

# Table des matières

<b>2</b>	<b>Distributions fractales : méthodes d'analyse basées sur la transformation en ondelettes</b>	<b>9</b>
2.1	Formalisme multifractal . . . . .	12
2.1.1	Dimensions fractales d'ensembles . . . . .	12
2.1.2	Spectre des singularités de mesures fractales . . . . .	13
2.1.3	Formalisme multifractal : spectre $\tau(q)$ et dimensions fractales généralisées . . . . .	17
2.1.4	Processus aléatoires . . . . .	24
2.2	Fonctions fractales et multifractales . . . . .	30
2.2.1	Exposant de rugosité . . . . .	32
2.2.2	La classe des signaux Browniens fractionnaires . . . . .	33
2.2.3	Exposant de Hölder et fonctions multifractales . . . . .	37
2.3	La méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes : un formalisme multifractal pour les distributions . . . . .	43
2.3.1	La transformée en ondelettes . . . . .	43
2.3.2	Transformation en ondelettes et analyse des singularités . . . . .	46
2.3.3	Un formalisme multifractal pour les distributions basé sur l'analyse en ondelettes . . . . .	52
2.4	La méthode M.M.T.O. : une généralisation des algorithmes de comptage de boîtes et de la méthode des fonctions de structure . . . . .	56
2.5	Quelques exemples d'application de la méthode M.M.T.O. . . . .	62
2.5.1	Signaux présentant des exposants de Hölder supérieurs à 1 . . . . .	62
2.5.2	Signaux présentant des exposants de Hölder négatifs . . . . .	65
2.5.3	Modèles log-Poisson et log-normal . . . . .	68
2.6	Formalisme multifractal "grand canonique" . . . . .	71

<b>3</b>	<b>Etude statistique de signaux de vitesse turbulents à l'aide de la méthode M.M.T.O. : mise en évidence d'un processus de cascade non invariant d'échelle</b>	<b>75</b>
3.1	Introduction . . . . .	77
3.1.1	Equations de Navier-Stokes . . . . .	77
3.1.2	Théorie de Kolmogorov (K41) et hypothèse de similarité locale de Kolmogorov-Obukhov (KO62) . . . . .	79
3.1.3	La description multifractale de Frisch et Parisi . . . . .	83
3.1.4	Auto-Similarité Etendue (A.S.E.) . . . . .	84
3.2	Présentation du signal de vitesse étudié . . . . .	85
3.2.1	Conditions expérimentales . . . . .	85
3.2.2	Spectre de puissance . . . . .	87
3.3	Analyse en ondelettes du signal de vitesse de Modane : comparaison des fonctions de partition continues et de la méthode M.M.T.O. . . . .	90
3.3.1	Fonctions de partition continues . . . . .	90
3.3.2	Méthode M.M.T.O. : mise en évidence d'une dépendance suivant l'ondelette analysatrice . . . . .	104
3.4	La méthode du propagateur . . . . .	116
3.4.1	Méthode de calcul . . . . .	116
3.4.2	Applications . . . . .	120
3.5	Estimation du propagateur de signaux de vitesse turbulents expérimentaux : mise en évidence d'un processus de cascade non invariant d'échelle .	130
3.6	Discussion . . . . .	144
<b>4</b>	<b>Analyse multifractale de la dissipation d'énergie : évidences en défaveur de l'hypothèse de Kolmogorov-Obukhov KO62</b>	<b>146</b>
4.1	Introduction . . . . .	148
4.2	Analyse multifractale du champ de dissipation de l'énergie à l'aide de la méthode M.M.T.O. : remise en cause de l'invariance d'échelle . . . . .	152
4.2.1	Définition . . . . .	152
4.2.2	Application de la méthode M.M.T.O. . . . .	154
4.3	Estimation du propagateur du champ de dissipation d'énergie : mise en évidence du caractère non auto-similaire du processus de cascade . . . . .	176
4.3.1	Propagateur de la dissipation d'énergie du signal de Modane ( $R_\lambda = 3050$ ) . . . . .	176

4.3.2	Propagateur de la dissipation d'énergie du jet turbulent ( $R_\lambda = 835$ )	182
4.4	Evidences expérimentales de la non validité de l'hypothèse de similarité locale de Kolmogorov-Obukhov KO62 . . . . .	191
4.4.1	Comparaison des propagateurs du champ de vitesse et du champ de dissipation . . . . .	191
4.4.2	Analyse multifractale comparative de la vitesse et de la dissipation	193
4.4.3	Comparaison du comportement dans les échelles des fonctions de partition de la vitesse et de la dissipation . . . . .	196
4.4.4	Etude des densités de probabilité des incréments de la vitesse conditionnés par la dissipation . . . . .	200
4.5	Discussion . . . . .	202
<b>5</b>	<b>Détection des filaments de haute vorticité dans les signaux de pression turbulents</b>	<b>204</b>
5.1	Introduction . . . . .	206
5.2	Identification des filaments de pression . . . . .	209
5.2.1	Identification visuelle . . . . .	213
5.2.2	Identification des filaments par méthode de seuillage . . . . .	214
5.2.3	Identification des filaments à partir de leurs propriétés espace-échelles	216
5.3	Méthode M.M.T.O., propagateur et analyse multifractale des fluctuations de pression . . . . .	228
5.3.1	Méthode M.M.T.O. . . . .	231
5.3.2	Propagateur du champ de pression . . . . .	240
5.4	Etude statistique des filaments à l'aide de la transformation en ondelettes .	247
5.4.1	Vitesse d'advection des filaments . . . . .	247
5.4.2	Taille spatiale du coeur des filaments . . . . .	252
5.4.3	Temps d'attente entre deux filaments . . . . .	253
5.5	Corrélations entre les signaux de vitesse et de pression . . . . .	255
5.5.1	Vitesse orthoradiale du vortex de Burgers . . . . .	256
5.5.2	Profil expérimental de la vitesse orthoradiale d'un filament . . . . .	262
5.5.3	Corrélations entre les exposants de Holder des signaux de vitesse et de pression : application du formalisme multifractal grand-canonique	263
5.6	Discussion . . . . .	267

A Cascade abstraite : méthode de construction de processus auto-similaires sur des bases d'ondelettes orthogonales	269
--	-----

## Chapitre 2

Distributions fractales :  
méthodes d'analyse basées  
sur la transformation en ondelettes



La notion de fractal, introduite par Mandelbrot<sup>[53]</sup> dans les années 70, permet de désigner des objets qui manifestent un comportement très irrégulier et qui ne possèdent aucune échelle de longueur caractéristique. Plus précisément, cette notion désigne des objets dont la structure est la même à toute échelle, c'est-à-dire que l'objet est invariant (éventuellement dans un sens statistique) par un certain nombre d'opérations de similitude qui sont essentiellement des translations, des rotations et des dilatations<sup>[54]–[56]</sup>. Ces propriétés d'autosimilarité impliquent un caractère très singulier que les mathématiciens et physiciens théoriciens ont essayé de décrire par différents concepts et outils.

Ce premier chapitre est consacré essentiellement à la définition de ces outils théoriques et numériques. Après avoir passé en revue les définitions élémentaires et les notions de base qui caractérisent les ensembles et plus généralement les mesures fractales<sup>[53]–[61],[193]–[195]</sup>, nous introduisons dans la section 2.1 le formalisme multifractal<sup>[58]–[66]</sup> proposé originellement par Mandelbrot<sup>[57]</sup> pour décrire de manière statistique le caractère singulier des mesures fractales. Dans la section 2.2, nous présentons les fonctions fractales<sup>[53],[196]–[203]</sup> ainsi que les principales quantités qui les caractérisent<sup>[204],[205]</sup>. Nous exposons ensuite la méthode des fonctions de structure<sup>[26],[67]</sup> qui adapte le formalisme multifractal à l'étude des fonctions. Cette méthode a été proposée par Frisch et Parisi<sup>[67]</sup> dans le cadre de l'étude de la turbulence pleinement développée. Comme nous le verrons, cette méthode ne constitue en fait qu'une transposition relativement restreinte de l'attirail théorique développé pour décrire les mesures. Nous présentons dans la section 2.3 la transformée en ondelettes introduite par J.Morlet<sup>[75]–[77]</sup> pour l'étude de signaux sismiques combinant des échelles très différentes. Cette méthode qui déploie en quelque sorte le signal dans le plan espace-échelle permet l'étude locale des singularités du signal<sup>[81],[90]–[92]</sup>. Nous exposons ensuite la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes<sup>[93]–[101]</sup> (méthode M.M.T.O.) qui généralise le formalisme multifractal à toutes les distributions. La puissance de cette méthode vient de la liberté de choix de la fonction analysatrice qui permet d'englober, par un choix adéquat de cette fonction, les méthodes classiques telles que les algorithmes de comptage de boîtes<sup>[56],[62],[66],[83],[206]–[213]</sup> et la méthode des fonctions de structure<sup>[26],[67]</sup>.

## 2.1 Formalisme multifractal

### 2.1.1 Dimensions fractales d'ensembles

La notion usuelle de dimension d'un ensemble est celle de dimension topologique  $d_T$  qui correspond au nombre de degrés de liberté qui caractérisent la position d'un point dans cet ensemble. Cette dimension ne peut prendre que des valeurs entières et strictement positives. Le problème d'une définition précise de la dimension est posé dès la fin du XIXème siècle par le mathématicien G.Peano<sup>[193]</sup> qui construit une courbe qui "recouvre" uniformément le plan : un ensemble de dimension topologique 2 est donc mis en correspondance avec la courbe de Peano de dimension topologique 1. En 1919, Hausdorff<sup>[194]</sup> propose une définition de la dimension basée sur une généralisation de la notion de mesure de Lebesgue. Soit  $\mathcal{S}$  un ensemble quelconque dans un espace métrique ( $\mathbb{R}^n$  par exemple). On définit la mesure de  $\mathcal{S}$  par<sup>[54],[214],[215]</sup> :

$$l_\delta(\mathcal{S}) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{\mathcal{B}_i \in \mathcal{K}(\epsilon)} |\mathcal{B}_i|^\delta . \quad (2.1)$$

La borne inférieure étant prise sur tous les recouvrements  $\mathcal{K}(\epsilon)$  de l'ensemble  $\mathcal{S}$  par des boules de diamètre  $|B_i| \leq \epsilon$ . La dimension de Hausdorff de  $\mathcal{S}$ ,  $d_H(\mathcal{S})$  est définie comme l'unique valeur de  $\delta$  telle que  $l_\delta(\mathcal{S})$  soit finie :

$$\begin{cases} \delta > d_H(\mathcal{S}) \Rightarrow l_\delta(\mathcal{S}) = 0 , \\ \delta < d_H(\mathcal{S}) \Rightarrow l_\delta(\mathcal{S}) = +\infty . \end{cases} \quad (2.2)$$

La dimension de Hausdorff est donc la valeur de  $\delta$  pour laquelle la " $\delta$  - longueur" de l'ensemble est finie (non nulle). Cette dimension peut prendre des valeurs non entières. Deux mesures seront comparables seulement si leurs dimensions de Hausdorff sont égales. Bien que cette dimension soit bien définie mathématiquement, elle est cependant difficile à calculer et se prête mal à des estimations numériques. Pour pallier à ces difficultés, on utilise généralement la dimension de capacité  $d_C(\mathcal{S})$  introduite par A.N.Kolmogorov<sup>[195]</sup>. Considérons un ensemble  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un pavage  $P(\epsilon)$  de  $\mathbb{R}^n$  par des hypercubes de volume  $\epsilon^n$ . Soit  $N(\epsilon)$  le nombre d'hypercubes de  $P(\epsilon)$  qui contiennent une partie de  $\mathcal{S}$ . On définit alors :

$$d_C(\mathcal{S}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(\infty/\epsilon)} . \quad (2.3)$$

On peut montrer de manière tout à fait générale que les dimensions de Hausdorff  $d_H$ , de capacité  $d_C$  et topologique  $d_T$  vérifient les inégalités suivantes<sup>[62]</sup> :

$$d_T \leq d_H \leq d_C . \quad (2.4)$$

## Exemples

- Pour l'ensemble vide, nous avons trivialement  $d_T(\emptyset) = 0$  et  $d_C(\emptyset) = d_H(\emptyset) = -\infty$ .
- Pour les ensembles usuels tels que le point, la droite et le plan, ces trois dimensions coïncident et sont égales respectivement à 0, 1 et 2. Ceci est vrai pour toute variété différentiable de dimension topologique  $n$ .
- L'ensemble des rationnels dans  $[0,1]$ . C'est un ensemble dense sur l'intervalle donc  $d_C = 1$ . Par contre on a  $d_T = d_H = 0$ . La dimension de capacité ne permet donc pas de distinguer un ensemble de sa fermeture.
- L'ensemble de Cantor triadique : considérons le segment  $[0,1]$ , divisons le en trois parties de longueur égale et enlevons la partie du milieu. On répète ce processus sur les deux sous-intervalles restants et ainsi de suite. L'ensemble obtenu à la limite est un ensemble de Cantor<sup>[54]</sup>, c'est à dire un ensemble fermé qui ne contient pas d'intervalle. A l'étape  $n$ , on a  $2^n$  intervalles de longueur  $3^{-n}$ , dont la longueur totale est  $(\frac{2}{3})^n$ ; à la limite  $n \rightarrow +\infty$  on a donc  $d_T = 0$ . En prenant un pavage de  $[0,1]$  par des segments de taille  $\epsilon = 3^{-n}$ , seul  $N(\epsilon) = 2^n$  de ces segments contiennent une partie du Cantor. A la limite  $n \rightarrow +\infty$ , on montre que  $d_C = d_H = \ln 2 / \ln 3$ .

Dans ses travaux originaux, Mandelbrot<sup>[53]</sup> propose de définir un ensemble fractal comme un ensemble dont la dimension de Hausdorff est strictement supérieure à la dimension topologique. Or, il existe de nombreuses constructions d'ensembles de Cantor qui convergent vers des ensembles de dimension  $d_H = 1$  et donc de mesure de Lebesgue finie. Ces ensembles, dénommés ensembles fractals gras, ne sont pas, selon la définition ci-dessus, des fractals. En fait, la seule comparaison des dimensions de Hausdorff et topologique semble être une caractérisation trop faible pour définir le concept de fractal. Dans ce mémoire, nous préférons voir un ensemble fractal comme un ensemble qui possède des propriétés d'auto-similarité<sup>[55],[56]</sup> dans le sens où sa structure est la "même" à toute échelle. Cette définition est beaucoup plus large et peut s'appliquer non seulement aux ensembles mais aussi à des objets plus complexes tels que les mesures et les fonctions.

### 2.1.2 Spectre des singularités de mesures fractales

La notion de mesure permet d'associer des poids relatifs aux différentes parties d'un ensemble. Dans beaucoup de cas, une mesure  $\mu$  peut être décrite par sa fonction densité  $\rho(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu([x, x + \epsilon]) / \epsilon$ . Si  $A$  est un ensemble quelconque, sa mesure s'écrit alors sous la forme  $\mu(A) = \int_A \rho(x) dx$ . Mais toutes les mesures ne peuvent se mettre sous cette forme car la limite ci-dessus n'existe pas toujours. Par exemple, une mesure concentrée en un

point se décrit par la distribution de Dirac  $\delta(x)$  et ne peut être mise sous la forme d'une densité<sup>[55],[58]</sup>. Nous appellerons *mesure singulière* toute mesure qui ne peut s'exprimer sous forme de fonction de densité ou comme somme de distributions de Dirac.

A l'instar de la dimension de Hausdorff qui ne caractérise que le support de la mesure, les notions de singularité<sup>[58],[62],[66]</sup> et de spectre  $f(\alpha)$  des singularités<sup>[55],[58]</sup> donnent des informations non seulement sur le support mais aussi sur la manière dont la mesure est distribuée sur ce support. Dans ce chapitre nous nous limiterons à l'étude des fractals dans  $\mathbb{R}$ ; la majeure partie des résultats pourront s'étendre sans difficulté à des espaces métriques de dimension supérieure.

**Définitions :** Soit  $\mu$  une mesure quelconque et  $Supp\mu$  son support.

- On appelle *exposant de singularité* au point  $x_0 \in Supp\mu$ , la limite<sup>[58],[62],[66]</sup> :

$$\alpha(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \mu(B_{x_0}(\epsilon))}{\ln \epsilon}, \quad (2.5)$$

où  $B_{x_0}$  désigne une boule de taille  $\epsilon$  centrée en  $x_0$ .

- Le spectre  $f(\alpha)$  des singularités<sup>[55],[58]</sup> associé à la mesure  $\mu$  est la fonction qui à tout  $\alpha$  associe la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points  $x_0$  tels que  $\alpha(x_0) = \alpha$  :

$$f(\alpha) = d_H(\{x_0 \in Supp\mu | \alpha(x_0) = \alpha\}). \quad (2.6)$$

L'exposant  $\alpha(x_0)$  au point  $x_0$ , caractérise la force de la singularité de  $\mu$  au point  $x_0$ . Ainsi, si  $\mu$  est une mesure à densité, alors  $\mu(B_{x_0}(\epsilon))$  s'écrit sous la forme  $\rho(x_0)\epsilon$  et donc  $\alpha(x_0) = 1$ . Par contre la limite  $\alpha(x_0) = 0$  correspond à une mesure finie concentrée en un point  $x_0$ , c'est-à-dire à une distribution de Dirac en ce point. D'une manière générale on peut écrire<sup>[55],[58],[62],[66]</sup> quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$  :

$$\mu(B_{x_0}) \sim C\epsilon^{\alpha(x_0)}, \quad (2.7)$$

avec  $\alpha$  a priori quelconque et où  $C$  peut être fonction de  $\epsilon$  mais à variation lente (pour une mesure à densité  $C = \rho(x_0)$  et  $\alpha(x_0) = 1$ ). Ainsi plus l'exposant de singularité  $\alpha(x_0)$  est petit, plus la mesure  $\mu$  varie vite au voisinage de  $x_0$  et plus la singularité sera qualifiée de forte.

Le spectre  $f(\alpha)$  des singularités décrit la répartition statistique, selon leur force, des singularités au sein du support de la mesure. Si l'on pave le support de la mesure par des

boîtes de taille  $\epsilon$ , alors le nombre de ces boîtes dont la mesure varie comme  $\epsilon^\alpha$ , pour un  $\alpha$  donné, se comporte comme<sup>[55],[58]</sup> :

$$N_\alpha(\epsilon) \sim \epsilon^{-f(\alpha)} . \quad (2.8)$$

Les mesures dont le spectre des singularités se réduit à un point sont appelées *mesures homogènes*<sup>[55],[58],[216]</sup>. Si plusieurs types de singularités  $\alpha$  sont présentes dans le spectre  $f(\alpha)$ , la mesure sera qualifiée de *multifractale* ou *non homogène*<sup>[55],[58],[216]</sup>.

**Exemple :** On peut construire une mesure non homogène sur le Cantor triadique : à l'étape  $n = 0$  de la construction du Cantor, on affecte à l'intervalle  $[0,1]$  la mesure  $\mu_0 = 1$ . A l'étape  $n = 1$ , on attribue un poids  $\mu_1 = p_1$  à l'intervalle  $[0,1/3]$  et un poids  $\mu_2 = p_2 = 1-p_1$  à l'intervalle  $[2/3,1]$ . A l'étape  $n = 2$ , on répète ces opérations sur les deux sous-intervalles restants et ainsi de suite. A l'étape  $n$ , on a  $2^n$  intervalles de longueur  $\epsilon = 3^{-n}$ . Un sous-intervalle supporte donc une mesure<sup>[58]</sup>  $\mu = p_1^m p_2^{n-m}$  où  $m$  et  $(n - m)$  représentent respectivement les nombres de fois où l'on a attribué le poids  $p_1$  et le poids  $p_2$  sur cet intervalle lors du processus de construction. Une telle mesure est appelé *mesure binomiale* ou plus généralement *mesure de Bernoulli*<sup>[55],[58]</sup>. D'après l'équation (2.5), on a donc :

$$\alpha(n, m) = \frac{\ln p_1 + (n/m - 1) \ln p_2}{(n/m) \ln(1/3)} . \quad (2.9)$$

Ainsi,  $\alpha$  ne dépend que du rapport  $n/m$ . Tous les sous-intervalles mettant en jeu un même nombre relatif de poids  $p_1$  et  $p_2$  lors de la construction de la mesure correspondent donc à un même exposant de singularité  $\alpha$ . D'après la définition (2.6) de  $f(\alpha)$  et en utilisant la formule de Stirling, on obtient :

$$f(n/m) = \frac{(n/m - 1) \ln(n/m - 1) - (n/m) \ln(n/m)}{(n/m) \ln(1/3)} . \quad (2.10)$$

En éliminant  $n/m$  dans les équation (2.9) et (2.10), on obtient le spectre  $f(\alpha)$  des singularités. A la limite  $n \rightarrow +\infty$ , on peut montrer que  $f(\alpha)$  a comme support  $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$  où :

$$\begin{aligned} \alpha_{min} &= \min \left\{ \frac{\ln p_1}{\ln(1/3)}, \frac{\ln p_2}{\ln(1/3)} \right\} , \\ \alpha_{max} &= \max \left\{ \frac{\ln p_1}{\ln(1/3)}, \frac{\ln p_2}{\ln(1/3)} \right\} . \end{aligned}$$

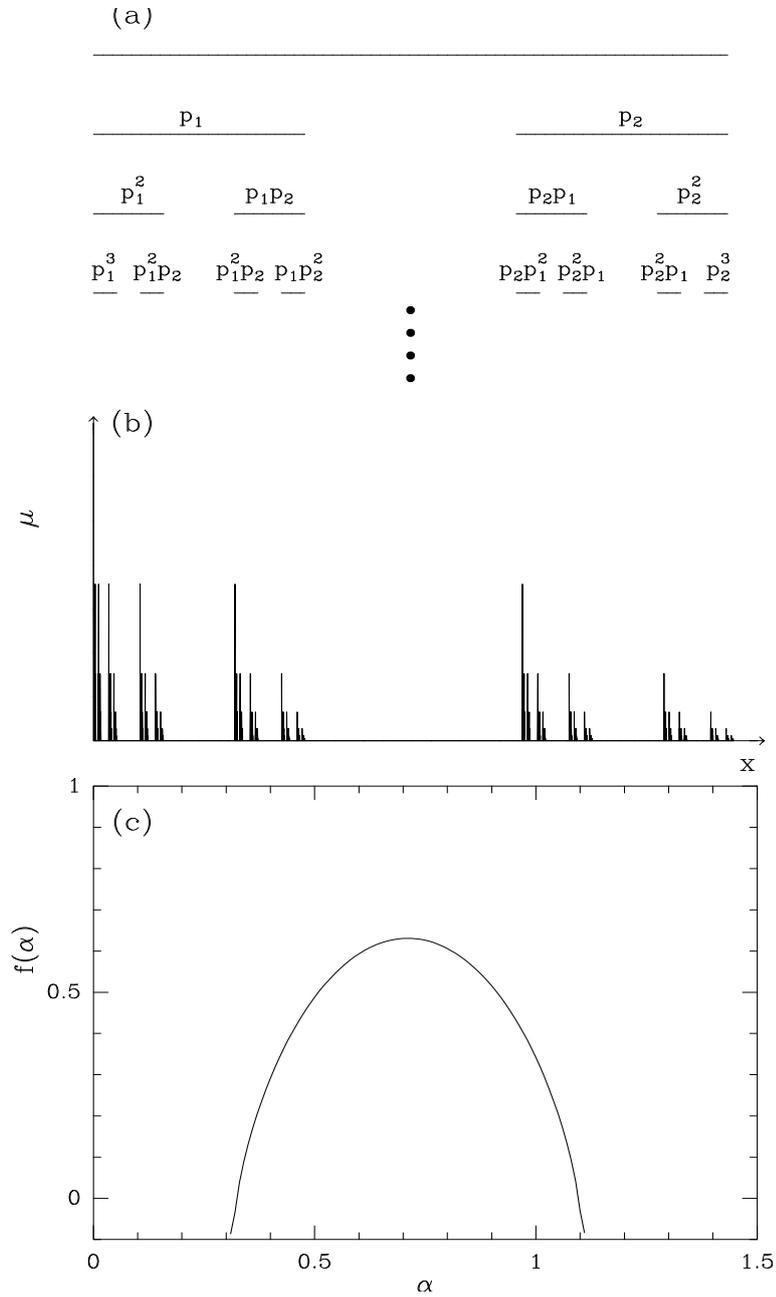


FIG. 2.1 – Mesure binomiale distribuée sur le Cantor triadique avec les poids  $p_1 = 0.7$  et  $p_2 = 0.3$ . a) Règle de construction. b) Mesure obtenue après  $n$  itérations. c) Spectre  $f(\alpha)$  des singularités; cette fonction en forme de cloche est caractéristique des spectres des singularités associés aux mesures multifractales.

Quelles que soient les valeurs de  $p_1$  et  $p_2$ ,  $f(\alpha)$  est maximal en  $f(n/m = 2) = \ln 2 / \ln 3$  (nombre égal de poids  $p_1$  et  $p_2$  mis en jeu dans la construction). Le maximum de la courbe  $f(\alpha)$  correspond à la dimension de Hausdorff du support de la mesure<sup>[55],[58]</sup>.

La règle de construction d'une telle mesure est illustrée sur la figure 2.1a. Sur la figure 2.1b, nous avons représenté la mesure calculée avec les poids  $p_1 = 0.7$  et  $p_2 = 0.3$ . Son spectre  $f(\alpha)$  des singularités est indiqué dans la figure 2.1c. L'exemple ci-dessus est un cas particulier pour lequel le spectre des singularités est calculable analytiquement. Dans la pratique, se pose le problème de l'estimation numérique de  $f(\alpha)$ . D'après les définitions (2.5) et (2.6), on peut être tenté de mesurer  $f(\alpha)$  comme la dimension d'un ensemble ; il faut pour cela mesurer  $\alpha(x)$  en chaque point du support de la mesure. Pour estimer cet exposant, il suffit d'après la définition (2.5), d'estimer la pente de la courbe  $\ln(B_x(\epsilon))$  en fonction de  $\ln \epsilon$ . Malheureusement cette procédure n'est pas réaliste<sup>[82]–[85],[97],[100],[211],[213]</sup>. En effet, la fonction  $\alpha(x, \epsilon) = \ln(B(x, \epsilon)) / \ln \epsilon$  associe un exposant à un intervalle et non à un point. En général, cet intervalle contient des points qui correspondent à des singularités de force très différentes et  $\alpha(x, \epsilon)$  manifeste de très grandes variations en tant que fonction de  $x$  et peut osciller spatialement de façon très irrégulière entre  $\alpha_{min}$  à  $\alpha_{max}$ .

### 2.1.3 Formalisme multifractal : spectre $\tau(q)$ et dimensions fractales généralisées

Les dimensions fractales généralisées<sup>[63]–[66],[217],[218]</sup> ont été introduites dans le contexte de la théorie des systèmes dynamiques pour caractériser non seulement l'aspect géométrique des attracteurs étranges, mais aussi pour décrire de manière probabiliste la fréquence de visite d'une région de l'espace des phases par la trajectoire chaotique décrivant l'évolution temporelle du système considéré.

Considérons la mesure  $\mu$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $P(\epsilon)$  un pavage de  $\mathbb{R}$  par des boules de rayon  $\epsilon$ . Soit  $N(\epsilon)$  le nombre de boules de  $P(\epsilon)$  de mesure non nulle. Numérotons ces boules de 1 à  $N(\epsilon)$ ,  $\{B_i(\epsilon)\}_{i=1..N(\epsilon)}$ . Soit

$$\mu_i(\epsilon) = \int_{B_i(\epsilon)} d\mu, \quad (2.11)$$

la mesure contenue dans la boule  $i$ . Pour tout  $q \in \mathbb{R}$ , on considère la fonction de partition<sup>[58]</sup> :

$$Z(q, \epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu_i^q(\epsilon). \quad (2.12)$$

On définit alors le spectre  $\tau(q)$  à partir du comportement en loi de puissance de  $Z(q, \epsilon)$  dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$  :

$$Z(q, \epsilon) \sim \epsilon^{\tau(q)} . \quad (2.13)$$

Le spectre des dimensions fractales généralisées<sup>[62]–[66]</sup> est obtenu à partir des exposants  $\tau(q)$  de la façon suivante :

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(Z(q, \epsilon))}{(q-1) \ln \epsilon} . \quad (2.14)$$

- Pour  $q = 0$ ,  $D_0 = -\tau(0)$  est égal à la dimension de capacité du support de la mesure.
- Pour  $q = 1$ ,  $D_1$  caractérise le comportement dans les échelles de l'information  $I(\epsilon) = \sum_i \mu_i(\epsilon) \ln \mu_i(\epsilon)$  :

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_i \frac{\mu_i \ln \mu_i}{\ln \epsilon} . \quad (2.15)$$

$D_1$  est appelée dimension d'information<sup>[217]</sup>.

- Pour  $q = +\infty$ , on a  $D_{+\infty} = \alpha_{min}$  et  $D_{-\infty} = \alpha_{max}$ . Asymptotiquement, le spectre  $D_q$  donne accès à l'exposant de la singularité la plus forte ainsi qu'à celui de la singularité la plus faible qui caractérisent respectivement les régions les plus denses et les moins denses du support de la mesure.

**Remarque :** On peut définir  $\tau(q)$  de telle manière que  $\tau(0) = d_H(Supp\mu)$ . Il suffit pour cela de poser<sup>[58],[64],[211],[219]</sup> :

$$\Gamma(q, \delta, K(\epsilon)) = \sum_{B_i \in K(\epsilon)} \frac{\mu(B_i)^q}{|B_i|^\delta} , \quad (2.16)$$

où  $K(\epsilon) = \{B_i\}_{i=1..N(\epsilon)}$  est un recouvrement du support de  $\mu$  par des boules  $B_i$  de diamètre  $|B_i| \leq \epsilon$ . Soit

$$\Gamma(q, \delta, K(\epsilon)) = \begin{cases} \sup_{\{K(\epsilon)\}} \Gamma(q, \delta, K(\epsilon)) & \text{pour } q \geq 1, \delta \geq 0 \\ \inf_{\{K(\epsilon)\}} \Gamma(q, \delta, K(\epsilon)) & \text{pour } q \leq 1, \delta \leq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

et

$$\Gamma(q, \delta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \tau(q, \delta, \epsilon) . \quad (2.18)$$

Pour tout  $q \in \mathbb{R}$ , on définit  $\tau_H(q)$  comme l'unique valeur de  $\delta$  telle que

$$\begin{cases} \delta < \tau_H(q) & \Rightarrow \tau(q, \delta) = 0 , \\ \delta > \tau_H(q) & \Rightarrow \tau(q, \delta) = +\infty . \end{cases} \quad (2.19)$$

On peut montrer que  $\forall q \in \mathbf{R}$ ,  $\tau_H(q) \leq \tau(q)$ . Contrairement à l'exposant de singularité  $\alpha$ , le spectre  $\tau(q)$  décrit le comportement d'une quantité globale,  $Z(q, \epsilon)$ , qui peut être considérée comme une valeur moyenne sur l'espace. De ce fait  $\tau(q)$  se prête mieux à une estimation numérique<sup>[56],[62],[66],[83],[206]–[213]</sup>.

On peut montrer que le spectre  $\tau(q)$  est relié à la limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , au spectre  $f(\alpha)$  des singularités. En effet, considérons  $\alpha$  comme une variable continue de densité  $\rho(\alpha)\epsilon^{-f(\alpha)}$ , à l'échelle  $\epsilon$ ; en substituant dans l'équation (2.12) le comportement  $\mu_i^q \sim \epsilon^{q\alpha_i}$ ; on obtient<sup>[58]</sup> :

$$Z(q, \epsilon) \sim \int \rho(\alpha)\epsilon^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha . \quad (2.20)$$

A la limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , on déduit par méthode du col que  $\tau(q)$  et  $f(\alpha)$  sont reliés par une transformation de Legendre :

$$\tau(q) = \min_{\alpha} (q\alpha - f(\alpha)) . \quad (2.21)$$

En inversant cette équation, on peut calculer le spectre  $f(\alpha)$  des singularités à partir de la mesure des exposant  $\tau(q)$  :

$$f(\alpha) = \min_q (q\alpha - \tau(q)) . \quad (2.22)$$

Si  $\tau(q)$  est continûment dérivable, la relation (2.21) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{cases} q & = & df/d\alpha , \\ \tau(q) & = & q\alpha - f(\alpha) . \end{cases} \quad (2.23)$$

De même, l'équation (2.22) devient :

$$\begin{cases} \alpha & = & d\tau/dq , \\ f(\alpha) & = & q\alpha - \tau(q) . \end{cases} \quad (2.24)$$

### Remarques

- Si  $q=0$ ,  $\tau(0) = -D_0 = \max_{\alpha}(f(\alpha))$ .
- Si  $q=1$ , la normalisation de la mesure ( $Z(q = 1, \epsilon) = 1, \forall \epsilon$ ) implique  $\min_{\alpha}(\alpha(1) - f(\alpha(1))) = 0$  et donc  $f(\alpha(1)) = \alpha(1)$ . Le spectre des singularités est tangent à la diagonale en  $\alpha(q = 1)$ . Pour tout autre valeur de  $\alpha$ ,  $f(\alpha)$  est situé sous la diagonale.
- Si  $f(\alpha)$  est  $C^2$ , la relation (2.21) implique que  $f(\alpha)$  est concave, c'est à dire  $d^2 f/d\alpha^2 < 0, \forall \alpha$ .

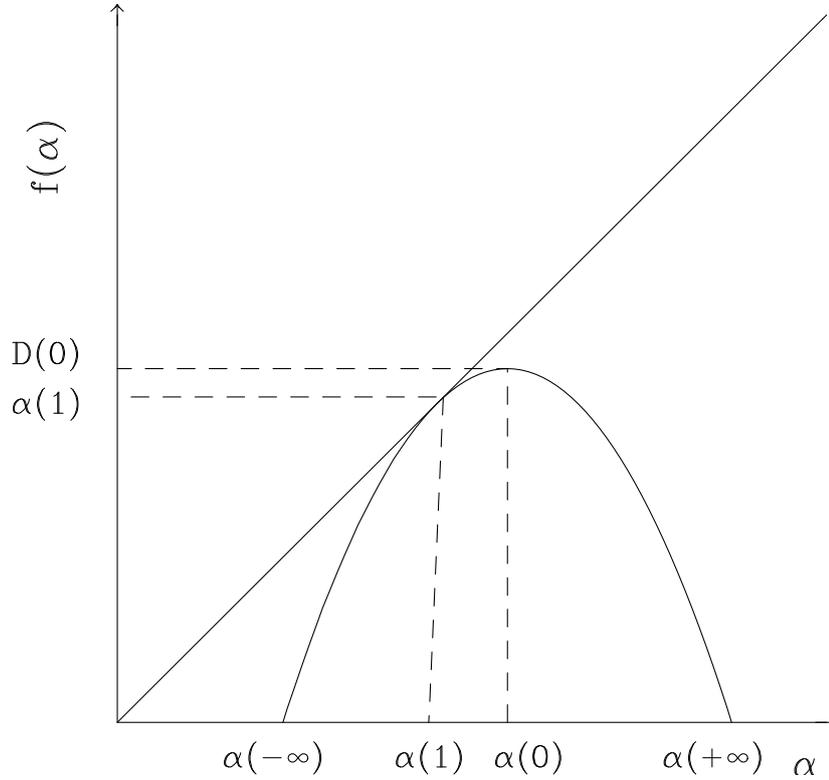


FIG. 2.2 – Caractéristiques génériques du spectre  $f(\alpha)$  des singularités en tant que transformée de Legendre du spectre  $\tau(q)$ .

Dans la figure 2.2, nous avons représenté les caractéristiques génériques d'un spectre  $f(\alpha)$  des singularités obtenu par transformation de Legendre du spectre  $\tau(q)$ . D'une manière générale, nous appellerons formalisme multifractal<sup>[58]</sup> l'approche qui consiste à voir  $f(\alpha)$  comme la transformée de Legendre du spectre  $\tau(q)$ .

La méthode numérique de “comptage de boîtes”<sup>[56],[62],[66],[83],[206]–[213]</sup> est directement inspirée des définitions (2.12) et (2.13). Elle consiste à paver l'espace  $(\mathbf{R})$  de boîtes (ou intervalles) de taille  $\epsilon$  et à sommer la mesure contenue dans chaque boîte. Cette quantité  $\mu_i$  calculée pour chaque boîte  $i$  permet d'estimer la fonction de partition  $Z(q, \epsilon)$  à cette échelle et ceci pour différentes valeurs de  $q$ . Si comme prévu, la courbe  $\ln(Z(q, \epsilon))$  en fonction de  $\ln(\epsilon)$  présente un comportement linéaire évident, la valeur de  $\tau(q)$  est alors estimée (par régression linéaire) comme la pente de cette droite. Pour améliorer les performances de cet algorithme et pour réduire les fluctuations présentes dans le calcul de

$Z(q, \epsilon)$ , il est conseillé de calculer cette quantité pour différentes positions de la grille et de prendre la moyenne des valeurs obtenues. Cependant, pour les valeurs de  $q$  négatives, cette quantité reste difficile à estimer car elle est dominée par les faibles valeurs de  $\mu_i$  qui sont d'un point de vue numérique, les plus sensibles aux fluctuations statistiques. Il est donc difficile dans la pratique d'avoir une bonne estimation du spectre  $\tau(q)$  pour des valeurs de  $q$  inférieures à -1 ou -2.

Par analogie avec la thermodynamique<sup>[220],[221]</sup>, il est possible de définir de nouvelles fonctions de partition permettant d'estimer directement  $\alpha(q)$  et  $f(\alpha)$ . Pour cela, identifions  $-\ln \epsilon$ , le logarithme de l'échelle que l'on considère, au volume  $V$ , et récrivons les équations (2.7) et (2.8) sous la forme suivante<sup>[58]–[61],[153],[154],[222]–[227]</sup> :

$$\begin{cases} \mu(B_i(\epsilon)) \sim e^{-\alpha_i V}, \\ f(\alpha) \sim V^{-1} \ln N(\alpha, V). \end{cases} \quad (2.25)$$

Si  $\alpha$  désigne l'énergie par unité de volume du microétat  $i$ , alors  $f(\alpha)$  peut être identifié à l'entropie par unité de volume de l'ensemble des états "microscopiques" d'énergie  $\alpha$ . Une description canonique correspond alors à la donnée de la fonction  $\tau(q, V)$  qui peut être identifiée à l'énergie libre à la température  $T = q^{-1}$ ; pour cela, il suffit d'identifier  $\mu_i^q(\epsilon)$  au poids de Boltzman et la fonction de partition  $Z(q, V)$  (Eq. (2.20)) à la fonction de partition canonique.  $\alpha$  et  $f(\alpha)$  peuvent alors être considérées en tant que valeur moyenne de l'énergie et de l'entropie à la température  $q^{-1}$  choisie. Posons pour cela<sup>[61],[153],[154],[166],[223],[224]</sup> :

$$\hat{\mu}_i(q) = \frac{e^{-\alpha_i q V}}{Z(q, V)} = \frac{\mu_i^q(\epsilon)}{Z(q, \epsilon)}. \quad (2.26)$$

On a alors les équations canoniques :

$$\begin{cases} \alpha(q) = \langle \alpha \rangle = (\ln \epsilon)^{-1} \sum_i \hat{\mu}_i(q) \ln \mu_i(\epsilon), \\ f(q) = \langle \ln \hat{\mu}_i(q) \rangle = (\ln \epsilon)^{-1} \sum_i \hat{\mu}_i(q) \ln \hat{\mu}_i(q). \end{cases} \quad (2.27)$$

L'élimination de  $q$  entre  $f(q)$  et  $\alpha(q)$  donne la fonction  $f(\alpha)$  canonique. Remarquons que cette fonction n'est égale au spectre  $f(\alpha)$  des singularités qu'à la limite thermodynamique  $V \rightarrow +\infty$  ( $\epsilon \rightarrow 0^+$ ).

