope values are the most stable. The same conclusion can be reached by looking at $C_2(a)$. At large scale, $C_2(a)$ decreases to values lacking physical meaning since they become smaller than the Gaussian value and is very sensitive to discretization effects at small scales. Trying to estimate the slope of $C_2(a)$ at intermediate scales ($10 < a/a_0 < 10^2$), one finds that c_2 is very close to zero for the fast crack growth and between -0.08 and -0.02 for the slow part. However, given the large error bars (see Fig. 4(d)), we can neither conclude that there is a difference between the two growth regimes for c_2 , nor that there is a mono or multifractal

TABLE I: Roughness exponents $c_1(= \langle h \rangle)$ for fast and slow crack growth, and their difference using various methods.

Method	Fast growth	Slow growth	Difference
SF	0.64 ± 0.02	0.70 ± 0.02	0.06 ± 0.01
CWT	0.65 ± 0.02	0.73 ± 0.02	0.07 ± 0.01
WTMM	0.64 ± 0.01	0.70 ± 0.02	0.06 ± 0.01

behavior. For that reason, we will focus only on the first order cumulant to estimate the roughness exponent.

Roughness exponent. In the range of scales where the scaling is reasonably good ($10 < a/a_0 < 10^2$), the roughness exponents c_1^F and c_1^S as well as their errors are computed as the mean and standard deviation of $c_1^F(a)$ or $c_1^S(a)$. The error on c_1^F or c_1^S is indeed dominated by the variations across scale not by the statistical errors (Fig. 4(c)). In the same scale range, we also compute the mean difference Δc_1 . The variations of $\Delta c_1(a)$ across scale are very small and the error on Δc_1 is then dominated by the statistical errors (Fig. 4(c)). Thus, the error on Δc_1 will be significantly smaller than the ones on c_1^F and c_1^S . We show in Table I the measured exponents and their difference as well as the corresponding errors using various methods (SF: structure functions, CWT : Continuous Wavelet Transform [15] and WTMM : Wavelet Transform Modulus Maxima [16] using 1st derivative of Gaussian). They all give a difference between the two growth regimes. For instance, SF give a difference of 0.06 ± 0.01 with a roughness exponent of 0.64 ± 0.02 for the fast regime and 0.70 ± 0.02 for the slow regime [23].

Conclusion. Fracture fronts in paper do not follow true scaling laws, either mono or multifractal. However, we find a drop in the local roughness when the crack goes from sub-critical to fast growth. In the sub-critical regime, the physical mechanism for crack growth is thermal activation [13], while in the fast growth regime, the system is mechanically unstable. Dynamical instabilities during fast crack growth were shown to decrease the roughness [10] which could explain our observations. In the slow regime, roughness is probably controlled more by the material disorder than by dynamical effects. There is a characteristic scale $a \simeq 500 \mu\text{m}$, close to the fiber length, which could come from fiber pullout rather than breakage. Easier pullout in slow compared to fast growth regime might also play a role in roughness difference.

We thank S. Ciliberto for fruitful discussions. This work was funded with grant ANR-05-JCJC-0121-01.

[†] Electronic address: Loic.Vanel@ens-lyon.fr

- [1] J. Delour, J. F. Muzy and A. Arneodo, Eur. Phys. J. B **23**, 243 (2001).
- [2] B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja and A. J. Paullay, Nature **308**, 721 (1984); A. L. Barabási and H. E. Stanley, *Fractal concepts in surface growth* (University Press, Cambridge, 1995).
- [3] E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planès, Eur. Phys. Lett. **13**, 73 (1990); E. Bouchaud, J. Phys.: Condens. Matter **9**, 4319 (1997); K. J. Måløy, A. Hansen, E. L. Hinrichsen, and S. Roux, Phys. Rev. Lett. **68**, 213 (1992).
- [4] E. Bouchbinder, I. Procaccia, and S. Sela, Phys. Rev. Lett. **95**, 255503 (2005); L. Ponson, D. Bonamy, and E. Bouchaud, Phys. Rev. Lett. **96**, 035506 (2006).
- [5] I. L. Menezes-Sobrinho, M. S. Couto, and I. R. B. Ribeiro, Phys. Rev. E **71**, 066121 (2005); A. S. Balankin, O. Susarrey, and J. M. González, Phys. Rev. Lett. **90**, 096101 (2003).
- [6] J. M. Lopez, M. A. Rodriguez, and R. Cuerno, Phys. Rev. E **56**, 3993 (1997).
- [7] E. Bouchbinder, I. Procaccia, S. Santucci and L. Vanel, Phys. Rev. Lett. **96**, 055509 (2006).
- [8] J. Schmittbuhl, and K. J. Måløy, Phys. Rev. Lett. **78**, 3888 (1997); P. Daguer, B. Nghiem, E. Bouchaud, and F. Creuzet, Phys. Rev. Lett. **78**, 1062 (1997); J. M. Boffa *et al.*, Eur. Phys. J. B **7**, 179 (1999).
- [9] A. S. Balankin, O. Susarrey, and A. Bravo, Phys. Rev. E **64**, 066131 (2001).
- [10] J.-F. Boudet, S. Ciliberto, and V. Steinberg, J. Phys. II **6**, 1493 (1996).
- [11] M. J. Alava, P. K. V. V. Nukala, and S. Zapperi, Adv. in Phys. **55**, 349 (2006).
- [12] V. Horvath, J. Kertész and F. Weber, Fractals **1**, 67 (1993); L. I. Salminen, M. J. Alava, and K. J. Niskanen, Eur. Phys. J. B **32**, 369 (2003).
- [13] S. Santucci, L. Vanel, and S. Ciliberto, Phys. Rev. Lett. **93**, 095505 (2004); S. Santucci *et al.*, Europhys. Lett. **74**, 595 (2006).
- [14] J. Schmittbuhl, J.-P. Vilotte, and S. Roux, Phys. Rev. E **51**, 131 (1995).
- [15] G. Parisi, and U. Frisch in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics*, ed. M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi, North-Holland, Amsterdam, 84 (1985).
- [16] J. F. Muzy, E. Bacry and A. Arneodo, International J. Bifurcation and Chaos **4**, 245 (1994).
- [17] S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, Boston, (1997).
- [18] I. Simonsen, A. Hansen, and O. M. Nes, Phys. Rev. E **58**, 2779 (1998).
- [19] A. L. Barabási *et al.*, Phys. Rev. A **45**, R6951 (1992).
- [20] L. Chevillard, S.G. Roux, E. Leveque, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 214502 (2003); **95**, 064501 (2005).
- [21] S. J. Mitchell, Phys. Rev. E **72**, 065103(R) (2005).
- [22] S. Santucci *et al.*, Phys. Rev. E **75**, 016104 (2007).
- [23] These values are consistent with the literature [5, 12].

* Current address : Fysisk Institutt, Universitetet i Oslo, PostBoks 1048 Blindern, 0316 Oslo, Norway

B.2 Acte de colloque, GRETSI, 2007

Influence de la dynamique de la rupture sur l'exposant de rugosité dans les fractures 1D.

Nicolas MALLICK¹, Pierre-Philippe CORTET¹, Stéphane SANTUCCI², Loïc VANEL¹, Stéphane G. ROUX¹

¹Laboratoire de Physique, CNRS UMR 5672

École Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie 69364 Lyon, France

²Fysisk Institutt

Universitetet i Oslo

PostBoks 1048 Blindern, 0316 Oslo, Norvège

Nicolas.Mallick@ens-lyon.fr, Stephane.Roux@ens-lyon.fr

Résumé – Nous déterminons l'exposant de rugosité de fractures en utilisant plusieurs estimateurs de lois d'échelle existant dans la littérature dont un récent : les coefficients dominants [1]. A partir d'un large jeu de réalisations d'une expérience de rupture d'une feuille de papier (102 fronts), nous comparons les exposants estimés dans deux régimes de croissance différents. Les résultats montrent un écart significatif à l'invariance d'échelle et une différence significative entre la valeur des exposants estimés dans le régime de croissance lente (sous-critique) et le régime de croissance rapide.

Abstract – We determine the roughness exponent of fractures using several estimators of scaling laws found in the literature including a recent one: the leaders [1]. Using a large data set for the rupture of a paper sheet (102 fronts), we compare the scaling exponents obtained in two different crack growth regimes. The results show a significant departure from scaling laws and a difference in fracture roughness between the slow (sub-critical) and the fast growth regime.

1 Introduction

Depuis les années 80, les surfaces issues de la rupture des matériaux sont considérées comme des objets autosimilaires [2], présentant une invariance d'échelle caractérisée par un exposant de Hurst, appelé exposant de rugosité dans le domaine de la physique des surfaces. La mesure expérimentale de l'exposant de rugosité des fronts de fractures dans les milieux élastiques désordonnés présente un grand intérêt théorique en permettant de valider ou non les modèles de croissance de fractures [3]. Dans ce contexte, l'existence d'exposants de rugosité universels a été et est toujours débattue [4]. Récemment, plusieurs expériences ont mis en évidence une variation de ces exposants avec la direction de la fracture [5] ou la nature du matériau [6]. D'autre part, la présence d'un effet de quantification à petite échelle, lié à la numérisation des signaux [7], et d'un effet de taille finie [8] des échantillons fracturés rendent difficiles les mesures de l'exposant de rugosité. De plus, les techniques développées dans la communauté de la fracture sont souvent rudimentaires et appliquées parfois sans précautions (plusieurs références dans [3]). Enfin, la plupart des expériences n'ont montré aucune variation de l'exposant de rugosité avec la vitesse de croissance dans les fractures rugueuses [9].