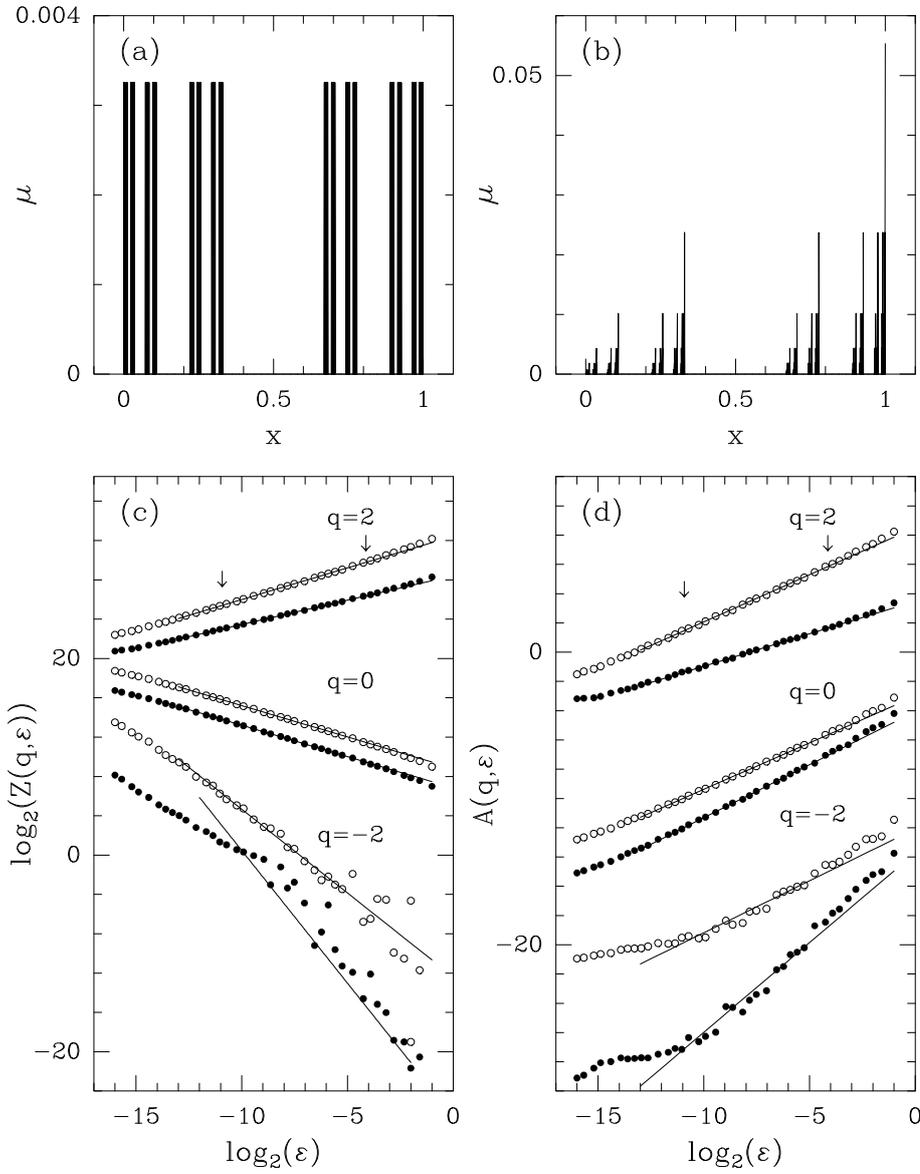


FIG. 2.3 – Analyse multifractale de mesures singulières avec la méthode de comptage de boîtes. a) Mesure homogène distribuée sur le Cantor triadique ( $p_1 = p_2 = 0,5$ ). b) Mesure non homogène sur le Cantor triadique ( $p_1 = 0,7$  et  $p_2 = 0,3$ ). c)  $\log_2(Z(q, \epsilon))$  en fonction de  $\log_2(\epsilon)$  pour trois valeurs de  $q$ . La pente de ces courbes nous donne la valeur de  $\tau(q)$ . d)  $A(q, \epsilon) = \sum_i \hat{\mu}_i(q) \ln \mu_i(\epsilon) = \alpha(q) \log_2(\epsilon)$  d'après l'équation (2.27) en fonction de  $\log_2(\epsilon)$ . La pente de ces courbes donne la valeur de  $\alpha(q)$ . Les symboles ( $\circ$ ) correspondent à la mesure homogène et les ( $\bullet$ ) à la mesure non homogène. Les flèches indiquent la gamme d'échelles utilisée pour estimer la pente par régression linéaire.

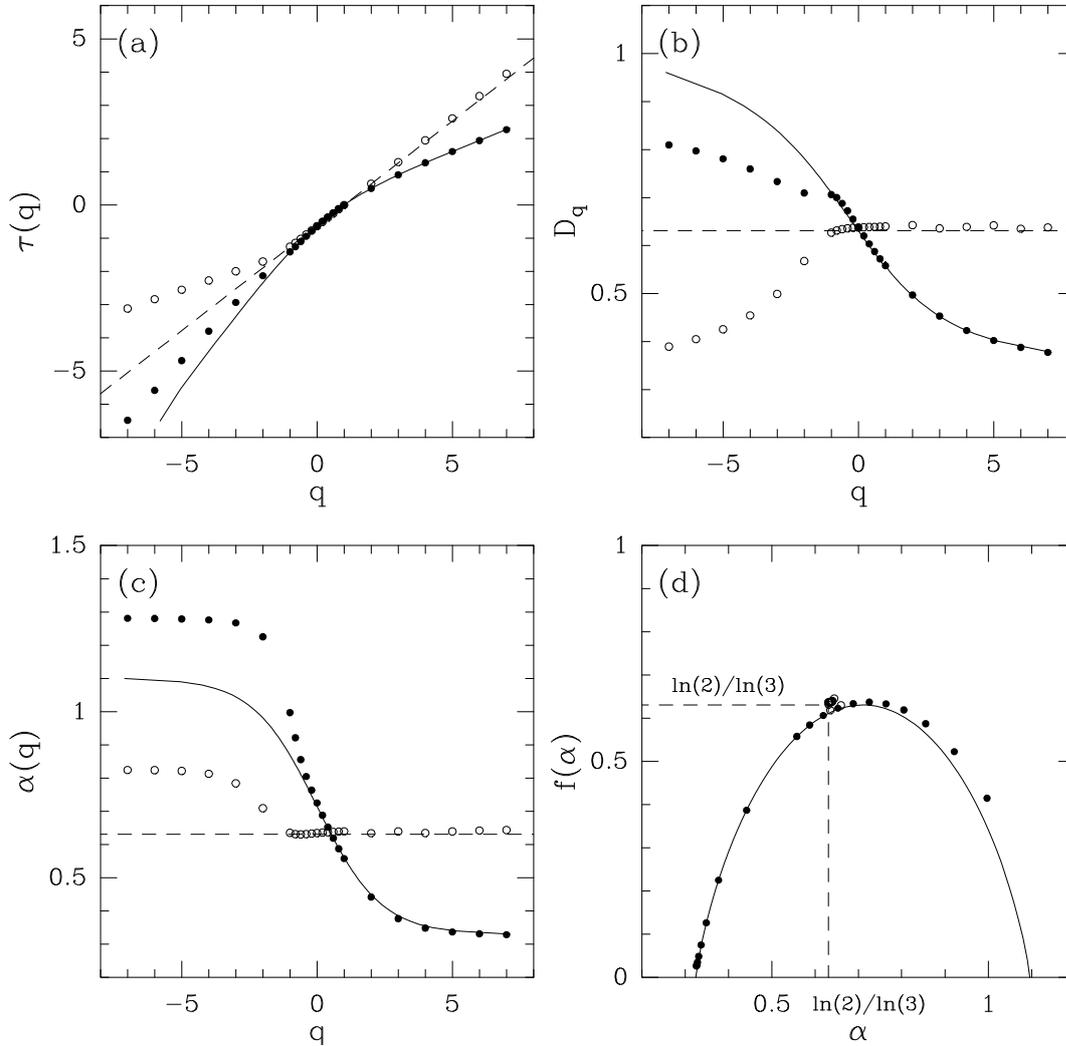


FIG. 2.4 – Résultats de l'analyse multifractale des mesures singulières de la figure 2.3. Les symboles ( $\circ$ ) correspondent à la mesure homogène et les ( $\bullet$ ) à la mesure non homogène. a) Spectre  $\tau(q)$  en fonction de  $q$ . b) Spectre des dimensions fractales généralisées  $D_q$  en fonction de  $q$ . c)  $\alpha(q)$  en fonction de  $q$ . d) Spectre  $f(\alpha)$  des singularités en fonction de  $\alpha$ . Les lignes continues correspondent aux prédictions théoriques pour la mesure non homogène et celles en pointillés correspondent aux prédictions théoriques pour la mesure homogène.

## Exemples

- Reprenons le cas de la mesure homogène sur le Cantor triadique. Comme nous l'avons mentionné précédemment, le spectre  $f(\alpha)$  des singularités se réduit à un point :

$$f(\alpha) = \alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3} = D_0 . \quad (2.28)$$

Par transformation de Legendre, on en déduit :

$$\tau(q) = (q - 1) \frac{\ln 2}{\ln 3} . \quad (2.29)$$

Ainsi toutes les dimensions fractales sont égales à la dimension de Hausdorff du support de la mesure  $D_H = \ln 2 / \ln 3$ .  $\tau(q)$  est alors une fonction linéaire dont la pente est la valeur de la force (unique) des singularités présentes dans la mesure. La linéarité du spectre  $\tau(q)$  est en fait la signature d'une mesure homogène.

- Pour une mesure non homogène distribuée sur le Cantor triadique avec les poids  $p_1$  et  $p_2$ , on peut calculer de façon analytique les exposants  $\tau(q)$  de la fonction de partition :

$$\tau(q) = \frac{\log(p_1^q + p_2^q)}{\log(1/3)} . \quad (2.30)$$

Le spectre  $\tau(q)$  n'est plus linéaire mais a une forme concave caractéristique d'une mesure multifractale dont le spectre  $f(\alpha)$  des singularités a un support  $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$  de longueur finie.

Les résultats numériques obtenues avec la méthode de comptage de boîtes sur ces deux exemples caractéristiques de mesures homogènes et multifractales sont représentés sur les figures 2.3 et 2.4. Ces résultats ont été obtenus en moyennant sur 50 positions différentes de la grille. L'accord avec les prédictions théoriques est bon pour les  $q$  positifs. Pour les  $q$  négatifs, les fluctuations de la fonction de partition sont importantes et les valeurs obtenues diffèrent sensiblement des valeurs théoriques dès que  $q \leq -2$ .

### 2.1.4 Processus aléatoires

Les considérations précédentes ont montré comment les fonctions  $\tau(q)$  et  $f(\alpha)$  reflètent les propriétés d'auto-similarité de la mesure considérée. Cette auto-similarité n'est en fait rien d'autre que la propriété d'invariance de la mesure sous l'action d'une application

déterministe, linéaire ou non linéaire. Si cette application met en jeu des variables aléatoires, on parle alors de fractals aléatoires et l’auto-similarité n’est plus une propriété exacte mais est seulement vérifiée en loi<sup>[55],[228]–[231]</sup>. Dans ce cas, le formalisme multifractal demeure valable<sup>[228]–[231]</sup> à condition de reconsidérer la signification des diverses notions qu’il met en jeu (théorie des grandes déviations<sup>[56],[232]</sup>). On définit la fonction de partition suivante, ou l’on moyenne désormais sur différentes réalisations du processus :

$$\langle Z(q, \epsilon) \rangle_{real} = \langle \sum_i \mu_i^q \rangle_{real} \sim \epsilon^{\tau(q)} \quad (\epsilon \rightarrow 0^+) . \quad (2.31)$$

Le spectre  $f(\alpha)$  des singularités obtenu par transformation de Legendre de  $\tau(q)$  :

$$f(\alpha) = \min_{\alpha} (q\alpha - \tau(q)) , \quad (2.32)$$

peut maintenant prendre des valeurs négatives. Les singularités  $\alpha$  pour lesquelles  $f(\alpha) < 0$  sont qualifiées de *latentes* : elles sont présentes statistiquement mais n’apparaissent pas dans chaque réalisation. Insistons sur le fait que les spectres  $\tau(q)$  et  $f(\alpha)$  définis dans les équations (2.31) et (2.32) ne réfèrent pas à des comportements observés typiquement sur un échantillon. Les caractéristiques génériques sont plutôt décrites par les quantités  $\bar{\tau}(q) = \langle \tau_{real}(q) \rangle_{real}$  et  $\bar{f}(\alpha) = \langle f_{real}(\alpha) \rangle_{real}$  qui diffèrent des expressions (2.31) et (2.32) dans le sens où il s’agit de valeurs moyennes “trempées” plutôt que “recuites”. En particulier  $\bar{f}(\alpha)$  étant la moyenne d’une quantité positive, elle ne pourra pas prendre des valeurs négatives. La partie du spectre  $f(\alpha)$  qui correspond à  $f(\alpha) > 0$  dans l’équation (2.32) est dite *manifeste*. Quand  $\alpha$  est proche de  $\alpha(0)$ , cette partie manifeste est voisine de  $\bar{f}(\alpha)$  : elle caractérise donc l’aspect *typique* des réalisations.

## Exemples

- *Le modèle “log-Poisson”* : Ce modèle a été récemment proposé par She et Waymire<sup>[233]</sup> pour décrire les propriétés d’invariance d’échelle du taux de dissipation de l’énergie en turbulence pleinement développée. Les auteurs suggèrent de modéliser la cascade d’énergie de Richardson<sup>[234]</sup> par un processus aléatoire de loi log-Poisson. Plus précisément, soit  $\varepsilon_l$  l’énergie contenue dans un intervalle de longueur  $l$ . La façon dont l’énergie cascade dans les échelles est définie par la variable aléatoire  $W_{l_2 l_1}$  ( $l_1 > l_2$ ) :

$$\varepsilon_{l_2} = W_{l_2 l_1} \varepsilon_{l_1} \quad (2.33)$$

Soit  $\delta$  un changement d’échelle infinitésimal :

$$\delta = \ln\left(\frac{l_1}{l_2}\right) = \ln(l_1) - \ln(l_2) \rightarrow 0^+ \quad (2.34)$$

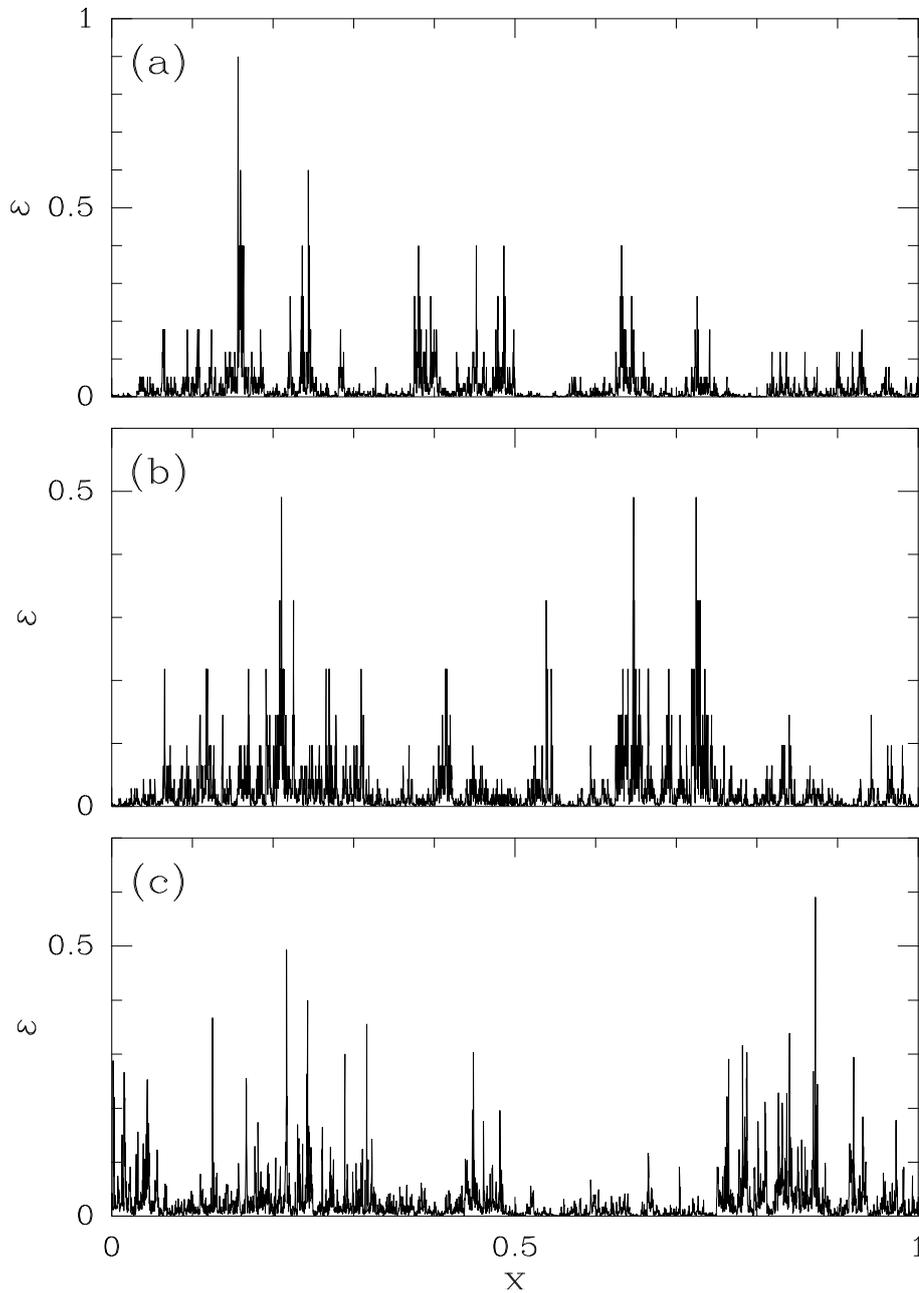


FIG. 2.5 – Mesures aléatoires. a) et b) Deux réalisations du modèle log-Poisson avec  $\beta = \gamma = 2/3$ . c) Une réalisation du modèle log-normal avec  $\sigma^2 = 0.236$ .

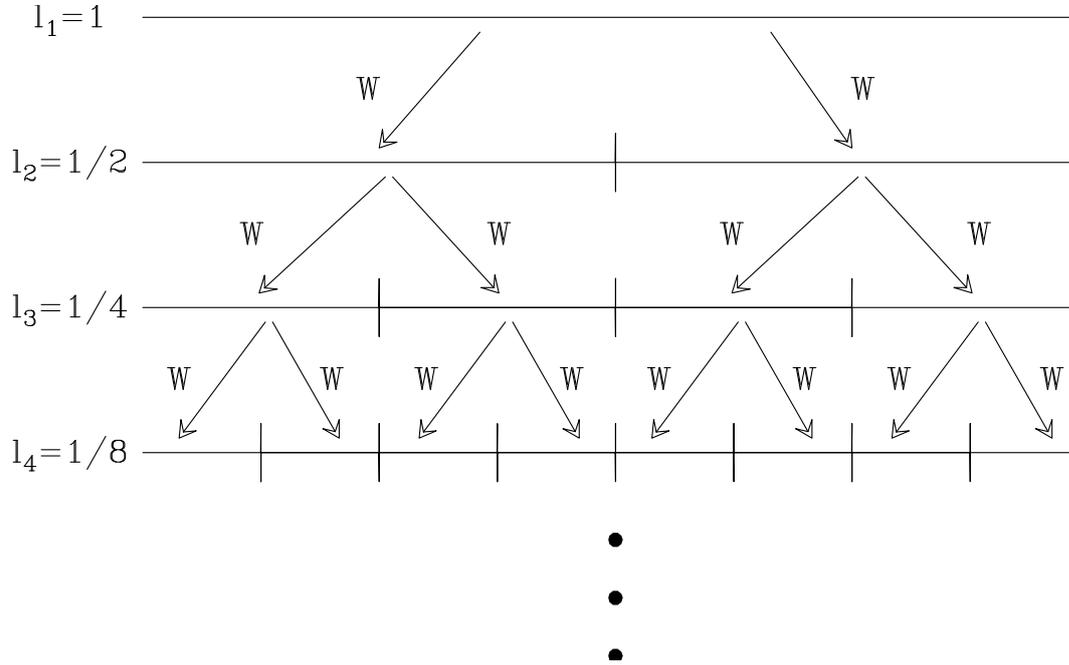


FIG. 2.6 – Règle de construction des mesures multifractales log-Poisson et log-normales.

Le modèle de She et Waymire<sup>[233]</sup> suppose simplement que  $W_\delta$  peut prendre deux valeurs :

$$\begin{cases} W_\delta^{(1)} = (l_1/l_2)^\gamma = \exp(\gamma\delta) = \alpha_\delta > 1 & \text{avec une probabilité } p_1 = 1 - \lambda\delta, \\ W_\delta^{(2)} = \beta \exp(\gamma\delta) = \beta\alpha_\delta < 1 & \text{avec une probabilité } p_2 = \lambda\delta, \end{cases} \quad (2.35)$$

où

$$\lambda = \gamma/(1 - \beta), \quad (2.36)$$

et  $\beta < 1$ . Si on passe de l'échelle  $l_1$  à l'échelle  $l_n$  en  $n$  étapes, on a  $W_{l_n l_1} = \prod_{i=1}^n W_\delta$  avec :

$$p(W_{l_n l_1} = \beta^k \alpha_\delta^n) = C_n^k p_1^{n-k} p_2^k. \quad (2.37)$$

On peut montrer que pour une gamme d'échelle finie  $(l_n l_1)$ , avec  $n\delta = 0(1)$ , la probabilité de  $W_{l_n l_1}$  peut s'écrire sous la forme suivante, où l'on a utilisé la formule de Stirling (à la limite  $\delta \rightarrow 0^+$ ,  $n \rightarrow +\infty$ ) :

$$P(W_{l_n l_1} = \beta^k \alpha_\delta^n) = \frac{1}{k!} e^{-\frac{\gamma\delta}{1-\beta}} \left(\frac{\gamma\delta}{1-\beta}\right)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.38)$$

La variable aléatoire  $X = k = (\ln W - \gamma)/\ln \beta$  a donc une distribution de Poisson de paramètre  $\lambda \ln(l_1/l_2) = \gamma\delta/(1 - \beta)$ . En conséquence,  $W_{l_2l_1}$  a une distribution de loi log-Poisson. Comme cela est explicité dans la ref. [[233]], le spectre  $\tau(q)$  théorique s’obtient alors facilement :

$$\tau(q) = (1 - \gamma)q + \frac{\gamma}{\beta - 1}(\beta^q - 1) - 1 . \quad (2.39)$$

Sur les figures 2.5a et 2.5b sont représentés deux réalisations de ce modèle, obtenues en utilisant la règle de construction de la figure 2.6 avec comme rapport d’échelle  $\delta = \ln 2$ . Les paramètres suivants de la loi log-Poisson  $\gamma = \beta = 2/3$  et  $\lambda = 2$  ont été choisis afin de retrouver le modèle proposé par She et Lévêque<sup>[126]</sup> pour décrire le taux de dissipation de l’énergie. Les différents spectres qui caractérisent cette mesure sont reportés sur la figure 2.7. Le spectre  $\tau(q)$ , non linéaire, est caractéristique d’une mesure multifractale. Le spectre  $f(\alpha)$  des singularités atteint son maximum, égal à 1 (le signal est singulier sur tout  $\mathbb{R}$ ), en  $\alpha(0) \approx 1.1$ . La partie “manifeste” ( $f(\alpha) > 0$ ) correspond à des  $\alpha$  compris entre  $[0.5, 2.1]$ .

- *Le modèle “log-normal”* : Kolmogorov<sup>[177]</sup> et Obukhov<sup>[178]</sup> ont proposé ce modèle en 1962, pour décrire le caractère intermittent, ou la “multifractalité”, du taux de dissipation de l’énergie en turbulence pleinement développée. Il repose sur la même règle de construction mais maintenant la variable aléatoire  $W_{l_2l_1}$  suit une loi log-normale de la forme :

$$P(X = \log W_{l_2l_1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \ln(l_1/l_2)}} e^{-\frac{(X - m \ln(l_1/l_2))^2}{2\sigma^2 \ln(l_1/l_2)}} , \quad (2.40)$$

où  $m \ln(l_1/l_2)$  et  $\sigma^2 \ln(l_1/l_2)$  représente respectivement la moyenne et la variance de  $\log W_{l_2l_1}$ . Un calcul simple conduit au spectre  $\tau(q)$  suivant :

$$\tau(q) = -mq - \frac{\sigma^2 q^2}{2} - 1 . \quad (2.41)$$

La condition de normalisation  $\tau(1) = 0$  implique la relation  $m = -(1 + \frac{\sigma^2}{2})$ . Le spectre  $\tau(q)$  s’exprime donc en fonction d’un seul paramètre libre  $\sigma$  :

$$\tau(q) = (q - 1)\left(1 - \frac{q\sigma^2}{2}\right) = (q - 1)D_q . \quad (2.42)$$

Par transformation de Legendre, on obtient :

$$\alpha(q) = 1 + \frac{\sigma^2}{2} - q\sigma^2 , \quad (2.43)$$

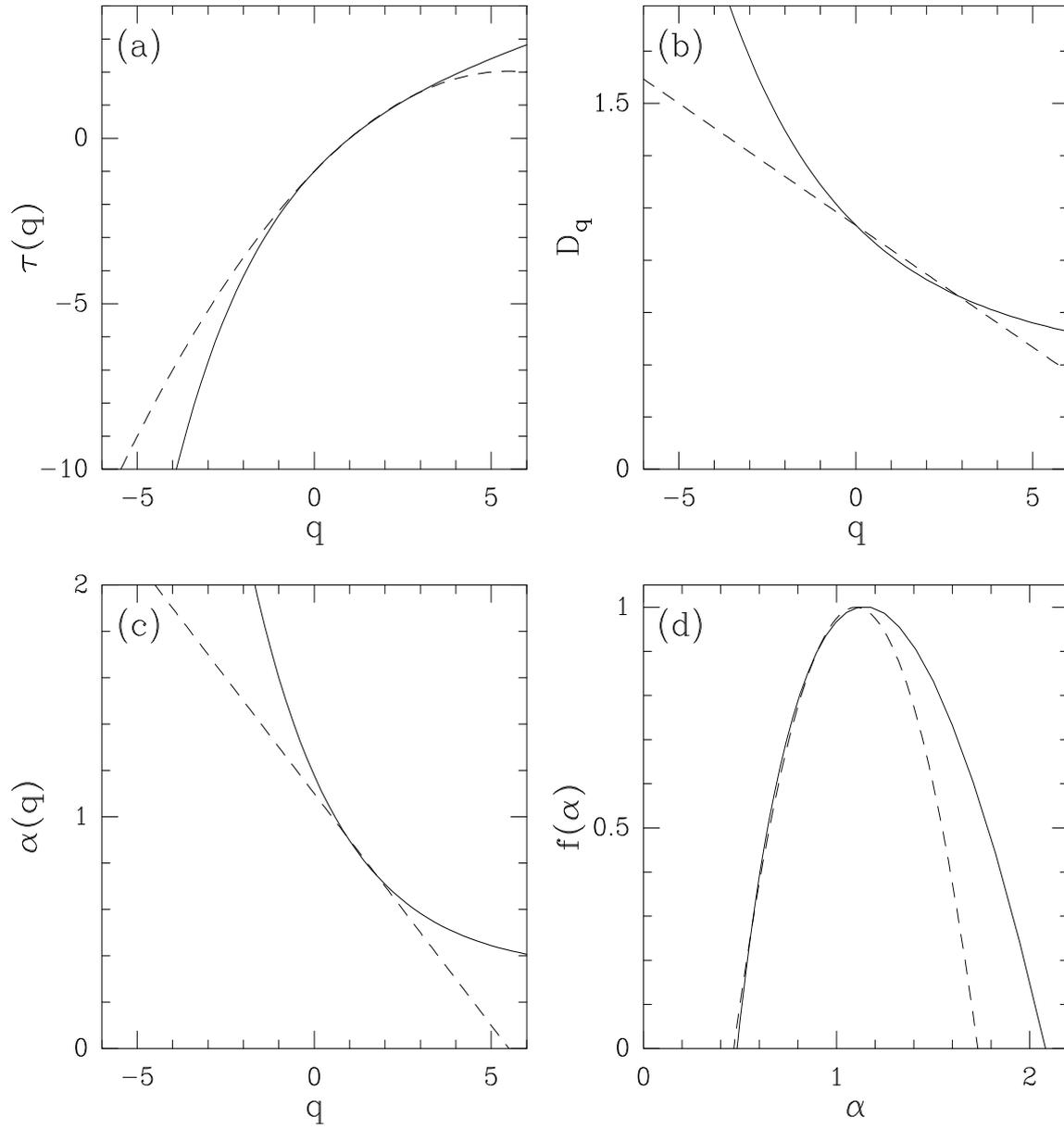


FIG. 2.7 – Spectres multifractals théoriques du modèle log-Poisson (ligne continue) et du modèle log-normal (ligne en pointillés). a)  $\tau(q)$  en fonction de  $q$ . b)  $D_q$  en fonction de  $q$ . c)  $\alpha(q)$  en fonction de  $q$ . d) Spectre  $f(\alpha)$  des singularités en fonction de  $\alpha$ .

et

$$f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - 1 - \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}. \quad (2.44)$$

Le spectre  $f(\alpha)$  des singularités est donc une parabole qui atteint son maximum, égal à 1 (les signaux engendrés sont singuliers partout), en  $\alpha = 1 + \sigma^2/2$ . Remarquons que si  $q > 2/\sigma^2$ ,  $\tau(q)$  est négatif. Ce modèle prédit ainsi une divergence des moments positifs d'ordre élevé du taux de dissipation de l'énergie. C'est-à-dire qu'il existe des points où la mesure contenue dans une boîte de taille  $l$  autour de ce point, augmente quand  $l \rightarrow 0^+$ . Ceci n'est pas admissible physiquement<sup>[30],[235]</sup>. Le modèle log-normal constituera une bonne approximation de modèles multiplicatifs de cascade d'énergie uniquement pour ce qui concerne les faibles déviations. Nous avons représenté une réalisation de ce modèle pour la valeur particulière de  $\sigma^2 = 0.236$ ,  $m = -(1 + \sigma^2/2) = -1.118$  et en fixant  $\delta = \ln 2$ . Remarquons que pour cette valeur particulière de  $\sigma^2$  choisie pour modéliser de façon plus ou moins réaliste les données expérimentales de turbulence pleinement développée, la valeur critique  $q_c \simeq 8.5$  se trouve hors de l'épure de la figure 2.7a où nous avons représenté le spectre  $\tau(q)$  théorique de ce processus (en ligne discontinue).

## 2.2 Fonctions fractales et multifractales

Que l'on parle d'ensembles ou de mesures, la notion de fractal repose sur les propriétés d'invariance par rapport à des opérations de similitude. Ces propriétés se traduisent génériquement par la présence de singularités dans l'objet considéré. Les idées et les concepts mis en jeu peuvent aussi s'appliquer aux fonctions très irrégulières que l'on rencontre dans de nombreux contextes. Que ce soit les profils montagneux, les interfaces rugueuses, les courbes d'évolution d'une composante de la vitesse dans un flot turbulent, les bruits en  $1/f$  ou les réalisations de certains processus stochastiques, tous ces signaux se caractérisent par une absence de toute échelle de longueur caractéristique et par une irrégularité extrême<sup>[53],[164],[196]–[203]</sup>. Dans la figure 2.8, nous avons représenté trois exemples de signaux complexes : une réalisation d'un processus Brownien fractionnaire<sup>[236]</sup> de paramètre  $H = 1/3$ , une solution de l'équation de Kardar-Parisi-Zhang<sup>[237]</sup> (KPZ) qui modélise la croissance d'une interface rugueuse par processus de déposition et un signal de vitesse turbulent<sup>[137]</sup>. Ces trois signaux présentent de très grandes irrégularités et sont par là difficiles à comparer. Remarquons tout de même que le Brownien fractionnaire semble se comporter de manière analogue au signal de vitesse tandis que la solution

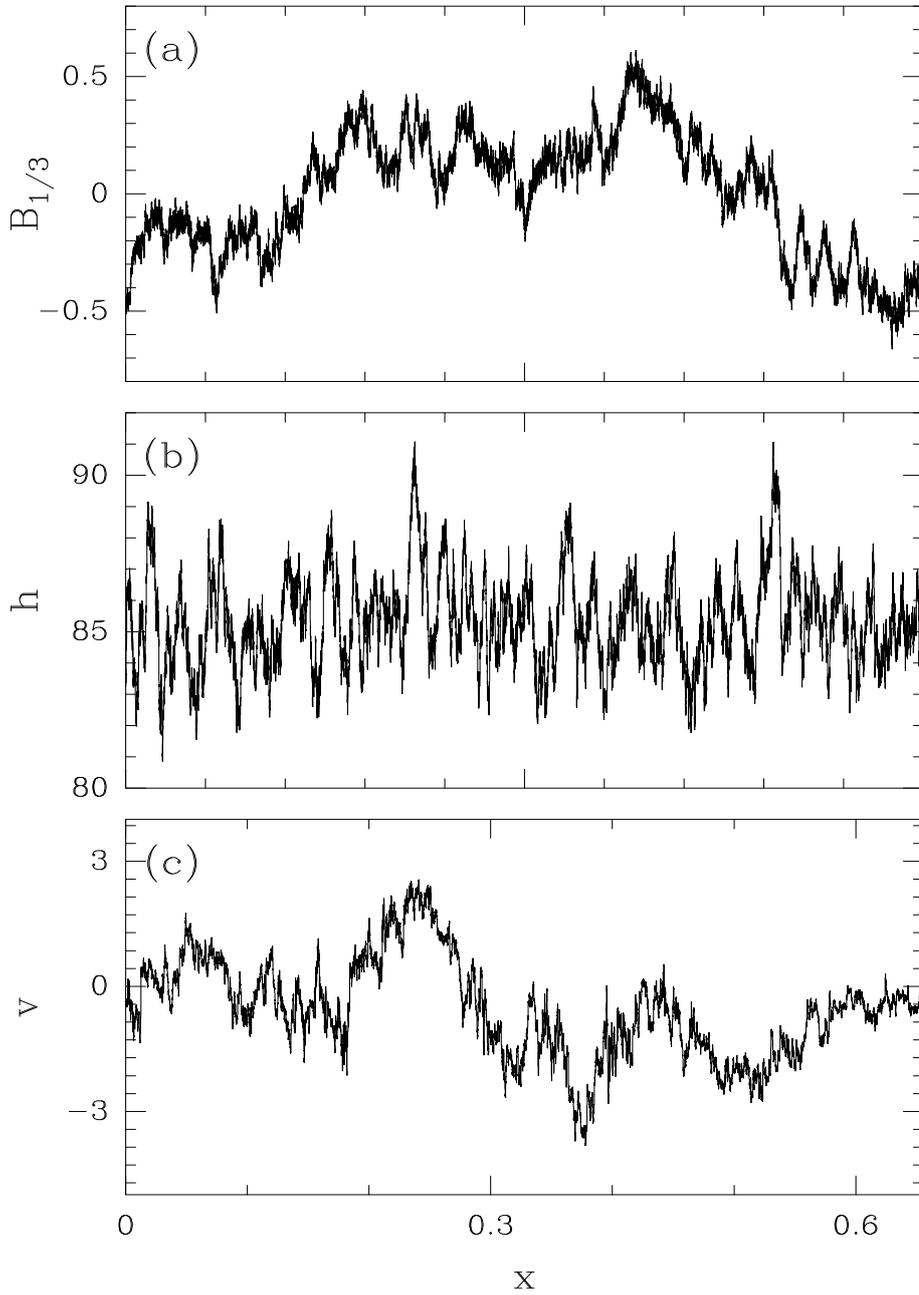


FIG. 2.8 – a) Réalisation d'un processus Brownien fractionnaire<sup>[236]</sup> de paramètre  $H = 1/3$ . b) Solution de l'équation de Kardar-Parisi-Zhang<sup>[237]</sup>. c) Signal expérimental de vitesse longitudinale enregistré dans la soufflerie de Modane par Y.Gagne et ses collaborateurs.

de l'équation de KPZ est apparemment beaucoup plus irrégulière. La question qui se pose est comment peut on formaliser mathématiquement ces ressemblances ou différences ?

### 2.2.1 Exposant de rugosité

On peut tout d'abord considérer ces fonctions comme fractales dans le sens où le graphe  $\mathcal{G}$  qui leur est associé est un ensemble fractal de  $\mathbb{R}^2$  (on ne considérera que des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ). La propriété d'auto-affinité<sup>[55],[200]–[205],[238],[239]</sup> implique que cet ensemble soit invariant sous l'action de dilatations isotropes ou non isotropes. C'est pourquoi nous préférons utiliser le terme d'auto-affinité au lieu d'auto-similarité qui sous entend l'invariance par rapport à des dilatations isotropes. Ainsi une fonction sera qualifiée d'auto-affine si son graphe  $\mathcal{G}$  est un ensemble auto-affine. Cette fonction devra présenter le comportement remarquable suivant<sup>[204],[205],[238],[239]</sup> :

$$f(x_0 + \lambda x) - f(x_0) \approx \lambda^H [f(x_0 + x) - f(x_0)] , \quad (2.45)$$

où  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$ . Le symbole  $\approx$  signifie que l'on a égalité dans le cas où la fonction  $f$  est déterministe et seulement égalité en loi lorsque la fonction  $f$  représente la réalisation d'un processus aléatoire. L'exposant  $H$  est appelé exposant de rugosité ou exposant de Hurst<sup>[53],[200],[203]</sup>. La relation ci-dessus exprime seulement le fait qu'une dilatation d'un facteur  $\lambda$  autour du point  $(x_0, f(x_0))$  dans la direction  $x$  doit être "compensée" par une dilatation d'un facteur  $\lambda^H$  dans la direction  $f$  pour que la fonction reste identique à elle même. Remarquons que si  $H = 1$ , la fonction est auto-similaire alors que si  $H < 1$ , la fonction n'est pas dérivable. En fait, l'exposant de rugosité  $H$  donne une indication sur la régularité de la fonction ; plus  $H$  est grand et plus la fonction semble gagner en régularité. Cet exposant est en fait relié aux différents exposants utilisés dans la littérature pour caractériser ce type de fonctions.

- Le graphe  $\mathcal{G}(\cdot)$  associé à une fonction auto-affine, est un ensemble fractal qui est décrit par sa dimension de Hausdorff ou de capacité. On peut montrer que si  $H$  est l'exposant de rugosité de  $f$ , on a la relation suivante<sup>[97]</sup> :

$$d_C(\mathcal{G}) = \infty - \mathcal{H} . \quad (2.46)$$

Plus  $H$  est proche de 1 et plus le graphe de  $f$  ressemble à celui d'une fonction douce (de dimension fractale 1), tandis que si  $H$  est voisin de 0, alors le graphe  $\mathcal{G}$  a tendance à remplir le plan et la fonction est donc très irrégulière.

- Beaucoup de fonctions sont caractérisées par leur comportement dans l'espace de Fourier<sup>[204],[205],[238]–[242]</sup>. La densité spectrale  $S_f(k) = |T_F(f)|^2(k)$  d'une fonction  $f$  peut être calculée aisément et donne des renseignements sur les corrélations caractéristiques de la fonction. Si  $f$  est auto-affine, on peut montrer que sa densité spectrale a un comportement en loi de puissance. On définit ainsi l'exposant spectral  $\beta$  :

$$S_f(k) \sim k^{-\beta} . \quad (2.47)$$

On peut montrer à nouveau que  $\beta$  est relié à l'exposant de Hurst :

$$\beta = 2H + 1 . \quad (2.48)$$

- La fonction de corrélation à deux points d'une fonction auto-affine s'écrit simplement sous la forme :

$$C_f(l) = \langle f(x)f(x+l) \rangle - \langle f(x)^2 \rangle , \quad (2.49)$$

où  $\langle \rangle$  représente une moyenne spatiale (ou temporelle) dans le cas d'une fonction déterministe et une moyenne d'ensemble dans le cas d'une fonction aléatoire. Cette fonction n'est en fait rien d'autre que la transformée de Fourier de  $S_f(k)$ . Par conséquent,  $C_f(l)$  se comporte aussi en loi de puissance :

$$C_f(l) \sim l^\gamma \sim l^{\beta-1} \sim l^{2H} . \quad (2.50)$$

Ainsi une fonction auto-affine présente des corrélations à longue portée. Ce type de comportements est observé dans de multiples contextes expérimentaux ou théoriques et est généralement considéré comme caractéristique des bruits en  $1/f$ .

## 2.2.2 La classe des signaux Browniens fractionnaires

Les processus Browniens fractionnaires, introduits par Mandelbrot et Van Ness<sup>[236]</sup>, constituent une généralisation des processus Browniens classiques. Ils interviennent dans de nombreuses modélisations de phénomènes naturels. Un processus Brownien fractionnaire<sup>[236],[243]</sup>  $B_H(x)$  indexé par le paramètre  $H$  est un processus Gaussien de moyenne nulle pour lequel la fonction de corrélation s'écrit :

$$\langle B_H(x)B_H(y) \rangle = \frac{\sigma^2}{2} (|x|^{2H} + |y|^{2H} - |x-y|^{2H}) , \quad (2.51)$$

où  $\langle \rangle$  représente la moyenne sur les réalisations et  $B_H(0) = 0$  quelle que soit la réalisation. Sa variance est de la forme :

$$\langle B_H(x)^2 \rangle = \sigma^2 |x|^{2H} . \quad (2.52)$$

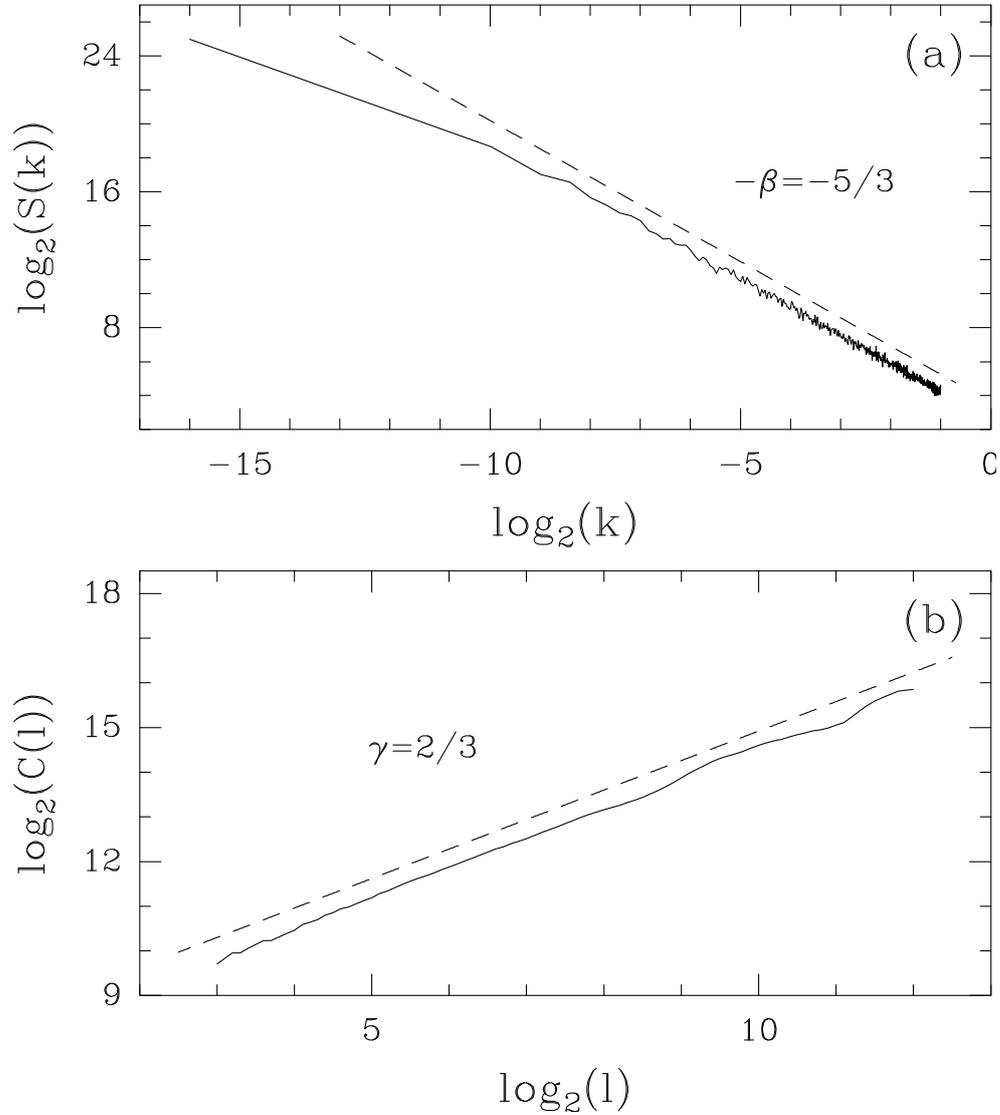


FIG. 2.9 – a) Densité spectrale  $S(k)$  du processus Brownien fractionnaire d'index  $H = 1/3$  en fonction de  $k$  en représentation logarithmique. La pente théorique  $-\beta = -(2H + 1) = -5/3$  est représentée en pointillés. b) Logarithme de la fonction de corrélation à deux points  $C(l)$  en fonction du logarithme de la distance  $l$ . La pente théorique  $\gamma = \beta - 1 = 2H = 2/3$  est représentée en pointillés.

Ces équations montrent le caractère non stationnaire de ce processus. Par contre, le processus qui correspond aux incréments de  $B_H(x)$ , c'est à dire  $\delta B_H(x, y) = B_H(x) - B_H(y)$ , est stationnaire. Sa variance ne dépend que de  $|x - y|$  :

$$\langle \delta B_H(x, y)^2 \rangle = \sigma^2 |x - y|^{2H} . \quad (2.53)$$

En fait, les réalisations d'un processus Brownien fractionnaire sont auto-affines. La relation (2.53) peut être réécrite sous la forme :

$$\langle (\delta B_H(x + \lambda l, x))^2 \rangle = \sigma^2 \lambda^{2H} l^{2H} = \lambda^{2H} \langle (\delta B_H(x + l, x))^2 \rangle . \quad (2.54)$$

En utilisant  $\langle B_H(x) \rangle = 0$ , on obtient :

$$\langle B_H(x + \lambda l) - B_H(x) \rangle \stackrel{s}{=} \lambda^H \langle B_H(x + l) - B_H(x) \rangle , \quad (2.55)$$

où  $\stackrel{s}{=}$  signifie égal en loi. Suivant la définition (2.45), les fonctions Browniennes de paramètre  $H$  sont donc auto-affines d'exposant de Hurst  $H$ . Un processus Brownien classique correspond à la valeur  $H = 1/2$ . En effet, si l'on calcule la fonction de corrélation entre les incréments passés et futurs, on obtient l'expression suivante pour  $C_H(x) = \langle \delta B_H(0, -x) \delta B_H(x, 0) \rangle / \langle B_H^2(x) \rangle$  :

$$C_H(x) = \frac{\langle -B_H(-x) B_H(x) \rangle}{\langle B_H(x)^2 \rangle} = 2^{2H-1} - 1 . \quad (2.56)$$

Ainsi suivant les valeurs de l'index  $H$ , on en déduit les propriétés suivantes sur la nature du processus :

- pour  $H = 1/2$ ,  $C_H(x) = 0$ . Un processus Brownien classique est caractérisé par l'absence de corrélation entre les incréments.
- pour  $H > 1/2$ ,  $C_H(x) > 0$  : un incrément aura tendance à être suivi par un incrément de même signe. Les processus Browniens fractionnaires avec  $H > 1/2$  sont généralement qualifiés de processus persistants.
- pour  $H < 1/2$ ,  $C_H(x) < 0$  : deux incréments successifs auront tendance à avoir des signes opposés. Les processus Browniens fractionnaires avec  $H < 1/2$  sont communément qualifiés de processus antipersistants.

Dans les figures 2.9a et 2.9b, nous avons respectivement représenté, en échelles logarithmiques, la densité spectrale en fonction du vecteur d'onde  $k$  ainsi que la fonction de corrélation en fonction de la distance  $l$  pour un processus Brownien fractionnaire d'index  $H = 1/3$ . Les courbes obtenues présentent bien un comportement linéaire de pente respective  $-\beta = -(2H + 1) = -5/3$  (Eq. 2.47) et  $\gamma = \beta - 1 = 2H = 2/3$  (Eq. (2.50)), en

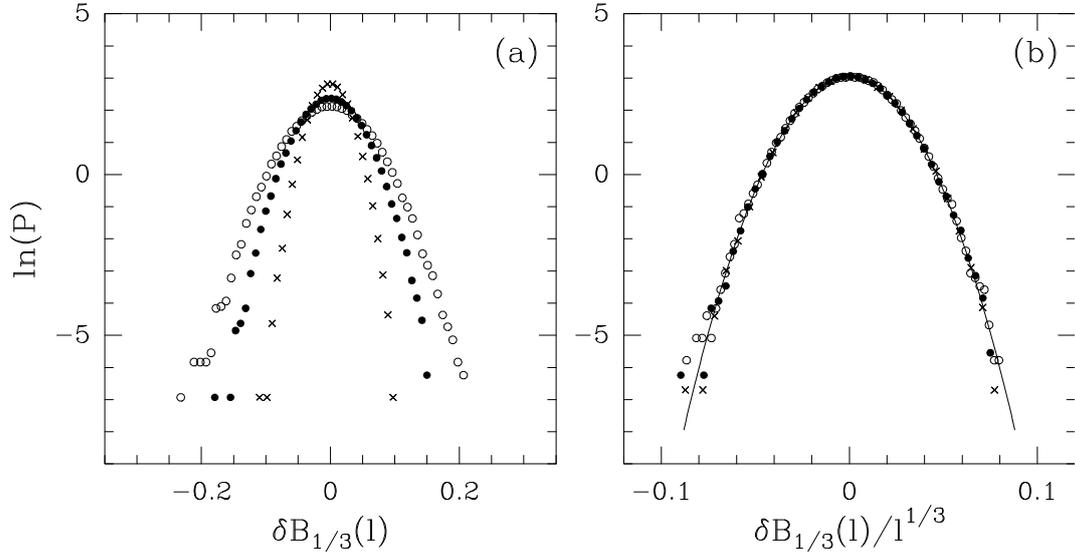


FIG. 2.10 – a) Histogrammes (en échelles semi-logarithmiques) des incréments du Brownien fractionnaire d’index  $H = 1/3$  pour trois échelles différentes  $l=32$  ( $\times$ ),  $l=128$  ( $\bullet$ ) et  $l=512$  ( $\circ$ ). b) Ces mêmes histogrammes après normalisation de  $\delta B_{1/3}(l)$  par  $l^{1/3}$ . Ces histogrammes se remettent sur une courbe unique (une parabole en trait continu) correspondant à une loi gaussienne centrée en zéro.

très bon accord avec la valeur théorique de l’exposant de rugosité  $H = 1/3$ . L’analyse de Fourier donne donc accès à l’exposant de Hurst  $H$  qui caractérise globalement la rugosité du signal analysé.

**Remarque :** Si l’on note  $P_l$  la densité de probabilité des incréments  $\delta f(l)$  de la fonction  $f$  sur une distance  $l$ , alors, si  $f$  est auto-affine d’exposant de Hurst  $H$ , on a, d’après l’équation (2.45) :

$$P_{l_1}(X) = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^H P_{l_2}\left(\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^H X\right) \quad \forall l_1, l_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.57)$$

Dans la figure 2.10a, nous avons représenté le logarithme des fonctions de densité de probabilité des incréments du Brownien fractionnaire d’index  $H = 1/3$  pour trois échelles différentes. Comme cela est illustré sur la figure 2.10b ces fonctions se remettent bien sur une distribution (normalisée) unique lorsqu’à chaque échelle on exprime les incréments en unité d’écart type  $\sigma_l \sim l^H$  de la distribution. De plus, comme l’indique l’approximation par une parabole (courbe continue), cette distribution est par définition des processus Browniens fractionnaires une loi gaussienne centrée en zéro.

### 2.2.3 Exposant de Hölder et fonctions multifractales

En fait la donnée de l'exposant de rugosité d'une fonction se ramène à la simple donnée de la dimension fractale de son graphe et comme nous l'avons vu pour les mesures, le rapport de la mesure de deux ensembles peut être différent du rapport de leur longueur. Nous sommes donc amenés à reconsidérer les propriétés fractales d'une fonction, non plus par le biais de la géométrie de leur graphe, mais plutôt du point de vue des comportements singuliers qu'elle manifeste. Pour cela, il suffit de remarquer que l'équation (2.45), qui définit l'exposant de Hurst, peut se réécrire et se généraliser de la manière suivante :

$$|f(x+l) - f(x)| \sim Cl^{h(x)} . \quad (2.58)$$

L'exposant  $h(x)$  devient ainsi une caractéristique locale de  $f$  et peut, bien sûr, dépendre du point considéré. Cet exposant est souvent appelé exposant de Hölder au point  $x$ . Nous donnerons dans la section 2.3 une définition plus générale de l'exposant de Hölder, c'est pourquoi nous continuerons à appeler l'exposant défini ci-dessus exposant de Hurst au point  $x$ . Cet exposant caractérise le degré de régularité locale de  $f$  :  $f$  sera d'autant moins régulière au point  $x$  que  $h(x)$  sera voisin de 0. Si l'on identifie l'équation (2.58) à l'équation (2.7) qui définit l'exposant local de singularité d'une mesure, la démarche qui permet de calquer le formalisme multifractal afin de l'adapter aux fonctions devient évident. Il suffit de substituer la notion d'exposant de singularité par celle d'exposant de Hurst local. Les mesures des boîtes de taille  $l$  deviennent alors les incréments de la fonction sur une distance  $l$ . L'équivalent du spectre  $f(\alpha)$  des singularités est trivial à définir. Nous appellerons  $D(h)$ , le spectre des exposants de Hurst de la fonction  $f$ , la fonction qui à tout  $h$ , associe la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points  $x$  qui vérifient  $h(x) = h$  :

$$D(h) = d_H(\{x|h(x) = h\}) . \quad (2.59)$$

La description représentée par les équations (2.58) et (2.59) a été originellement introduite par Frisch et Parisi<sup>[67]</sup> dans l'étude de la turbulence pleinement développée. C'est d'ailleurs aussi à ces auteurs que l'on doit le qualificatif de "multifractal".

Comme pour les mesures se pose le problème de l'estimation de la fonction  $D(h)$ . Pour cela, Frisch et Parisi<sup>[67]</sup> ont proposé de considérer les fonctions de structure<sup>[26]</sup>  $S_p(l)$  comme l'équivalent des fonctions de partition  $Z(p, \epsilon)$  (Eq. (2.12)). Leur comportement en fonction de l'échelle  $l$  permet en effet de définir un spectre d'exposants  $\zeta_p$ , analogue de la fonction  $\tau(p)$  (Eq. (2.13)) :

$$S_p(l) = \int |f(x+l) - f(x)|^p dx \sim l^{\zeta_p} . \quad (2.60)$$

De façon tout à fait similaire à ce qui a été fait dans le cas des mesures, une simple méthode du col permet de montrer que  $\zeta_p$  et  $D(h)$  sont reliés, à l’instar de  $\tau(p)$  et  $f(\alpha)$ , par une transformation de Legendre :

$$\zeta_p = 1 + \min_h(ph - D(h)) . \quad (2.61)$$

L’analogie est ainsi complète et un formalisme multifractal pour les fonctions peut être envisagé. La description d’une fonction fractale par l’intermédiaire de ce formalisme est beaucoup plus riche que la simple donnée de la dimension fractale de son graphe<sup>[67],[244]</sup>. Elle permet en particulier de distinguer les fonctions fractales homogènes pour lesquelles  $h(x_0) = H, \forall x_0$ , des fonctions “multifractales” caractérisées par un spectre  $D(h)$  des singularités non trivial dans le sens où son support s’étale sur tout un intervalle  $h \in [h_{min}, h_{max}]$ .

### Exemples

- *Fonctions fractales homogènes (ou monofractales)* : Parmi les exemples de fonctions fractales homogènes, revenons quelques instants sur les réalisations des processus Browniens fractionnaires  $B_H$ . Comme cela est reporté sur la figure 2.13, le spectre des exposants  $\zeta_p$  des fonctions de structure est une fonction linéaire de  $p$ , ce qui signifie, d’après les propriétés de la transformation de Legendre (Eq. (2.61)), que toutes les singularités des signaux Browniens fractionnaires correspondent à un unique exposant de Hurst local  $h = H$  où  $H$  est l’index du processus. La linéarité du spectre  $\zeta_p$  est donc un diagnostic de l’homogénéité de la fonction fractale analysée : la pente de  $\zeta_p$  comme fonction de  $p$  permet d’estimer l’unique exposant de Hurst  $h = H$ .

Comme autre exemple de fonctions auto-affines, considérons la classe des fonctions définies par intégration de mesures fractales :  $f(x) = \int_0^x d\mu$ . La mesure  $\mu([x_1, x_2])$  représente en fait l’incrément  $\delta f(x_2, x_1) = f(x_2) - f(x_1)$  de la fonction  $f$  ainsi construite. Ainsi, si l’on intègre la mesure distribuée homogènement sur le Cantor triadique, on obtient une fonction fractale homogène dont l’unique exposant de Hurst est donné par l’exposant de singularité  $\alpha = \ln 2 / \ln 3$  de cette mesure. En effet, d’après l’équation (2.45), en supposant  $x_0 = f(x_0) = 0$ , on obtient la relation suivante :

$$f(\lambda x) = \mu([0, \lambda x]) = \lambda^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \mu([0, x]) = \lambda^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} f(x) . \quad (2.62)$$

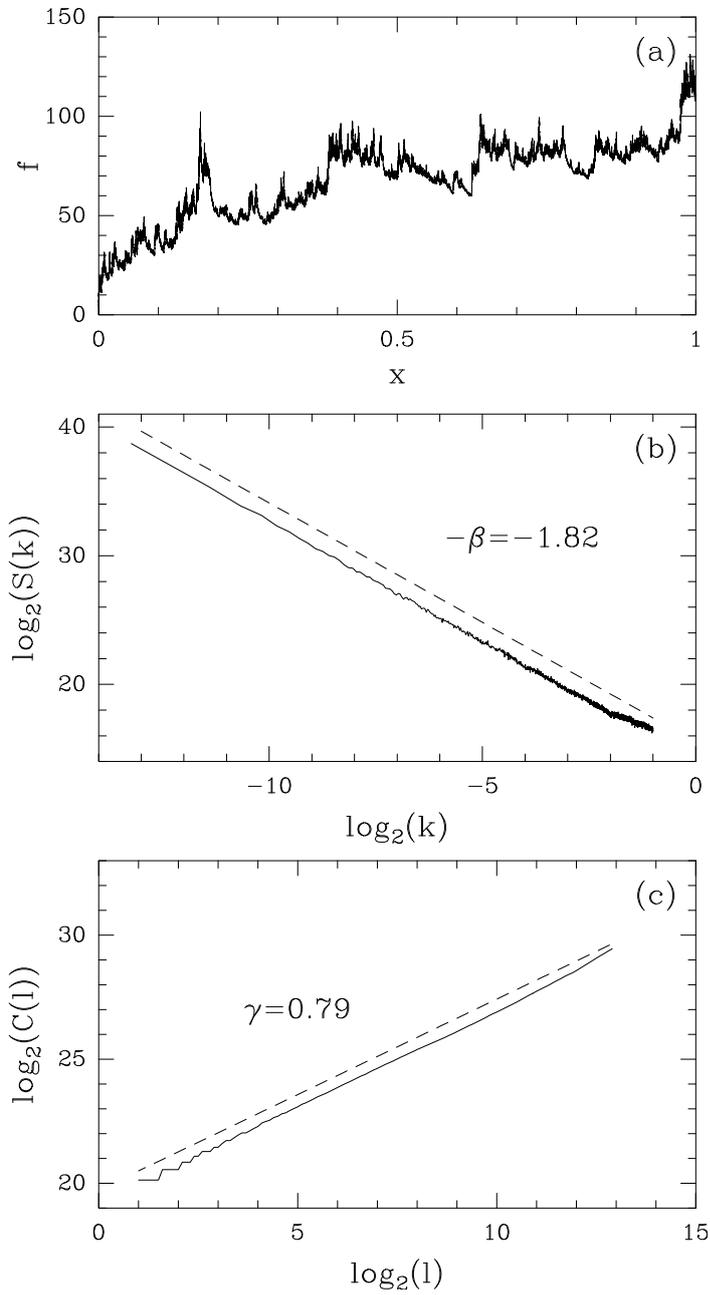


FIG. 2.11 – a) Fonction aléatoire obtenue par intégration fractionnaire d'exposant  $\delta = 0.4$  d'une mesure multifractale générée avec le modèle log-Poisson ( $\beta = \gamma = 2/3$ ). b) Densité spectrale. c) Fonction de corrélation à deux points.

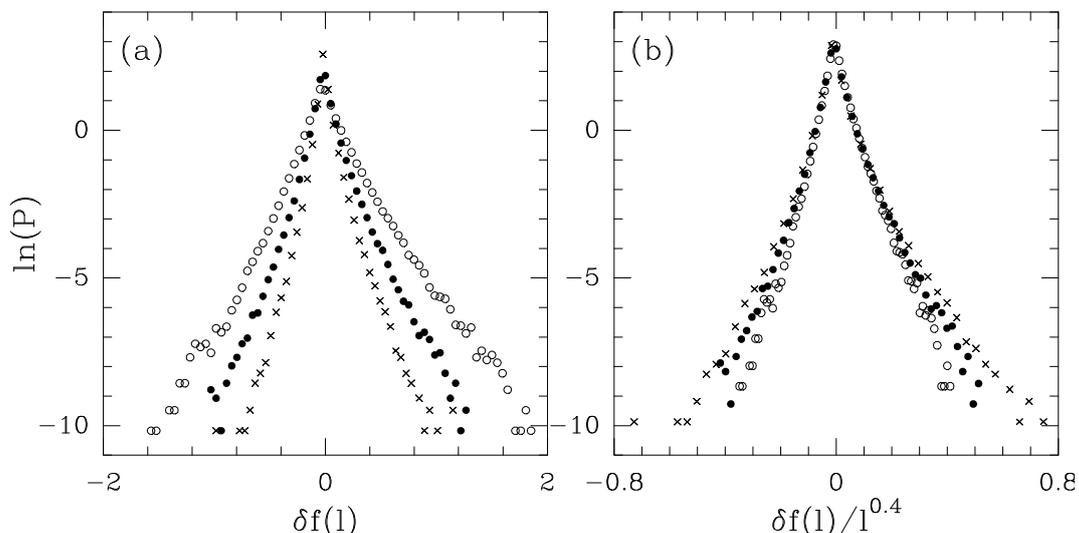


FIG. 2.12 – a) Histogrammes (en échelles semi-logarithmiques) des incréments de la fonction obtenue par intégration fractionnaire d'ordre  $\delta = 0.4$  de la mesure générée avec le modèle log-Poisson (Fig. 2.11a). Les différents symboles correspondent aux échelles  $l = 32$  ( $\times$ ),  $l = 128$  ( $\bullet$ ) et  $l = 512$  ( $\circ$ ). b) Les mêmes histogrammes après normalisation de  $\delta f(l)$  par  $l^H$ , où  $H = 0.4$  a été estimé à partir de la densité spectrale (Fig. 2.11b). Ces histogrammes ne se remettent pas sur une courbe unique.

- *Fonctions multifractales* : En s'inspirant de l'exemple précédent des fonctions caractéristiques de mesures singulières, on peut construire par intégration de mesures multifractales, des fonctions dont l'exposant de Hurst local va fluctuer spatialement. Sur la figure 2.11a, nous avons représenté la fonction obtenue par intégration fractionnaire d'exposant  $\delta = 0.4$  d'une mesure multifractale engendrée suivant le modèle log-Poisson décrit dans le paragraphe 2.1.4. Sur les figures 2.11b et 2.11c, nous avons représenté respectivement sa densité spectrale et sa fonction de corrélation à deux points. A partir du comportement en loi de puissance de ces quantités, on peut, comme dans la figure 2.9, estimer un exposant de Hurst global effectif  $H = (\beta - 1)/2 = \gamma/2 = 0.40 + -0.02$  ( $\beta = 1.82$ ,  $\gamma = 0.79$ ). Or, comme cela est illustré sur la figure 2.12, les distributions de probabilité des incréments calculées à différentes échelles  $l$ , ne se remettent pas sur une courbe unique lorsque, comme dans la figure 2.10 pour les Browniens fractionnaires, on exprime les incréments en unité  $l^H$  avec  $H = 0.40$ . La connaissance du seul exposant de Hurst global accessible à l'analyse de Fourier ne permet donc pas de rendre compte de la richesse

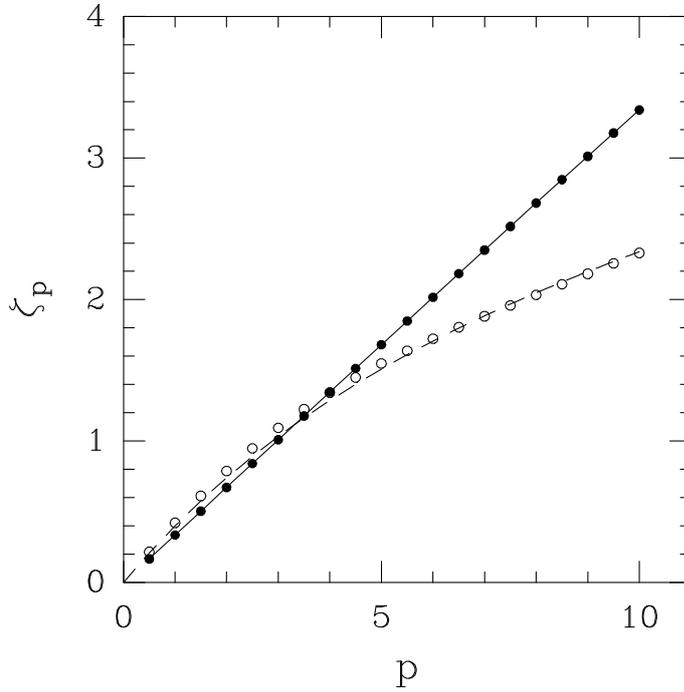


FIG. 2.13 – Spectre  $\zeta_p$  des exposants des fonctions de structure en fonction de  $p$ . Le Brownien fractionnaire  $B_{1/3}$  est caractérisé par un spectre  $\zeta_p$  linéaire (●) de pente  $H = 1/3$  (ligne continue), qui est la valeur de l'unique exposant de Hurst présent dans le signal. Le spectre  $\zeta_p$  de la fonction multifractale présentée dans la figure 2.11 (○) est non linéaire. Son spectre théorique est représenté par la ligne en pointillés.

des propriétés d'invariance d'échelle des fonctions multifractales. Les résultats du calcul des exposants  $\zeta_p$  des fonctions de structure sont rapportés dans la figure 2.13. Le spectre ainsi obtenu est désormais une courbe non linéaire concave caractéristique de la multifractalité de la fonction analysée. En effet, d'après les propriétés de la transformation de Legendre (Eq. (2.61)), l'exposant de Hurst local va pouvoir prendre toute les valeurs  $h \in [h_{min}, h_{max}]$  correspondant au domaine de variation de la pente de la fonction  $\zeta_p$ . La non linéarité du spectre  $\zeta_p$  est donc la signature de la non homogénéité de la fonction (multifractale) considérée.

## Remarques

- Les contraintes sur le spectre  $f(\alpha)$  imposées par l'additivité de la mesure n'ont aucune raison de se retrouver sur le spectre  $D(h)$  des exposants de Hurst. En particulier le spectre  $D(h)$  peut ne pas être tangent à la diagonale.
- Dans le cas où  $D(h)$  ne se réduit pas à un point, la dimension fractale du graphe de  $f$ ,  $d_C(\mathcal{G})$  est reliée à la valeur de l'exposant  $\zeta_1 = 1 + \max_h(D(h) - h)$ . Par contre l'exposant  $\beta$  de la densité spectrale  $S_f(k)$  ainsi que l'exposant de la fonction de corrélation à deux points sont reliés à l'exposant  $\zeta_2$ . Les relations (2.46) et (2.47) ne sont donc vraies que si la fonction  $f$  est une fonction fractale homogène pour laquelle les exposants  $\zeta_p$  sont trivialement reliés à l'unique exposant de Hurst caractérisant une telle fonction.

Le formalisme introduit par Frisch et Parisi<sup>[67]</sup> permet donc de caractériser la nature singulière d'une fonction auto-affine par le biais d'une description statistique comparable au formalisme multifractal introduit pour les mesures. Cependant, ce formalisme souffre de sévères limitations, en particulier :

- i) l'équation (2.60) fait intervenir une intégrale sur tout l'espace. En général, le signal va posséder des incréments aussi petits que l'on veut, et ceci à toute échelle. Pour  $p < -1$ ,  $S_p(l)$  va donc diverger. Le spectre  $\zeta_p$  est donc défini seulement pour les valeurs positives de  $p$  et la relation (2.61) n'est donc que partielle.
- ii) si la fonction étudiée possède des comportements très singuliers, la méthode des fonctions de structure est alors très instable. A l'opposé, si la fonction est trop régulière (il suffit qu'elle soit  $C^1$ ), alors le spectre  $\zeta_p$  est trivialement égal à  $p$ ; il ne donne donc aucun renseignement sur les singularités ayant un exposant de Hurst  $h > 1$ , c'est-à-dire les singularités qui peuvent arriver dans les dérivées d'ordre supérieur de la fonction considérée.

Ces diverses limitations intrinsèques à la méthode des fonctions de structure montrent que celle-ci ne constitue pas une extension pleinement satisfaisante du formalisme multifractal aux fonctions singulières.

## 2.3 La méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes : un formalisme multifractal pour les distributions

### 2.3.1 La transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes a été introduite il y a maintenant plus de dix ans par le géophysicien Morlet<sup>[75]</sup>. Intéressé par l'étude des signaux sismiques intervenant dans la recherche pétrolière, il s'aperçoit que les décompositions spectrales classiques (transformée de Fourier et transformée de Fourier à fenêtre glissante<sup>[245]</sup>) sont inadaptées à l'étude de signaux combinant des échelles très différentes. Pour palier à ces lacunes, il propose une transformation qui permet une représentation du signal simultanément dans l'espace et les échelles. L'idée maîtresse consiste à décomposer le signal sur des fonctions élémentaires,  $\psi_{b,a}$ , construites à partir d'une fonction mère  $\psi$ , par dilatations et translations de celle-ci :  $\psi_{b,a}(x) = \psi(\frac{x-b}{a})$ .

Dès 1984, Grossman et Morlet formalisent dans un cadre fonctionnel rigoureux les concepts de cette nouvelle représentation espace-échelle<sup>[76]–[79]</sup>. Ils démontrent en particulier que, sous certaines conditions, cette transformation est inversible. Pour cela, la fonction  $\psi$  doit présenter quelques oscillations et donc ressembler à une ondelette. C'est ainsi que naît la théorie des ondelettes qui va connaître un essor important. De par la richesse des concepts qu'elle met en jeu et l'efficacité de sa mise en oeuvre algorithmique, l'analyse en ondelettes a été exploitée avec succès dans de nombreux domaines<sup>[68]–[74]</sup> aussi variés que l'analyse fonctionnelle, la physique théorique, l'analyse et le traitement du signal et des images, la théorie des fractales,...

**Définition :** Soit un signal  $s(x) \in L^2(\mathbf{R}, dx)$  l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable. Si l'on note  $\psi_{b,a}(x)$  la fonction  $a^{-1/2}\psi(\frac{x-b}{a})$  obtenue par translation de  $b$  et dilatation de  $a$  de la fonction  $\psi(x)$ ; on définit alors la transformée en ondelettes (T.O.) de  $s(x)$  par rapport à  $\psi$  comme<sup>[68]–[79]</sup> :

$$\begin{aligned} T_\psi[s](b, a) &= C_\psi^{-1/2} \langle \psi_{b,a} | s \rangle_{L^2(\mathbf{R}, dx)} , \\ &= C_\psi^{-1/2} a^{-1/2} \int \bar{\psi}(\frac{x-b}{a}) s(x) dx , \end{aligned} \tag{2.63}$$

où  $C_\psi^{-1/2}$  est une constante de normalisation et  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{L^2(\mathbf{R}, dx)}$  représente le produit scalaire dans  $L^2(\mathbf{R}, dx)$ . Remarquons que le paramètre  $b$  est un paramètre de position ( $b \in \mathbf{R}$ ) et  $a$  est un paramètre d'échelle strictement positif ( $a \in \mathbf{R}_{+*}$ ). La fonction  $\psi$  qui peut être

réelle ou complexe est appelée fonction mère. A une normalisation près, le coefficient en ondelettes  $T_\psi[s](b, a)$  n'est rien d'autre que le produit scalaire du signal  $s$  et de l'ondelette mère dilatée de  $a$  et translatée de  $b$ . La définition (2.63) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$T_\psi[s](b, a) = a^{1/2} C_\psi^{-1/2} \int \bar{\hat{\psi}}(aw) \hat{s}(w) e^{ibw} dw, \quad (2.64)$$

où  $\hat{s}(w)$  et  $\hat{\psi}(w)$  représentent respectivement les transformées de Fourier de  $s(x)$  et  $\psi(x)$ . Ainsi à échelle  $a$  fixée, la T.O. apparaît comme un simple filtrage du signal dans le plan de Fourier par la fonction  $\hat{\psi}(aw)$ .

**Propriétés :** D'après la définition (2.63), la T.O. est une application linéaire de  $L^2(\mathbf{R}, dx)$  dans un espace de fonction du demi-plan  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{+*}$ . Si  $D^\lambda$  et  $T^{x_0}$  représente les opérateurs de dilatation et de translation<sup>[76]–[79]</sup> :

$$\begin{aligned} D^\lambda \psi(x) &= \lambda^{-1/2} \psi\left(\frac{x}{\lambda}\right), \\ T^{x_0} \psi(x) &= \psi(x - x_0), \end{aligned} \quad (2.65)$$

alors, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} T_\psi[T^{x_0}s](b, a) &= T_\psi[s](b - x_0, a), \\ T_\psi[D^\lambda s](b, a) &= T_\psi[s]\left(\frac{b}{\lambda}, \frac{a}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Si l'on impose à  $T_\psi$  d'être une isométrie de  $L^2(\mathbf{R}, dx)$  dans  $L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{+*}, d\mu(b, a))$  où  $\mu(b, a)$  est la mesure naturelle, invariante sous l'action des dilatations et des translations du demi-plan  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{+*}$  ( $d\mu(b, a) = dadb/a^2$ ), c'est-à-dire :

$$\langle s|s \rangle_{L^2(\mathbf{R}, dx)} = \langle T_\psi[s]|T_\psi[s] \rangle_{L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{+*}, d\mu(b, a))}, \quad (2.67)$$

alors en utilisant la définition (2.63) et la formule de Plancherel, cette propriété se réécrit sous la forme :

$$C_\psi = 2\pi \int \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} dw. \quad (2.68)$$

La condition nécessaire  $C_\psi < +\infty$  est appelée condition d'admissibilité<sup>[76]–[80]</sup>. Cependant, on utilise généralement une condition légèrement plus contraignante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} dw = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(-w)|^2}{w} dw < +\infty. \quad (2.69)$$

Cette condition impose  $\hat{\psi}(0) = 0$ , et donc si  $\psi \in L^1(\mathbf{R})$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (2.70)$$

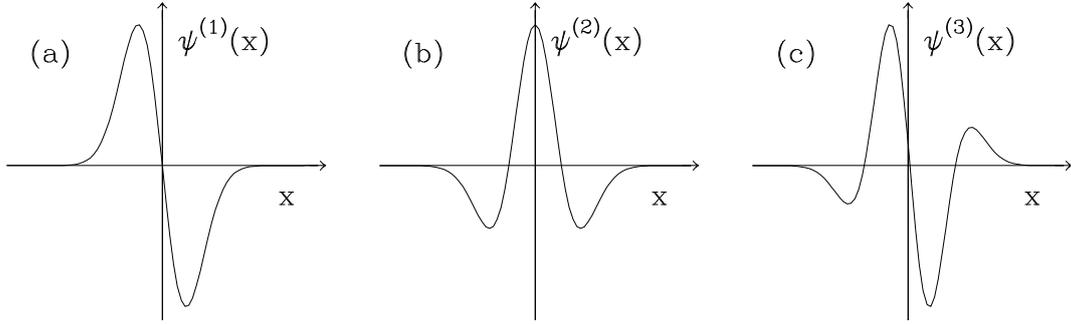


FIG. 2.14 – La famille des ondelettes analysatrices  $\psi^{(N)}(x)$ , dérivées de la fonction Gaussienne, où  $n_\psi = N$  correspond au nombre de moments nuls de l'ondelette  $\psi$ .

Les ondelettes vérifiant les conditions (2.69) et (2.70) sont qualifiées d'ondelettes analysatrices. La transformation  $T_\psi$  étant une isométrie (avec  $\psi$  bien choisie), on peut donc la considérer comme un opérateur unitaire de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{+*})$  inversible sur son image. On a alors la relation d'inversion<sup>[68]–[73],[76]–[79]</sup> :

$$s(x) = C_\psi^{-1/2} \int a^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) T_\psi[s](b, a) d\mu(b, a) . \quad (2.71)$$

Parmi les classes d'ondelettes admissibles couramment utilisées dans la littérature<sup>[68],[81]–[89],[95],[97],[100]–[105]</sup>, nous citerons en particulier la classe des fonctions dérivées de la Gaussienne :

$$\begin{cases} \psi^{(N)}(x) &= \frac{d^N}{dx^N} e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ \hat{\psi}^{(N)}(w) &= (iw)^N e^{-\frac{w^2}{2}}, \end{cases} \quad (2.72)$$

ainsi que l'ondelette complexe de Morlet :

$$\psi_{(C)}(x) = e^{i\Omega x} (e^{-x^2/2} - \sqrt{2} e^{-\Omega^2/4} e^{-x^2}) . \quad (2.73)$$

Ces fonctions réelles ou complexes sont  $C^\infty$  et présentent l'avantage d'être bien localisées à la fois dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier. De plus,  $\psi^{(N)}$  vérifie :

$$\int \psi^{(N)}(x) x^q dx = 0 , \quad 0 \leq q < N . \quad (2.74)$$

Les fonctions  $\psi^{(N)}$  ont donc leurs  $N$  premiers moments nuls. D'une manière générale  $n_\psi = N$  dénotera toujours le nombre de moments nuls de l'ondelette analysatrice  $\psi$ . Dans la figure 2.14 sont illustrées quelques unes des fonctions  $\psi^{(N)}$ . Notons que l'un des grands

avantages de la T.O. repose sur la liberté de choix de la forme de l'ondelette analysatrice. Un très grand nombre de fonctions vérifient les conditions (2.69) et (2.70) ; le choix d'une ondelette analysatrice particulière s'effectuera généralement au cas par cas en fonction du problème traité.