Nous avons mis en évidence récemment qu'il existe des variations de l'exposant de rugosité en fonction du régime de croissance : croissance **sous-critique** (vitesse très faible) ou **rapide** (vitesse plus élevée proche de la vitesse des ondes de Rayleigh) [10]. Dans cet article, nous poursui-

vons cette étude en analysant plus précisément l'influence des paramètres de contrôle de l'expérience et en comparant les résultats obtenus avec les différents estimateurs les plus couramment utilisés.

2 Données expérimentales

Nous déchirons des feuilles de papier ($21 \times 24\text{cm}^2$) à l'aide d'une machine de traction ce qui permet une bonne reproductibilité des expériences [11]. Les échantillons sont placés dans la machine, et après qu'une fracture a été initiée en leur centre, une force constante est appliquée, conduisant à une contrainte locale à la pointe de la fissure sensiblement inférieure à la contrainte de rupture du papier. Du fait d'un processus d'activation thermodynamique [11], la fracture grandit néanmoins, mais très lentement ($10^{-6} - 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$). C'est le régime **sous-critique**. La contrainte (locale) augmentant avec la taille de la fracture puisque la force (globale) est fixée, la fracture atteint finalement une longueur critique l_c où la contrainte locale atteint le seuil de rupture. La fracture se développe alors beaucoup plus rapidement ($10^2 - 10^3 \text{ m.s}^{-1}$). C'est le régime **rapide** où l'instabilité mécanique du système provoque la croissance. Les échantillons *post-mortem* sont ensuite scannés, puis les profils de fracture sont extraits des images. La longueur l_c étant déterminée expérimentalement, nous sommes à même d'extraire les parties sous-critique et rapide d'un front de fracture. Nous disposons de 102 fronts de fracture indépendants obtenus

au cours de quatre séries d'expériences réalisées avec différentes forces appliquées [11]. La résolution du scanner (1600 dpi) a été choisie de manière à ce que la taille d'un pixel ($17,6 \mu m$) corresponde au diamètre des fibres de cellulose, les échelles plus petites n'ayant aucun intérêt. En conséquence, la taille des signaux est d'environ 8000 points pour la partie rapide et 2000 points pour la partie lente. Etant donnée la faible longueur des signaux il apparaît primordial de posséder un large ensemble de réalisations et de vérifier la robustesse des résultats en utilisant différents estimateurs.

3 Analyse multifractale

3.1 Invariance d'échelle

Le phénomène d'invariance d'échelle d'un processus $s(x)$ correspond à une absence d'échelle caractéristique. Les propriétés d'invariance sont couramment définies en introduisant des coefficients multirésolution $T_s(a, x)$ qui dépendent conjointement du temps t et de l'échelle a (voir par exemple [12]). L'invariance d'échelle implique que les moments d'ordre q des coefficients multirésolution obtenus à chaque échelle a se comportent en lois de puissance :

$$M_q(a) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T_X(a, t(k))|^q \sim a^{\zeta(q)}, \quad (1)$$

où n_a désigne le nombre de coefficients à l'échelle a . Le formalisme multifractal relie le spectre des exposants $\zeta(q)$ au spectre de singularité qui décrit de manière statistique la régularité ou rugosité locale du signal étudié [13]. Si le spectre $\zeta(q)$ est linéaire ($\zeta(q) = Hq$), le signal est monofractal et la rugosité est uniforme. On peut alors définir un exposant de rugosité global H . Si le spectre est non linéaire, $\zeta(q) = c_1q - c_2q^2/2 + \dots$, le signal est multifractal et la rugosité évolue en fonction de la position. Le spectre de singularité est alors une fonction concave de moyenne c_1 et d'écart-type c_2 . L'exposant de rugosité global est défini naturellement comme la valeur de la rugosité locale la plus probable $H = c_1$.

L'analyse pratique consiste à mettre en évidence ces lois de puissance et à mesurer les exposants $\zeta(q)$ correspondants. Souvent, cette estimation est réalisée à partir de la mesure de la pente d'une droite observée dans le diagramme $\ln M_q(a)$ versus $\ln a$. Ensuite, un ajustement polynomial $\zeta(q) = c_1q - c_2q^2/2$ est réalisé pour décrire continûment ce spectre et estimer c_1 et c_2 . Une alternative à cette méthode a été introduite récemment : la méthode des log-cumulants [14]. Elle consiste à estimer les coefficients c_i de la fonction $\zeta(q)$ directement à partir du comportement linéaire des cumulants $C_i(a)$ du logarithme de la valeur absolue des coefficients multirésolution. Pour le premier cumulants, on a :

$$C_1(a) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} (\ln |T_X(a, t(k))|)^q \sim c_1 \ln a. \quad (2)$$

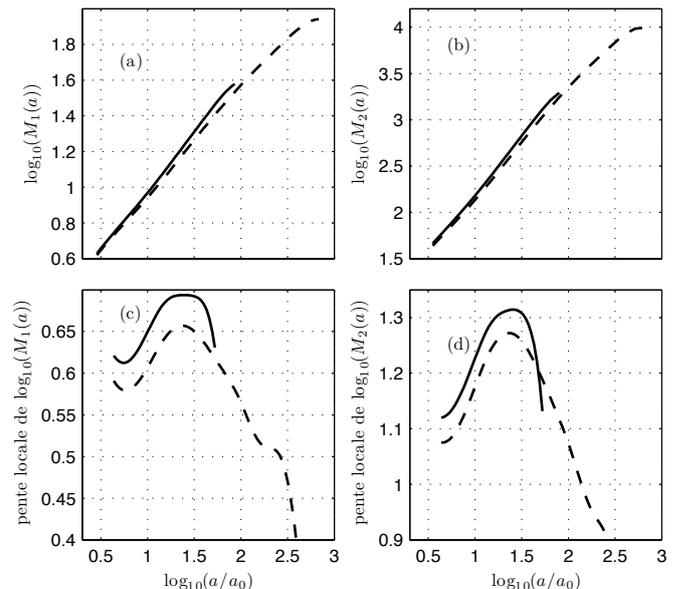


FIG. 1 – (a) et (b) : Logarithme de $M_1(a)$ et $M_2(a)$ moyennés sur l'ensemble des réalisations pour la partie rapide (pointillés) et sous critique (trait plein) en fonction $\log_{10} a$. (c) et (d) : Pentés locales correspondantes. Les résultats sont obtenus en utilisant la TOC.

3.2 Estimateurs

Les coefficients multirésolution les plus utilisés dans l'analyse multifractale reposent sur les coefficients en ondelettes qui se définissent à partir du produit scalaire du signal avec des dilatées (d'un facteur a) et translatées (d'un facteur t), d'une fonction ψ . L'ondelette mère est principalement caractérisée par un entier $N \geq 1$ appelé le nombre de moments nuls. Dans ce travail, nous utiliserons les cinq grandes classes suivantes : (i) les coefficients de la transformée en ondelettes continue (TOC) ; (ii) les coefficients de la transformée en ondelettes discrète (TOD), qui consistent essentiellement en une restriction de ceux de la TOC à une grille dyadique ; (iii) une version squelettisée de la TOC ou coefficients MMTO, développée par A. Arnéodo et largement utilisée (voir par exemple [15]) ; (iv) la méthode des coefficients dominants (CD) définie à partir de la TOD et reposant sur des résultats théoriques récents [1, 16] ; (v) la méthode des fonctions de structure (FS), qui peut être vue comme une TOC avec pour ondelette mère une somme de fonctions de Dirac telle que les coefficients en ondelettes correspondent aux incréments successifs du signal [15].

Pour l'ondelette mère, nous avons choisi trois types de fonctions avec N moments nuls : (i) les dérivées $N + 1$ ième de la Gaussienne pour la TOC et MMTO ; (ii) les ondelettes de Daubechies d'ordre N pour la TOC et CD ; (iii) les incréments d'ordre N pour FS.

Nous estimons les fonctions $M_q(a)$ et $C_1(a)$ puis les coefficients $\zeta(q)$ ($q = 1, 2$), et c_1 par régression linéaire pour chaque front de fracture. Ensuite nous calculons la moyenne et l'écart-type (σ) de ces quantités sur nos N fronts. Les barres d'erreurs dans les figures de ce manuscrit correspondent à l'erreur statistique asymptotique σ/\sqrt{N} .

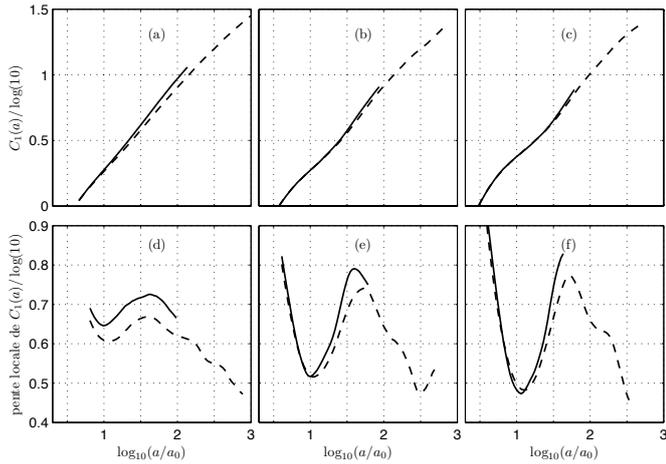


FIG. 2 – Cumulant d'ordre 1 en fonction de $\log_{10}(a/a_0)$ pour la partie rapide (pointillés) et sous-critique (trait plein) pour différents ordre d'ondelette : 1 (a), 2 (b), 3 (c). Les résultats sont obtenus en utilisant la TOC.

4 Estimation de la rugosité

4.1 À partir des moments

Nous montrons les moments d'ordre 1 et 2 moyennés sur l'ensemble des réalisations (fig. 1(a) et (b)), ainsi que leurs pentes locales (fig. 1(c) et (d)) pour les parties lente et rapide. Les erreurs sur l'estimation de la pente locale sont très faibles, de l'ordre de l'épaisseur de la courbe. On observe tout d'abord la présence d'une échelle caractéristique, aux alentours de $\log a/a_0 = 1.5$, soit $500 \mu\text{m}$. Cette échelle est de l'ordre de la longueur caractéristique des fibres. De plus, on voit nettement figure 1 (c) et (d) qu'il existe des exposants différents pour la partie rapide et la partie sous-critique. Néanmoins, la différence entre les pentes locales ne semble pas stable à travers les échelles. On voit aussi que $\zeta(2) \neq 2\zeta(1)$ ce qui conduirait à des exposants de rugosité différents. Ceci pourrait être dû à la présence de multifractalité, comme cela a été récemment suggéré [17]. Dès lors, les moments n'apparaissent pas comme un bon outil pour estimer de façon univoque l'exposant de rugosité. On leur préférera donc dans la suite le cumulant d'ordre 1.

4.2 À partir du cumulant d'ordre 1

Nous comparons figure 2 le cumulant d'ordre 1 pour la partie sous-critique et la partie rapide. L'échelle caractéristique de $500 \mu\text{m}$ est toujours présente. On constate (fig. 2 (a) et (d)) qu'il existe une différence régulière entre les pentes des cumulants des deux régimes, qui ne semble pas dépendre de l'échelle, contrairement à ce qui est observé pour les moments. Ainsi, même si l'invariance d'échelle est imparfaite, il apparaît clairement que l'exposant de rugosité diffère selon le régime de croissance.

On constate aussi que les variations de la pente de $C_1(a)$ sont de plus en plus fortes lorsque l'ordre de l'ondelette augmente (fig. 2 (d), (e), (f)), jusqu'à devenir clairement visibles (fig. 2 (b) et (c)). Les ondelettes d'ordres élevés semblent donc être plus sensibles à l'échelle caractéristique

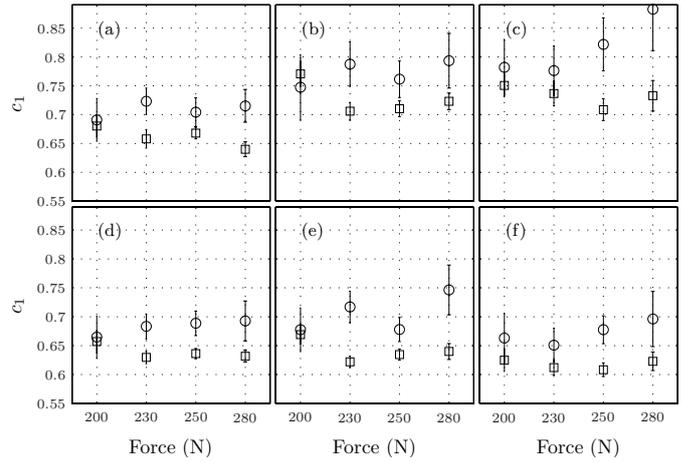


FIG. 3 – Moyenne et écart-type des estimés c_1 pour la partie sous critique (o) et rapide (□) en fonction de la force de traction. Méthode TOC (a, b et c) et MMTO (d, e et f) en utilisant des ondelettes d'ordre 1 (a et d), 2 (b et e) et 3 (c et f).

présente dans les fronts de fracture. Il semble aussi que la différence entre régime sous-critique et régime rapide ne soit effective qu'à partir d'une certaine échelle, qui augmente avec l'ordre de l'ondelette. Nous n'avons pour le moment aucun argument quantitatif permettant d'expliquer ces faits. Ceci nous a guidé lors du choix des échelles à considérer pour l'estimation de c_1 . Nous nous sommes limités aux échelles où la différence était nette pour les trois ordres utilisés ($a \geq 10^{1.4}$).

Afin de tester la robustesse de ce résultat, nous estimons c_1 pour des expériences réalisées à différentes forces, en utilisant les méthodes TOC et MMTO, pour différents ordres d'ondelettes. Pour les quatre forces considérées (fig. 3), l'estimation pour la partie lente et rapide montre une différence très claire entre leurs deux exposants de rugosité, et ceci quel que soit l'ordre de l'ondelette utilisée. De plus, les estimations dépendent peu des paramètres de l'expérience.

Le tableau 1 montre les exposants de rugosité obtenus pour tous les estimateurs utilisés, et ce pour différents ordres. Même si la valeur des coefficients fluctue avec la nature de l'estimateur utilisé, ceux-ci présentent tous une différence claire et systématique entre partie sous-critique et partie rapide. Nous montrons aussi une estimation de cette différence, qui apparaît robuste et peu influencée par la nature de l'estimateur avec une valeur de l'ordre de 0.05.

4.3 Influence de la statistique

La figure 4 présente les résultats obtenus en fonction du nombre de réalisations prises en compte dans l'estimation, en mélangeant toutes les réalisations quels que soient les paramètres expérimentaux. On voit ainsi que lorsque le nombre de réalisations prises en compte dans l'estimation est trop faible, la différence entre les deux exposants de rugosité n'est pas claire, du fait de la grande dispersion des coefficients obtenus pour chaque réalisation. Néanmoins, lorsqu'on prend en compte suffisamment de réalisations (environ 40), l'estimateur converge, et cette différence ressort

		FS	TOC	MMTO	TOD	CD
ordre 1	Sous-critique	0.68 ± 0.02	0.70 ± 0.01	0.68 ± 0.01	0.77 ± 0.03	0.67 ± 0.02
	Rapide	0.64 ± 0.01	0.66 ± 0.01	0.64 ± 0.01	0.65 ± 0.01	0.61 ± 0.01
	Différence	0.05 ± 0.02	0.05 ± 0.02	0.05 ± 0.02	0.12 ± 0.03	0.06 ± 0.02
ordre 2	Sous-critique	0.78 ± 0.02	0.77 ± 0.02	0.69 ± 0.01	0.81 ± 0.04	0.66 ± 0.02
	Rapide	0.70 ± 0.01	0.72 ± 0.01	0.64 ± 0.01	0.69 ± 0.02	0.63 ± 0.01
	Différence	0.08 ± 0.03	0.05 ± 0.02	0.05 ± 0.02	0.12 ± 0.04	0.03 ± 0.02
ordre 3	Sous-critique	0.85 ± 0.03	0.82 ± 0.03	0.67 ± 0.02	0.80 ± 0.06	–
	Rapide	0.73 ± 0.01	0.73 ± 0.01	0.62 ± 0.01	0.70 ± 0.02	0.63 ± 0.01
	Différence	0.12 ± 0.03	0.09 ± 0.03	0.05 ± 0.02	0.10 ± 0.06	–

TAB. 1 – Moyenne et écart-type asymptotique des estimés c_1 obtenus à partir des 102 réalisations pour chaque estimateur. Dans les lignes "Différence", sont donnés la moyenne et l'écart-type asymptotique calculés par la même méthode statistique à partir de la différence des estimés c_1 entre parties sous-critique et rapide.

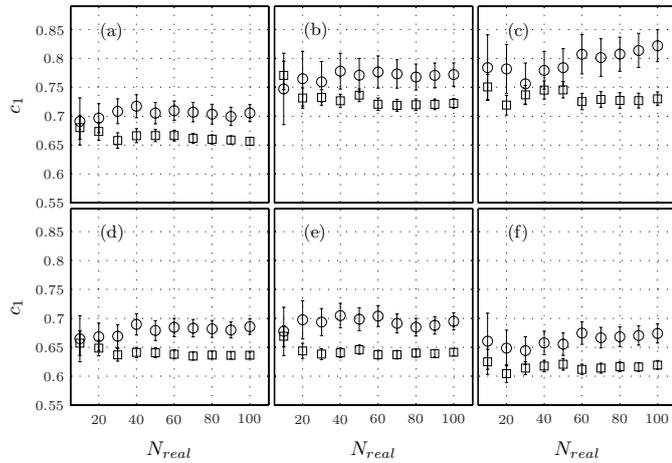


FIG. 4 – Moyenne et écart-type des estimés c_1 pour la partie sous-critique (o) et rapide (\square) en fonction du nombre de réalisations. Méthode TOC (a, b et c) et MMTO (d, e et f) en utilisant des ondelettes d'ordre 1 (a et d), 2 (b et e) et 3 (c et f).

alors nettement. C'est donc grâce à notre large jeu de réalisations que cette différence fine a pu être mise en évidence.

5 Conclusion

Nous avons montré l'existence d'une différence claire entre la rugosité de la partie sous-critique et celle de la partie rapide. Ce résultat remet ainsi encore plus en cause l'existence d'exposants de rugosité universels. L'utilisation des différentes techniques accessibles pour l'analyse de l'invariance d'échelle montre la robustesse de ces résultats. Cette différence s'explique sans doute par des processus physiques très différents : dans le régime sous-critique, la croissance grandit par activation thermique, et est caractérisée par des sauts brusques et de longs temps d'arrêt ; alors que dans le régime rapide, la fracture est instable mécaniquement, et grandit d'un seul coup. Nous montrons aussi que les cumulants doivent être préférés aux moments pour l'estimation de l'exposant de rugosité des fractures. Enfin, nous avons mis en évidence la présence d'une échelle caractéristique, dont l'origine reste à déterminer.