### 2.3.2 Transformation en ondelettes et analyse des singularités

Dans la section 2.2.3, nous avons vu comment la rugosité locale d'une fonction peut être quantifiée par un exposant, que nous avons appelé exposant de Hurst local. Nous donnons ici une définition plus précise et plus générale de la notion d'exposant de Hölder.

**Définition :** On appelle *exposant de Hölder*  $h(x_0)$  d'une fonction  $f$  au point  $x_0$  le plus grand  $h$  tel que  $f$  soit  $h$ -Lipschitzienne en  $x_0$ , c'est à dire qu'il existe une constante  $C$  et un polynôme  $P_n(x)$  de degré  $n$  tel que pour tout  $x$  dans un voisinage de  $x_0$ , on ait<sup>[90]–[92]</sup> :

$$|f(x) - P_n(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^h . \quad (2.75)$$

Nous dirons qu'une fonction est *singulière* au point  $x_0$  si  $h(x_0) < 1$ . Tel qu'il est défini dans l'équation (2.75), cet exposant caractérise non seulement les fonctions singulières mais aussi les fonctions dont une dérivée d'ordre supérieur est singulière. En effet, si  $h(x_0) \in ]n, n + 1[$  alors  $f$  est dérivable  $n$  fois en  $x_0$  et sa dérivée  $n$ -ième est singulière. En fait le polynôme  $P_n(x)$  correspond aux  $n + 1$  premiers termes de la série de Taylor de  $f$  au point  $x_0$ . La valeur de  $h(x_0)$  donne donc une caractérisation du degré de régularité de  $f$  au point  $x_0$ .

#### Remarques

- $h(x_0) = n$  n'implique pas forcément que  $f$  soit  $n$  fois dérivable en  $x_0$ .
- D'une manière générale, on peut montrer que si la fonction  $f$  vérifie  $h(x_0) = h$ , alors sa primitive sera caractérisée en  $x_0$  par un exposant de Hölder  $h(x_0) = h + 1$ . Notons que cette relation n'est pas vérifiée lorsque les singularités que l'on considère sont de nature oscillante<sup>[92],[97],[246]</sup>. Toutes les considérations que nous développerons dans la suite concernent exclusivement des signaux dont les singularités sont à caractère non oscillant.

La notion d'exposant de Hölder introduite ci-dessus peut s'étendre à des valeurs négatives et caractériser des distributions tempérées<sup>[92]</sup>. Nous dirons qu'une distribution  $f$  à un exposant de Hölder  $h_0$  au point  $x_0$  si et seulement si sa primitive, au sens des distributions, vérifie  $h(x_0) = h_0 + 1$ . En d'autres termes, si on travaille au sens des

distributions, la dérivation diminue de 1 l'exposant de Hölder tandis qu'une intégration augmente de 1 cet exposant. Par exemple la fonction de Heaviside,  $\Theta(x) = \chi_{[0,+\infty]}(x)$  vérifie  $h(0) = 0$ ; sa dérivée au sens des distributions est la distribution de Dirac  $\delta(x)$  qui a ainsi un exposant de Hölder  $h(0) = -1$ .

Redéfinissons de la façon suivante la transformée en ondelettes d'une distribution  $f$  :

$$T_\psi[f](b, a) = a^{-1} \int \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx, \quad (2.76)$$

où l'on a simplement remplacé dans la définition initiale (2.63), le facteur de normalisation  $a^{-1/2}$  par  $a^{-1}$  et négligé le facteur de normalisation  $C_\psi$ . Désormais, c'est cette définition de la T.O. que nous utiliserons en pratique pour des raisons de commodité dans la détection et l'identification des singularités d'un signal. Récrivons naïvement la définition de l'exposant de Hölder  $h(x_0)$  de  $f$  au point  $x_0$ . Dans un voisinage de  $x_0$ , nous supposons que  $f$  s'écrit sous la forme :

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_k(x - x_0)^k + c|x - x_0|^{h(x_0)}. \quad (2.77)$$

Sa transformée en ondelettes au point  $x_0$  s'écrit :

$$\begin{aligned} T_\psi[f](x_0, a) &= a^{-1} \int \psi\left(\frac{x-x_0}{a}\right) f(x) dx, \\ &= \int \psi(x) f(ax + x_0) dx, \end{aligned} \quad (2.78)$$

Supposons que  $\psi$  soit localisée autour de l'origine et à support compact; dans ce cas si  $a$  est suffisamment petit, on peut développer  $f$  autour de  $x_0$  et écrire :

$$T_\psi[f](x_0, a) = c_0 M_0 + c_1 a M_1 + \dots + c_k a^k M_k + c \int \psi(x) |ax|^{h(x)} dx, \quad (2.79)$$

où  $M_0, \dots, M_k$  représentent les moments successifs de l'ondelette  $\psi$ . Si l'on suppose que celle-ci vérifie  $n_\psi > k + 1$  (où  $n_\psi$  est le nombre de moments nuls de  $\psi$ ), c'est-à-dire  $M_i = 0, \forall i \in [0, k]$ , alors<sup>[90],[91]</sup> :

$$T_\psi[f](x_0, a) \simeq a^{h(x_0)} c T_\psi[f](x_0, 1) \sim a^{h(x_0)}. \quad (2.80)$$

Ainsi le comportement singulier  $|x - x_0|^{h(x_0)}$  de  $f$  se traduit par un comportement en loi de puissance dans les échelles ( $a \rightarrow 0^+$ ) de la T.O. de  $f$  au point  $x_0$  avec un exposant  $h(x_0)$ . Par contre, si  $f$  est très régulière, son développement autour de  $x_0$  est donné par sa série de Taylor et sa T.O. au point  $x_0$  va s'écrire de façon générique sous la forme<sup>[90],[91]</sup> :

$$T_\psi[f](x_0, a) = \frac{f^{(n_\psi)}(x_0)}{n_\psi!} M_{n_\psi} a^{n_\psi} + O(a^{n_\psi}) \sim a^{n_\psi}. \quad (2.81)$$

Un comportement régulier sera donc caractérisé par une décroissance en loi de puissance dans les échelles des coefficients en ondelettes dont l'exposant est égal au nombre de moments nuls de l'ondelette analysatrice.

Ces idées peuvent en fait s'énoncer de façon précise comme l'ont démontré rigoureusement Jaffard<sup>[90]</sup> ainsi qu'Holschneider et Tchamitchian<sup>[91]</sup>.

**Théorème<sup>[90],[91]</sup>** : On suppose que l'ondelette analysatrice  $\psi$  est suffisamment régulière, à support compact et possède ses  $n_\psi$  premiers moments nuls.

- a) Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  une distribution Lipschitz  $\gamma$  au point  $x_0$  avec  $\gamma \leq n_\psi$ . Dans ce cas sa T.O. vérifie :

$$|T_\psi[f](x, a)| = O(a^\gamma + |x - x_0|^\gamma).$$

- b) Inversement, soit  $\gamma < n_\psi$  et supposons que l'on ait :

i)  $\exists \nu > 0$  tel que  $|T_\psi[f](x, a)| = O(a^\nu)$  uniformément en  $x$ ,

ii)  $|T_\psi[f](x, a)| = O(a^\gamma + \frac{|x-x_0|^\gamma}{|\ln|x-x_0||})$ ,

alors  $f$  est  $\gamma$ -Lipschitzienne en  $x_0$ .

Ainsi si l'on néglige les corrections logarithmiques dans le théorème ci-dessus (ce qui est tout à fait raisonnable du point de vue numérique) et si l'on suppose que la condition b-i) est toujours vérifiée, alors la condition a) peut être considérée comme nécessaire et suffisante. L'exposant de Hölder de  $f$  en  $x_0$  est donc la plus grande valeur de  $\gamma$  telle que la condition a) soit satisfaite.

Considérons maintenant une ondelette analysatrice  $\psi$  à valeurs complexes, suffisamment localisée autour de l'origine, et telle que  $n_\psi$  soit suffisamment grand. Supposons, comme précédemment, qu'au voisinage de  $x_0$ ,  $f(x)$  soit de la forme :

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_k(x - x_0)^k + c|x - x_0|^{h(x_0)}. \quad (2.82)$$

Si  $n_\psi > h$ , alors sa T.O. s'écrit simplement comme :

$$\begin{aligned} T_\psi[f](x_0 + b, a) &= a^{h(x_0)} c \int \bar{\psi}(x) |x + \frac{b}{a}|^{h(x_0)} dx, \\ &= a^{h(x_0)} T_\psi[f](x_0 + \frac{b}{a}, 1). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Soit une ligne  $(x_0 + b, a)$  du demi-plan espace-échelle qui converge vers le point  $(x_0, 0)$  telle que  $b/a = Cte$ . Le long de cette ligne, si  $h(x_0)$  est réel, on a :

$$\begin{cases} Arg T_\psi[f](x, a) = Arg T_\psi[f](x_0 + Cte, 1), \\ |T_\psi[f](x, a)| = a^{h(x_0)} |T_\psi[f](x_0 + Cte, 1)|. \end{cases} \quad (2.84)$$

Un point singulier  $x_0$  d'une fonction  $f$  est donc caractérisé par des lignes de forme  $(x_0 + Ca, a)$  qui convergent vers  $x_0$  quand  $a$  tend vers  $0^+$  et le long desquelles la phase de la T.O. est constante<sup>[81],[247]</sup>. L'évolution du module le long de ces lignes permet une estimation de  $h(x_0)$ . Mais pour cela, il faut estimer simultanément la phase et le module de la transformée. Pour simplifier cette méthode introduite par Grossmann et ses collaborateurs<sup>[247]</sup>, Mallat et Hwang<sup>[92]</sup> ont proposé une méthode qui permet à la fois une détection et une identification efficace des singularités en utilisant simplement des ondelettes réelles.

### Définitions<sup>[92],[248]</sup>

- On appelle maximum du module de la T.O. (M.M.T.O.), tout point  $(x_0, a_0)$  du demi-plan  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{+*}$  qui vérifie  $|T_\psi[f](x_0, a_0)| \geq |T_\psi[f](x, a_0)|$  pour tout  $x$  dans un voisinage à gauche de  $x_0$  et  $|T_\psi[f](x_0, a_0)| > |T_\psi[f](x, a_0)|$  pour tout  $x$  dans un voisinage à droite de  $x_0$ . La fonction  $|T_\psi[f](\cdot, a_0)|$  a donc une dérivée nulle en  $x_0$ .
- On appelle ligne de maxima toute courbe connexe dans le demi-plan  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{+*}$  de maxima du module de la T.O..

Soit  $f(x)$  un signal et supposons que pour un certain point  $b_0 \in ]b_1, b_2[$ , il existe une constante  $C$  telle que toutes les lignes de maxima de la T.O. appartiennent au cône  $|x - b_0| \leq Ca$ . Dans ce cas, Mallat et Hwang<sup>[92]</sup> ont établi que  $\forall x \in ]b_1, b_2[, x \neq b_0, f$  est Lipschitz  $n_\psi$ . Au point  $b_0$ , la fonction  $f$  est Lipschitz  $\alpha$  si et seulement si, le long de ces lignes de maxima, le module de la T.O. vérifie :

$$|T_\psi[f](x, a)| = O(a^\alpha) . \quad (2.85)$$

Ce résultat affirme que les maxima du module de la T.O. permettent non seulement de mettre en évidence une singularité isolée, mais aussi d'estimer l'exposant de Hölder qui la caractérise (la valeur maximum de  $\alpha$ ) en examinant le comportement dans les échelles de  $|T_\psi|$  le long des lignes de maxima.

Sur les figures 2.15 et 2.16, nous avons illustré ces définitions sur un exemple simple : nous avons reporté l'étude d'un signal  $f(x)$  de la forme  $f(x) = k_1|x - x_1|^{0.5} + k_2e^{-\frac{(x-x_2)^2}{2}}$  (Fig. 2.15a). Ce signal est régulier partout sauf en  $x_1$  où  $h(x_1) = 0.5$ . Le module de la T.O. est représenté sur la figure 2.15b. Celui ci est codé indépendamment à chaque échelle, avec une gamme de 32 niveaux de gris, depuis le blanc ( $|T_\psi[f]| = 0$ ) jusqu'au noir ( $\max_x |T_\psi[f](x, a)|$ ). Les courbes en surimpression représentent la transformée en ondelette aux échelles  $a = 2^2, 2^4$  et  $2^6$ . Les lignes discontinues représentent la valeur nulle. L'ensemble des maxima du module qui s'arrangent en lignes de maxima dans le demi-plan

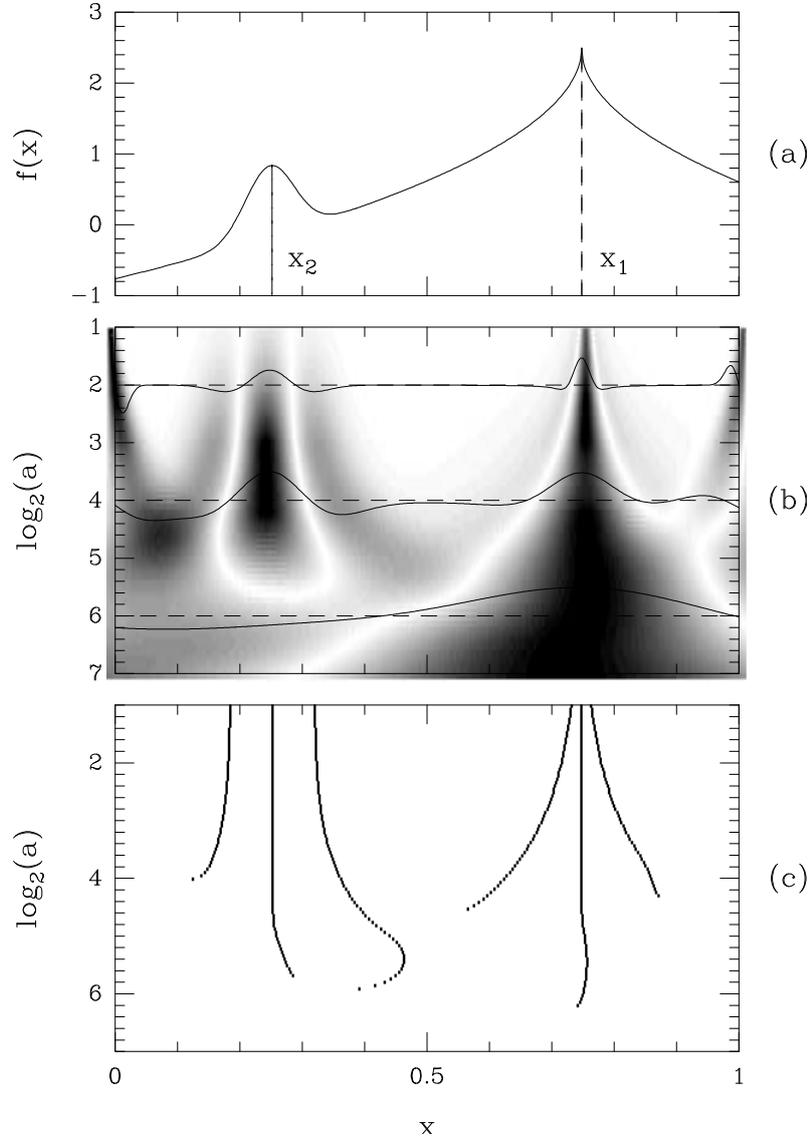


FIG. 2.15 – Maxima du module de la transformée en ondelettes de la fonction  $f(x) = k_1|x - x_1|^{0.5} + k_2e^{-\frac{(x-x_2)^2}{2}}$ . a) Représentation de  $f(x)$ . b) Codage du module de la transformée en ondelettes avec une palette de 32 niveaux de gris depuis le blanc ( $|T_\psi[f]| = 0$ ) jusqu'au noir ( $\max_x |T_\psi[f](x, a)|$ ). Le codage est redéfini à chaque échelle. L'ondelette utilisée est la dérivée seconde de la gaussienne  $\psi^{(2)}$  (Eq. (2.72)). Les courbes en surimpression représentent des coupes de la transformée  $T_\psi[f](x, a)$  aux échelles  $a = 2^2, 2^4$  et  $2^6$ . Les lignes en pointillés représentent la valeur nulle. c) Lignes de maxima de  $|T_\psi[f](x, a)|$  dans le demi-plan  $(x, a)$ .

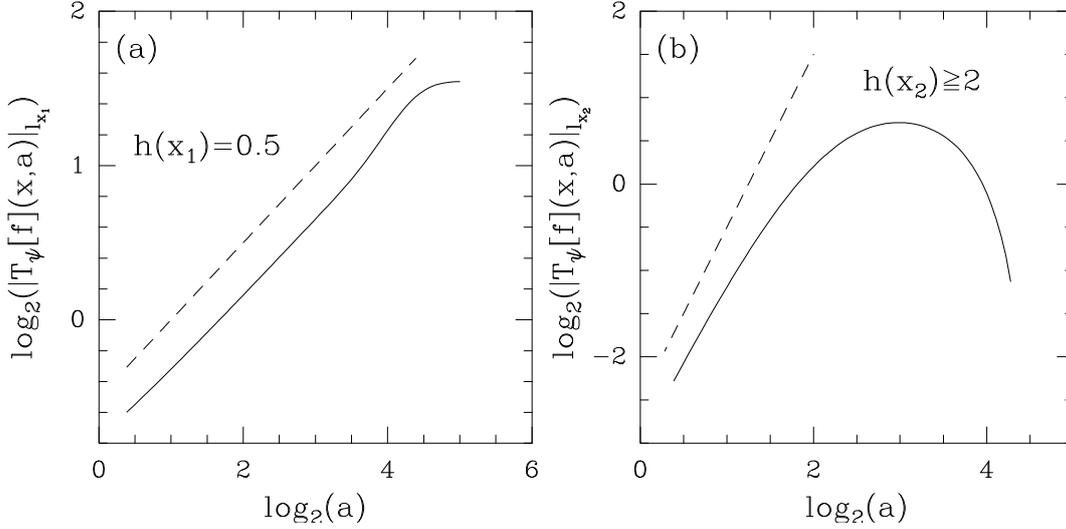


FIG. 2.16 – Estimation de l’exposant de Hölder à partir du comportement du module de la T.O. le long des lignes de maxima. La pente de la courbe  $\log_2(|T_\psi[f](x, a)|)$  en fonction de  $\log_2(a)$  le long d’une ligne de maxima qui converge vers un point particulier est censée estimer l’exposant de Hölder en ce point. a) Estimation de  $h(x_1)$  pour une ligne de maxima qui converge vers le point  $x_1$  de l’exemple de la figure 2.15. b) Estimation de  $h(x_2)$  pour une ligne de maxima qui converge vers le point  $x_2$  du même exemple.

$(x, a)$  est représenté dans la figure 2.15c. L’ondelette utilisée est la dérivée seconde ( $\psi^{(2)}$ ) de la gaussienne ( $n_\psi = 2$ ). On constate que les lignes de maxima convergent quand  $a \rightarrow 0^+$  vers quatre points différents. L’étude des comportements de  $|T_\psi|$  le long de ces lignes permet de montrer que seul le point  $x = x_1$  correspond à un comportement singulier. Sur la figure 2.16, nous avons reporté en représentation logarithmique, le comportement dans les échelles du module de la T.O. en suivant respectivement l’une des lignes de maxima qui converge vers  $x_1$  et celle qui converge vers  $x = x_2$ . D’après l’équation (2.85), la pente de ces courbes nous donne une estimation de  $\min(h(x), n_\psi = 2)$ . Une simple régression linéaire conduit aux valeurs  $h(x_1) = 0.5$  et  $h(x_2) \simeq 2$  et permet de conclure que  $f$  est singulière au point  $x = x_1$ . En  $x = x_2$ ,  $f$  est dérivable au moins une fois et  $h(x_2) \geq 2$ . En fait, étant donné qu’en ce point  $f$  est  $C^\infty$ , on aura toujours  $h(x_2) \geq n_\psi, \forall n_\psi$ .

**Remarque :** Le nombre  $n_\psi$  de moments nuls de l’ondelette analysatrice  $\psi$  joue un rôle central dans l’analyse des singularités.  $n_\psi$  est en effet la borne supérieure des exposants de Hölder qu’il est possible d’estimer avec l’ondelette  $\psi$ . On pourrait se dire qu’il suffit de travailler avec une ondelette pour laquelle  $n_\psi = +\infty$  pour détecter n’importe quelle

singularité. Toutefois, numériquement, il est prohibitif de considérer de très grandes valeurs de  $n_\psi$  c'est-à-dire d'utiliser des ondelettes qui oscillent trop. En effet, le nombre de ligne de maxima convergeant vers une même singularité augmente linéairement avec  $n_\psi$ . Il faut donc trouver selon le problème traité, un équilibre judicieux entre une valeur de  $n_\psi$  assez grande pour identifier les singularités pertinentes et assez petite pour minimiser les temps de calcul. Quand on ne connaît pas à priori la borne supérieure des exposants de Hölder qui caractérisent le signal, il convient de réaliser plusieurs analyses en ondelettes en incrémentant à chaque fois d'une unité, le nombre de moments nuls  $n_\psi$  de l'ondelette analysatrice.

### 2.3.3 Un formalisme multifractal pour les distributions basé sur l'analyse en ondelettes

Nous venons de voir que les maxima du module de la T.O. permettent d'étudier de façon très efficace les singularités isolées d'une distribution. Dans le cas de signaux fractals, les singularités ne sont pas isolées mais infiniment proches les unes des autres. De plus l'exposant de Hölder peut fluctuer de façon très importante d'un point à un autre du signal. Une estimation locale des exposants de Hölder est donc pratiquement très difficile voire impossible. Comme cela a été discuté dans les références [[97]-[101], [249]], la présence d'importantes oscillations dans le comportement des coefficients en ondelettes le long des lignes de maxima, ne permet pas une estimation fiable des exposants de Hölder lorsque l'on dispose d'une gamme d'échelles finie pour l'analyse, ce qui est généralement le cas numériquement. Cette constatation a conduit Arneodo, Bacry et Muzy<sup>[93]-[101]</sup> à proposer comme alternative, une approche globale basée sur le calcul de fonctions de partition à partir des coefficients en ondelettes et ainsi à définir un formalisme multifractal fondé sur l'analyse en ondelettes.

Si  $h(x_0)$  est l'exposant de Hölder de  $f$  en  $x_0$ , nous avons vu que la transformée en ondelettes de  $f$  en  $x_0$  se comporte, quand  $a \rightarrow 0^+$ , en loi de puissance (Eqs (2.80) et (2.81)) :

$$T_\psi[f](x_0, a) \sim a^{h(x_0)} . \quad (2.86)$$

On définit le spectre des exposants de Hölder<sup>[93]-[101]</sup>  $D(h)$  comme la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points  $x$  tel que  $h(x) = h$  :

$$D(h) = D_H\{x|h(x) = h\} . \quad (2.87)$$

Pour calculer ce spectre des singularités, une solution “naive” proposée originalement par Holschneider<sup>[81]</sup>, consiste à définir une fonction de partition continue :

$$K(q, a) = \int |T_\psi[f](x, a)|^q dx , \quad (2.88)$$

où  $q \in \mathbb{R}$ . Puis, par analogie avec le formalisme multifractal classique décrit dans le paragraphe 2.1.3, le spectre  $D(h)$  peut être calculée à partir du comportement en loi de puissance de cette fonction de partition,

$$K(q, a) \sim a^{\tau_c(q)} , \quad (2.89)$$

par simple transformation de Legendre  $\tau_c(q) = \min_h(qh - D(h)) + 1$ . Toutefois, les coefficients en ondelettes  $|T_\psi[f](x, a)|$  peuvent s’annuler en certains points du demi-plan  $(b, a)$  ; la fonction de partition  $K(q, a)$  peut donc diverger pour  $q < 0$  et n’est donc utilisable dans la pratique que pour  $q > 0$ .

Pour pallier à ces difficultés, Arneodo, Bacry et Muzy<sup>[93]–[101]</sup> ont proposé d’utiliser le squelette de la T.O. défini par les lignes de maxima de son module pour définir une partition du demi-plan (espace-échelle) qui par définition satisfait les conditions suivantes :

- d’une part, cette partition ne couvre que les parties singulières du signal ; à une échelle donnée  $a$ , un maximum local à la position  $x_0$  reflète un changement brusque dans le signal et donc un comportement singulier.
- d’autre part, chaque élément de la partition “mesure” localement l’exposant de Hölder (Eq. (2.85)). En effet, le long d’une ligne de maxima  $(b_l(a), a)$  qui converge vers  $(b_l(0), 0) = (x_0, 0)$ , le module du coefficient en ondelettes se comporte dans la limite  $a \rightarrow 0^+$  comme :

$$|T_\psi[f](b_l(a), a)| \sim a^{h(b_l(0))} ; \quad (2.90)$$

- Enfin, le nombre  $N_h(a)$ , à l’échelle  $a$ , des lignes de maxima telles que  $h(b_l(0)) = h$ , se multiplie, dans la limite  $a \rightarrow 0^+$ , suivant une loi de puissance dont l’exposant n’est autre que  $D(h)$  :

$$N_h(a) \sim a^{-D(h)} . \quad (2.91)$$

Ces considérations permettent de définir une nouvelle fonction de partition discrète réduite aux maxima du module de la T.O.<sup>[93]–[101]</sup> :

$$Z(q, a) = \sum_{l \in \mathcal{L}(a)} |T_\psi[f](b_l(a), a)|^q , \quad (2.92)$$

où  $\mathcal{L}(a)$  désigne l'ensemble de toutes les lignes de maxima de  $|T_\psi[f]|$  qui existent à l'échelle  $a$ . Cette fonction de partition se comporte, dans la limite  $a \rightarrow 0^+$ , en loi de puissance :

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)} . \quad (2.93)$$

Si l'on considère que, quand  $a$  est suffisamment petit, les relations (2.90) et (2.91) sont vérifiées, alors, en utilisant la méthode du col, on obtient :

$$\tau(q) = \min_h (qh - D(h)) , \quad (2.94)$$

c'est-à-dire une relation entre le spectre  $D(h)$  des singularités et les exposants  $\tau(q)$  des fonctions de partition, analogue à l'équation (2.21), équation centrale du formalisme multifractal classique. Par transformation de Legendre inverse, on peut donc calculer le spectre  $D(h)$  à partir de la mesure des exposants  $\tau(q)$  :

$$D(h) = \min_q (qh - \tau(q)) . \quad (2.95)$$

Il est important de remarquer que la fonction de partition  $Z(q, a)$  (Eq. (2.92)) demeure généralement finie quand  $q < 0$ . En effet, la restriction aux valeurs maximales du module de la T.O. diminue drastiquement la possibilité d'annulation d'un ou de plusieurs des coefficients. Il est malgré tout possible que la transformée prenne des valeurs très petites voire nulles en un maximum de son module. C'est pourquoi, Arneodo, Bacry et Muzy<sup>[93]–[101]</sup> ont proposé une version un peu plus sophistiquée de la fonction de partition permettant d'éviter les divergences pour les valeurs de  $q$  négatives :

$$Z(q, a) = \sum_{l \in \mathcal{L}(a)} \left( \sup_{a' \leq a} |T_\psi[f](b_l(a'), a')| \right)^q \sim a^{\tau(q)} . \quad (2.96)$$

Contrairement à la définition (2.92), la fonction de partition ci-dessus met en jeu des ondelettes à des échelles différentes. En fait, dans l'équation (2.92), la restriction aux coefficients en ondelettes qui correspondent à des maxima du module évalués à une même échelle  $a$  joue le rôle d'une partition du support des singularités du signal par des ondelettes de même taille. Plus l'échelle devient petite, plus grand sera le nombre de ces "boîtes oscillantes généralisées" nécessaires au recouvrement et c'est la divergence de ce nombre qui définit la dimension fractale du support des singularités. Le "sup" introduit dans l'équation (2.96) peut donc être compris comme une façon de définir une partition adaptée dans les échelles (une partition "à la Hausdorff") tandis que la définition (2.92) correspond à une partition uniforme. Ces idées sont illustrées sur la figure 2.17.

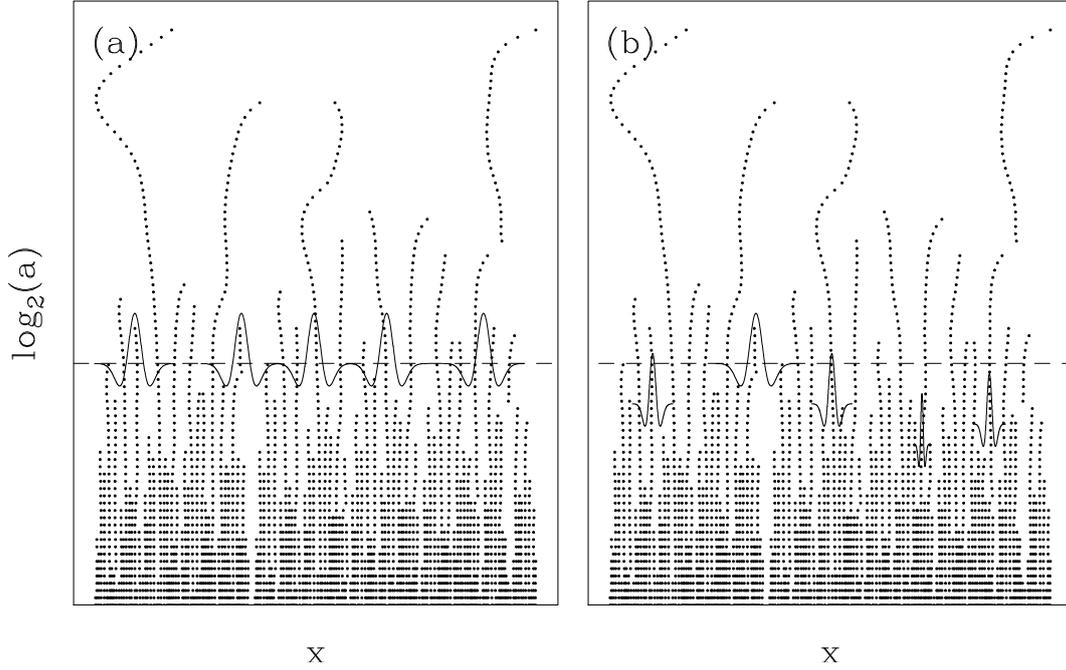


FIG. 2.17 – Illustration schématique des partitions uniformes et adaptées utilisées respectivement dans les fonctions de partition (2.92) et (2.96). a) Partition uniforme :  $Z(q, a)$  est calculée à partir des coefficients en ondelettes de même taille. b) Partition adaptée :  $Z(q, a)$  met en jeu des ondelettes de tailles différentes. Les petites échelles sont en bas de la figure.

Comme dans le cadre du formalisme classique (Eqs (2.26) et (2.27)), on peut envisager une définition “canonique” du spectre  $D(h)$  des singularités qui permet de prendre en compte les effets de taille finie (c’est-à-dire le fait qu’en pratique, on ne dispose que d’une gamme finie d’échelles pour caractériser les propriétés d’invariance d’échelle du signal étudié). On peut définir  $h(q)$  et  $D(q)$ , l’analogie des quantités  $\alpha(q)$  et  $f(q)$  (Eq. (2.27)) de la manière suivante<sup>[94],[100],[101]</sup> :

Soit  $Z(q, a)$  la fonction de partition définie par l’équation (2.96) et  $l = \{b_l(a'), a'\}$ ,  $a' < a$ , une ligne de maxima de la transformée en ondelettes à l’échelle  $a$ . Posons :

$$\hat{T}_\psi[f](q, l, a) = \sup_{a' < a} |T_\psi[f](b_l(a'), a')|^q / Z(q, a), \quad (2.97)$$

l’équivalent d’un poids de Boltzmann à volume fini ( $V = -\ln a$ ) et température fixée

( $T = q^{-1}$ ). On définit alors les exposants “canoniques” comme les moyennes suivantes :

$$\begin{aligned} h(q, a) &= \sum_{l \in \mathcal{L}^{(+)} } \hat{T}_\psi[f](q, l, a) \log |\sup_{a' \leq a} T_\psi[f](b_l(a'), a')| , \\ D(q, a) &= \sum_{l \in \mathcal{L}^{(+)} } \hat{T}_\psi[f](q, l, a) \log \hat{T}_\psi[f](q, l, a) . \end{aligned} \quad (2.98)$$

Les exposants  $h(q)$  et  $f(q)$  se définissent alors simplement comme les limites :

$$\begin{aligned} h(q) &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log a} h(q, a) , \\ D(q) &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log a} D(q, a) . \end{aligned} \quad (2.99)$$

Dans les applications numériques que nous effectuerons dans ce mémoire, nous emploierons indifféremment la transformation de Legendre (2.94) ou les équations (2.99) pour déterminer le spectre  $D(h)$  des singularités.

Quand le signal étudié n'est pas déterministe mais est un processus aléatoire, le spectre  $\tau(q)$  est défini à partir du comportement de la moyenne de la fonction de partition (2.96) calculée sur chaque réalisation<sup>[93]–[101]</sup> :

$$\langle Z(q, a) \rangle_{real} \sim a^{\tau(q)} . \quad (2.100)$$

Cette équation est exactement l'équivalent de l'équation (2.31) dans le cas des mesures associées à des processus multiplicatifs aléatoires.

## 2.4 La méthode M.M.T.O. : une généralisation des algorithmes de comptage de boîtes et de la méthode des fonctions de structure

*La méthode de “comptage de boîtes”*<sup>[56],[62],[66],[83],[206]–[213]</sup>

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la puissance de la méthode M.M.T.O. vient de la liberté de choix de la fonction analysatrice. En fait, on peut voir ces fonctions comme des boîtes oscillantes généralisées. Si l'on choisit comme fonction analysatrice la fonction “boîte”  $\chi_{[-1/2, 1/2]}$ , alors la mesure contenue dans une boîte est simplement la “transformée en ondelettes” de la mesure  $\mu$  considérée<sup>[100],[250]</sup> :

$$\mu(B_{x_0}(a)) = \int \chi_{[-1/2, 1/2]} \left( \frac{x - x_0}{a} \right) d\mu(x) = a T_\chi[\mu](x_0, a) \sim a^{\alpha(x_0)} . \quad (2.101)$$

L'utilisation des ondelettes s'est trouvée justifiée par la nécessité d'éliminer les comportements polynomiaux qui sont susceptibles de masquer les singularités. Quand on s'intéresse

à des mesures singulières, par définition celles-ci ne contiennent aucune composante “douce” et donc l’utilisation d’une fonction analysatrice  $\psi$  qui possède un certain nombre de moments nuls ( $n_\psi \geq 1$ ) est totalement superflue. Dans l’équation (2.101), une fonction gaussienne ou toute fonction positive suffisamment localisée autour de l’origine, convient donc tout autant. D’ailleurs, toute la description de la nature singulière d’une mesure  $\mu$  et le formalisme multifractal classique (paragraphe 2.1) font intervenir exclusivement la fonction  $\chi$ . Remarquons que d’après l’équation (2.86), nous pouvons écrire :

$$T_\chi[\mu](x_0, a) = |T_\chi[\mu](x_0, a)| \sim a^{h(x_0)} , \quad (2.102)$$

ce qui conduit à la relation suivante entre l’exposant d’invariance d’échelle  $\alpha(x_0)$  et l’exposant de Hölder  $h(x_0)$  :

$$\alpha(x_0) = h(x_0) + 1 . \quad (2.103)$$

Il est important de noter que la fonction de partition (2.12) est égale, pour les valeurs de  $q$  positives, à la fonction de partition continue (2.88) à un facteur  $a^{-(q+1)}$  près du au facteur  $a^{-1}$  de normalisation dans la définition de la T.O. continue (2.76). On en déduit la relation suivante :

$$\tau_B(q) = \tau_c(q) - (q + 1) , \quad q \geq 0 , \quad (2.104)$$

où  $\tau_B(q)$  représente l’exposant défini par l’équation (2.13) du formalisme multifractal classique et  $\tau_c(q)$  est l’exposant estimé à partir de l’analyse en ondelettes dans l’équation (2.89). Toutefois, si la mesure  $\mu$  étudiée possède des composantes douces, alors l’équation (2.102) n’est plus vraie. Désormais, l’exposant de singularité  $\alpha(x_0)$  n’est plus relié à l’exposant de Hölder  $h(x_0)$ , et ne décrit plus le comportement singulier de la mesure. L’utilisation des ondelettes possédant un certain nombre de moments nuls devient alors cruciale pour la pertinence du formalisme multifractal.<sup>[93]–[101]</sup>

### *Méthode des fonctions de structure*

Dans la section 2.2.3, nous avons vu que la méthode des fonctions de structure<sup>[26],[67]</sup> permettait de décrire le caractère multifractal d’une fonction. L’analogie avec le formalisme multifractal réside dans l’identification de la mesure de boîte  $\mu(B_{x_0}(a))$  et des incréments de la fonction  $\delta f_{x_0}(a) = |f(x_0 + a) - f(x)|$ , dont le comportement dans les échelles définit l’exposant de Hurst local en  $x_0$ . De la même manière, ces incréments peuvent se voir comme la transformée en ondelettes de  $f$  avec comme fonction analysatrice la fonction<sup>[94],[98],[251]</sup>  $\Delta^{(1)}(x) = \delta(x + 1) - \delta(x)$  :

$$\delta f_{x_0}(a) = a^{-1} \int \Delta^{(1)}\left(\frac{x - x_0}{a}\right) f(x) dx \sim a^{h(x_0)} . \quad (2.105)$$

La définition des fonctions de structure (Eq. (2.60)) est alors équivalente à la définition de la fonction de partition continue (Eq. (2.88)). On en déduit la relation suivante entre les exposants  $\zeta_p$  et  $\tau_c(p)$  :

$$\zeta(p) = \tau_c(p) , \quad p > 0 . \quad (2.106)$$

Comme la fonction  $\Delta^{(1)}$  n'a que son premier moment qui est nul, elle ne permet d'estimer que les exposants de Hölder inférieur à 1. La relation (2.106) est donc vraie seulement si tous les exposants de Hölder présents dans le signal sont inférieurs à 1. Ainsi les notions d'exposant de singularité pour une mesure et d'exposant de Hurst pour une fonction sont en fait reliées à celle d'exposant de Hölder et peuvent être définies à partir de la transformée en ondelettes.

Dans la fonction de partition définie à partir des maxima du module de la transformée en ondelette (Eqs (2.92) et (2.96)), la somme restreinte aux maxima existant à une échelle donnée, fait en fait office de partition du support des singularités du signal (mesure ou fonction) étudiée. En effet, à une échelle  $a$  donnée, les coefficients de la transformée sont corrélés sur une distance  $\Delta x = Ca$  qui correspond au support de la fonction analysatrice à cette échelle. Quand on somme seulement les maxima du module de la T.O., on ne prend en compte que les coefficients les plus significatifs. Cela revient, dans le formalisme multifractal classique, à tenir compte seulement des boîtes contenant une mesure non nulle.