Références

- [1] S. Jaffard, B. Lashermes, and P. Abry, *Wavelet Analysis and Appl.*, Univ. of Macau, China, 2005.
- [2] B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja and A. J. Paullay, *Nature* **308**, 721, 1984.
- [3] M. J. Alava, P. K. V. V. Nukala, and S. Zapperi, *Adv. in Phys.* **55**, 349, 2006.
- [4] E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planès, *Eur. Phys. Lett.* **13**, 73, 1990; E. Bouchaud, *J. Phys. : Condens. Matter* **9**, 4319, 1997.
- [5] L. Ponson, D. Bonamy, and E. Bouchaud, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 035506, 2006.
- [6] I. L. Menezes-Sobrinho, M. S. Couto, and I. R. B. Ribeiro, *Phys. Rev. E* **71**, 066121, 2005.
- [7] S. J. Mitchell, *Phys. Rev. E* **72**, 065103(R), 2005.
- [8] J. M. Lopez, M. A. Rodriguez, and R. Cuerno, *Phys. Rev. E* **56**, 3993, 1997.
- [9] J. Schmittbuhl, and K. J. Måløy, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3888, 1997; P. Daguiet, B. Nghiem, E. Bouchaud, and F. Creuzet, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1062, 1997; J. M. Boffa, C. Allain, R. Chertcoff, J.-P. Hulin, F. Plouraboué, and S. Roux, *Eur. Phys. J. B* **7**, 179, 1999.
- [10] N. Mallick, P.P. Cortet, S. Santucci *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* (in press), 2007.
- [11] S. Santucci, P.P. Cortet, S. Deschanel *et al.*, *Europhys. Lett.* **74**, 595, 2006.
- [12] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, Boston, 1997.
- [13] G. Parisi, and U. Frisch in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics*, ed. M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi, North-Holland, Amsterdam, 84, 1985.
- [14] J. Delour, J. F. Muzy and A. Arneodo, *Eur. Phys. J. B* **23**, 243, 2001.
- [15] J. F. Muzy, E. Bacry et A. Arneodo, *Phys. Rev. E* **47**, 875-884, 1993.
- [16] S. Jaffard, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 72(2), AMS, 91-152, 2004.
- [17] E. Bouchbinder, I. Procaccia, S. Santucci and L. Vanel, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 055509, 2006.

**B.3 Acte de colloque, International Conference
on Fracture 12, 2009**

Aftershocks in thermally activated rupture of indented glass

N. Mallick¹, S. Ciliberto¹, S.G. Roux¹, P. Di Stephano², L. Vanel¹

¹*Université de Lyon, ENS de Lyon, CNRS, France;* ²*Université de Lyon, Institut de Physique Nucléaire de Lyon, France*

Abstract

We study the thermally activated rupture of a glass cylinder indented with a steel bead. Samples are loaded until a macroscopic crack is nucleated and then are left to relax at constant deformation. The slow rupture dynamics that occurs afterwards is monitored by measuring the acoustic emissions, the applied force and the crack size. It is found that the relaxation process is thermally activated and evolves logarithmically in time. We also analyze the statistical properties of acoustic energies and time intervals between events which are power law distributed. This slow rupture dynamics resembles closely the dynamics of aftershocks following an earthquake. A model of thermally activated rupture is proposed to describe the rupture of a brittle material with a spatially heterogeneous strength distribution. The model predicts the same logarithmic slowing down with time than in the experiments.

1. Introduction

Earthquakes have been intensively studied by geophysicists for more than a century. Before and after a main earthquake, foreshocks and aftershocks are observed. The amplitudes of these events are statically distributed according to a power law, the so-called Gutenberg-Richter law. The same kind of distribution is observed for the waiting times between those events. For the foreshocks, one can find an acceleration of the average rate of events, the so-called Andrade law $dn/dt \propto t^{-1}$, and similar law for aftershocks, which corresponds then to a deceleration, the so-called Omori law: $dn/dt \propto t^{-1}$ (in both cases, n stands for the number of events, and the origin of time is taken when the main shock takes place). Although the mechanisms, the scales and the scientific fields involved seem to be very different, there are several analogies between the statistical behaviours of earthquakes and fracture experiments conducted in laboratory on brittle materials. In such experiments, the rupture process is also made of a series of events, or microfractures, and power law distributions for amplitudes and waiting times have been observed in many different materials such as rocks [1], paper [2], polymers [3], wood [4]... On the contrary, Andrade and Omori-like laws were observed mainly in rocks [5][6]. There is also another analogy between those two fields. Whereas seismic waves recording is the main tool used by geologists in order to detect and follow earthquakes, the acoustic waves emitted during a fracture in a lab experiment are also often collected thanks to ultrasonic transducers in order to characterize the rupture dynamics.

In this article, we study a fracture experiment in glass by an indentation process, followed by acoustic emissions. We show that when such a system is relaxing after generation of a significant fracture, several analogies can be observed between the statistical properties of occurring microfractures and the aftershocks of an earthquake. In particular, the system exhibits an Omori law. In order to improve statistics, we introduce an advanced detection technique of acoustic emissions of microfracture detection based on a time-frequency analysis, and discuss how to define correctly the energy of such a microfracture from the acoustic signal. Finally, thanks to a simple fibber-bundle model for which we propose an approximate solution, we show that the Omori law may be seen as a consequence of thermally activated rupture process at constant deformation.

2. Experiment

We realise an indentation of a glass surface with a steel ball (diameter 2mm) pushed by a spring fixed on an endless screw, in order to adjust the loading force, measured by a force sensor. When this force goes above a critical threshold, a conical crack initiates and grows. The ball is at the tip of the cone, whereas the cone basis enlarges and goes deeper in the glass as the force rises up. In order to follow this fracture, we collect the acoustic emissions with a large band (0-2MHz) piezo-electric transducer. The glass is borosilicate and the sample is a cylinder of height 18mm and diameter 15mm. The idea of our experiment is to apply a sufficient force to generate a consequent crack (characteristic scale of about 5mm) by imposing a constant displacement to the whole setup (spring+ball+glass sample), and then to let the system relax. The microfractures that will be detected afterwards will stand for the aftershocks, whereas the initial crack corresponds in our

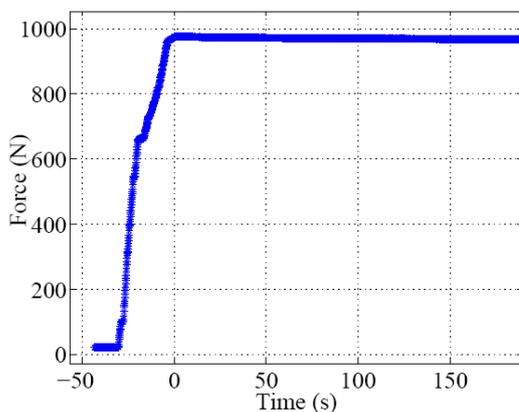


Figure 1: Force vs time during loading.

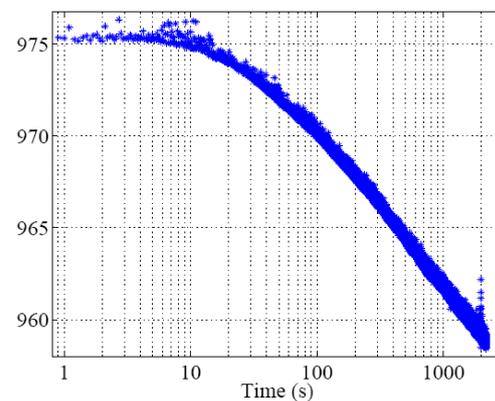


Figure 2: Decreasing of force vs logarithm of time.

One can see in figure 1 the initial loading of the system, up to a plateau value of 950N. At this point we let the system relax at constant deformation. The origin of time will be taken when the force has reached its maximum. If we look more

closely at the plateau on figure 2, we can see that the force is then slightly decreasing with time ($\propto \log(t)$). This is a signature of a slow growth of the crack, which could be due to a thermal activation process already observed in glass that is known to depend on temperature and humidity rate [9].

3. Detection of acoustic emissions

In order to characterize the dynamics of this crack, and more generally in all acoustic emissions experiment, an essential purpose is to detect correctly acoustic events i.e. acoustic signals corresponding to microfractures in the sample, those signal being very weak and polluted by a strong noise. Additionally, in our situation, some fake and intense signals coming from outside were collected. In order to answer to these problems we have built a technique based on a Sliding Fourier Transform (SFT.) which depends on time and frequency. One can see on figure 3 an example of a SFT when an intense microfracture takes place.

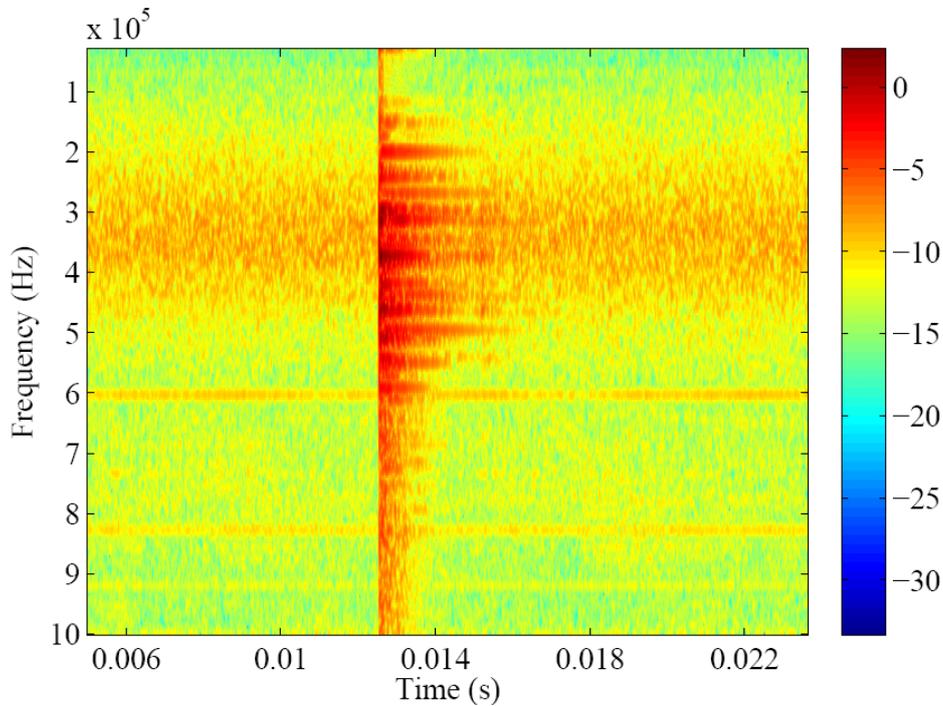


Figure 3: S.F.T. (coloured) vs time (x-axis) and frequency (y-axis). The signal was acquired at 2MHz, the S.F.T. is calculated on a gaussian window of 0.1ms every 10 μ s.

The energy is initially distributed in all frequencies, and then remains only in a few bands before slowly decreasing. Our idea is to use this coloured aspect of acoustic events to detect them, whereas the usual technique is based on a simple thresholding of the amplitude of the signal. Our detection protocol is the following:

1. Acquisition of the noise before loading.

2. Continuous acquisition of the acoustic signal collected with the transducer at a rate of 2MHz.
3. A reference spectrum is calculated as the sum of the average noise spectrum (figure 4) plus m times the noise spectrum standard deviation. In this paper, we chose $m = 10$.
4. Calculation of the S.F.T. of the acoustic signal.
5. Calculation of a "spectral distance" comparing the SFT with the noise. An important point is that only selected frequencies will be taken into account in the calculation. We will focus on the main frequency bands that appear on the average spectrum of acoustic events (figure 5). Here, the distance is the integral on those bands of the signal minus the reference spectrum.
6. Detection of the event by applying a threshold on this spectral distance. With this technique, we are able to cut off fake events, detect weaker events that were masked by the noise (twice more events in total) and access to one more decade in the energy range (see figures 8 and 9).

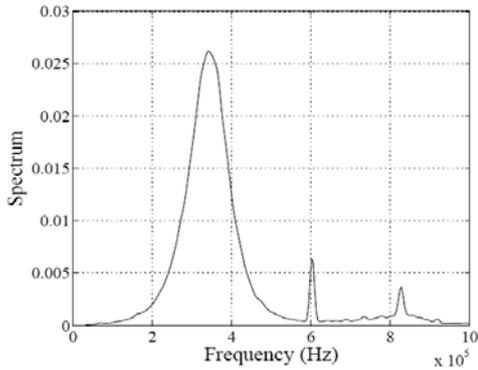


Figure 4: Dimensionless spectrum of the noise vs frequency

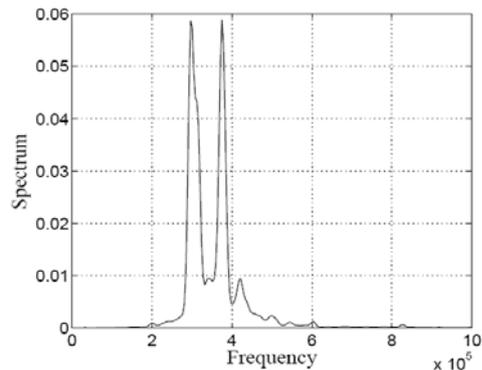


Figure 5: Dimensionless average spectrum of acoustic events.

4. Energy calculation

In acoustic emission based experiments, energy is usually defined as the square of the maximum of the amplitude of signal or integral of the square of acoustic signal over the duration of the event. This assumption is usually not discussed, and leads, as the signal is strongly oscillating (one can see in figure 3 that initially the acoustic event is like a white noise) to a wide dispersion of the energy. In our experiment, we already noticed that the energy rapidly condensed in a few bands, before vanishing. The two main bands (see figure 5) are at 310 and 380 kHz. With a sound speed of about $6000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ in glass, the associated wavelengths associated to each frequency correspond rather well to the two characteristic dimensions of the glass sample (15 and 18mm). This leads us to consider that acoustic waves are reflecting on glass surface, and that the sample is selecting frequencies. This seems to be confirmed by the use of a sample of different sizes. Then, the decrease of energy in a single acoustic event could be due to nonperfect

reflections. Let us assume that the integral of the SFT $a(t)$ over these two frequency bands is exponentially decreasing with a characteristic time τ_1 . The duration τ of an acoustic event is calculated as the time during which $a(t)$ remains above a threshold a_0 . Then the total energy E_{tot} , integral of $a(t)$ over the duration τ of the event, is:

$$a(t) = a_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \quad (1)$$

$$\tau = \tau_1 \ln \frac{a_1}{a_0} \quad (2)$$

$$E_{tot} = \int_0^\tau a(t) dt \quad (3)$$

$$E_{tot} = \tau_1 a_0 \left(\exp\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) - 1 \right) \quad (4)$$

We fit $a(t)$ with equation (1) on figure 6. The result is correct, and the average of τ_1 over all acoustic events is about $150\mu\text{s}$ with a strong dispersion. The small oscillations seen on the graph are at a frequency compatible with reflections on the whole length of the setup. We can also fit directly E_{tot} with equation (4) (see figure 7). The fit is in good agreement with the model, and leads to a value of $218\mu\text{s}$ for τ_1 close to the former one considering the strong dispersion. Thus the total energy E_{tot} might not be such a good candidate for the definition of the energy of the event. In the following we will use the initial energy (maximum of the integral of the SFT over all frequencies). The use in the literature of the squared peak amplitude makes then sense, but the advantage of the SFT is that it smoothes the energy and leads to a weaker dispersion.

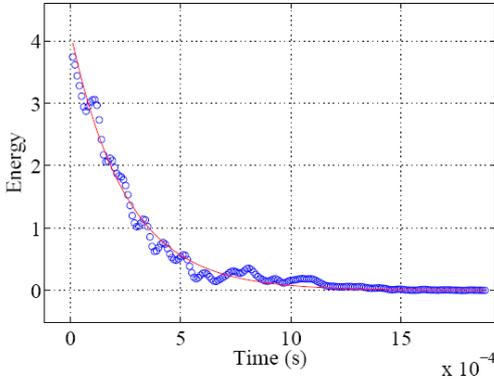


Figure 6: Energy decrease of an event vs time (blue circles) and its fit with an exponential (red line). Only the two main bands were taken into account.

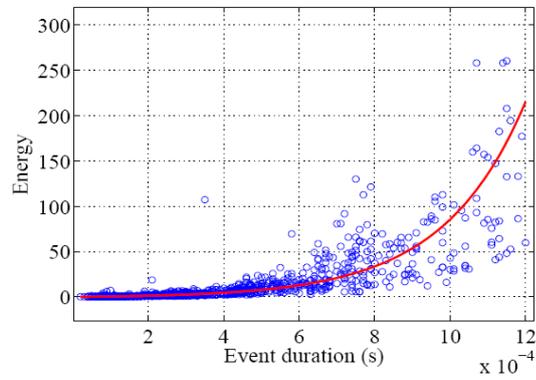


Figure 7: Total energies E_{tot} of acoustic events vs their duration (blue circles), and the fit using equation (4). Only the main frequency bands were taken into account.

5. Results

The results presented here are obtained with 9 different experiments with same conditions and force (about 950 N). We show on figure 8 the cumulative number of acoustic event corresponding to microfractures versus the elapsed time since the main fracture (when the force is at maximum).

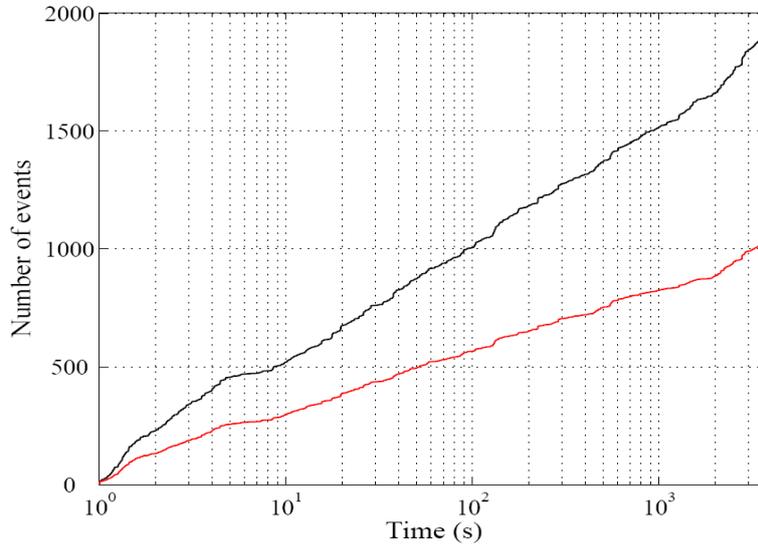


Figure 8: Cumulative number of event vs the logarithm of elapsed time in seconds. The red curve corresponds to the events detected with a thresholding of the amplitude of the signal.