## Notations

- $h(x_0)$  désigne l'exposant de Hölder au point  $x_0$  et  $D(h)$  le spectre des exposants de Hölder (Eq. (2.87)).
- $\tau(q)$  est la fonction définie par le comportement en loi de puissance de la fonction de partition limitée aux maxima du module de la T.O. (Eq. (2.96)). Suivant le signal étudié, nous supposons que l'ondelette analysatrice a été adéquatement choisie de telle sorte que  $\tau(q)$  et  $D(h)$  soient reliés par la transformation de Legendre (Eq. (2.94)).
- $\tau_c(q)$  ( $q > 0$ ) est le spectre des exposants qui caractérisent le comportement de la fonction de partition continue définie dans l'équation (2.88).
- $f(\alpha)$  et  $\tau_B(q)$  réfèrent aux spectres définis au sein du formalisme multifractal classique (Eqs (2.6) et (2.13)). Nous supposons que  $f(\alpha) = \min_q(q\alpha - \tau_B(q))$ .
- $D_{FP}(h)$  et  $\zeta(p)$  désignent respectivement le spectre des singularités (exposant de Hurst) et le spectre des exposants définis à partir des fonctions de structure (Eqs (2.59) et (2.60)).

## Relations entre les divers spectres

Nous supposons que l'ensemble des valeurs de  $h$  bornées ( $h < +\infty$ ) telles que  $D(h) \neq -\infty$ , est  $[h_{min}, h_{max}]$ .

- Si  $h_{max} < 0$  et si l'on suppose que le signal est nul partout où il n'est pas singulier, alors pour tout  $x_0$ ,  $\alpha(x_0) = h(x_0) + 1$  (Eq. (2.103)) et par conséquence :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= D(h + 1) , \\ \tau_B(q) &= \tau(q) + q . \end{aligned} \tag{2.107}$$

Si  $h_{max} > 0$ , ces relations sont vraies seulement si la partie polynomiale qui intervient dans la définition des exposants de Hölder (Eq. (2.75)) est nulle.

**Remarque :** Pour calculer directement les spectres  $\tau_B(q)$  et  $f(\alpha)$  à partir des fonctions de partitions de la méthode M.M.T.O (Eqs (2.96) et (2.98)), il suffit de prendre la définition de la transformée en ondelettes suivante (où on a omis le facteur de normalisation  $a^{-1}$ ) pour les mesures<sup>[81]-[85],[100]</sup> :

$$T_\psi[\mu](b, a) = \int \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) d\mu(x) . \tag{2.108}$$

C'est cette définition de la transformée en ondelettes que nous utiliserons désormais pour les mesures dans la suite de ce mémoire. Nous ne ferons donc plus de différence entre  $\tau_B(q)$  et  $\tau(q)$  quand il s'agit d'une mesure positive.

- Si  $0 < h_{min} < h_{max} > 1$  et si le signal est constant partout où il n'est pas singulier, alors les exposants de Hurst et de Hölder sont identiques et l'on a :

$$D_{FP}(h) = D(h) . \tag{2.109}$$

Toutefois, les exposants  $\zeta(p)$  ne sont reliés aux exposants  $\tau(p)$  que pour les valeurs  $p > 0$ , et on a :

$$\zeta(p) = \tau(p) + 1 , \quad p > 0 . \tag{2.110}$$

- Pour tout  $p > 0$ , on a la relation :

$$\tau_c(p) = \tau(p) + 1 . \tag{2.111}$$

- Si l'on note  $\mathcal{S} = \{\S \in \mathbf{R} \mid \langle(\S) < +\infty\}$ , l'ensemble des points où le signal est singulier et  $D(\mathcal{S})$  sa dimension fractale, alors pour  $n_\psi > h_{max}$ , on peut démontrer que :

$$d(\mathcal{S}) = \max_{\langle}(\mathcal{D}(\langle)) = \mathcal{D}(\langle(\mathbb{H} = \iota)) . \tag{2.112}$$

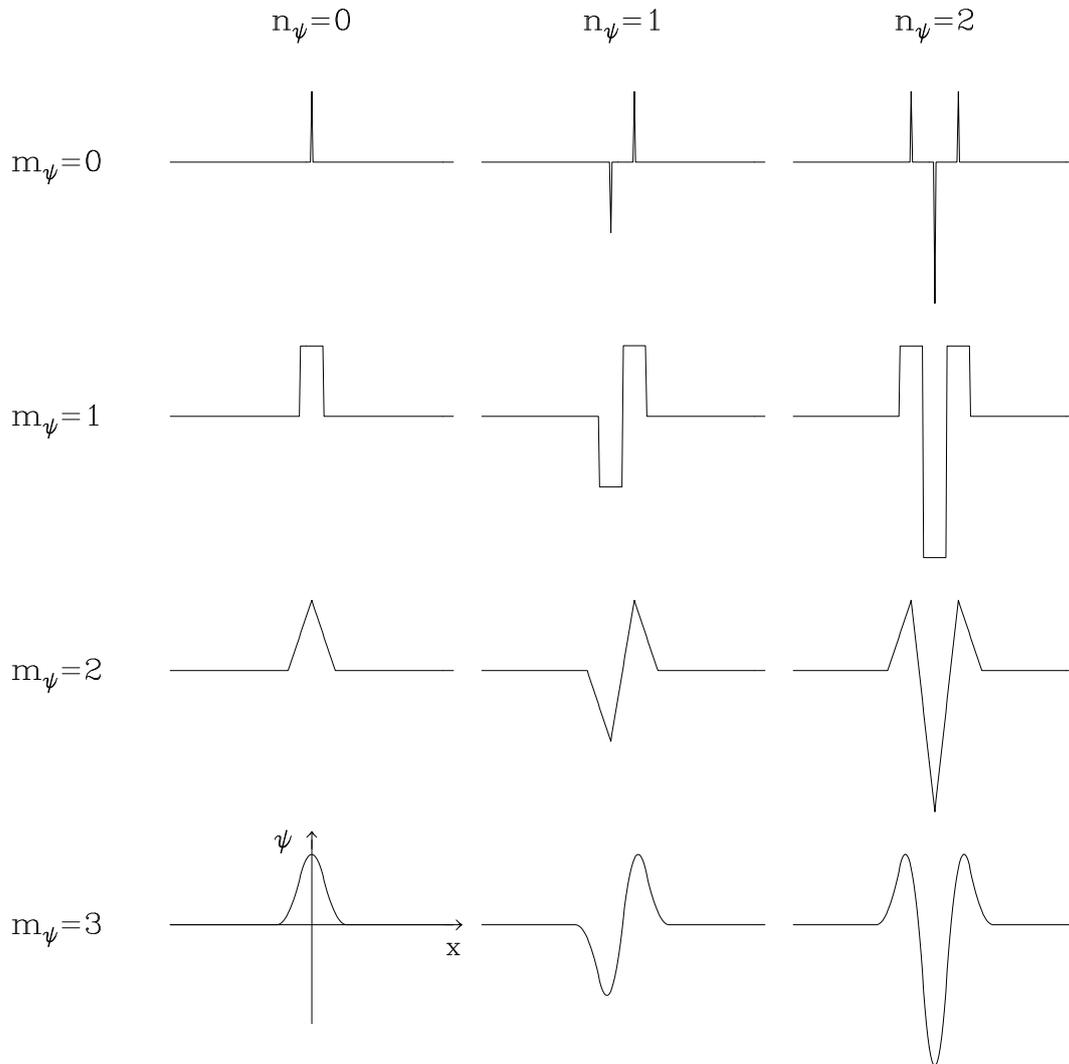


FIG. 2.18 – Ondelettes analysatrices utilisées dans ce mémoire.  $n_\psi$  correspond aux nombres de moments nuls de l'ondelette. Les fonctions  $\psi_{(m)}^{(n)}$  sont obtenues par convolutions successives de  $\psi_{(0)}^{(n)}$  avec la fonction  $\chi$ ;  $m_\psi$  correspond alors au nombre de convolutions effectuées.

- Si  $d(G)$  est la dimension fractale du graphe de  $f$ , on peut montrer que :

$$d(G) = \max(1, 1 - \tau(1)) . \quad (2.113)$$

- Supposons que la densité spectrale du signal  $f$ ,  $S(k) = |\hat{f}(k)|^2$  vérifie :

$$S(k) \sim k^{-\beta} . \quad (2.114)$$

L'exposant spectral  $\beta$  est relié à l'exposant  $\tau(q = 2)$  par la relation :

$$\beta = \tau(2) + 2 . \quad (2.115)$$

### *Fonctions analysatrices*

Sur la figure 2.18, nous avons représenté les fonctions analysatrices que nous utiliserons dans ce mémoire. Elles sont obtenues à partir de distributions de Dirac par convolutions successives avec la fonction boîte  $\chi$ .  $m_\psi$  représente le nombre de convolutions effectuées et  $n_\psi$  le nombre de moments nuls de la fonction. Nous noterons ces fonctions  $\psi_{(m_\psi)}^{(n_\psi)}$ .

### **Remarques**

- $\psi_{(1)}^{(0)}$  correspond à la fonction “boîte”  $\chi$ . L'utilisation de la fonction de partition continue (Eq. (2.88)) nous donne donc le spectre  $\tau_B(q) + 1$  (en utilisant la définition (2.108) pour  $T_\psi[\mu]$ ).
- L'utilisation de  $\psi_{(0)}^{(1)}$  et de la fonction de partition continue (2.88) nous donne directement le spectre  $\zeta(p)$  des exposants des fonctions de structure.
- La fonction de partition restreinte aux maxima du module de la transformée en ondelettes n'est définie que si  $\psi$  est suffisamment régulière, c'est-à-dire  $m_\psi \geq 3$ .
- Les fonctions  $\psi_{(m)}^{(1)}$  peuvent être considérées comme une moyenne d'incrément, sur une taille  $a$  qui correspond au support de l'ondelette, avec une fonction de densité de probabilité égale à  $\psi_{(m)}^{(0)}$ .

## 2.5 Quelques exemples d'application de la méthode M.M.T.O.

### 2.5.1 Signaux présentant des exposants de Hölder supérieurs à 1

Le signal considéré est construit récursivement et son spectre des singularités est donc calculable analytiquement. Dans un premier temps, une mesure signée singulière est construite de façon multiplicative; à chaque étape de la construction, chaque intervalle est divisé en quatre parties égales auxquelles on attribue multiplicativement les poids algébriques  $p_1 = 0.85$ ,  $p_3 = -p_2 = -0.36$  et  $p_4 = 0.15$  ( $\sum_i p_i = 1$ ). Dans un deuxième temps, la mesure ainsi construite est intégrée pour générer le signal que nous allons analyser. Cependant, afin d'obtenir des exposants de Hölder supérieurs à 1, nous utilisons une procédure d'intégration fractionnaire de degré  $\delta = 1.7$ . L'effet d'une intégration généralisée de degré  $\delta$  sur le spectre  $D(h)$  des singularités se résume à une translation :  $D_f(h) = D_\mu(h - \delta)$ .  $\delta < 0$  correspond ainsi à une dérivation. Le signal obtenu est représenté sur la figure 2.19a. Sur la figure 2.19b est reportée la transformée en ondelettes de ce signal effectuée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . L'ensemble des lignes de maxima est représenté sur la figure 2.19c. Les résultats de l'analyse de ce signal par la méthode M.M.T.O. sont reportés dans la figure 2.20. Les fonctions  $\log_2 Z(q, a)$  (Eq. (2.96)) et  $h(q, a)$  (Eq. (2.98)) ont bien un comportement linéaire en fonction de  $\log_2 a$  (Figs 2.20a et 2.20b). L'estimation par régression linéaire des pentes correspondantes pour différentes valeurs de  $q$  donne respectivement les fonctions  $\tau(q)$  (Fig. 2.20c) et  $h(q)$  (Fig. 2.20d). Le spectre  $D(h)$  des singularités obtenu par transformation de Legendre du spectre  $\tau(q)$  est reporté sur la figure 2.20f. L'accord avec les courbes théoriques représentées en lignes continues est excellent. La fonction analysée est constituée de singularités d'exposant de Holder compris entre 0.8 et 2. Le maximum de la courbe  $D(h)$  qui est égal à 1 ( $f(x)$  est singulière partout), est atteint pour la valeur  $h = 1.43$  et  $h(q)$  est supérieur à 1 pour  $q \leq 2$ .

Les résultats d'une même étude effectuée avec la méthode des fonctions de structure (Eq. (2.60)) sont reportés sur les figures 2.20d et 2.20e (symboles  $(\circ)$ ). Quand  $q \rightarrow -\infty$ ,  $h(q) \rightarrow 1^-$ . En effet, si l'on compare la définition de l'exposant de Hölder (Eq. (2.75)) à celle de l'exposant de Hurst local (Eq. (2.58)), on s'aperçoit que ces deux quantités sont identiques exclusivement dans le cas où  $h(x) < 1$ , c'est-à-dire quand la singularité réside dans le signal lui-même et non dans l'une de ses dérivées. Dans la définition (2.75),  $P_n(x_0)$  correspond aux  $n+1$  termes de la série de Taylor de  $f$  au point  $x_0$ . Ce polynôme ne se réduit au terme constant  $f(x_0)$  uniquement si  $f$  n'est pas dérivable au point  $x_0$ . Si  $f$  est au moins

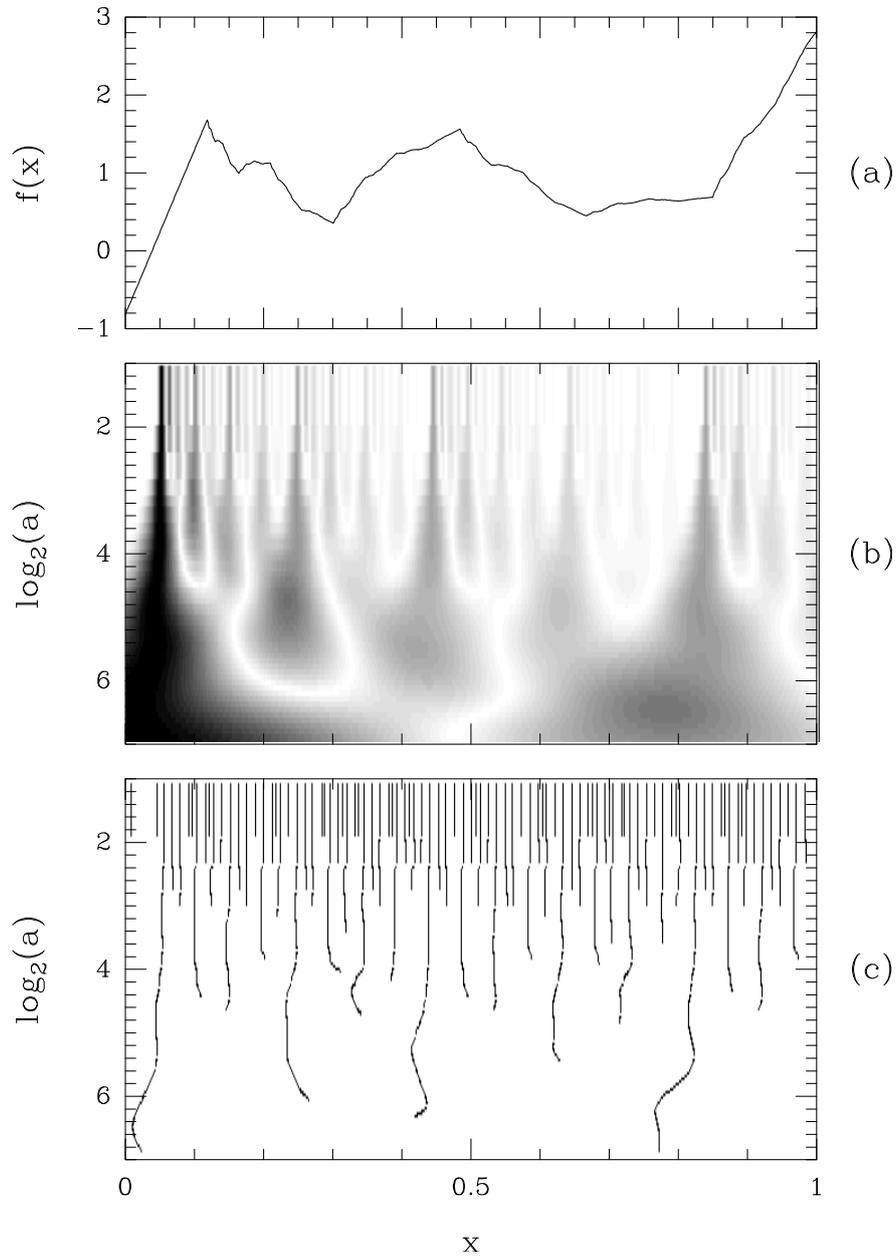


FIG. 2.19 – Transformée en ondelettes d'un signal comportant des exposants de Hölder supérieurs à 1. a) Graphe du signal. b) Transformée en ondelettes de ce signal dans le demi-plan espace-échelle. Les valeurs de  $|T_\psi|$  sont codées avec une palette de 32 niveaux de gris, du blanc ( $|T_\psi| = 0$ ) au noir ( $\max |T_\psi|$ ) et ce indépendamment à chaque échelle. L'ondelette utilisée est l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . c) Lignes de maxima du module de  $T_\psi[f]$  dans le demi-plan  $(x, a)$ .

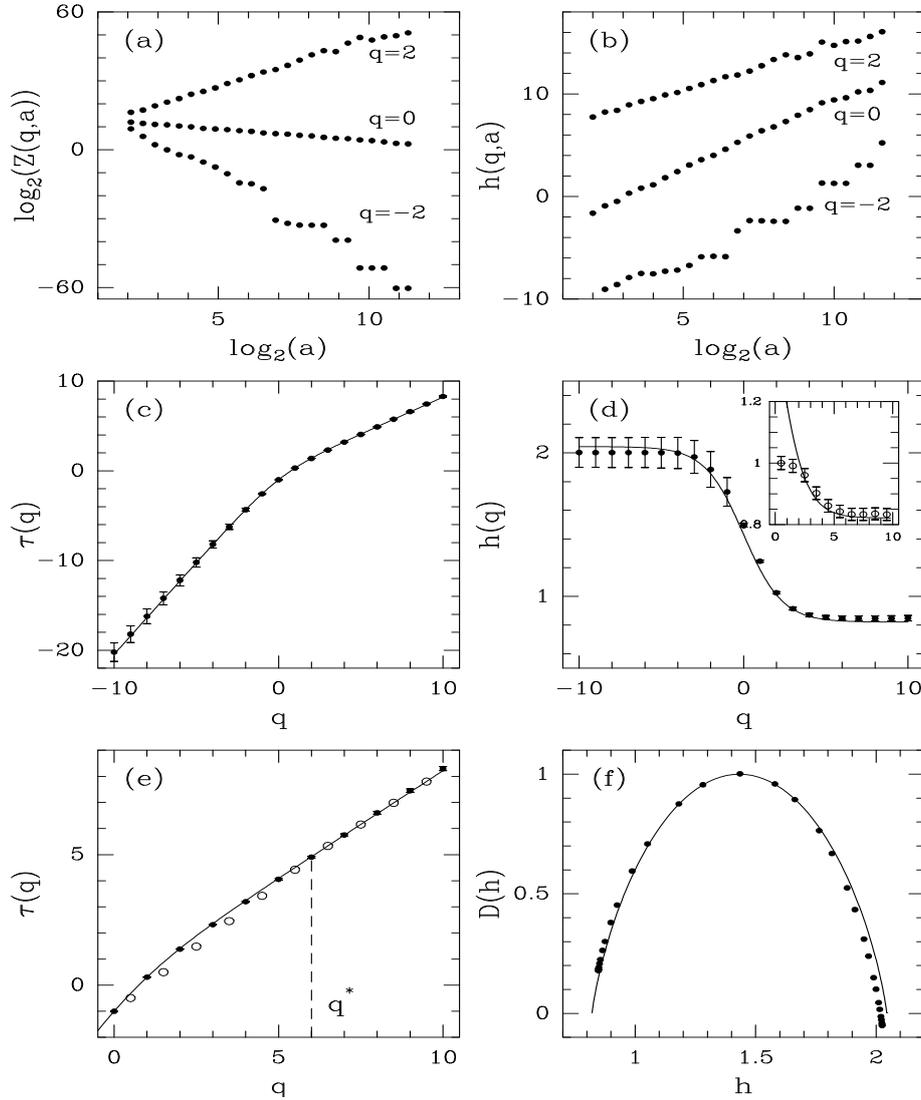


FIG. 2.20 – Analyse comparative des performances de la méthode M.M.T.O. et de la méthode des fonctions de structure sur un signal comportant des exposants de Hölder supérieurs à 1. a)  $\log_2(Z(q, a))$  en fonction de  $\log_2 a$  pour quelques valeurs de  $q$ . b)  $h(q, a)$  en fonction de  $\log_2 a$  pour les mêmes valeurs de  $q$ . c) Spectre  $\tau(q)$  en fonction de  $q$  estimé par régression linéaire des courbes  $\log_2(Z(q, a))$ . d) Fonction  $h(q)$  en fonction de  $q$  estimée par régression linéaire des courbes  $h(q, a)$ . e) Comparaison des spectres  $\tau(q)$  estimés par la méthode M.M.T.O (●) avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(2)}$  et par la méthode des fonctions de structure avec l'ondelette  $\psi_{(0)}^{(1)}$  (○). f) Spectre  $D(h)$  obtenu par transformation de Legendre des données en c). Les courbes en trait continu correspondent aux prédictions théoriques.

différentiable en ce point, alors le comportement des incréments  $\delta f_{x_0}(l)$  est génériquement dominé par le terme  $f'(x_0)l$  et l'exposant de Hurst en  $x_0$  est trivialement 1 et n'est pas égal à la véritable valeur de l'exposant de Hölder. Ces limitations se manifestent également dans le spectre  $\zeta(q)$ . Pour  $q > q^*$  ( $h(q^*) = 1$ ), le spectre  $\zeta(q)$  fournit une estimation correcte du spectre théorique; par contre, pour  $q < q^*$ , la pente de  $\zeta(q)$  est au plus égale à 1 et les valeurs obtenues diffèrent systématiquement de la courbe théorique. Dans ce domaine de valeurs de  $q$ , ce sont les singularités d'exposant de Hölder  $h \geq 1$  qui dominent dans la fonction de partition. Ainsi la méthode des fonctions de structure est incapable de rendre compte de la partie du spectre  $D(h)$  des singularités qui se trouve au-delà de la valeur  $h = 1$ .

### 2.5.2 Signaux présentant des exposants de Hölder négatifs

Considérons maintenant le signal représenté dans la figure 2.21a que nous avons construit exactement de la même façon que celui de l'exemple précédent. Les poids attribués à la mesure initiale sont  $p_1 = 0.69$ ,  $p_2 = -p_3 = 0.46$  et  $p_4 = 0.31$  et le paramètre d'intégration est pris égal à  $\delta = 0.4$ . Comme on peut le constater de visu, le graphe de ce signal présente divers sauts qui correspondent à des points où l'exposant de Hölder est négatif. La transformée en ondelettes avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(2)}$ , et l'ensemble de ses lignes de maxima sont reportés respectivement sur les figures 2.21b et 2.21c. Les fonctions  $\tau(q)$ ,  $h(q)$  et  $D(h)$  théoriques sont représentées dans la figure 2.22 en trait continu. Les résultats obtenus à l'aide de la méthode M.M.T.O. sont en parfait accord avec les prédictions théoriques. Par contre, les résultats obtenus à l'aide de la méthode des fonctions de structure, représentés avec les symboles ( $\circ$ ) dans les figures 2.22d et 2.22e, diffèrent systématiquement des courbes théoriques pour les valeurs de  $q$  positives importantes. En effet la fonction  $\psi_{(0)}^{(1)}$  étant la somme de deux distributions de Dirac, la quantité  $T_{\psi_{(0)}^{(1)}}[f](x, a) = \delta f_x(a)$  n'est pas définie pour une distribution  $f$  quelconque. En particulier, si  $f$  possède des exposants de Hölder inférieurs à 0, on peut s'attendre à observer des fluctuations très fortes dans le calcul des fonctions de structure. Ainsi, lorsque  $q > q^{**}$ , les valeurs de  $\tau(q)$  estimées avec cette méthode saturent et par là s'écartent systématiquement des valeurs théoriques. Cette valeur  $q^{**}$  correspond en fait à la valeur de  $q$  à partir de laquelle  $\tau(q)$  devient décroissant. Ce sont les singularités d'exposant de Hölder négatif qui dominent dans le comportement des fonctions de partition calculées avec la méthode M.M.T.O.. La méthode des fonctions de structure n'est donc pas adaptée à la caractérisation de singularités fortes, d'exposant de Hölder  $h < 0$ ; on peut donc uniquement l'utiliser pour détecter des singularités dont

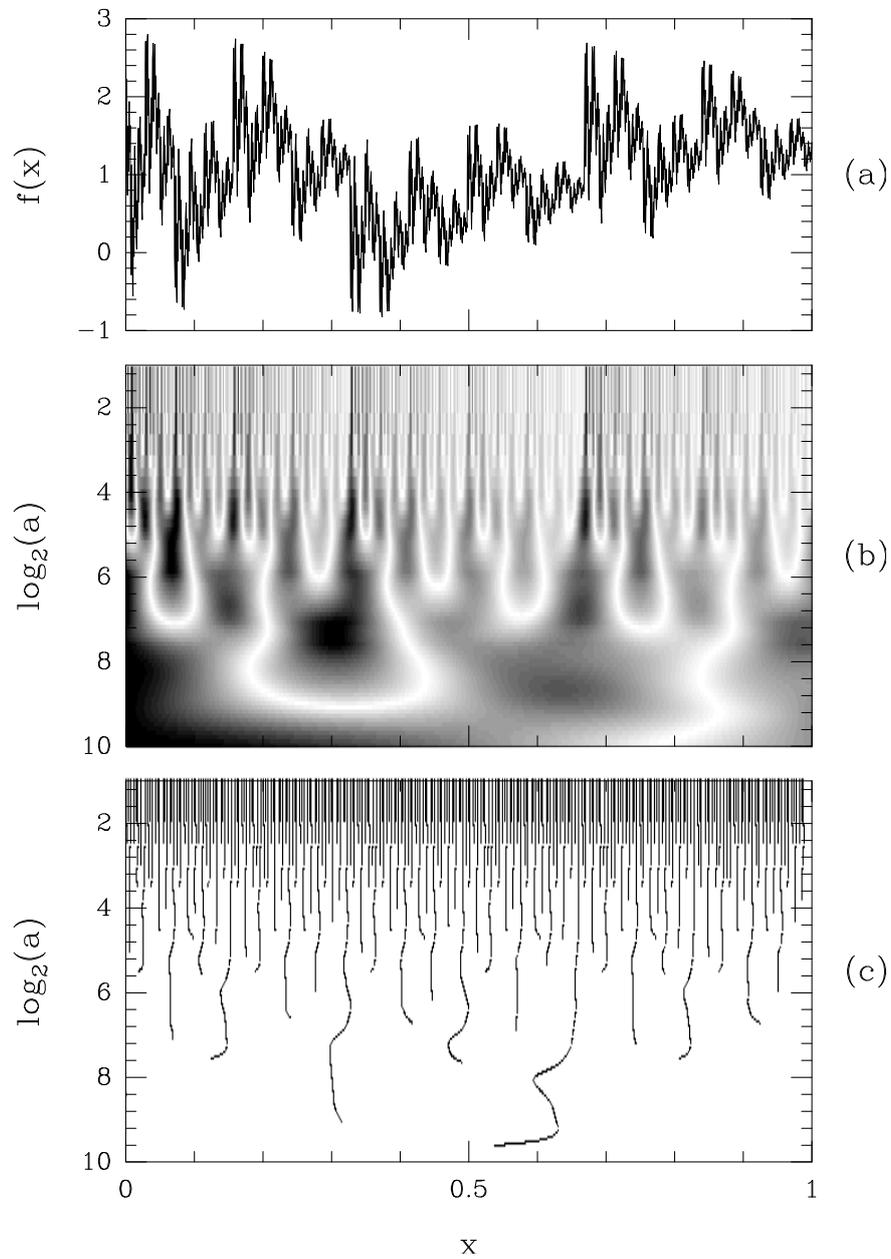


FIG. 2.21 – Transformée en ondelettes d'un signal comportant des exposants de Hölder négatifs. a) Graphe du signal. b) Transformée en ondelettes de ce signal dans le demi-plan espace-échelle. Les valeurs de  $|T_\psi|$  sont codées, indépendamment à chaque échelle, avec une palette de 32 niveaux de gris, du blanc ( $|T_\psi| = 0$ ) au noir ( $\max |T_\psi|$ ). L'ondelette utilisée est l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . c) Lignes de maxima du module de  $T_\psi[f]$  dans le demi plan  $(x, a)$ .

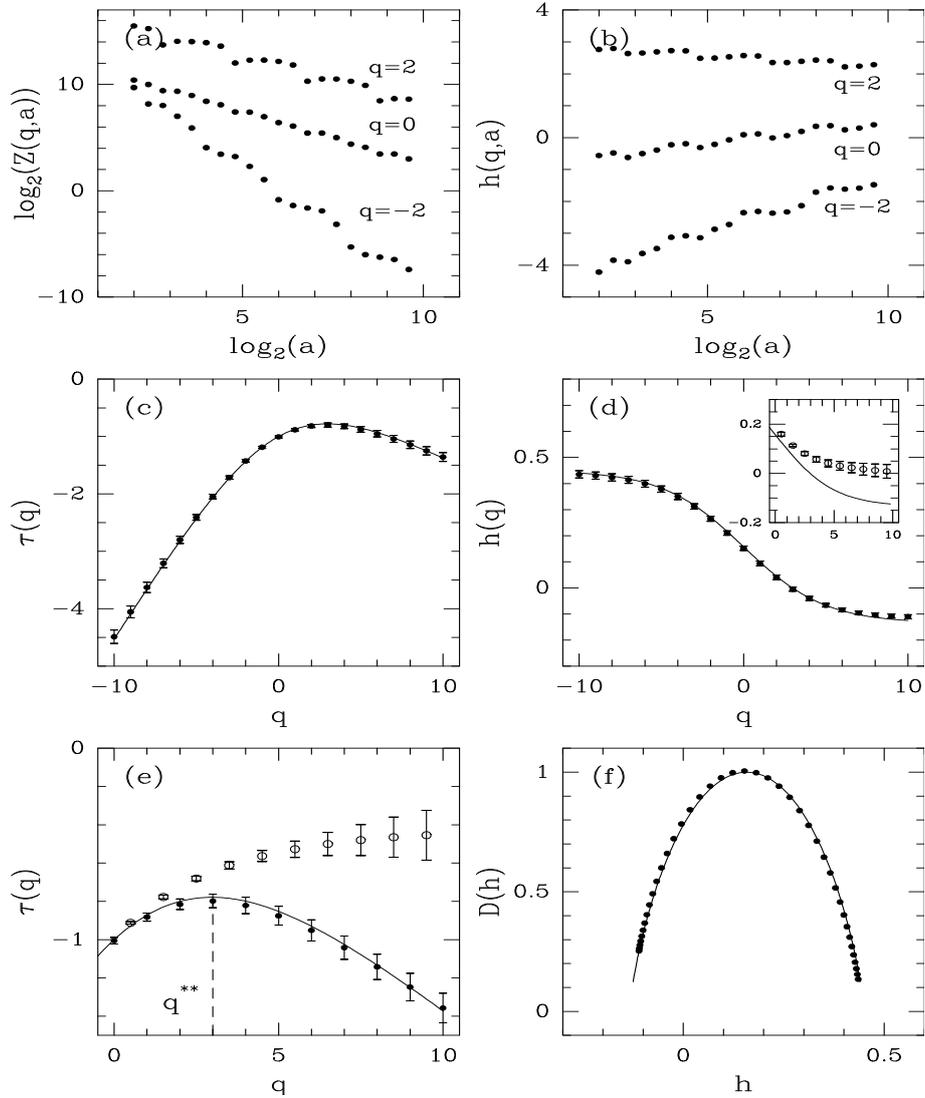


FIG. 2.22 – Analyse comparative des performances de la méthode M.M.T.O. et de la méthode des fonctions de structure sur un signal comportant des exposants de Hölder négatifs. a)  $\log_2(Z(q,a))$  en fonction de  $\log_2 a$  pour quelques valeurs de  $q$ . b)  $h(q,a)$  en fonction de  $\log_2 a$  pour les mêmes valeurs de  $q$ . c) Spectre  $\tau(q)$  en fonction de  $q$  estimé par régression linéaire des courbes  $\log_2(Z(q,a))$ . d) Fonction  $h(q)$  en fonction de  $q$  estimée par régression linéaire des courbes  $h(q,a)$ . e) Comparaison des spectres  $\tau(q)$  estimés par la méthode M.M.T.O (●) avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(2)}$  et par la méthode des fonctions de structure avec l'ondelette  $\psi_{(0)}^{(1)}$  (○). f) Spectre  $D(h)$  obtenu par transformation de Legendre des données en c). Les courbes en trait continu correspondent aux prédictions théoriques.

l'exposant de Hölder  $h$  vérifie  $0 \leq h \leq 1$ .

### 2.5.3 Modèles log-Poisson et log-normal

- Comme test complémentaire de la fiabilité de la méthode M.M.T.O., nous avons estimé le spectre  $f(\alpha)$  des singularités de la mesure multifractale aléatoire “log-Poisson” définie dans la section 2.1.4. Les paramètres utilisés pour générer cette mesure sont  $\beta = \gamma = 2/3$  et  $\lambda = 2$ . L'étude a été réalisée sur 50 réalisations en considérant successivement les ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(0)}$ ,  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(2)}$ , qui ont respectivement un nombre de moments nuls  $n_\psi$  égal à 0, 1 et 2. Ces trois ondelettes conduisent à des résultats quantitativement identiques. Ceux obtenus avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  sont rapportés sur la figure 2.23. Pour les valeurs de  $q$  comprises dans le domaine  $-2 \leq q \leq 6$ , le spectre  $\tau(q)$  obtenu par régression linéaire des courbes  $\log_2(Z(q, a))$  en fonction de  $\log_2(a)$ , est en excellent accord avec les prédictions théoriques (ligne continue) (Eq. (2.39)). Par contre, en dehors de ce domaine, les résultats s'écartent des courbes théoriques. Le spectre  $f(\alpha)$  de la figure 2.23 est obtenu par transformation de Legendre du spectre  $\tau(q)$ . Remarquons que les valeurs de  $q$  pour lesquelles nos estimations sont biaisées correspondent à des valeurs de  $\alpha(q)$  telles que  $f(\alpha(q))$  est négatif. Ainsi, la partie du spectre des singularités que nous estimons avec une bonne précision avec la méthode M.M.T.O. se limite à la partie “manifeste”  $f(\alpha) \geq 0$  correspondant aux singularités qui sont présentes dans chaque réalisation du processus. Pour l'estimation de la partie “latente” du spectre  $f(\alpha)$  ( $f(\alpha) < 0$ ), les statistiques nécessaires sont très rapidement prohibitives.
- Les résultats obtenus avec la méthode M.M.T.O. sur les mesures aléatoires générées par la règle de construction du modèle “log-normal” décrit dans la section 2.1.4 sont présentés dans la figure 2.24. Le paramètre  $\sigma^2$  est pris égal à 0.236 et  $m$  à  $-(1+\sigma^2/2)$ . Les résultats de l'analyse obtenus en prenant respectivement les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(0)}$ ,  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  sont à nouveau indistinguables aux incertitudes numériques près. Les courbes  $\tau(q)$ ,  $D_q$  et  $\alpha(q)$  estimées à partir des fonctions de partition sont en bon accord avec les prédictions théoriques (Eqs (2.41), (2.43) et (2.44)) pour les valeurs de  $q$  comprises dans la gamme  $-4 \leq q \leq 4$ . En dehors de ce domaine, les valeurs de  $\alpha(q)$  sont associées à des singularités rares qui ne sont pas présentes dans chaque réalisation du processus. A nouveau la partie latente ( $f(\alpha) < 0$ ) du spectre des singularités est très mal estimée, du moins avec la statistique utilisée dans la présente étude.

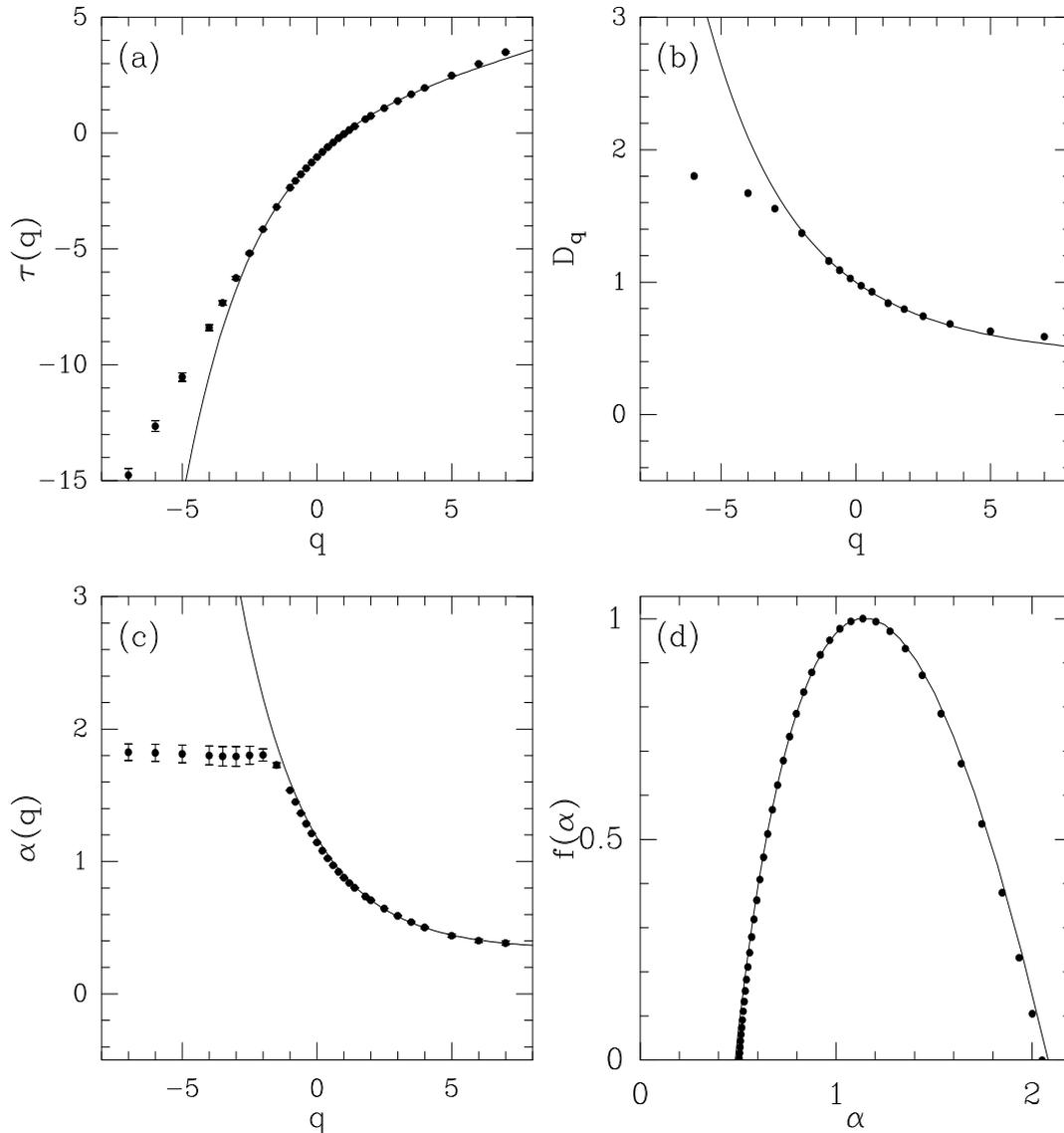


FIG. 2.23 – Résultats de l’analyse multifractale de mesures aléatoires construites d’après la règle de construction du modèle “log-Poisson” avec les paramètres  $\beta = \gamma = 2/3$  et  $\lambda = 2$ . a) Spectre  $\tau(q)$  estimé à partir de la fonction de partition (2.96) basée sur les maxima du module de la T.O.. b) Spectre des dimensions fractales généralisées  $D_q = \tau(q)/(q - 1)$ . c) Fonction  $\alpha(q) = h(q) + 1$  estimée à partir de la fonction de partition (2.98). d) Spectre  $f(\alpha) = D(h + 1)$  des singularités estimé par transformation de Legendre du spectre  $\tau(q)$  rapporté en a). L’ondelette analysatrice est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Les courbes théoriques sont représentées en trait continu.