One can see that the cumulative number of events is increasing linearly with the logarithm of time. This means that the rate of events is decreasing with the inverse of time. Then, microfractures in a relaxing experiment of rupture indentation follow an Omori law, like aftershocks after an earthquake. This has been rarely observed in a lab experiment. The fact that the curve is not perfectly straight in the first ten seconds could be due to a cross-over between two mechanisms: thermal activation (for longer times) and mechanical instability of the crack (initially).

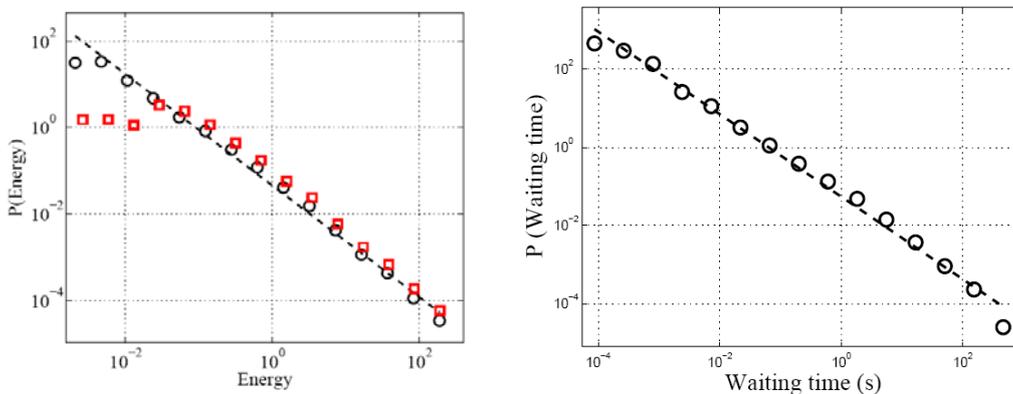


Figure 9: Distribution of the energies and waiting times respectively, in a log-log plot (black circles) and their fit with a power law. The slope is: 1.3 ± 0.05 for

energies and 1.05+/-0.05 for waiting times. For energies, we show the results obtained with a direct thresholding of the amplitude (red squares).

We can also notice that as the force is decreasing with the logarithm of time, it will then linearly decrease with the number of events. We can also look at the distribution of energies and waiting times between events. These distributions are shown on figure 9 respectively. One can see that the energies and waiting times are distributed along power laws. For the energies, the exponent is about 1.3 +/- 0.05 which is close to the values observed in earthquakes aftershocks. For the waiting times, the exponent is about 1.05 +/- 0.05. These exponents are very close to those observed in paper, for example [2].

6. Model

In order to understand the presence of the Omori law, we build a simple fibber-bundle model based on thermal activation, a tool often used to model slow brittle rupture [7][8]. The fibbers are submitted to a fluctuating force, the amplitude of fluctuations being related to thermal noise at constant temperature. Inspired by the fact that the displacement is imposed in our experiment, we submit N parallel fibbers (which are linear springs with same rigidity of 1) to a constant displacement that leads to a constant force per fibber of f_0 . The rupture thresholds f_r of the fibbers is gaussian distributed around 1 with a variance T_d which represents a disorder temperature. Then we add the fluctuating part η of the force per fibber $f = f_0 + \eta$ which is drawn at each time step and each fibber with a gaussian distribution of variance T , that stands for temperature in our model. We count then the number of broken fibbers n with time t (the step duration is 1). We can already notice that the total mean force ($F = f_0 \times (N - n)$) is decreasing linearly with n by construction, as observed experimentally. For one fibber, it is easy to calculate the average time of rupture $\tau(f_r)$, which is the inverse of the probability for the force to overcome the threshold :

$$\tau(f_r) = P^{-1} \quad \text{where} \quad P = \int_{f_r - f_0}^{\infty} p(\eta) d\eta = \int_{f_r - f_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp \frac{-\eta^2}{2T} d\eta$$

Then, all other parameters being fixed, the average time of rupture is a function of the rupture threshold. As a consequence, the distribution of average times of rupture $p_\tau(\tau)$ is then linked to the distribution of thresholds $p_r(f_r)$. We want to compute the statistically averaged evolution of $n(t)$. It is reasonable to say that, for slow dynamics (when $T \ll (1-f_0)^2$) and high disorder ($T_d > T$) every fibber contributed to $n(t)$ by taking its average rupture time to break. Then:

$$n(t) = N \int_0^t p_\tau(\tau) d\tau$$

With the same assumption it is possible to invert $\tau(f_r)$ and find explicitly $p_\tau(\tau)$ and therefore dn/dt :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{N}{t} \sqrt{\frac{T}{T_d}} \frac{1}{2\sqrt{\pi \ln t}} \exp \left[-\frac{(f_0 + \sqrt{2kT \ln t} - f_c)^2}{2kT_d} \right] \quad (5)$$

In equation (5) for long enough times, the main contribution to the variation of dn/dt is the t^{-1} term, the log-terms becoming too slow. This shows how a thermal activation process can lead to an Omori law. In order to test this approximate solution, we compare it to a direct simulation of the model (figure 10). There is a very good agreement between the simulation and the model. We find that dn/dt goes like t^k with k close to 1 (between 0.9 and 1.1 depending on the input parameters). This is the so-called generalized Omori law, introduced in the sixties and observed for aftershocks when going beyond the simple Omori law. We checked that the approximations we made are valid for $T > (1-f_0)^2$ and $Td > T$.

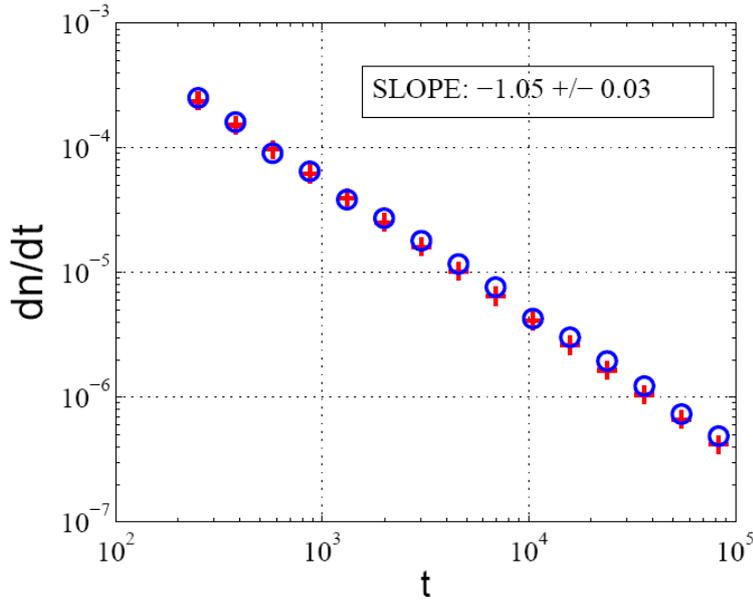


Figure 10: Average ruptures rate versus time (log-log plot) for the approached solution (crosses) and direct simulations (circles). For simulations the points are obtained over 50 realisations of the numerical experiment. The slope is 1.05 ± 0.03 . $N = 1000$, $f_0 = 0.75$, $T = 0.005$, $Td = 0.02$.

7. Conclusion

In this article, we showed that the microfractures occurring at constant deformation in an indentation experiment on glass follow an Omori law, we also computed the distribution of waiting times between events and energies of these events, that are both power laws, as usually observed. We introduced a detection technique that permitted us to improve statistics by detecting weaker events. We also showed how to define properly the energy of an acoustic event, whereas this was an open question. Finally, we established that a thermally activated rupture process can lead to an Omori law. This result could explain our experimental observations.

Bibliography

- [1] P. Diodati, F. Marchesoni, S. Piazza, Acoustic emission from volcanic rocks: An example of self-organized criticality, *Phys. Rev. Lett.*, 67 {17} (1991), 2239-2243.
- [2] L. I. Salminen, A. I. Tolvanen, and M. J. Alava, Acoustic Emission from Paper Fracture, *Phys. Rev. Lett.*, 89 (18) (2002), 185503-7.
- [3] S. Deschanel, L. Vanel, G. Vigier, N. Godin, S. Ciliberto, Statistical properties of microcracking in polyurethane foams under tensile test, influence of temperature and density, *Int. Jour. of Frac.*, 140 (1-4) (2006), 87-98.
- [4] A. Garcimartin, A. Guarino, L. Bellon, S. Ciliberto, Statistical Properties of Fracture Precursors, *Phys. Rev. Lett.*, 79 {17} (1997), 3202-3205
- [5] A. Schubnel, B. Thompson, J. Fortin, Y. Gueguen, R.P. Young, Premonitory activity, rupture propagation, and aftershocks, *Geophys. Res. Lett.*, 34 (19) (2007).
- [6] Ojala, I. O., I. G. Main, and B. T. Ngwenya (2004), Strain rate and temperature dependence of Omori law scaling constants of AE data: Implications for earthquake foreshock-aftershock sequences, *Geophys. Res. Lett.*, 31 (24) (2004).
- [7] S. Roux, Thermally activated breakdown in the fiber-bundle model, *Phys. Rev. E*, 62 {5} (2000), 6164-6169
- [8] A. Politi, S. Ciliberto, R. Scoretti, Failure time in the fiberbundle mode with thermal noise and disorder, *Phys. Rev. E*, 66 {2} (2002), 26107-13.
- [9] S.M. Wiederhorn, Subcritical crack growth in ceramics, in R. C. Bradt; F. F. Lange, D. P. H. Hasselman, ed., 'Fracture Mechanics of Ceramics, (Plenum; New York), pp. 613 (1974).