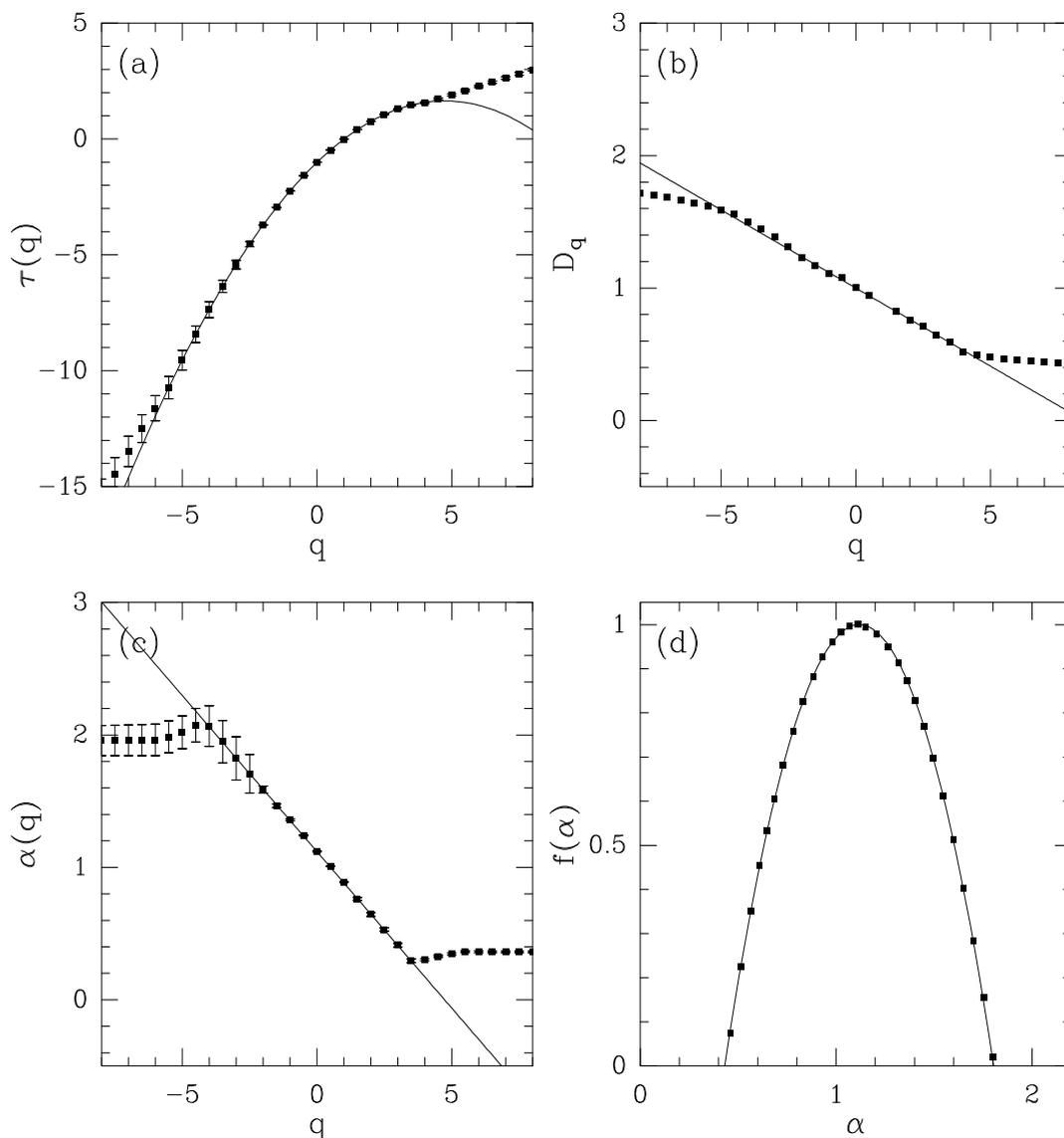


FIG. 2.24 – Résultats de l’analyse multifractale de mesures aléatoires construites d’après la règle de construction du modèle “log-normal” avec comme paramètre  $\sigma^2 = 0.236$  ( $m = -(1 + \sigma^2/2)$ ). a) Spectre  $\tau(q)$  estimé à partir de la fonction de partition (2.96) basée sur les maxima du module de la T.O.. b) Spectre des dimensions fractales généralisées  $D_q = \tau(q)/(q-1)$ . c) Fonction  $\alpha(q) = h(q) + 1$  estimée à partir de la fonction de partition (2.98). d) Spectre  $f(\alpha) = D(h+1)$  des singularités estimé par transformation de Legendre du spectre  $\tau(q)$  rapporté en a). L’ondelette analysatrice est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Les courbes théoriques sont représentées en trait continu.

Pour résumer, la transformation en ondelettes permet d'estimer non seulement le spectre des singularités des mesures mais aussi le spectre des exposants de Hölder de distributions quelconques. Quand il s'agit d'une distribution aléatoire, la méthode M.M.T.O. (ainsi que les méthodes de comptage de boîtes et des fonctions de structure), donne seulement une bonne estimation de la partie "manifeste" du spectre des exposants de Hölder. Il existe donc deux valeurs de  $q$  limites,  $q_>$  positive et l'autre négative  $q_<$  telles que pour les valeurs de  $q$  au-delà de ces limites, les fonctions de partition  $Z(q, a)$  sont dominées essentiellement par un seul évènement qui correspond à  $h_{min}$  si  $q > q_>$  et  $h_{max}$  si  $q < q_<$ . Cela se manifeste clairement dans le spectre  $\tau(q)$  qui devient linéaire asymptotiquement avec pour pente  $h_{min}$  si  $q > q_>$  et  $h_{max}$  si  $q < q_<$ .

## 2.6 Formalisme multifractal "grand canonique"

Dans de nombreux problèmes physiques, la caractérisation de l'état du système et de son évolution nécessite la connaissance de plusieurs quantités ou variables d'état. Il est intéressant de pouvoir estimer le degré de corrélation qui existe entre ces diverses variables. En particulier dans l'étude de la turbulence pleinement développée, plusieurs quantités comme le taux de dissipation de l'énergie, la vitesse, la température, la pression, la vorticité coexistent dans les mêmes régions de l'espace et doivent donc présenter des corrélations. En d'autres termes, on va donc s'intéresser aux statistiques jointes de deux ou de plusieurs de ces quantités qui sont individuellement bien caractérisées par le formalisme multifractal "canonique" des mesures et des signaux. Meneveau et al.<sup>[192]</sup> ont été les premiers à proposer une description multifractale "grand canonique" jointe. Nous allons ici généraliser cette approche à toutes les distributions, à l'aide de la transformée en ondelettes.

Nous avons vu, dans les sections précédentes, que les distributions multifractales étaient bien décrites par des comportements en loi de puissance de leurs transformées en ondelettes. Soient  $\psi_1$  et  $\psi_2$  deux ondelettes analysatrices avec suffisamment de moments nuls, et soient  $f$  et  $g$  deux distributions "multifractales" coexistant dans une même partie de l'espace. Ainsi,  $\forall b \in \mathbb{R}$  et  $a > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} T_{\psi_1}[f](b, a) &\sim a^{h_f(b)} , \\ T_{\psi_2}[g](b, a) &\sim a^{h_g(b)} . \end{aligned} \tag{2.116}$$

On s'intéresse désormais à la distribution de probabilité jointe des exposants de Hölder  $h_f$  et  $h_g$ . Ainsi,  $N_a(h_f, h_g)dh_fdh_g$  correspondra aux nombres de points  $b$  tel que  $h_f - dh_f < h_f(b) < h_f + dh_f$  et  $h_g - dh_g < h_g(b) < h_g + dh_g$ . Par analogie avec le formalisme

multifractal canonique, on peut donc définir  $D(h_f, h_g)$  par le comportement en loi de puissance de  $N_a(h_f, h_g)$  dans les échelles :

$$N_a(h_f, h_g) \sim a^{-D(h_f, h_g)} . \quad (2.117)$$

D'un point de vue géométrique,  $D(h_f, h_g)$  est la dimension fractale de l'ensemble des points  $b$  tels que  $h_f(b) = h_f$  et  $h_g(b) = h_g$ . La généralisation du formalisme multifractal repose sur la définition de fonctions de partition "grand-canoniques" continues :

$$Z(p, q, a) = \int_{b \in \mathbf{R}} |T_{\psi_1}[f](b, a)|^p |T_{\psi_2}[g](b, a)|^q db \sim a^{\tau(p, q)} . \quad (2.118)$$

La somme étant continue, ces fonctions de partition ne sont définies que pour les valeurs positives de  $p$  et  $q$ . Le spectre des exposants  $\tau(p, q)$  joue donc le rôle d'un potentiel grand-canonique caractérisant la statistique jointe des fluctuations des exposants  $h_f$  et  $h_g$ . Pour les grandes valeurs de  $p$  et de  $q$ , l'exposant  $\tau(p, q)$  caractérise en particulier les régions de l'espace où  $f$  et  $g$  sont toutes les deux très singulières. Si l'on réécrit l'équation (2.118) comme une double intégrale sur les valeurs de  $h_f$  et  $h_g$ , on obtient en appliquant la méthode du col dans la limite  $a \rightarrow 0^+$  :

$$Z(p, q, a) \sim \int_{h_f} \int_{h_g} a^{ph_f + qh_g} dh_f dh_g \sim a^{ph_f + qh_g - D(h_f, h_g) + 1} . \quad (2.119)$$

$D(h_f, h_g)$  et  $\tau(p, q)$  sont donc reliés par une double transformation de Legendre :

$$\tau(p, q) = \min_{h_f, h_g} (ph_f + qh_g - D(h_f, h_g) + 1) , \quad (2.120)$$

avec

$$p = \frac{\partial D(h_f, h_g)}{\partial h_f} ,$$

$$q = \frac{\partial D(h_f, h_g)}{\partial h_g} ,$$

où l'on a supposé que  $D(h_f, h_g)$  ne présente pas de non-analyticité. En inversant cette double transformation de Legendre, on peut donc estimer le spectre  $D(h_f, h_g)$  des singularités en fonction des exposants  $\tau(p, q)$  de la fonction de partition  $Z(p, q, a)$  :

$$D(h_f, h_g) = \min_{p, q} (ph_f + qh_g - \tau(p, q) + 1) , \quad (2.121)$$

avec

$$\begin{aligned} h_f(p, q) &= \frac{\partial \tau(p, q)}{\partial p}, \\ h_g(p, q) &= \frac{\partial \tau(p, q)}{\partial q}. \end{aligned}$$

Par analogie avec la définition de la fonction de partition “canonique” (Eqs (2.97) et (2.98)), on peut envisager de calculer les exposants  $h_f(p, q)$  et  $h_g(p, q)$  ainsi que les dimensions  $D(p, q)$ , à l’aide de fonctions de partition mettant en jeu l’équivalent d’un poids de Boltzmann :

$$\hat{T}_{\psi_1\psi_2}(b, a, p, q) = \frac{|T_{\psi_1}[f](b, a)|^p |T_{\psi_2}[g](b, a)|^q}{Z(p, q, a)}. \quad (2.122)$$

On peut ainsi prendre en compte les effets de taille finie dans l’estimation de ces exposants :

$$\begin{aligned} h(p, q, a) &= \int_{b \in \mathbb{R}} \hat{T}_{\psi_1\psi_2}(b, a, p, q) \log(|T_{\psi_1}[f](b, a)|), \\ h'(p, q, a) &= \int_{b \in \mathbb{R}} \hat{T}_{\psi_1\psi_2}(b, a, p, q) \log(|T_{\psi_2}[g](b, a)|), \\ D(p, q, a) &= \int_{b \in \mathbb{R}} \hat{T}_{\psi_1\psi_2}(b, a, p, q) \log(\hat{T}_{\psi_1\psi_2}(b, a, p, q)). \end{aligned} \quad (2.123)$$

$h_f(p, q)$ ,  $h_g(p, q)$  et  $D(p, q)$  se définissent alors simplement comme les limites

$$\begin{aligned} h_f(p, q) &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{h(p, q, a)}{\ln a}, \\ h_g(p, q) &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{h'(p, q, a)}{\ln a}, \\ D(p, q) &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{D(p, q, a)}{\ln a}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

### Remarques

- Si  $p = 0$ , le spectre  $\tau(0, q)$  est alors égal au spectre  $\tau_c(q)$  de la distribution  $g$ , et  $D(p = 0, q) = D(h_g)$ . De même  $\tau(p, q = 0) = \tau_f(p)$  et  $D(p, q = 0) = D(h_f)$ .
- Si les distributions  $f$  et  $g$  sont indépendantes alors

$$\langle |T_{\psi_1}|^p |T_{\psi_2}|^q \rangle = \langle |T_{\psi_1}|^p \rangle \langle |T_{\psi_2}|^q \rangle, \quad (2.125)$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned}\tau(p, q) &= \tau_f(p) + \tau_g(q) , \\ D(h_f, h_g) &= D(h_f) + D(h_g) - 1 ,\end{aligned}\tag{2.126}$$

où  $\tau_f(p)$  et  $\tau_g(q)$  correspondent respectivement aux spectres obtenus avec la fonction de partition continue (2.88) sur les distributions  $f$  et  $g$ .

- Il serait intéressant de redéfinir la fonction de partition jointe (2.118) à partir des maxima du module de la transformée en ondelettes. Pour cela, il est nécessaire d'associer de manière univoque un maximum du module de la T.O. de  $f$  à une échelle  $a$ , avec un maximum du module de la T.O. de  $g$  à cette même échelle. Malheureusement, une telle correspondance locale est difficile à établir de façon opérationnelle. Nous nous limiterons donc dans la suite de ce mémoire, à utiliser la formulation continue de la fonction de partition "grand-canonique" donnée par l'équation (2.118).

## Chapitre 3

Etude statistique de signaux de vitesse turbulents à l'aide de la méthode M.M.T.O. : mise en évidence d'un processus de cascade non invariant d'échelle



## 3.1 Introduction

### 3.1.1 Equations de Navier-Stokes

La turbulence pleinement développée concerne l'étude du comportement des écoulements turbulents tridimensionnels incompressibles aux très grands nombres de Reynolds<sup>[1]–[5],[26]–[30]</sup>. Ces écoulements possèdent une très grande hiérarchie d'échelles, comprises entre l'échelle de production de l'énergie qui est déterminée par les conditions extérieures à l'écoulement (échelle intégrale), et l'échelle beaucoup plus petite de dissipation d'énergie qui est fixée par la viscosité. Ces écoulements sont sensés être gouvernés par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned}\delta_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0, \\ &+ \text{conditions aux limites,}\end{aligned}\tag{3.1}$$

où  $\vec{v}$  représente le champ de vitesse,  $p$  le champ de pression,  $\nu$  la viscosité et  $\rho$  la densité. Si l'on impose des conditions aux limites périodiques, on peut éliminer la pression de ces équations en prenant la divergence de l'équation (3.1) et en résolvant l'équation de Poisson ( $\nabla^2 p = c$ ).

Notons  $G$  un groupe de transformations agissant sur le champ spatio-temporel  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ;  $G$  est appelé groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes si  $\forall \vec{v}$  solution des équations de Navier-Stokes et si  $\forall g \in G$ , la fonction  $g\vec{v}$  est aussi solution. Ces équations sont invariantes suivant les groupes de symétrie suivants<sup>[28],[30]</sup> :

- Le groupe des translations d'espace :  
 $g_{\vec{l}} : \vec{v}(\vec{r}, t) \mapsto \vec{v}'(\vec{r}, t) = v(\vec{r} - \vec{l}, t), \quad \vec{l} \in \mathbb{R}^3.$
- Le groupe des translations temporelles :  
 $g_{\tau} : \vec{v}(\vec{r}, t) \mapsto \vec{v}'(\vec{r}, t) = v(\vec{r}, t - \tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$
- Le groupe des parités :  
 $g_P : \vec{v}(\vec{r}, t) \mapsto -\vec{v}(-\vec{r}, t).$
- Le groupe des rotations d'espace :  
 $g_A : \vec{v}(\vec{r}, t) \mapsto A\vec{v}(A^{-1}\vec{r}, t), \quad A \in SO(\mathbb{R}^3).$
- Le groupe des transformations Galiléennes :  
 $g_{\vec{U}} : \vec{v}(\vec{r}, t) \mapsto \vec{v}'(\vec{r}, t) = v(\vec{r} - \vec{U}t, t) + \vec{U}, \quad \vec{U} \in \mathbb{R}^3.$  Si l'on suppose que  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  est homogène et stationnaire alors  $\vec{v}'(\vec{r}, t)$  doit l'être aussi. L'hypothèse d'isotropie n'est alors plus préservée car  $\vec{U}$  introduit une direction privilégiée. Pour restaurer

l'isotropie<sup>[254]-[256]</sup>, il suffit de considérer  $\vec{U}$  comme une variable aléatoire isotropiquement distribuée (une Gaussienne par exemple).

- Le groupe des transformations d'échelle :

$$g_\lambda : \vec{v}(\vec{r}, t) \mapsto \lambda^h \vec{v}(\lambda \vec{r}, \lambda^{1-h} t), \quad \lambda \in \mathbf{R}_+ \text{ et } h \in \mathbf{R} \text{ si } \nu = 0;$$

$$\lambda \in \mathbf{R}_+ \text{ et } h = -1 \text{ si } \nu \neq 0.$$

Introduisons quelques notations importantes. Par exemple, nous noterons  $E = \langle \frac{1}{2} |\nu|^2 \rangle$  l'énergie cinétique moyenne par unité de masse et  $\epsilon = -\frac{dE}{dt}$  la dissipation moyenne de l'énergie par unité de masse et de temps. Nous définirons également  $\Omega = \langle \frac{1}{2} |\omega|^2 \rangle$ , l'énstrophie moyenne (où  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$  représente la vorticité). Les symboles  $\langle \rangle$  représentent ici la moyenne spatiale ( $\langle f \rangle = \frac{1}{L^3} \int_{B_L} f(\vec{r}) d\vec{r}$  où  $B_L$  est une boîte périodique de taille  $L$ ). On peut déduire des équations de Navier-Stokes les lois de conservation suivantes :

- Conservation des moments :  $\frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle = 0$ .
- Conservation de l'énergie :  $\epsilon = \frac{1}{2} \nu \langle \sum_{ij} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2 \rangle = 2\nu \Omega$ .
- Conservation de l'hélicité :  $\frac{d}{dt} \langle \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{\omega} \rangle = -\nu \langle \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \rangle$ .

### Remarques

- Pour dériver ces lois de conservations, nous avons supposé que les champs de vitesse et de pression étaient suffisamment réguliers pour permettre un certain nombre de manipulations telles que les dérivations et les intégrations par parties. Quand la viscosité  $\nu$  est non nulle, cette hypothèse est généralement admise, par contre quand  $\nu = 0$ , ces lois de conservations pourraient être violées<sup>[257]</sup>.
- Si l'on note  $\epsilon = \frac{1}{2} \nu \sum_{ij} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2$  la dissipation d'énergie locale, on a la relation :

$$\nabla^2 p = \frac{1}{2} \nu |\omega|^2 - \frac{1}{2} \epsilon. \quad (3.2)$$

D'un point de vue mathématique, la résolution des équations de Navier-Stokes se heurte à des problèmes de fermeture<sup>[41]-[45]</sup>. L'étude de la turbulence est donc plutôt phénoménologique. Pour caractériser ces écoulements comportant des structures à toute échelle, on utilise un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{LV_L}{\nu}, \quad (3.3)$$

où  $V_L$  et  $L$  sont respectivement une vitesse et une échelle de longueur caractéristiques de l'écoulement. L'échelle de référence est souvent prise égale à l'échelle de Taylor  $\lambda$

$(1/\lambda^2 = \langle (\partial v_x / \partial x)^2 \rangle / v_{rms}^2)$  ou à l'échelle intégrale  $L$ . Toute la complexité des écoulements turbulents vient du très grand nombre de degrés de liberté mis en jeu,  $N \sim Re^{\frac{9}{4}}$ . Toutes les idées traditionnelles sur la turbulence reposent sur la notion fondamentale d'invariance d'échelle. C'est Richardson<sup>[234]</sup> en 1922, qui pour la première fois, fait appel à cette notion en proposant une description de la turbulence par un phénomène de cascade d'énergie : l'énergie cinétique injectée dans le système à grande échelle transite vers les petites échelles selon un processus de cascade par fragmentations successives de structures tourbillonnaires. Cette énergie se dissipe finalement aux petites échelles. Ces idées ont été reformulées et formalisées de manière plus précise par A.N. Kolmogorov<sup>[31]</sup> en 1941.

### 3.1.2 Théorie de Kolmogorov (K41) et hypothèse de similarité locale de Kolmogorov-Obukhov (KO62)

#### *Théorie de Kolmogorov (K41)*

Pour rendre compte de la structure dans les échelles de la turbulence pleinement développée, Kolmogorov<sup>[31]</sup> propose une description statistique fondée sur trois hypothèses fondamentales :

- H1) A la limite  $Re \rightarrow +\infty$  ( $\nu \rightarrow 0$ ), les propriétés d'invariance des équations de Navier-Stokes, éventuellement brisées de façon spontanée par les mécanismes producteurs de la turbulence à grande échelle ou par les conditions aux limites, sont restaurées à des échelles suffisamment petites et ce, de manière statistique. Cette hypothèse implique donc qu'à petite échelle (devant l'échelle intégrale), dans la mesure où la viscosité est suffisamment faible, la turbulence est stationnaire (invariance par rapport aux translations temporelles), homogène (invariance par rapport aux translations spatiales), isotrope (invariance par rapport aux rotations d'espace) et invariante d'échelle.
- H2) Quand  $Re \rightarrow +\infty$ , le taux de transfert de l'énergie ( $\epsilon$ ) est constant et indépendant de l'échelle considérée.
- H3) L'échelle de longueur  $l$  et la vitesse caractéristique d'un tourbillon à cette échelle sont les seules grandeurs physiques qui déterminent le taux de transfert de l'énergie à l'échelle  $l$ .

Dans ces hypothèses, le taux de transfert de l'énergie joue un rôle central. En effet,  $\epsilon$  représente non seulement le taux auquel l'énergie est transférée vers les petites échelles (par unité de masse), mais aussi le taux auquel l'énergie est dissipée aux toutes petites

échelles. Par simple analyse dimensionnelle, on déduit de H3) :

$$\epsilon \sim \frac{\delta v_l^3}{l} , \quad (3.4)$$

où  $\delta v_l = v(x+l) - v(x)$  représente un incrément de vitesse longitudinale ( $v$ ) calculé sur une longueur  $l$  dans la direction ( $x$ ) du courant.

**Remarque :** Le taux de dissipation de l'énergie entre l'échelle  $l$  et les échelles plus petites peut se réécrire de la manière suivante :

$$\epsilon_l = \frac{\delta v_l^2}{t_l} , \quad (3.5)$$

où  $t_l$  est le temps de circulation, c'est-à-dire le temps typique que met une structure de taille  $l$  pour parcourir une distance  $l$  :  $t_l = \frac{l}{|\delta v_l|}$ . On retrouve alors la relation (3.4).

Par l'hypothèse d'invariance d'échelle exprimée dans H1), on déduit que si  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  est solution des équations de Navier-Stokes alors  $\lambda^h \vec{v}(\lambda \vec{r}, \lambda^{1-h} t)$  est aussi solution. En combinant ce résultat avec l'équation (3.4), on obtient alors :

$$\epsilon \sim l^{3h-1} . \quad (3.6)$$

Comme, d'après H2),  $\epsilon$  ne dépend pas de l'échelle à laquelle il est estimé, on en déduit :

$$h = 1/3 . \quad (3.7)$$

Dans le langage du formalisme multifractal, on peut conclure que la théorie K41 prédit le résultat important suivant : quand  $Re \rightarrow +\infty$ , le champ de vitesse est statistiquement auto-similaire et caractérisé par un seul exposant de Hurst  $h = 1/3$ . On a donc<sup>[258],[259]</sup> :

$$\delta v_l \sim \epsilon^{1/3} l^{1/3} . \quad (3.8)$$

Kolmogorov prédit ainsi que le spectre des singularités qui caractérise le champ de vitesse d'un écoulement turbulent homogène et isotrope se réduit à un point<sup>[28],[258]</sup> :

$$D(h = 1/3) = 3 . \quad (3.9)$$

A partir de l'équation (3.7), il est facile de se convaincre que les fonctions de structure (Eq. (2.60)) se comportent dans les échelles de la façon suivante<sup>[28],[258]</sup> :

$$S_p(l) = \langle \delta v_l^p \rangle = C_p \epsilon^{p/3} l^{p/3} , \quad (3.10)$$

où les constantes  $C_p$  sont adimensionnées et supposées universelles par Kolmogorov. Le spectre des exposants  $\zeta_p$  des fonctions de structure est alors simplement pour  $p$  entier positif<sup>[28],[258]</sup> :

$$\zeta_p = p/3 , \quad (3.11)$$

qui est un spectre linéaire caractéristique d'un signal fractal homogène.

En supposant l'homogénéité, l'isotropie, l'hypothèse H3) et en utilisant l'équation de Kármán-Howarth<sup>[260]</sup>, Kolmogorov<sup>[31]</sup> relie de manière exacte les quantités  $\langle \delta v_l^3 \rangle$  et  $\epsilon$  :

$$\langle \delta v_l^3 \rangle = -\frac{4}{5} l \epsilon . \quad (3.12)$$

Cette équation permet d'affirmer de façon certaine que  $\zeta_3 = 1$ . Ce résultat constitue l'un des rares résultats exacts concernant la fonction  $\zeta_p$  qu'il est possible de déduire des équations de Navier-Stokes<sup>[259]</sup>. On appelle généralement cette loi "Kolmogorov's four-fifths law".

**Remarque :** Le caractère unique de l'exposant de Hölder caractéristique du champ de vitesse aurait pu être postulé comme hypothèse de départ à la place de H2. L'indépendance du taux de transfert de l'énergie en fonction de l'échelle considérée en aurait alors découlé par analyse dimensionnelle<sup>[258]</sup>.

Une conséquence de l'équation (3.8) est que la densité spectrale  $S(k) = |\hat{v}(k)|^2$  (Eqs (2.114) et (2.115)) se comporte comme

$$S(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3} . \quad (3.13)$$

Cette relation est usuellement appelée "loi en  $k^{-5/3}$ " de Kolmogorov.

Une analyse dimensionnelle permet aussi de prédire l'ordre de grandeur de l'échelle  $\eta$  à laquelle la dissipation intervient : c'est l'échelle  $\eta$  telle que le nombre de Reynolds local  $v_\eta \eta / \nu = 1$ , c'est-à-dire,

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \sim Re^{-3/4} L , \quad (3.14)$$

où  $L$  est l'échelle intégrale et  $Re = \frac{VL}{\nu}$  le nombre de Reynolds basé sur l'échelle intégrale. Ainsi le domaine inertiel dans lequel l'invariance d'échelle est satisfaite, est défini par la gamme d'échelles :

$$\eta \ll l \ll L . \quad (3.15)$$

*L'hypothèse de similarité locale de Kolmogorov-Obukhov (KO62)*

Le succès de la théorie K41 provient de sa très bonne vérification expérimentale<sup>[1]–[3],[26]–[30]</sup>. Mais c’est aussi l’expérience qui a révélé les imperfections de cette théorie, principalement son incapacité à rendre compte du phénomène d’intermittence observé aux petites échelles<sup>[26],[28],[29],[32]</sup>. En effet, le taux de dissipation  $\epsilon_l$ , estimé à l’échelle  $l$ , n’est pas homogène et présente des bouffées intermittentes d’autant plus importantes que l’échelle  $l$  considérée est petite. Ce phénomène contredit ainsi les hypothèses d’homogénéité et d’invariance d’échelle globale du champ de vitesse. Pour rendre compte de ce phénomène d’intermittence et pour répondre à une remarque de Landau<sup>[30]</sup> qui met en doute l’universalité des constantes  $C_p$  qui interviennent dans l’équation (3.10), Kolmogorov<sup>[177]</sup> et Obukhov<sup>[178]</sup> proposent, en 1962, un modèle pour rendre compte des fluctuations du champ de dissipation. Ce modèle, appelé modèle *log-normal* ne fait pas explicitement appel au champ de vitesse mais est seulement basé sur les hypothèses suivantes :

- $\epsilon_l(x) = \int_{B_l(x)} \left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)^2 dx$  est une variable aléatoire pour  $\eta \leq l \leq L$ .
- $\epsilon_l$  a une distribution log-normale car  $\epsilon_l = \epsilon_L * a_1 * a_2 * ..$  avec  $a_i$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Le champ de dissipation découle donc d’un processus de cascade multiplicatif et est donc auto-similaire.
- $\sigma_{\ln \epsilon_l}^2 \sim \mu \ln(L/l)$  avec  $\mu$  universel. Cette hypothèse est généralement appelée “3<sup>eme</sup> hypothèse”. Le champ de dissipation obtenu est donc auto-similaire et invariant d’échelle.

Kolmogorov et Obukhov reformule alors la relation (3.4) d’une manière locale :

$$\epsilon_l(x) \stackrel{s}{=} \delta v_l^3(x) , \quad (3.16)$$

où  $\epsilon_l(x) = \int_{B_l(x)} \left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)^2 dx$  et où  $\stackrel{s}{=}$  indique que les deux quantités ont statistiquement le même comportement dans les échelles. Cette relation, souvent désignée comme “l’hypothèse de similarité locale de Kolmogorov-Obukhov 1962” (KO62), leur permet, en utilisant la “3<sup>eme</sup> hypothèse” de retrouver les lois d’invariance d’échelle du champ de vitesse, c’est-à-dire  $\langle \delta v_l^q \rangle \sim l^{\zeta_q}$ . La relation statistique (3.16) implique que si le taux de dissipation  $\epsilon_l$  est spatialement non homogène, il doit en être de même du champ de vitesse. D’après l’équation (3.10), la théorie K41 prédit un spectre  $\zeta_p$  linéaire qui peut être estimé expérimentalement à partir de l’enregistrement du champ de vitesse. Ce sont Van Atta et Chen<sup>[134]</sup>, qui pour la première fois dans les années 70, effectuent cette étude et mettent clairement en évidence la non linéarité de  $\zeta_p$  en fonction de  $p$ . Ce comportement non linéaire constitue en fait la preuve expérimentale la plus tangible de la présence du phénomène d’intermittence qui va à l’encontre des hypothèses d’homogénéité proposées par Kolmo-

gorov (K41). Une grande quantité de travaux ont été depuis entrepris<sup>[127],[128],[134]–[151]</sup> pour déterminer avec précision le spectre des exposants  $\zeta_p$  afin de quantifier l'importance du phénomène d'intermittence. Les résultats obtenus sont régulièrement utilisés comme référence pour tous les modèles proposés<sup>[57],[126]–[133],[152],[153],[155],[161]–[178]</sup> par les théoriciens et sont à l'origine de la notion de multifractalité du champ de vitesse introduite par Frisch et Parisi<sup>[67]</sup>.

### 3.1.3 La description multifractale de Frisch et Parisi

En utilisant le vocabulaire et les concepts du formalisme multifractal, la présence de bouffées intermittentes responsables de la non linéarité du spectre  $\zeta_p$  s'interprète de manière simple : le champ de vitesse associé à un écoulement turbulent n'est pas un signal auto-similaire homogène mais multifractal, c'est-à-dire caractérisé par un spectre des singularités dont le support ne se réduit pas à un seul point comme le prédit la théorie K41 (Eq. (3.9)). Si l'on regarde les incréments du signal de vitesse à des échelles suffisamment petites, ceux-ci ne sont pas distribués de manière homogène dans l'espace mais sont plus importants dans certaines régions que dans d'autres. Cette description est obtenue simplement en gardant les hypothèses H1) et H3) de la théorie K41 et en remplaçant l'hypothèse H2) par<sup>[258]</sup> :

H2bis) Quand  $Re \rightarrow +\infty$ , on suppose que le champ de vitesse de l'écoulement turbulent est caractérisé par un intervalle fini de valeurs de l'exposant de Hurst  $h$ ,  $I = [h_{min}, h_{max}]$ , tel que pour  $h \in I$ ,  $D(h) \neq -\infty$ .

Les fonctions de structure d'ordre  $p$  vont alors se comporter en loi de puissance avec un exposant  $\zeta_q$  de la forme<sup>[67]</sup> (Eq. (2.61)) :

$$\zeta_q = \min_h(qh - D(h)) + 1 . \quad (3.17)$$

Selon cette hypothèse de multifractalité, la plupart des lois d'échelles prédites par K41 doivent être revues, en particulier, le spectre  $\zeta_p$  n'a plus aucune raison d'être linéaire puisque désormais la valeur de l'exposant de Hölder fluctue d'un point à l'autre du flot :

$$\delta v_l(x) \sim l^{h(x)} . \quad (3.18)$$

Si l'on note  $S_p(l) = \langle \delta v_l^p \rangle$  sans la valeur absolue, on a  $S_p(l) \sim l^{\zeta_p}$ , et à notre connaissance les seuls résultats exacts sont les suivants :

- $\zeta_3 = 1$ .
- $\zeta_{2p} < \zeta_{2p+2}$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}$  sinon la vitesse du flot ne pourrait être bornée, ce qui violerait les équations de Navier-Stokes pour les flots incompressibles<sup>[30],[235]</sup>.

Pour une raison de convergence plus rapide, le calcul des fonctions de structure se fait généralement à l'aide de la valeur absolue suivant la définition (2.60). De plus, l'existence du domaine inertiel qui n'est pas précisément défini, rend difficile la mesure des  $\zeta_p$ . En effet, cette mesure dépend sensiblement de la gamme d'échelles utilisée pour estimer la pente du logarithme des fonctions de structure en fonction du logarithme des échelles. Cette gamme inertielle est donc définie de façon ad-hoc par l'intervalle  $[l_1, l_2]$  tel que  $\zeta_3 = 1$  et ceci souvent au détriment de la qualité de la régression linéaire<sup>[151]</sup>.

### 3.1.4 Auto-Similarité Etendue (A.S.E.)

Récemment, Benzi *et al*<sup>[140],[141]</sup> ont proposé une méthode pour mesurer avec plus de précision les exposants  $\zeta_p$ . Au lieu de représenter  $\log S_p(l)$  en fonction de  $\log l$ , ils représentent  $\log S_p(l)$  en fonction de  $\log S_{p'}(l)$ . Ces courbes présentent un comportement linéaire beaucoup plus étendu; cela provient probablement du fait que les écarts qui apparaissent dans le calcul des fonctions de structure d'ordre  $p$ , par rapport à une pure loi de puissance, sont corrélés. On peut ainsi écrire<sup>[148]</sup> :

$$S_p(l) = (l f_p(l))^{\zeta_p} , \quad (3.19)$$

où les fonctions  $f_p(l)$  sont à priori dépendantes de  $p$ . Ces fonctions représentent en fait les déviations par rapport à une vraie loi de puissance. D'après l'équation (3.19), on a la relation suivante entre les fonctions de structure d'ordre  $p$  et  $p'$  :

$$\log S_p(l) = \frac{\zeta_p}{\zeta_{p'}} \log S_{p'}(l) + \zeta_p \log \left( \frac{f_p(l)}{f_{p'}(l)} \right) . \quad (3.20)$$

Ainsi, si les fonctions  $f_p$  varient peu en fonction de  $p$ , cette représentation va diminuer l'effet des fluctuations par rapport au comportement linéaire de pente  $\zeta_p/\zeta_{p'}$ . De plus, si l'on tient compte du fait que  $\zeta_3 = 1$  et que l'on considère  $p' = 3$ , alors, l'utilisation de l'équation (3.20) permet de retrouver directement les exposants des fonctions de structure. Benzi *et al*<sup>[147],[148]</sup> ont émis l'hypothèse que les fonctions  $f_p$  ne dépendent pas de  $p$  et ceci jusqu'à des échelles de l'ordre de l'échelle dissipative. Cette hypothèse permet donc de supprimer

la notion de gamme inertielle. Elle permet ainsi de mesurer les  $\zeta_p$  pour des flots à faible nombre de Reynolds dont les fonctions de structure ne présentent pas de domaine inertiel évident. Cette hypothèse semble être vérifiée expérimentalement<sup>[140]–[142],[146]–[148],[151]</sup> et numériquement<sup>[147],[148],[261],[262]</sup> pour des flots isotropes à nombres de Reynolds très faibles ( $R_\lambda \sim 140$ ).

Comme nous l’avons vu dans le chapitre précédent, si tous les exposants de Hölder sont inférieurs à 1, alors l’exposant de Hurst est égal à l’exposant de Hölder. Le comportement des fonctions de structure dans les échelles est alors le même que celui des fonctions de partition définies à partir des coefficients en ondelettes. Comme le champ de vitesse d’un flot turbulent semble être singulier partout (non dérivable), on peut donc supposer l’identité entre ces deux exposants. Il est alors facile de reprendre la théorie de Frisch et Parisi<sup>[67]</sup> avec la notion d’exposant de Hölder intrinsèque au champ de vitesse à la place de l’exposant de Hurst seulement caractéristique du comportement des fonctions de structure. L’utilisation de la méthode M.M.T.O.<sup>[93]–[101]</sup> qui permet d’estimer le spectre  $\tau(q)$  (ou  $\zeta(q)$ ) non seulement pour les valeurs de  $q$  positives, mais aussi pour les valeurs négatives, va ainsi permettre de tester de manière plus précise les différents modèles de cascade d’énergie proposés dans la littérature<sup>[57],[126]–[133],[152],[153],[155],[161]–[178]</sup>. En effet, la détermination de  $\tau(q)$ ,  $\forall q \in \mathbb{R}$ , permet de caractériser statistiquement la gamme de fluctuations du champ de vitesse et en particulier de rendre compte des régions où le flot est le plus régulier, c’est-à-dire les régions où le taux de dissipation de l’énergie fluctue le moins.