Bibliographie

- [1] D. BONAMY, “Intermittency and roughening in the failure of brittle heterogeneous materials”, *Journal of Physics D : Applied Physics* **42**, 214014 (21pp) (2009).
- [2] B. GUTENBERG ET C. F. RICHTER, “Frequency of earthquakes in California”, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **34**, 185 (1944).
- [3] H. KANAMORI, “The Energy Release in Great Earthquakes”, *J. Geophys. Res.* **82**, (1977).
- [4] T. UTSU, “Representation and Analysis of the Earthquake Size Distribution : A Historical Review and Some New Approaches”, *Pure and Applied Geophysics* **155**, 509 (1999).
- [5] F. OMORI, “On the aftershocks of earthquakes”, *J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo* **7**, 111 (1894).
- [6] T. UTSU, “A statistical study on the occurrence of aftershocks”, *Geophys. Mag.* **30**, 521 (1961).
- [7] T. UTSU, Y. OGATA, ET R. MATSUURA, “The centenary of the Omori formula for a decay law of aftershock activity”, *Journal of physics of earth* **43**, 1 (1995).
- [8] D. SORNETTE ET G. OUILLON, “Multifractal Scaling of Thermally Activated Rupture Processes”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 038501 (2005).
- [9] F. LILLO ET R. N. MANTEGNA, “Power-law relaxation in a complex system : Omori law after a financial market crash”, *Phys. Rev. E* **68**, 016119 (2003).
- [10] S. ABE ET N. SUZUKI, “Omori’s law in the Internet traffic”, *EPL (Europhysics Letters)* **61**, 852 (2003).
- [11] M. P. CIAMARRA, A. CONIGLIO, ET L. DE ARCANGELIS, “Correlations and Omori law in spamming”, *EPL (Europhysics Letters)* **84**, 28004 (5pp) (2008).
- [12] P. BAK, K. CHRISTENSEN, L. DANON, ET T. SCANLON, “Unified Scaling Law for Earthquakes”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 178501 (2002).
- [13] ÁLVARO CORRAL, “Universal Earthquake-Occurrence Jumps, Correlations with Time, and Anomalous Diffusion”, *Physical Review Letters* **97**, 178501 (2006).

- [14] J. DAVIDSEN ET C. GOLTZ, “Are seismic waiting time distributions universal?”, *Geophysical research letters* **31**, (2004).
- [15] J. DAVIDSEN, S. STANCHITS, ET G. DRESEN, “Scaling and Universality in Rock Fracture”, *Physical Review Letters* **98**, 125502 (2007).
- [16] T. HIRABAYASHI, K. ITO, ET T. YOSHI, “Multifractal analysis of earthquakes”, *Pure and applied geophysics* **138**, 591 (1992).
- [17] B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature, Solide state science series*, second éd. (W. H. Freeman, San Francisco, 1982).
- [18] K. MOGI, “Study of elastic shocks caused by the fracture of heterogeneous materials and its relations to earthquake phenomena”, *Bulletin of the earthquake research institute* **40**, 125 (1962).
- [19] C. SCHOLZ, “Frequency-magnitude relation of microfracturing in rock and its relation to earthquakes”, *Bulletin of the seismological society of America* **58**, 399 (1968).
- [20] T. HIRATA, “Omori’s Power Law Aftershock Sequences of Microfracturing in Rock Fracture Experiment”, *J. Geophys. Res.* **92**, (1987).
- [21] I. O. OJALA, I. G. MAIN, ET B. T. NGWENYA, “Strain rate and temperature dependence of Omori law scaling constants of AE data : Implications for earthquake foreshock-aftershock sequences”, *Geophys. Res. Lett.* **31**, (2004).
- [22] A. SCHUBNEL, B. D. THOMPSON, J. FORTIN, Y. GUÉGUEN, ET R. P. YOUNG, “Fluid-induced rupture experiment on Fontainebleau sandstone : Premonitory activity, rupture propagation, and aftershocks”, *Geophys. Res. Lett.* **34**, (2007).
- [23] A. GARCIMARTÍN, A. GUARINO, L. BELLON, ET S. CILIBERTO, “Statistical Properties of Fracture Precursors”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3202 (1997).
- [24] S. DESCHANEL, L. VANEL, N. GODIN, G. VIGIER, ET S. CILIBERTO, “Experimental study of crackling noise : conditions on power law scaling correlated with fracture precursors”, *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **09**, P01018 (13pp) (2009).
- [25] L. I. SALMINEN, A. I. TOLVANEN, ET M. J. ALAVA, “Acoustic Emission from Paper Fracture”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 185503 (2002).
- [26] G. NICCOLINI, G. DURIN, A. CARPINTERI, G. LACIDOGNA, ET A. MANUELLO, “Crackling noise and universality in fracture systems”, *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **09**, 1023 (2009).
- [27] G. NICCOLINI, F. BOSIA, A. CARPINTERI, G. LACIDOGNA, A. MANUELLO, ET N. PUGNO, “Self-similarity of waiting times in fracture systems”, *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* **80**, 026101 (2009).

- [28] K. MOGI, “Source locations of elastic shocks in the fracturing process in rocks”, *Bulletin of the earthquake research institute* **46**, 1103 (1968).
- [29] J. ASTROM, P. D. STEFANO, F. PROEBST, L. STODOLSKY, ET J. TIMONEN, “Brittle fracture down to femto-Joules – and below”, *arXiv.org :0708.4315* (2007).
- [30] M. BRAVIN *et al.*, “The CRESST dark matter search”, *Astrophysical particles* **12**, 107 (1999).
- [31] J. ÅSTRÖM *et al.*, “Fracture processes observed with a cryogenic detector”, *Physics Letters A* **356**, 262 (2006).
- [32] A. POLITI, S. CILIBERTO, ET R. SCORRETTI, “Failure time in the fiber-bundle model with thermal noise and disorder”, *Phys. Rev. E* **66**, 026107 (2002).
- [33] S. SANTUCCI, L. VANEL, ET S. CILIBERTO, “Subcritical Statistics in Rupture of Fibrous Materials : Experiments and Model”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 095505 (2004).
- [34] K. J. MÅLØY, S. SANTUCCI, J. SCHMITTBUHL, ET R. TOUSSAINT, “Local Waiting Time Fluctuations along a Randomly Pinned Crack Front”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 045501 (2006).
- [35] B. B. MANDELBROT, P. D. E., ET P. A. J., “Fractal character of fracture surfaces of metals”, *Nature* **308**, 721 (1984).
- [36] B. MANDELBROT, “Fractal analysis and synthesis of fracture surface roughness and related forms of complexity and disorder”, *Advances in Fracture Research* **13** (2006).
- [37] E. BOUCHAUD, “Scaling properties of cracks”, *Journal of Physics : Condensed Matter* **9**, 4319 (1997).
- [38] E. BOUCHAUD, G. LAPASSET, ET J. PLANES, “Fractal Dimension of Fractured Surfaces : A Universal Value?”, *Europhysics Letters* **13**, 73 (1990).
- [39] K. MAALØY, A. HANSEN, E. HINRICHSEN, ET S. ROUX, “Experimental measurements of the roughness of brittle cracks”, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 213 (1992).
- [40] I. L. MENEZES-SOBRINHO, M. S. COUTO, ET I. R. B. RIBEIRO, “Anisotropy in rupture lines of paper sheets”, *Phys. Rev. E* **71**, 066121 (2005).
- [41] L. PONSON, D. BONAMY, ET E. BOUCHAUD, “Two-Dimensional Scaling Properties of Experimental Fracture Surfaces”, *Physical Review Letters* **96**, 035506 (2006).
- [42] E. BOUCHBINDER, I. PROCACCIA, ET S. SELA, “Disentangling Scaling Properties in Anisotropic Fracture”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 255503 (2005).