## 3.2 Présentation du signal de vitesse étudié

### 3.2.1 Conditions expérimentales

Le signal de vitesse que nous allons étudier a été enregistré à la soufflerie de l’O.N.E.R.A. à Modane par Y. Gagne<sup>[137]</sup> et ses collaborateurs. Cette soufflerie fonctionne en boucle fermée. La veine d’expérience est le tunnel de retour de 153 mètres de long constitué de trois parties. La première partie est une veine circulaire de 42 mètres de long et de 15 mètres de diamètre où se trouvent deux entrées rectangulaires d’air froid. Cette veine s’élargit ensuite sur 65 mètres pour atteindre un diamètre de 24 mètres. Au milieu de la partie évasée est placée une grille à deux mailles qui permet d’homogénéiser le flot. L’armature de cette grille est constituée d’une part de 17 câbles d’acier de 1,5 cm de diamètre séparés d’une distance de 1,2 m et d’autre part de 6 câbles de même section

formant une grille carrée de 5.4 m de côté inclinée à 45 degrés. Sur cette armature est placé un grillage classique de maille carrée de 2,5 cm de côté. Les mesures sont effectuées au bout du tunnel de 24 mètres de diamètre par un anémomètre à fil chaud placé au centre de la veine.

Le signal enregistré correspond aux fluctuations, autour de la valeur moyenne, de la vitesse longitudinale en un point, en fonction du temps. L'hypothèse de Taylor<sup>[30],[137]</sup> permet d'identifier les fluctuations temporelles de la vitesse à ses fluctuations spatiales longitudinales. En effet, l'invariance des équations de Navier-Stokes par des transformations galiléennes nous permet d'écrire que  $\forall U \in \mathbb{R}$ , si  $v(x, t)$  est solution, alors  $v'(x, t)$  définie par

$$v'(x, t) = v(x - Ut, t) + U \quad (3.21)$$

est aussi solution. Si l'on suppose que la contribution turbulente est très faible, c'est à dire que :

$$I = \frac{\sqrt{\langle v'^2 \rangle}}{U} \ll 1 \quad (3.22)$$

où  $\langle \rangle$  représente la moyenne sur l'espace, alors la dépendance temporelle de  $v'(x, \mathbf{t})$  provient en grande partie de l'argument  $x - Ut$  de  $v$  et l'hypothèse de Taylor réinterprète la variation temporelle de  $v'$  en un point donné comme la variation spatiale de  $v$  en un temps donné. La correspondance entre les incréments spatiaux  $l$  de  $v'$  et les incréments temporels  $\tau$  de  $v$  est simplement :

$$l = U\tau . \quad (3.23)$$

On a alors la relation :

$$v'(x_0 - U\tau, t_0) = v(x_0, t_0 + \tau) . \quad (3.24)$$

Si l'on prend  $U$  égal à la vitesse moyenne du flot, l'hypothèse de Taylor suppose simplement que les fluctuations de la vitesse autour de cette valeur moyenne sont négligeables.

Les caractéristiques générales du signal analysé sont les suivantes :

- L'échelle intégrale :  $L \simeq 15 \text{ m}$  ;
- La vitesse moyenne du flot :  $U \simeq 21 \text{ ms}^{-1}$  ;
- L'écart type des fluctuations de la vitesse :  $v_{rms} = \sqrt{\langle (v - U)^2 \rangle} \simeq 1.5 \text{ ms}^{-1}$  ;
- L'échelle de Taylor :  $\lambda = \langle (\partial v / \partial x)^2 \rangle / v_{rms}^2 \simeq 0.00382 \text{ m}$  ;
- La dissipation moyenne :  $\epsilon = 15\nu(v_{rms}^2 / \lambda^2) \simeq 0.016 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$  ;
- La viscosité :  $\nu = 1.9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  ;
- Le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor :  $R_\lambda = (v_{rms} \lambda / \nu) \simeq 3050$  ;
- L'échelle de Kolmogorov :  $\eta = (\nu^3 / \epsilon)^{1/4} \simeq 0.00035 \text{ m}$  ;

- La fréquence d'échantillonnage :  $f_e = 50 \text{ kHz}$  ;
- Le pas d'échantillonnage :  $\Delta x = U/f_e \simeq 1.2\eta$ .

Ces données nous montrent les avantages de cette soufflerie. Les nombres de Reynolds atteints sont très importants, comparables à ceux obtenus en couche limite atmosphérique. Les dimensions gigantesques de cette soufflerie permettent d'avoir une région inertielle très importante ce qui offre à l'analyse une gamme d'échelles exceptionnelle ( $L/\eta \sim 4 \cdot 10^4$ ). D'un autre côté, le taux de turbulence est très faible, de l'ordre de 7% (Eq. (3.22)), ce qui rend à priori négligeable l'erreur impliquée par l'utilisation de l'hypothèse de Taylor.

**Remarque :** L'hypothèse de Taylor nous permet de considérer que l'on mesure expérimentalement le profil spatial de la composante longitudinale de la vitesse, c'est-à-dire un champ scalaire sur  $\mathbf{R}$ . D'après les résultats généraux de Mandelbrot<sup>[57],[167],[230],[263]</sup> concernant les coupes aléatoires de dimension  $d$  d'un champ dans un espace de dimension  $n$ , on peut déduire les propriétés du comportement dans les échelles du champ original tridimensionnel à partir des statistiques sur les enregistrements temporels du champ de vitesse. Le lien entre ces deux champs se fait à partir de la relation :

$$D^{3d} = D^{1d} + 2, \quad (3.25)$$

où  $D$  représente toute quantité pouvant être assimilée à une dimension.

### 3.2.2 Spectre de puissance

Sur la figure 3.1, nous avons représenté un échantillon du signal de vitesse d'une longueur approximativement égale à une échelle intégrale. Ce signal, très singulier comme on peut le voir sur le grossissement dans la figure 3.1b, admet des détails à toutes les échelles.

La densité spectrale  $S_v(k) = \langle |\hat{v}(k)|^2 \rangle_{real}$  est représentée dans la figure 3.2 en échelles logarithmiques. La région inertielle s'étend sur plus de trois décades entre  $40\eta$  et  $10^4\eta$ . Le pic présent dans la région dissipative correspond à un sifflement, audible in situ, dont l'origine n'est pas clairement établie. Ce spectre a été estimé comme la moyenne du spectre calculé par FFT sur 110 réalisations de longueur équivalente à 4 échelles intégrales. La pente estimée par régression linéaire dans la zone inertielle est  $\beta = 1.71$ , valeur un peu supérieure à la valeur  $5/3$  prédite par Kolmogorov (Eq. (3.13)) représentée en ligne continue. Par contre, le calcul sur une fenêtre d'une décade de la pente locale ne présente aucun plateau; la valeur passe continuellement de 1.63 à 1.73 quand on se déplace des basses fréquences (grandes échelles) vers les hautes fréquences (petites échelles) tout en restant

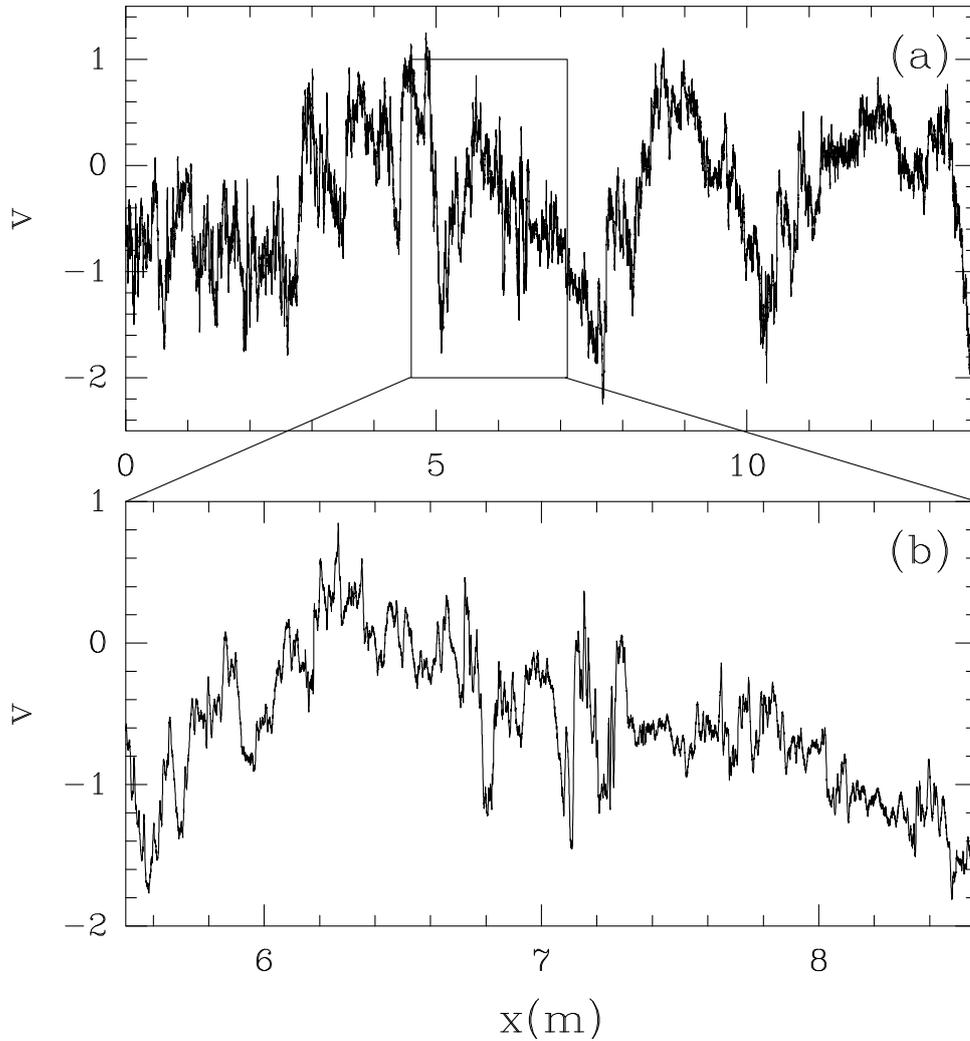


FIG. 3.1 – Signal de vitesse enregistré dans la soufflerie S1 de Modane ( $R_\lambda = 3050$ ). Les variations temporelles sont assimilées, via l'hypothèse de Taylor, à des fluctuations spatiales. a) Signal d'une longueur de l'ordre de l'échelle intégrale ( $\sim 32000$  points). b) Grossissement de ce signal qui est très irrégulier et qui admet des détails à toute échelle.

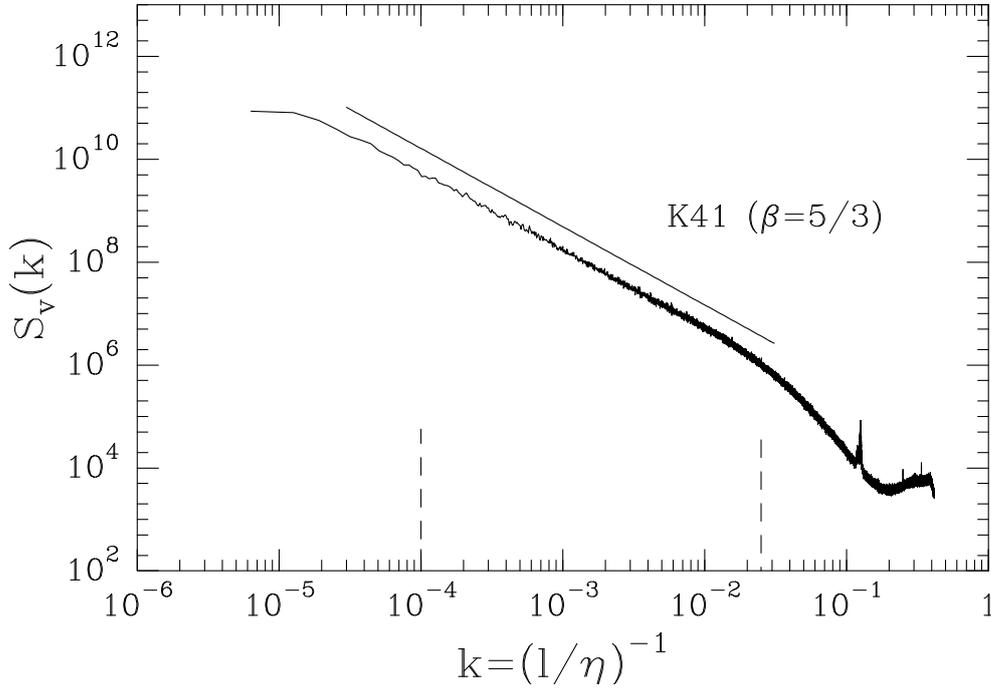


FIG. 3.2 – Spectre d’énergie du signal de vitesse calculé sur 110 réalisations de 130000 points ( $\sim 4$  échelles intégrales). La droite de pente  $-5/3$  prédite par Kolmogorov est représentée en trait continu. Les lignes en pointillés représentent la zone inertielle qui s’étend approximativement de  $l/\eta = 40$  à  $l/\eta = 10000$ .

dans la zone inertielle. Notons que ce spectre est affecté de deux erreurs expérimentales qui ont tendance à diminuer la décroissance. La première source d’erreur est l’utilisation de l’hypothèse de Taylor qui conduit à une surestimation dans le domaine des hautes fréquences<sup>[264]</sup>. La deuxième erreur résulte du problème d’aliasing ou de superposition des spectres<sup>[137]</sup>. D’un autre côté, cet estimateur spectral basé sur la FFT souffre d’un biais multiplicatif qui dépend de la fréquence analysée et qui peut entraîner une surestimation ou une sous-estimation de la pente<sup>[124]</sup>.

Nous avons également calculé ce spectre d’énergie à l’aide d’un estimateur spectral espace-échelle défini à l’aide de la transformée en ondelettes du signal de vitesse (scalogramme) :

$$E(k = k_\psi/a) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |T_\psi[v](x, a)|^2 dx, \quad (3.26)$$

où  $k_\psi = \int_0^{+\infty} k |\hat{\psi}(k)|^2 dk / \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(k)|^2 dk$  est la fréquence caractéristique de l’ondelette

mère. Cet estimateur qui souffre des mêmes erreurs expérimentales, a l'avantage d'avoir un biais qui ne dépend pas de la fréquence contrairement à l'estimateur précédent basé sur la FFT<sup>[124]</sup>. L'exposant  $\beta$  obtenu avec cet estimateur dans la même gamme de fréquence spatiale est égal à  $1.66 + -0.01$ , valeur inférieure au résultat précédent mais très proche de la valeur  $5/3$  prédite par Kolmogorov (K41).

### 3.3 Analyse en ondelettes du signal de vitesse de Modane : comparaison des fonctions de partition continues et de la méthode M.M.T.O.

#### 3.3.1 Fonctions de partition continues

- **Fonction analysatrice  $\psi_{(0)}^{(1)}$  : méthode des fonctions de structure**

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (Eqs (2.105) et (2.106)), nous pouvons estimer les fonctions de structure directement à partir de la transformée en ondelettes du signal en utilisant comme fonction analysatrice "l'ondelette du pauvre"<sup>[94],[98],[251]</sup> :  $\psi_{(0)}^{(1)} = \delta(x + 1) - \delta(x)$  (Fig. 2.18)). Nous avons représenté respectivement sur les figures 3.3a et 3.3b, un échantillon du signal de vitesse d'une longueur égale à l'échelle intégrale ainsi que le module de sa transformée en ondelettes. Celui-ci est codé indépendamment à chaque échelle avec une palette de 32 niveaux de gris, du blanc ( $|T_\psi[v]| = 0$ ) au noir ( $|T_\psi[v]| = \max_x |T_\psi[v](x, a)|$ ). L'ondelette utilisée,  $\psi_{(0)}^{(1)}$ , est une fonction non continue, inadaptée aux singularités d'exposant de Hölder négatif et qui ne permet donc pas de les localiser. En effet, en présence de telles singularités fortes, les coefficients en ondelettes peuvent passer d'une valeur proche de 0 à une valeur très importante pour un déplacement en  $x$  très petit. La méthode des maxima du module de la T.O. ne peut donc pas être raisonnablement utilisée avec l'ondelette  $\psi_{(0)}^{(1)}$  pour des raisons de stabilité.

Nous nous sommes donc limités au calcul des fonctions de partition continues (Eq. (2.88)) définies à chaque échelle par :

$$\langle K(q, a/\eta) \rangle_{real} = \langle \int |T_\psi(x, a/\eta)|^q dx \rangle_{real} \sim (a/\eta)^{\zeta_q}, \quad (3.27)$$

et

$$\langle H(q, a/\eta) \rangle_{real} = \langle \int \frac{|T_\psi(x, a/\eta)|^q}{K(q, a/\eta)} \log(|T_\psi(x, a/\eta)|) dx \rangle_{real} \sim h(q) \log(a/\eta), \quad (3.28)$$

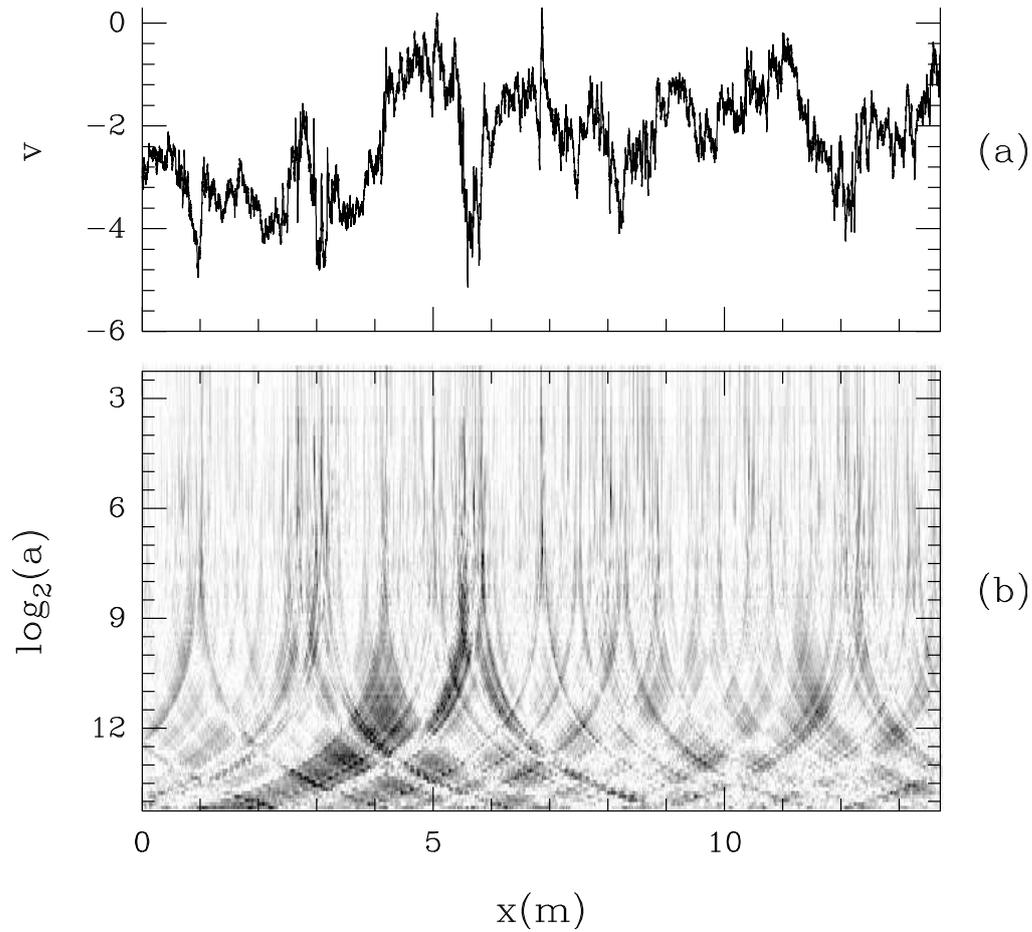


FIG. 3.3 – Représentation espace-échelle des incréments du signal de vitesse turbulent de Modane. a) Echantillon du signal de vitesse d’une longueur de l’ordre de l’échelle intégrale. b) Transformée en ondelettes en utilisant la fonction analysatrice  $\psi_{(0)}^{(1)} = \delta(x + 1) - \delta(x)$ ; l’amplitude de la T.O. est codée, indépendamment à chaque échelle, avec une palette de 32 niveaux de gris, du blanc ( $|T_\psi[v](x, a)| = 0$ ) au noir ( $|T_\psi[v](x, a)| = \max_x |T_\psi[v](x, a)|$ ).

version continue de l'équation (2.98). Pour cette ondelette particulière, on aurait pu remplacer  $K(q, a/\eta)$  par les fonctions de structure  $S_q(a/\eta)$ . Les symboles  $\langle \rangle$  indiquent une moyenne (ou une somme) de  $K(q, a/\eta)$  calculée sur plusieurs réalisations de 65536 points, représentant chacune à peu près 2 échelles intégrales. Les résultats présentés ont été effectués sur 232 réalisations et portent donc sur une statistique de plus de  $1.5 \cdot 10^7$  points (équivalente à 460 échelles intégrales).

Sur les figures 3.4a et 3.4b, nous avons représenté les fonctions  $\log_2(K(q, a/\eta))$  et  $H(q, a/\eta)$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ , pour différentes valeurs de  $q$ . Ces courbes présentent un comportement linéaire sur près de deux décades. La zone inertielle délimitée par les lignes hachurées verticales et estimée à partir du moment d'ordre 3 en imposant  $\zeta_3 = 1$ , s'étend approximativement de  $40\eta$  à  $1300\eta$ . Les lignes continues sont les pentes de ces courbes estimées par régression linéaire sur cette gamme d'échelles. Sur la figure 3.4b, on voit clairement que les trois courbes correspondant à des valeurs de  $q$  différentes ont des pentes ( $h(q)$ ) différentes, contrairement à la prédiction de Kolmogorov<sup>[31]</sup> (K41) ( $h(q)$  unique indépendant de  $q$ ). Les valeurs obtenues pour  $\zeta(q)$  et  $h(q)$  sont reportées sur les figures 3.4c et 3.4d (symboles  $(\bullet)$ ). Le spectre  $\zeta_q$  s'écarte indubitablement de la droite  $q/3$  prédite par la théorie K41 (ligne continue). Les valeurs obtenues, sont aux erreurs numériques près, les mêmes que celles obtenues par Chavarria *et al*<sup>[265]</sup> (symboles  $(\circ)$ ) pour un signal de vitesse turbulent produit par le sillage d'un cylindre placé au centre d'un tunnel à vent ( $R_\lambda = 470$ ) en utilisant l'Auto-similarité Étendue (Eq. (3.20)). La courbe  $h(q)$  est bien approchée pour  $q < 6$  par une droite de pente  $-0.02$  et d'ordonnée à l'origine  $0.37$ .

Nous avons également calculé le spectre  $\zeta_q$  par la méthode de l'Auto-Similarité Étendue (section 3.1.4), en estimant les pentes des courbes  $\log(S_q(a/\eta))$  en fonction de  $\log(S_3(a/\eta))$ . Dans la figure 3.5, nous avons représenté ces courbes pour deux valeurs de  $q$  respectivement égales à 2 et 6. La région présentant un comportement linéaire est beaucoup plus étendue que celle obtenue en représentation classique suivant le logarithme des échelles (délimitée par les lignes verticales en pointillés). Les valeurs des pentes varient très peu selon la gamme d'échelle utilisée et passent, pour le moment d'ordre 6, de 1.74 quand on estime la pente dans la région inertielle, à seulement 1.76 quand on prend en compte toutes les échelles supérieures à  $40\eta$ . Le spectre des exposants  $\zeta_q$  obtenu sur cette dernière gamme d'échelle est représenté en ligne discontinue sur la figure 3.4c. Ce spectre est en très bon accord avec celui obtenu précédemment. L'Auto-Similarité Étendue permet donc une estimation plus robuste des exposants  $\zeta_q$ ; en tirant avantage des corrélations

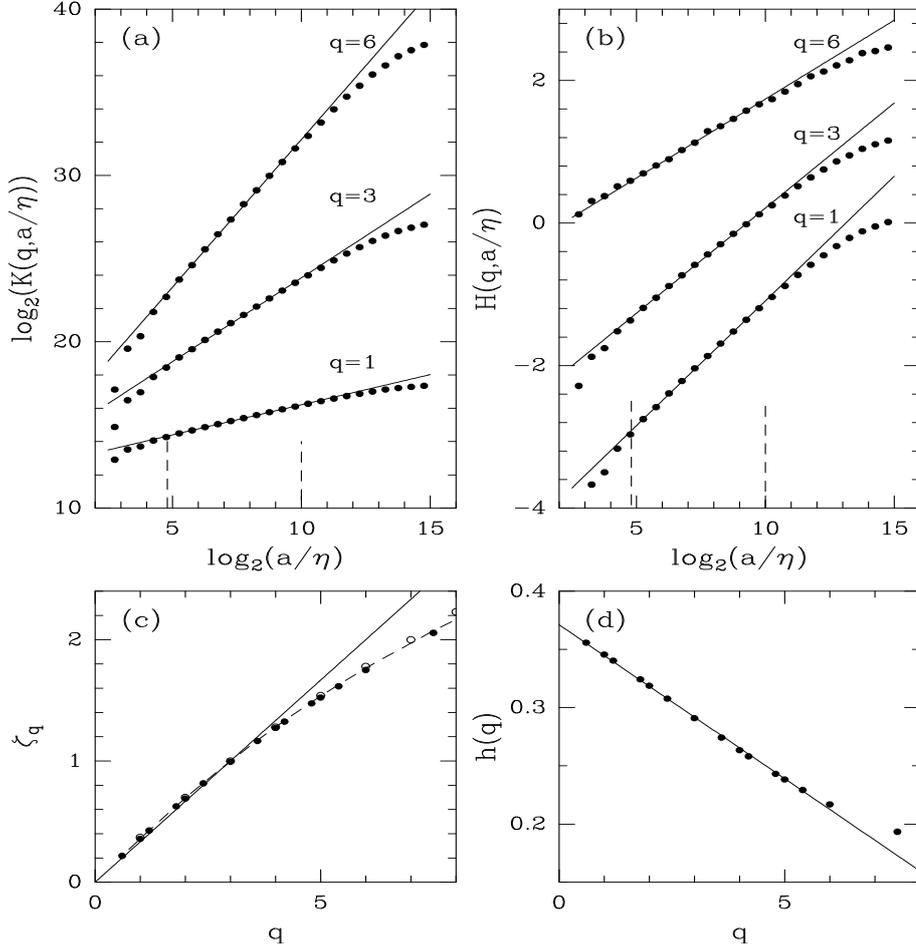


FIG. 3.4 – Détermination du spectre  $\zeta(q)$  et de la fonction  $h(q)$  du signal de vitesse turbulent de Modane à l’aide de la méthode des fonctions de partition continues (méthode des fonctions de structure :  $\psi = \psi_{(0)}^{(1)}$ ). a)  $\log_2(K(q, a/\eta))$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . La pente de ces courbes nous donne l’exposant  $\zeta_q$ . b)  $H(q, a/\eta)$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . La pente de ces courbes nous donne l’exposant de Hurst “canonique” à la température  $q^{-1}$ . Les lignes verticales hachurées délimitent la région inertielle. c) Spectre  $\zeta_q$  en fonction de  $q$  (●) estimé dans la zone inertielle. La prévision théorique de Kolmogorov  $\zeta_q = q/3$  (K41) est représentée en ligne continue. Les symboles (○) représentent, pour comparaison, les valeurs obtenues par Chavarria *et al*[265]. La ligne discontinue représente le spectre obtenu en utilisant l’Auto-Similarité Etendue (section 3.1.4) sur la gamme d’échelles  $a/\eta > 40$ . d)  $h(q)$  en fonction de  $q$ . La ligne continue est la droite de pente  $-0.02$  et d’ordonnée à l’origine  $0.37$ .

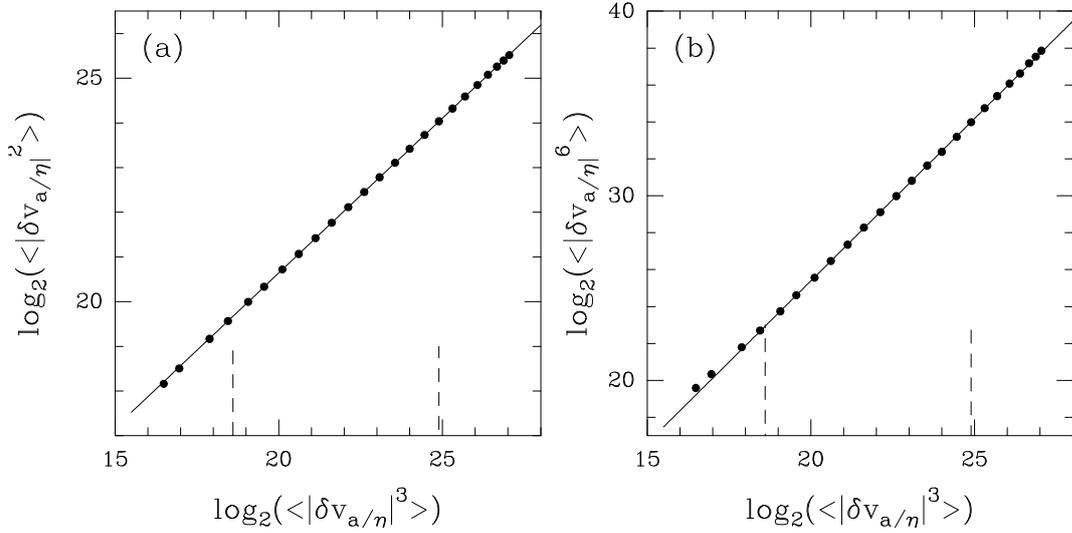


FIG. 3.5 – Auto-Similarité Étendue : Représentation logarithmique des fonctions de structure  $S_q(a/\eta)$  en fonction de  $S_3(a/\eta)$ . a)  $q = 2$ . b)  $q = 6$ . La région linéaire est beaucoup plus étendue que le domaine inertiel délimité par les lignes verticales discontinues. Les lignes continues représentent les droites estimées par régression linéaire en prenant en compte toutes les échelles supérieures à  $40\eta$ . Les valeurs obtenues pour les pentes de ces droites sont  $\zeta_2 = 0.69$  et  $\zeta_6 = 1.76$ .

existant entre les fonctions de structure d'ordres différents, cette méthode permet d'élargir la plage de régression linéaire donnant accès à ces exposants<sup>[140],[141],[146]–[148]</sup>.

Les fonctions de structure d'ordre 3 calculées avec (symboles (●)) et sans (symboles (○)) valeur absolue dans l'équation (3.27) sont représentées sur la figure 3.6. Celle calculée sans la valeur absolue ne semble pas avoir convergé et ne présente pas un comportement linéaire très affirmé. De plus, les pentes de ces courbes sont significativement différentes. Si l'exposant  $\zeta_3 = 1.00 + -0.02$  obtenu dans le régime inertiel, en considérant la valeur absolue des incréments de vitesse, est en très bon accord avec la valeur théorique  $\zeta_3 = 1$  (Eq. (3.12)), il n'en est pas de même si l'on ne prend pas en compte la valeur absolue :  $\zeta_3 = 0.85 + -0.05$ . Cette différence peut s'expliquer de différentes manières : par exemple par un manque de statistique<sup>[143]</sup> (qui semble évident dans le cas où l'on ne prend pas la valeur absolue) ou par un manque d'homogénéité ou d'isotropie locale du flot<sup>[145]</sup>.

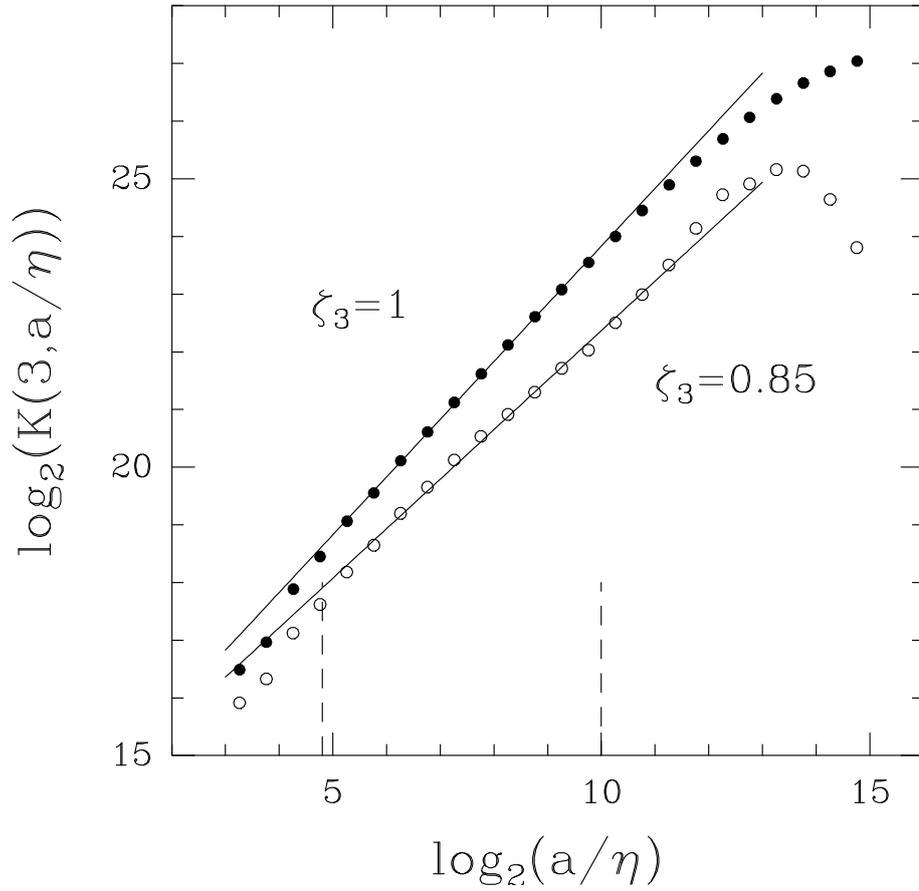


FIG. 3.6 –  $\log_2(\langle |\delta v_{a/\eta}|^3 \rangle)$  (●) et  $\log_2(\langle \delta v_{a/\eta}^3 \rangle)$  (○) en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . Ces courbes ont des pentes significativement différentes :  $\zeta_3 = 1.00 \pm 0.03$  et  $0.85 \pm 0.05$  respectivement. Ces estimations expérimentales sont à comparer avec la valeur théorique  $\zeta_3 = 1$  (Eq. (3.12)).

### Densité de probabilité des incréments

Comme cela a déjà été noté dans de nombreux travaux<sup>[127]–[133],[137],[156]–[160]</sup>, les incréments de la vitesse (ici égaux aux coefficients de la T.O.) évoluent d’une distribution Gaussienne à grande échelle vers une distribution à queues exponentielles à petite échelle. Sur la figure 3.7a, nous avons représenté ces distributions de probabilité pour différentes échelles appartenant toutes au domaine inertiel et correspondant à  $a = 77\eta$  (symboles (●)),  $a = 308\eta$  (symboles (○)) et  $a = 1230\eta$  (symboles (×)). Ces histogrammes sont normalisés de telle manière que  $\int_{\mathbb{R}} P_a(T) dT = 1$  et sont présentés en échelles semi-logarithmiques. Le maximum de ces courbes est atteint pour une valeur de  $T$  positive qui décroît quand  $a$  diminue. Nous avons également représenté ces histogrammes dans la figure 3.7b, en fonction de la variable  $x = (a_0/a)^{1/3}T$ . D’après la théorie de Kolmogorov K41 (Eq. (3.8)), en normalisant les coefficients en ondelettes par  $a^{1/3}$ , les différents histogrammes obtenus à différentes échelles devraient tous se remettre sur une même courbe. Ceci n’est en fait pas vérifié, la différence entre ces courbes augmentant lorsqu’on s’éloigne du maximum. Lorsque la taille  $a$  diminue, l’effet de l’intermittence est de plus en plus marqué : pour une valeur de  $x = (a_0/a)^{1/3}T$  fixée,  $P_a(x)$  augmente quand  $a$  diminue. Pour comparaison, nous avons superposé sur ces courbes une parabole correspondant à une approximation Gaussienne de même écart type. Ces distributions sont en fait bien modélisées par une courbure Gaussienne près du maximum, avec des queues exponentielles étirées de la forme<sup>[156]–[160]</sup> :

$$P_a(x) = Ae^{-\beta x^\alpha}, \quad (3.29)$$

où  $A$ ,  $\beta$  et  $\alpha$  ne dépendent que de  $a$ .

Dans les figures 3.7c et 3.7d, nous avons représenté les quantités  $x^q P_a(x)$  en fonction de  $x$ , pour les valeurs  $q = 3$  et  $6$ , en utilisant les mêmes symboles pour les différentes échelles examinées. Ces courbes sont toujours normalisées de manière à ce que leur intégrale soit égale à 1. Dans les deux cas, le fait que les maxima de ces distributions soient bien définis (non bruités) nous informe que la convergence des moments d’ordre 3 et 6 est atteinte. Cette variable  $x$ , qui d’après l’hypothèse de Kolmogorov K41 devrait être indépendante de l’échelle considérée, en fait évolue dans les échelles et ce d’autant plus que la valeur de  $q$  considérée est importante. Ainsi, le fait que les histogrammes des figures 3.7c et 3.7d dépendent de l’échelle met bien en évidence la multifractalité du champ de vitesse. Remarquons de plus le déplacement vers les grandes valeurs de  $x$  des maxima de ces courbes quand  $a$  diminue, mettant en évidence l’évolution de la forme de ces histogrammes et l’augmentation du poids relatif des grandes fluctuations quand on descend dans les échelles.