- [43] A. S. BALANKIN, O. SUSARREY, ET J. MÁRQUEZ GONZÁLES, “Scaling Properties of Pinned Interfaces in Fractal Media”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 096101 (2003).
- [44] J. M. LÓPEZ, M. A. RODRÍGUEZ, ET R. CUERNO, “Superroughening versus intrinsic anomalous scaling of surfaces”, *Phys. Rev. E* **56**, 3993 (1997).
- [45] S. MOREL, J. SCHMITTBUHL, E. BOUCHAUD, ET G. VALENTIN, “Scaling of Crack Surfaces and Implications for Fracture Mechanics”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1678 (2000).
- [46] F. CÉLARIÉ, S. PRADES, D. BONAMY, L. FERRERO, E. BOUCHAUD, C. GUILLOT, ET C. MARLIÈRE, “Glass Breaks like Metal, but at the Nanometer Scale”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 075504 (2003).
- [47] J. SCHMITTBUHL ET K. MAALOY, “Direct Observation of a Self-Affine Crack Propagation”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3888 (1997).
- [48] J. M. BOFFA, C. ALLAIN, R. CHERTCOFF, J. P. HULIN, F. PLOURABOUÉ, ET S. ROUX, “Roughness of sandstone fracture surfaces : Profilometry and shadow length investigations”, *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* **7**, 179 (1999).
- [49] P. DAGUIER, B. NGHIEM, E. BOUCHAUD, ET F. CREUZET, “Pinning and Depinning of Crack Fronts in Heterogeneous Materials”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1062 (1997).
- [50] J. BOUDET, S. CILIBERTO, ET V. STEINBERG, “Dynamics of Crack Propagation in Brittle Materials”, *J. Phys. II France* **6**, 1493 (1996).
- [51] A. S. BALANKIN, O. SUSARREY, ET A. BRAVO, “Self-affine nature of the stress-strain behavior of thin fiber networks”, *Phys. Rev. E* **64**, 066131 (2001).
- [52] M. J. ALAVA, P. K. NUKALA, ET S. ZAPPERI, “Statistical models of fracture”, *Advances in physics* **55**, (2006).
- [53] E. BOUCHBINDER, I. PROCACCIA, S. SANTUCCI, ET L. VANEL, “Fracture Surfaces as Multiscaling Graphs”, *Physical Review Letters* **96**, 055509 (2006).
- [54] A.-L. BARABÁSI, R. BOURBONNAIS, M. JENSEN, J. KERTÉSZ, T. VICSEK, ET Y.-C. ZHANG, “Multifractality of growing surfaces”, *Phys. Rev. A* **45**, R6951 (1992).
- [55] P. BAK ET C. TANG, “Earthquakes as a self-organised critical phenomenon”, *Journal of geophysical research-solid earth* **94**, 15635 (1989).
- [56] A. SORNETTE ET D. SORNETTE, “Self-organized criticality and earthquakes”, *Europhysics letters* **9**, 197 (1989).
- [57] Y. OGATA, “Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point-processes”, *Journal of american statistical association* **83**, 9 (1988).

- [58] A. HELMSTETTER ET D. SORNETTE, “Subcritical and supercritical regimes in epidemic models of earthquake aftershocks”, *Journal of geophysical research - Solid earth* **107**, (2002).
- [59] A. SAICHEV ET D. SORNETTE, “Universal Distribution of Interearthquake Times Explained”, *Physical Review Letters* **97**, 078501 (2006).
- [60] S. ROUX, “Thermally activated breakdown in the fiber-bundle model”, *Phys. Rev. E* **62**, 6164 (2000).
- [61] A. SAICHEV ET D. SORNETTE, “Andrade, Omori, and time-to-failure laws from thermal noise in material rupture”, *Phys. Rev. E* **71**, 016608 (2005).
- [62] P.-P. CORTET, L. VANEL, ET S. CILIBERTO, “Super-Arrhenius dynamics for sub-critical crack growth in two-dimensional disordered brittle media”, *EPL (Europhysics Letters)* **74**, 602 (2006).
- [63] Y. MORENO, A. CORREIG, J. GOMEZ, ET A. PACHEDO, “A model for complex aftershock sequences”, *Journal of geophysical research* **106**, 6609 (2001).
- [64] S. SANTUCCI, *Croissance lente thermiquement activée et piégeage d’une fissure dans les matériaux structurés à une échelle mésoscopique : expériences et modèles*, Ph.D. thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2004.
- [65] P. CORTET, *Croissance lente de fissures : de la fragilité à la complexité*, Ph.D. thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2007.
- [66] B. LAWN, *Fracture of brittle solids*, *Solide state science series*, second éd. (Cambridge University Press, 1993).
- [67] H. H. HERTZ, *Hertz’s miscellaneous papers*, second éd. (Macmillan, London, 1896).
- [68] L. D. LANDAU, *Mécanique*, second éd. (MIR, 1963).
- [69] A. MAREC, J.-H. THOMAS, ET R. EL GUERJOUA, “Discrimination des processus d’endommagement de matériaux composites : étude multivariable et transformée en ondelettes de signaux d’émission acoustique”, (2007).
- [70] M. BASSEVILLE, “Distance measures for signal processing and pattern recognition”, *Signal Processing* 349 (1989).
- [71] I. OJALA, *Stress corrosion crack growth in porous sandstones*, Ph.D. thesis, University of Edimburgh, 2003.
- [72] L. I. SALMINEN, J. M. PULAKKA, J. ROSTI, M. J. ALAVA, ET K. J. NISKANEN, “Crackling noise in paper peeling”, *EPL (Europhysics Letters)* **73**, 55 (2006).
- [73] B. VONNEGUT ET J. GLATHART, “The effect of temperature on the strength and fatigue of glass”, *Journal of applied physics* **17**, 1082 (1946).

- [74] F. CREAMER ET C. KISSLINGER, "The relation between temperature and the Omori decay parameter for aftershock sequences near Japan", *EOS* **74**, (1993).
- [75] G. PARISI ET U. FRISCH, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics*, edited by M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- [76] B. MANDELBROT, "Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier", *J. Fluid Mech.* **62**, 331 (1974).
- [77] V. VENUGOPAL, S. ROUX, E. FOUFOULA-GEORGIU, ET A. ARNEODO, "Revisiting multifractality of high-resolution temporal rainfall using a wavelet-based formalism", *Water Resources Research* **42**, (2006).
- [78] S. JAFFARD, "Wavelet techniques in multifractal analysis", *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **72**, 91 (2004).
- [79] M. H. A. ARNEODO, G. GRASSEAU, "Wavelet transform of multifractals", *Phys. Rev. Lett.* **61**, (1988).
- [80] L. CHEVILLARD, S. G. ROUX, E. LEVÊQUE, N. MORDANT, J.-F. PINTON, ET A. ARNEODO, "Lagrangian Velocity Statistics in Turbulent Flows : Effects of Dissipation", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 214502 (2003).
- [81] L. CHEVILLARD, S. G. ROUX, E. LÉVÊQUE, N. MORDANT, J.-F. PINTON, ET A. ARNEODO, "Intermittency of Velocity Time Increments in Turbulence", *Phys. Rev. Lett.* **95**, 064501 (2005).
- [82] B. CASTAING, Y. GAGNE, ET M. MARCHAND, "Log-similarity for turbulent flows", *Physica D* **68**, 387 (1993).
- [83] J. DELOUR, J. MUZY, ET A. ARNEODO, "Intermittency of 1d velocity spatial profiles in turbulence : A magnitude cumulant analysis", *Euro. Phys. Jour. B* **23**, 243 (2001).
- [84] S. MALLAT, *A Wavelet Tour of Signal Processing* (Academic, Boston, 1997).
- [85] L. I. SALMINEN, M. J. ALAVA, ET K. J. NISKANEN, "Analysis of long crack lines in paper webs", *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* **32**, 369 (2003).
- [86] J. SCHMITTBUHL, J.-P. VILOTTE, ET S. ROUX, "Reliability of self-affine measurements", *Phys. Rev. E* **51**, 131 (1995).
- [87] I. SIMONSEN, A. HANSEN, ET O. M. NES, "Determination of the Hurst exponent by use of wavelet transforms", *Phys. Rev. E* **58**, 2779 (1998).
- [88] J. MUZY, E. BACRY, ET A. ARNEODO, "The multifractal formalism revisited with wavelets", *International journal of bifurcation and chaos* **4**, 245 (1994).

-
- [89] D. VEITCH ET P. ABRY, "A wavelet-based joint estimator of the parameters of long-range dependence", *IEEE Trans. on Info. Theory* **45**, 878 (1999).
- [90] B. AUDIT, E. BACRY, J. MUZY, ET A. ARNEODO, "Wavelet-based estimators of scaling behavior", *IEEE Trans. Inform. Theory* **48**, 2938 (2002).
- [91] S. ROUX, B. LASHERMES, P. ABRY, ET S. JAFFARD, "Contributions à l'étude des performances statistiques des estimateurs multifractals", *XXième colloque GRETSI, Louvaine la Neuve* (2005).
- [92] H. WENDT, S. ROUX, ET P. ABRY, "Impact of data quantization on empirical multifractal analysis", *IEEE International Conference On Acoustics, Speech, And Signal Processing* (2007).
- [93] S. SANTUCCI, P.-P. CORTET, S. DESCHANEL, L. VANEL, ET S. CILIBERTO, "Subcritical crack growth in fibrous materials", *EPL (Europhysics Letters)* **74**, 595 (2006).
- [94] S. J. MITCHELL, "Discontinuities in self-affine functions lead to multiaffinity", *Phys. Rev. E* **72**, 065103 (2005).
- [95] E. KATZAV, M. ADDA-BEDIA, ET B. DERRIDA, "Fracture surfaces of heterogeneous materials : A 2D solvable model", *EPL (Europhysics Letters)* **78**, 46006 (5pp) (2007).
- [96] M. MARDER ET J. FINEBERG, "How Things Break", *Physics Today* **49**, 24 (1996).
- [97] C. E. INGLIS, *Trans. Inst. Naval Archit.* **55**, (1913).
- [98] G. R. IRWIN, *Fracture : Handbuch der physik*, second éd. (Springer-Verlag, Berlin, 1958).
- [99] M. KANINEN ET C. POPELAR, *Advanced fracture mechanics*, second éd. (Oxford University Press, 1985).
- [100] S. ZHURKOV, "Kinetic concept on stengh of solids", *International journal of fracture mechanics* **1**, (1965).