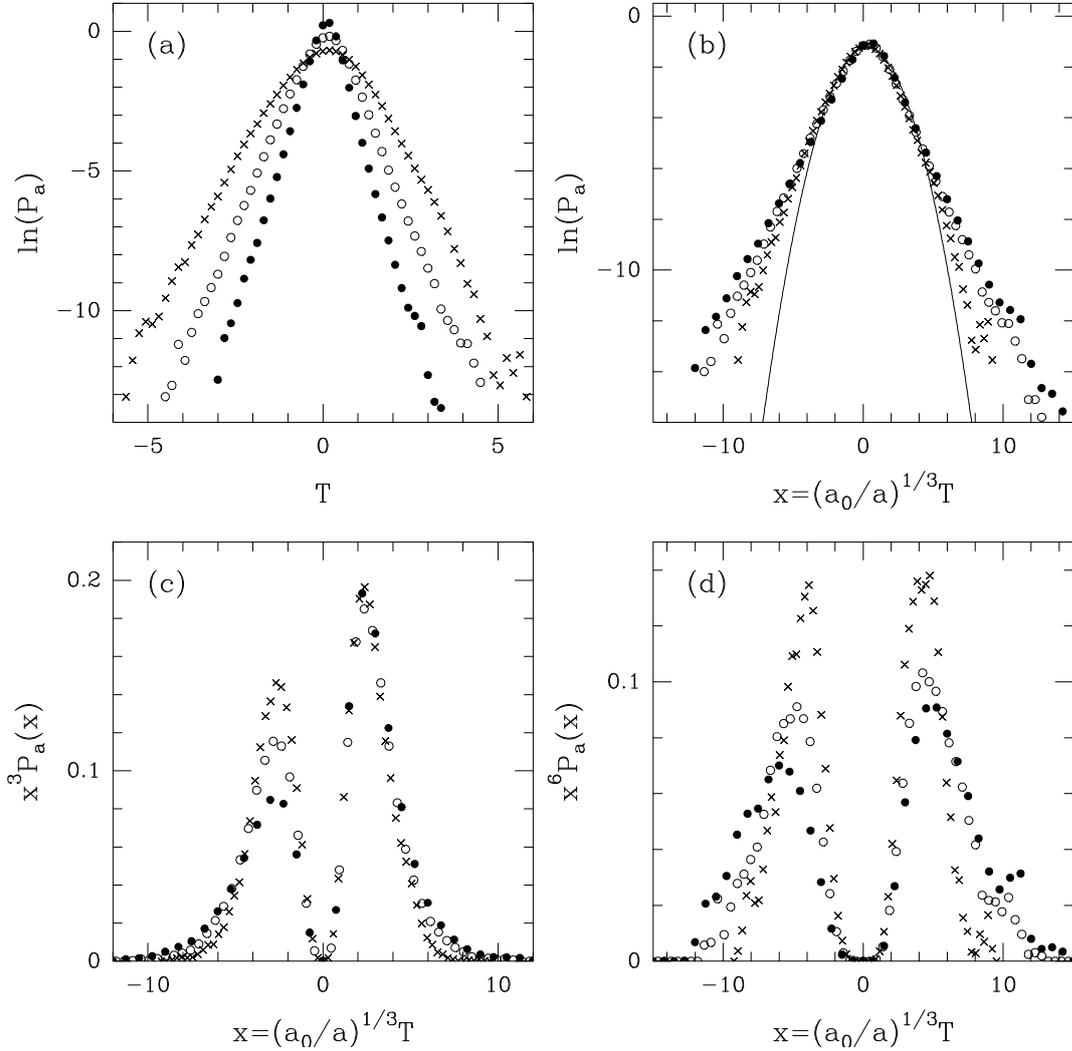


FIG. 3.7 – Densité de probabilité des incréments du signal de vitesse de Modane dans le domaine inertiel. a) Histogrammes normalisés ( $\int P_a(T)dT = 1$ ) en représentation semi-logarithmique. Les différents symboles représentent les échelles :  $a = 1230\eta$  ( $\times$ ),  $308\eta$  ( $\circ$ ) et  $77\eta$  ( $\bullet$ ). b) Ces mêmes histogrammes mais selon la variable  $x = (a_0/a)^{1/3}T$  avec  $a_0 = 1230\eta$ . Ces histogrammes non Gaussiens évoluent d’une forme approximativement Gaussienne à grande échelle (de l’ordre de l’échelle intégrale), vers des distributions de forme exponentielle étirée à petite échelle. Une approximation Gaussienne est également représentée par la parabole en ligne continue. c) Evolution dans les échelles de  $x^q P_a(x)$  pour  $q = 3$ . d)  $x^q P_a(x)$  pour  $q = 6$ .

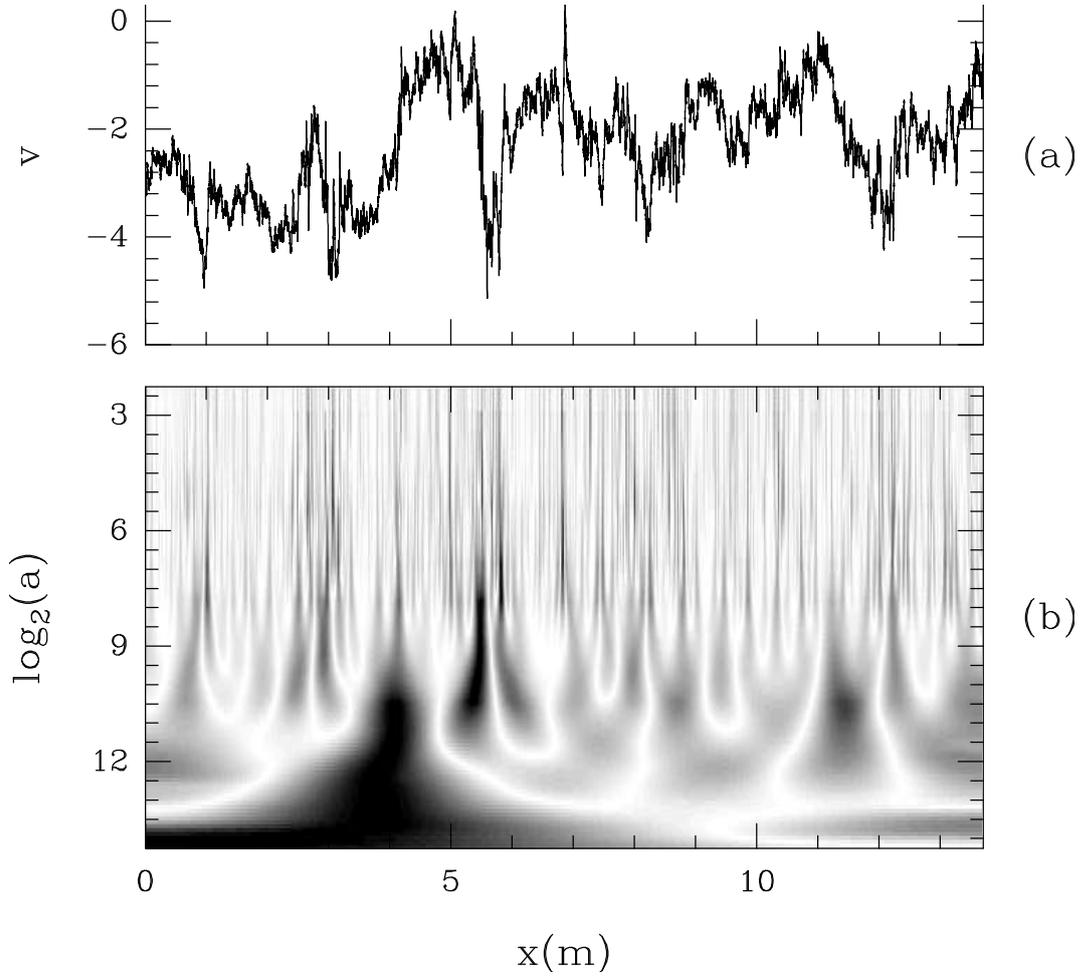


FIG. 3.8 – Transformée en ondelettes du signal de vitesse turbulent de Modane. a) Même échantillon du signal que dans la figure 3.3a. b) Transformée en ondelettes avec la fonction analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ ; l'amplitude de la T.O. est codée, indépendamment à chaque échelle, avec une palette de 32 niveaux de gris, du blanc ( $|T_\psi[v](x, a)| = 0$ ) au noir ( $|T_\psi[v](x, a)| = \max_x |T_\psi[v](x, a)|$ ).

• **Fonctions analysatrices  $\psi_{(1)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(1)}$**

Sur la figure 3.8, nous avons représenté la transformée en ondelettes du même signal que celui illustré dans la figure 3.3, mais en utilisant cette fois la fonction analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Le module des coefficients est codé avec une palette de 32 niveaux de gris, du blanc (valeur nulle) au noir (valeur maximale) et ceci indépendamment à chaque échelle. En comparant avec la figure 3.3, on voit maintenant apparaître très nettement des structures en cône, localisées dans le demi-plan espace-échelle, pointant vers les singularités les plus fortes. Avec cette ondelette, les coefficients de la T.O. sont en fait, à une échelle  $a$  donnée, des moyennes sur une distance  $a/2$  d'incrément de taille  $a/2$  (Fig. 2.18). Ces coefficients sont donc corrélés sur une distance à peu près égale à la moitié du support de l'ondelette, c'est-à-dire  $a/2$ . Le calcul à partir de la T.O. des fonctions de partition continues (Eqs (3.27) et (3.28)) en utilisant successivement les fonctions  $\psi_{(1)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , a été entrepris dans les mêmes conditions que précédemment. Les courbes obtenues se comportent bien en loi de puissance mais avec des exposants différents de ceux obtenus avec les fonctions de structures ( $\psi_{(0)}^{(1)}$ ). Pour illustrer ce fait, nous avons représenté respectivement dans les figures 3.9a et 3.9b, les quantités  $D_K(\psi, \psi_{(0)}^{(1)}, q)$  et  $D_H(\psi, \psi_{(0)}^{(1)}, q)$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ , où :

$$D_K(\psi, \psi_{(0)}^{(1)}, q) = \log_2(K_{\psi_{(0)}^{(1)}}(q, a/\eta)/K_{\psi}(q, a/\eta)) , \quad (3.30)$$

et

$$D_H(\psi, \psi_{(0)}^{(1)}, q) = H_{\psi_{(0)}^{(1)}}(q, a/\eta) - H_{\psi}(q, a/\eta) , \quad (3.31)$$

en prenant successivement  $\psi = \psi_{(1)}^{(1)}$  (symboles  $(\circ)$ ) et  $\psi = \psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles  $(\times)$ ). Ces courbes présentent bien un comportement linéaire. Par contre, les pentes estimées dans le domaine inertiel (lignes continues), sont toutes positives, et nous donnent une estimation de la différence entre les exposants  $\tau_c(q) = \zeta_q$  et  $h(q)$  obtenus en utilisant les différentes ondelettes. Le domaine inertiel est représenté par les lignes discontinues verticales et les courbes  $\tau(q)$  et  $h(q)$  obtenues dans cette gamme d'échelle sont représentées respectivement dans les figures 3.9c et 3.9d pour les ondelettes  $\psi_{(1)}^{(1)}$  (symboles  $(\circ)$ ) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles  $(\times)$ ). Ces deux ondelettes donnent les mêmes résultats, qui sont systématiquement inférieurs à ceux obtenus avec  $\psi_{(0)}^{(1)}$  (symboles  $(\bullet)$ ). Les exposants de Hölder "canoniques" sont eux aussi différents et systématiquement inférieurs à ceux calculés à partir des fonctions de structure. La courbe discontinue sur la figure 3.9c représente le spectre  $\tau_c(q)$  calculé en utilisant l'Auto-Similarité Etendue. Ainsi, en imposant la relation  $\tau_c(3) = 1$ , on obtient de nouveau le spectre  $\zeta_q$  précédemment calculé avec les fonctions de structure. La différence entre les

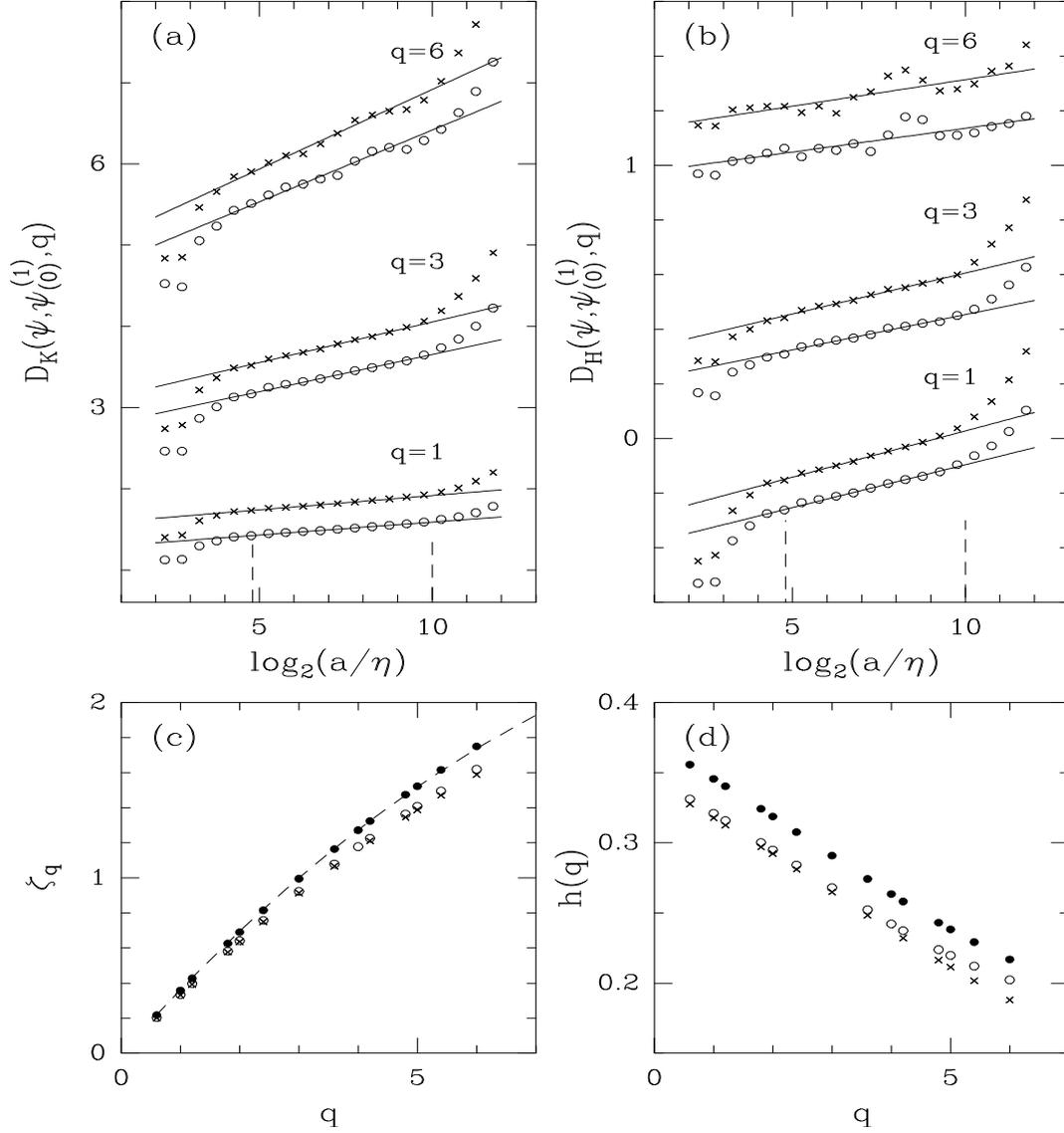


FIG. 3.9 – Dépendance du comportement des fonctions de partition continues en fonction de l'ondelette utilisée. a)  $D_K(\psi, \psi_{(0)}^{(1)}, q)$  (Eq. (3.30)) en fonction de  $\log_2(a/\eta)$  pour trois valeurs de  $q$  et pour les ondelettes  $\psi = \psi_{(1)}^{(1)}$  ( $\circ$ ) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\times$ ). b)  $D_H(\psi, \psi_{(0)}^{(1)}, q)$  (Eq. (3.31)) en fonction de  $\log_2(a/\eta)$  pour les mêmes valeurs de  $q$  et les mêmes ondelettes analysatrices. c) Spectre  $\zeta_q$ . d) Fonction  $h(q)$ . Les différents symboles représentent les ondelettes  $\psi_{(1)}^{(1)}$  ( $\circ$ ),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\times$ ) et  $\psi_{(0)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ). La courbe discontinue dans la figure (c) représente le spectre  $\tau_c(q) = \zeta_q$  obtenu en utilisant l'Auto-Similarité Étendue et l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

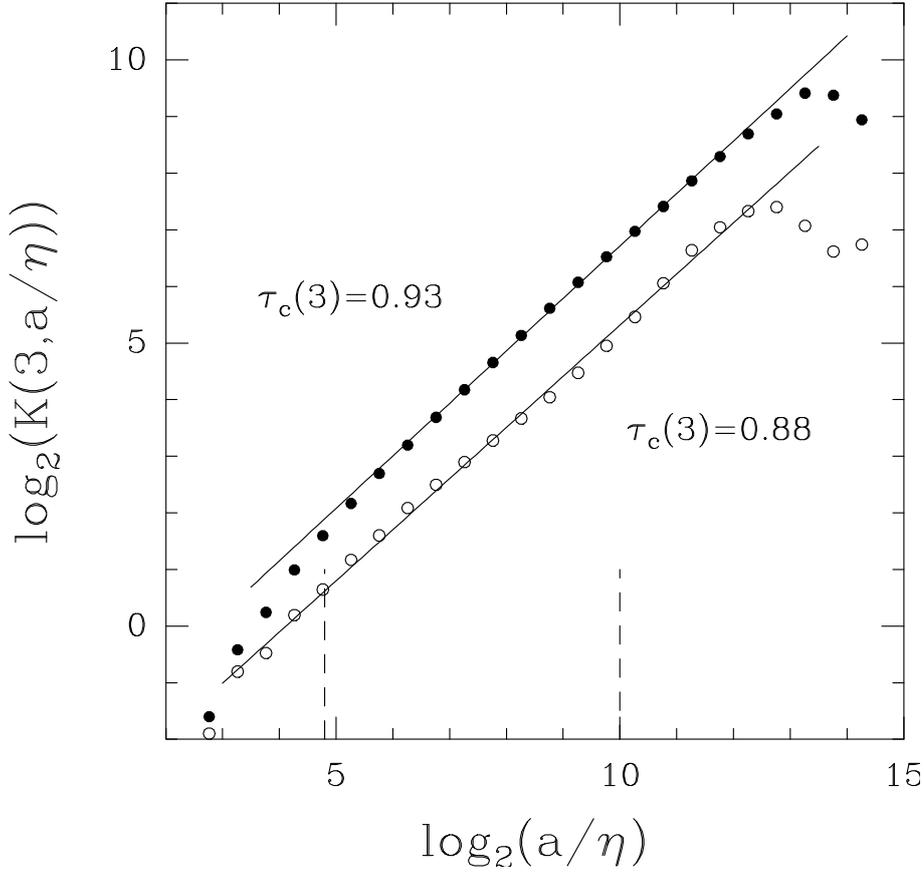


FIG. 3.10 –  $\log_2(\langle K(3, a/\eta) \rangle)$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ .  $K(3, a/\eta)$  a été calculée avec (●) et sans (○) la valeur absolue des coefficients en ondelettes. Ces courbes ont des pentes différentes avec comme valeurs respectives  $\tau_c(3) = 0.93 \pm 0.02$  et  $0.88 \pm 0.04$ . L'ondelette analysatrice est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

$\tau_c(q)$  semble donc provenir du fait que la valeur de  $\tau_c(3)$  obtenue avec les ondelettes est différente de 1 (en fait  $\tau_c(3) < 1$ ). De plus  $\tau_c(3)$  semble légèrement dépendre de la forme de l'ondelette analysatrice.

De la même manière que précédemment, nous avons représenté sur la figure 3.10 le logarithme de la fonction de partition continue d'ordre 3 calculée respectivement avec  $T_\psi$  et  $|T_\psi|$  en fonction du logarithme des échelles. Les résultats ont été obtenus en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Ces deux fonctions présentent un comportement linéaire mais avec des pentes légèrement différentes et des fluctuations plus importantes quand on ne prend pas la valeur absolue. Remarquons que cette différence est beaucoup moins marquée que

pour les fonctions de structure (Fig. 3.6); les valeurs obtenues avec et sans la valeur absolue des coefficients en ondelettes sont respectivement  $\tau_c(3) = 0.93 + -0.02$  et  $\tau_c(3) = 0.88 + -0.04$ , c'est-à-dire des valeurs significativement inférieures à la prédiction théorique  $\zeta_3 = \tau_c(3) = 1$ .

### *Densité de probabilité des coefficients en ondelettes*

Comme nous l'avons vu, les coefficients en ondelettes à une échelle  $a$  peuvent se voir comme une moyenne pondérée d'incrémentes de taille  $a/2$ . Si l'on suppose que le signal de vitesse présente des propriétés d'invariance d'échelle, alors on peut s'attendre à ce que ces distributions aient la même évolution dans les échelle que celles des incréments. Les histogrammes des valeurs des coefficients de la transformée en ondelettes, en prenant l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , sont représentés sur la figure 3.11. Nous avons gardé les mêmes notations et les mêmes échelles que dans la figure 3.7 :  $a = 77\eta$  (symboles  $(\bullet)$ ),  $308\eta$  (symboles  $(\circ)$ ) et  $1230\eta$  (symboles  $(\times)$ ). Ces histogrammes, normalisés de telle manière que leur intégrale soit égale à 1, ont apparemment la même forme que ceux des incréments de la vitesse présentés dans la figure 3.7. Ils évoluent d'une forme Gaussienne à grande échelle, vers une distribution à queues de forme exponentielle étirée à petite échelle. De la même manière que pour les incréments, nous avons représenté ces histogrammes selon la variable  $x = (a_0/a)^{1/3}T$  (figure 3.11b). Ces distributions s'écartent d'autant plus d'une forme Gaussienne (ligne continue) que l'échelle est petite. Les quantités  $x^q P_a(x)$  représentées dans les figures 3.11c et 3.11d pour les valeurs  $q = 3$  et 6 respectivement, suivent comme  $P_a(x)$  une évolution dans les échelles qui contredit l'hypothèse de Kolmogorov K41. Cette hypothèse prédit que la variable  $x$  est indépendante de l'échelle considérée, et que par conséquent toutes les courbes dans les figures 3.11b, 3.11c et 3.11d devraient se remettre les unes sur les autres. Le fait que tel ne soit pas le cas, révèle le caractère multifractal du champ de vitesse. Il est important de remarquer que le caractère bien défini et régulier des maxima des courbes représentant  $x^q P_a(x)$  dans les figures 3.11c et 3.11d, apporte la preuve de la bonne convergence du calcul des fonctions de partition continue et donc des exposants  $\tau_c(q)$  pour les valeurs de  $q \leq 6$ . La dépendance dans les échelles de  $P_a(x)$  ne peut donc s'expliquer par un manque de convergence. Notons que l'évolution dans les échelles des histogrammes des coefficients en ondelettes (Fig. 3.11) est comparable à celle observée pour les histogrammes des incréments (Fig. 3.7). Le caractère significatif de la différence observée entre les spectres  $\zeta_q$  et  $\tau_c(q)$  est

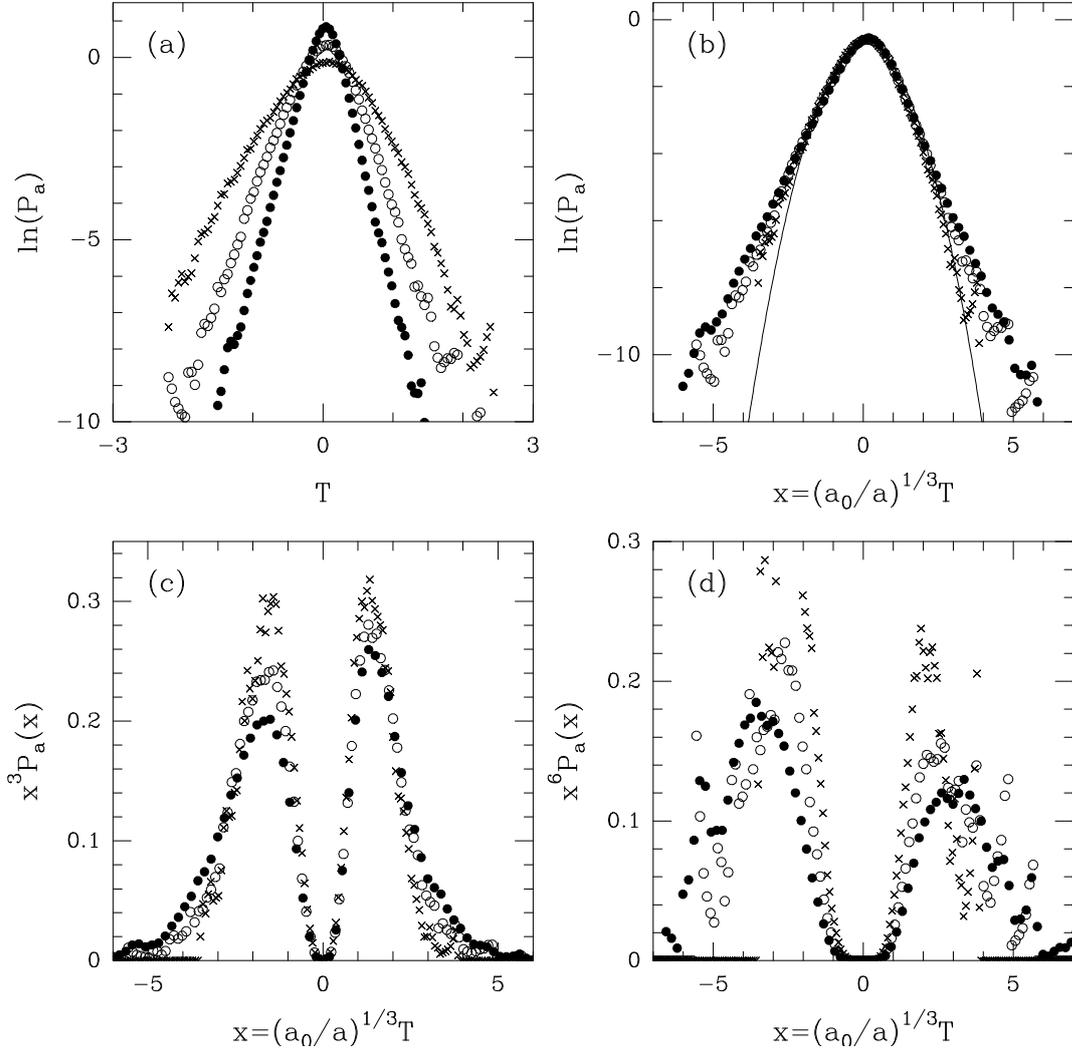


FIG. 3.11 – Densité de probabilité des coefficients en ondelettes du signal de vitesse de Modane dans le domaine inertiel. L'ondelette utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . a) Histogrammes normalisés ( $\int P_a(T)dT = 1$ ) en représentation semi-logarithmique. Les différents symboles représentent les échelles  $a = 1230\eta$  ( $\times$ ),  $308\eta$  ( $\circ$ ) et  $77\eta$  ( $\bullet$ ). b) Ces mêmes histogrammes mais selon la variable  $x = (a_0/a)^{1/3}T$  avec  $a_0 = 1230\eta$ . Ces histogrammes évoluent d'une forme approximativement Gaussienne à grande échelle vers des distributions à queues de forme exponentielle étirée à petite échelle. Une approximation Gaussienne est également représentée par la parabole en ligne continue. c) Evolution dans les échelles de  $x^q P_a(x)$  pour  $q = 3$ . d)  $x^q P_a(x)$  pour  $q=6$ .

incontestablement une information importante relativement aux propriétés d’invariance d’échelle du champ de vitesse et aux mécanismes sous-jacents à la cascade d’énergie. On peut en effet montrer que tous les modèles multiplicatifs de cascade proposés dans la littérature<sup>[126],[152],[153],[155]–[161],[176]</sup> pour modéliser le comportement des fonctions de structure, conduisent aux mêmes spectres d’exposants  $\zeta_q$  et  $\tau_c(q)$  et ce quelle que soit l’ondelette analysatrice utilisée. Ces modèles sont donc incapables de rendre compte du fait expérimental rapporté dans la figure 3.9, à savoir l’inconsistance de l’analyse multifractale lorsqu’on change la forme de l’ondelette analysatrice.

### 3.3.2 Méthode M.M.T.O. : mise en évidence d’une dépendance suivant l’ondelette analysatrice

D’après ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, la nature fractale ou multifractale d’un signal quelconque est reflétée par le comportement des maxima du module de la transformée en ondelettes. La structure arborescente du “squelette” de la transformée en ondelettes, obtenu en ne gardant que les maxima locaux de son module, contient à priori toute l’information sur la structure auto-similaire du signal et permet d’estimer dans leur globalité le spectre  $\tau(q)$  des exposants des fonctions de partition et le spectre  $D(h)$  des singularités. Nous nous sommes donc attachés à appliquer cette méthode au signal de vitesse de Modane.

#### • Fonctions de partition restreintes aux maxima du module de la T.O.

Sur la figure 3.12, nous avons représenté les trois étapes de cette méthode : un échantillon du signal et sa transformée en ondelettes sont représentés dans les figures 3.12a et 3.12b respectivement. Le squelette de cette transformée, défini par l’ensemble des maxima locaux de son module et à partir duquel sont calculées les fonctions de partition (Eqs (2.96) et (2.98)), est représenté sur la figure 3.12c. Nous avons effectué ce calcul en utilisant successivement les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  qui ont respectivement un et deux moments nuls. Le comportement dans les échelles des fonctions de partition obtenues avec les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles (●)) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles (○)) est représentée en échelles logarithmiques dans la figure 3.13. Les données présentent un comportement linéaire dans la région inertielle et ceci aussi bien pour les valeurs positives que négatives de  $q$ . Les pentes estimées par régression linéaire dans cette gamme d’échelles sont représentées en lignes continues. Les valeurs obtenues sont reportées dans la figure 3.14, où nous avons représenté les fonctions  $\tau(q)$  ( $= \zeta_q - 1$ ) (Eq. (2.96)),  $h(q)$ ,  $D(q)$  (Eqs (2.99)) ainsi que le spectre des singularités

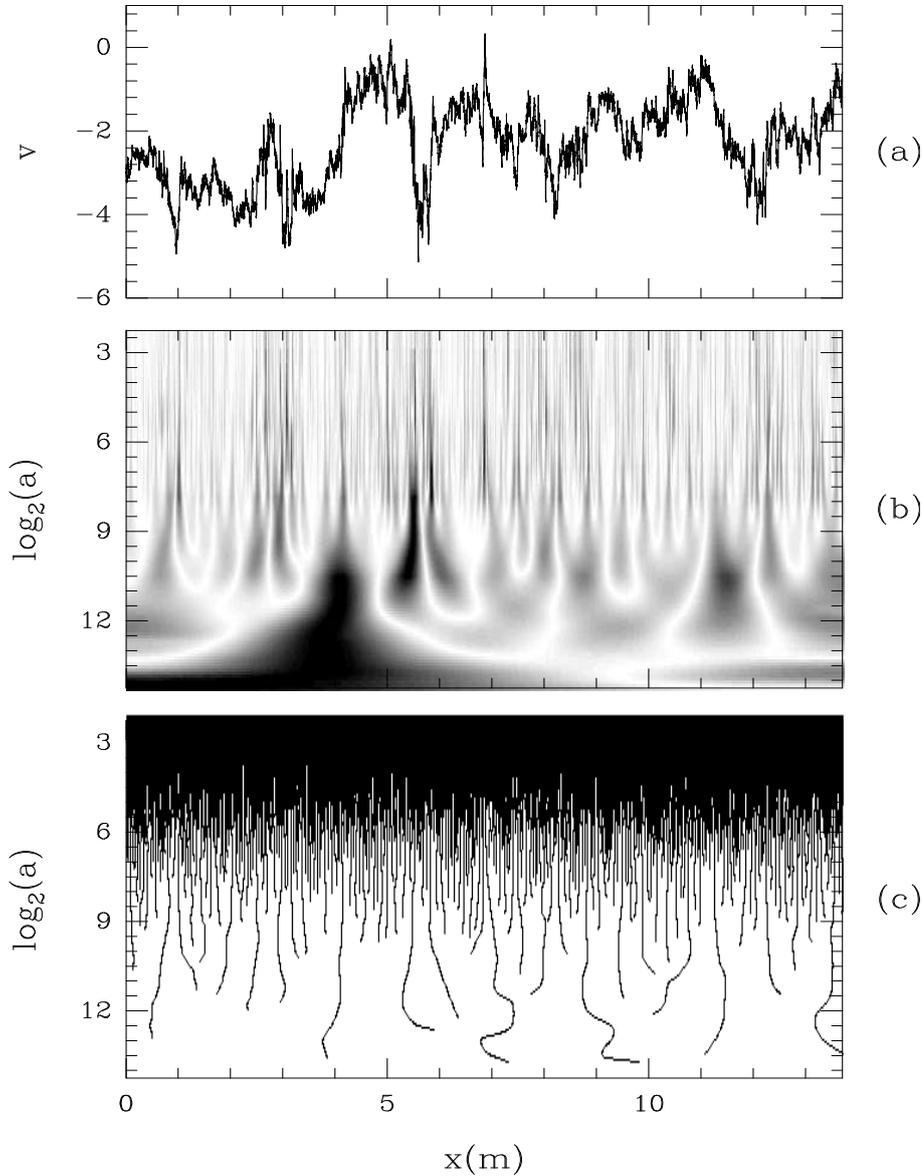


FIG. 3.12 – Squelette de la transformée en ondelettes du signal de vitesse de Modane. a) Même échantillon du signal que dans la figure 3.3a. b) Transformée en ondelettes du signal effectuée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , l'amplitude de la T.O. est codée avec une palette de 32 niveaux de gris, du blanc ( $|T_\psi[v](x, a)| = 0$ ) au noir ( $|T_\psi[v](x, a)| = \max_x |T_\psi[v](x, a)|$ ) et ce, indépendamment à chaque échelle. c) Ensemble des lignes de maxima locaux du module de la T.O. La méthode M.M.T.O. ne prend en compte que ces coefficients pour le calcul des fonctions de partition (Eq. (2.96)).

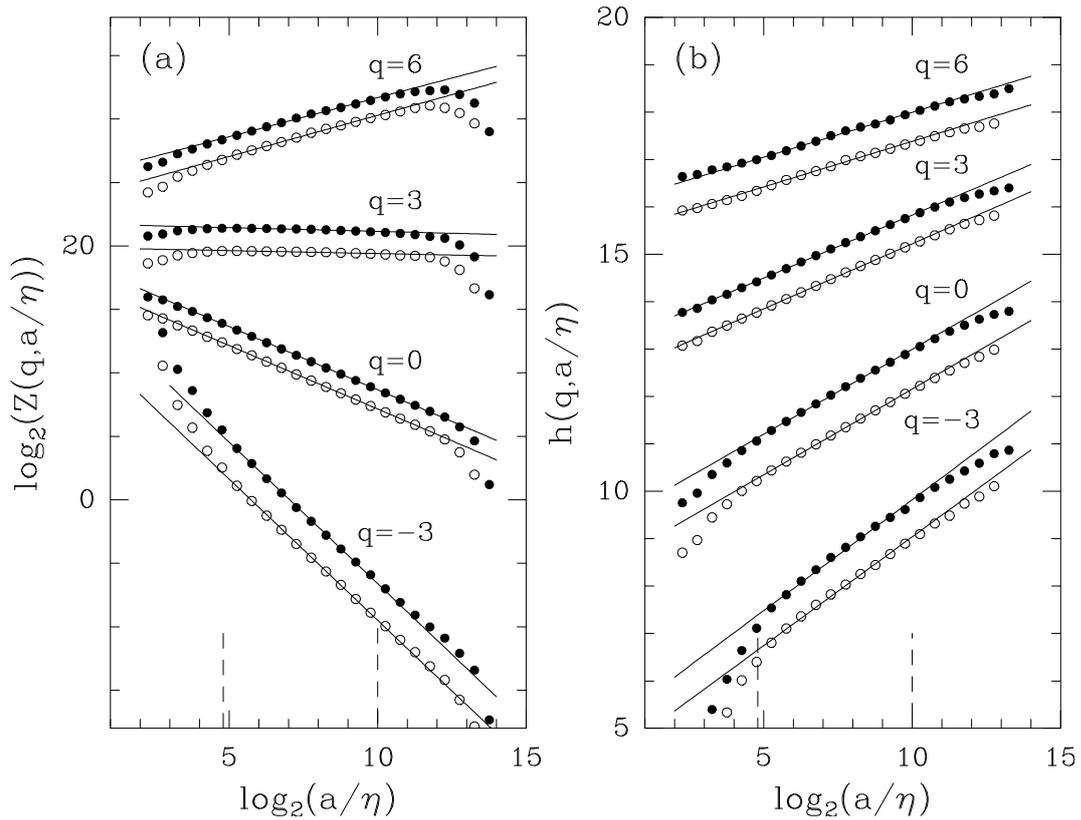


FIG. 3.13 – Détermination des exposants  $\tau(q)$  (Eq. (2.96)) et  $h(q)$  (Eq. (2.99)). a)  $\log_2(Z(q, a/\eta))$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$  pour quelques valeurs de  $q$ . La pente de ces courbes nous donne une estimation directe de l'exposant  $\tau(q) = \zeta_q - 1$ . b)  $h(q, a/\eta)$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$  pour les mêmes valeurs de  $q$ . La pente de ces courbes nous donne une estimation de l'exposant de Hölder canonique  $h(q)$ . Les lignes verticales discontinues délimitent le domaine inertiel et les lignes continues correspondent aux régressions linéaires obtenues dans ce domaine. L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\circ$ ).

$D(h)$  “canonique”, obtenu en éliminant  $q$  entre  $h(q)$  et  $D(q)$ . D’un point de vue quantitatif, les mesures effectuées ne semblent pas dépendre significativement du choix de  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ou  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . Le spectre  $\tau(q)$  est non linéaire et équivalent à celui obtenu en utilisant les fonctions de partition continues dans la figure 3.9c. L’exposant de Hölder varie de  $h_{min} = 0.12$  à  $h_{max} = 0.60$  quand  $q$  varie de 8 à  $-8$ . Le spectre des singularités obtenu par transformée de Legendre de  $\tau(q)$  (qui n’est pas présenté) est identique au spectre “canonique” illustré dans la figure 3.14d. Le maximum de cette courbe est égal à 1 en  $h = 0.37 + -0.02$ . Le fait que  $h_{max}$  soit inférieur à 1, permet de conclure que le signal est singulier partout avec un exposant de Hölder le plus probable  $h(q = 0) \approx 0.37$ . Sur cette même figure 3.14, la ligne continue correspond au modèle de cascade d’énergie log-normal<sup>[177],[178]</sup> avec comme paramètre  $\sigma^2 = 0.236$  ( $m = -(1 + \sigma^2/2)$ ) et la ligne discontinue au modèle log-Poisson<sup>[126],[233]</sup> avec le jeu de paramètres  $\beta = \gamma = 2/3$  et  $\lambda = 2$  (section 2.1.4). Pour dériver analytiquement les spectres multifractals de la vitesse à partir de ceux du taux de dissipation, nous supposons valide l’hypothèse d’auto-similarité locale de Kolmogorov<sup>[177]</sup> et Obukhov<sup>[178]</sup> (Eq. (3.16)). Nous renvoyons le lecteur à la section 4.4.2., où nous discuterons les conséquences de cette hypothèse quant aux propriétés multifractales du champ de vitesse et du champ de dissipation. Les résultats obtenus avec la méthode M.M.T.O. sur la vitesse ne sont clairement pas en accord avec ces modèles de fluctuations du champ de dissipation. Remarquons que les spectres  $\tau(q)$  et  $D(h)$  obtenus à partir de cette méthode en utilisant l’Auto-Similarité Etendue (symboles ( $\times$ )) sont équivalents, pour les valeurs de  $q > 0$ , au spectre  $\zeta_q$  obtenu avec les fonctions de structure.

**Remarque :** Comme l’indique les figures (3.14a) et (3.14d), les spectres expérimentaux  $\tau(q)$  et  $D(h)$  sont en très bon accord avec les prédictions théoriques du modèle log-Poisson. Toutefois, cet accord est tout a fait fortuit car, si l’on regarde les figures (3.14b) et (3.14c), les résultats obtenus pour  $h(q)$  et  $D(q)$  sont tout a fait différents de ces prédictions.

Dans la figure 3.15, nous comparons pour les valeurs de  $q$  positives, les spectres  $\tau(q) + 1$  obtenus avec l’ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  en utilisant la méthode M.M.T.O. (symboles ( $\bullet$ )) puis l’Auto-Similarité Etendue (symboles ( $\times$ )) avec le spectre  $\zeta_q$  des exposants des fonctions de structure (symboles ( $\circ$ )). Le spectre estimé avec la méthode M.M.T.O. est systématiquement inférieur au spectre  $\zeta_q$ ; toutefois l’utilisation de l’Auto-Similarité Etendue redresse ce spectre pour finalement retrouver quantitativement le spectre  $\zeta_q$  qui se révèle être en bon accord, pour les valeurs de  $q$  positives, avec les prédictions des modèles log-normal et log-Poisson. Comme nous l’avons vu précédemment, cette différence provient essentiellement du fait que le moment d’ordre 3 se comporte en loi de puissance avec un exposant infé-

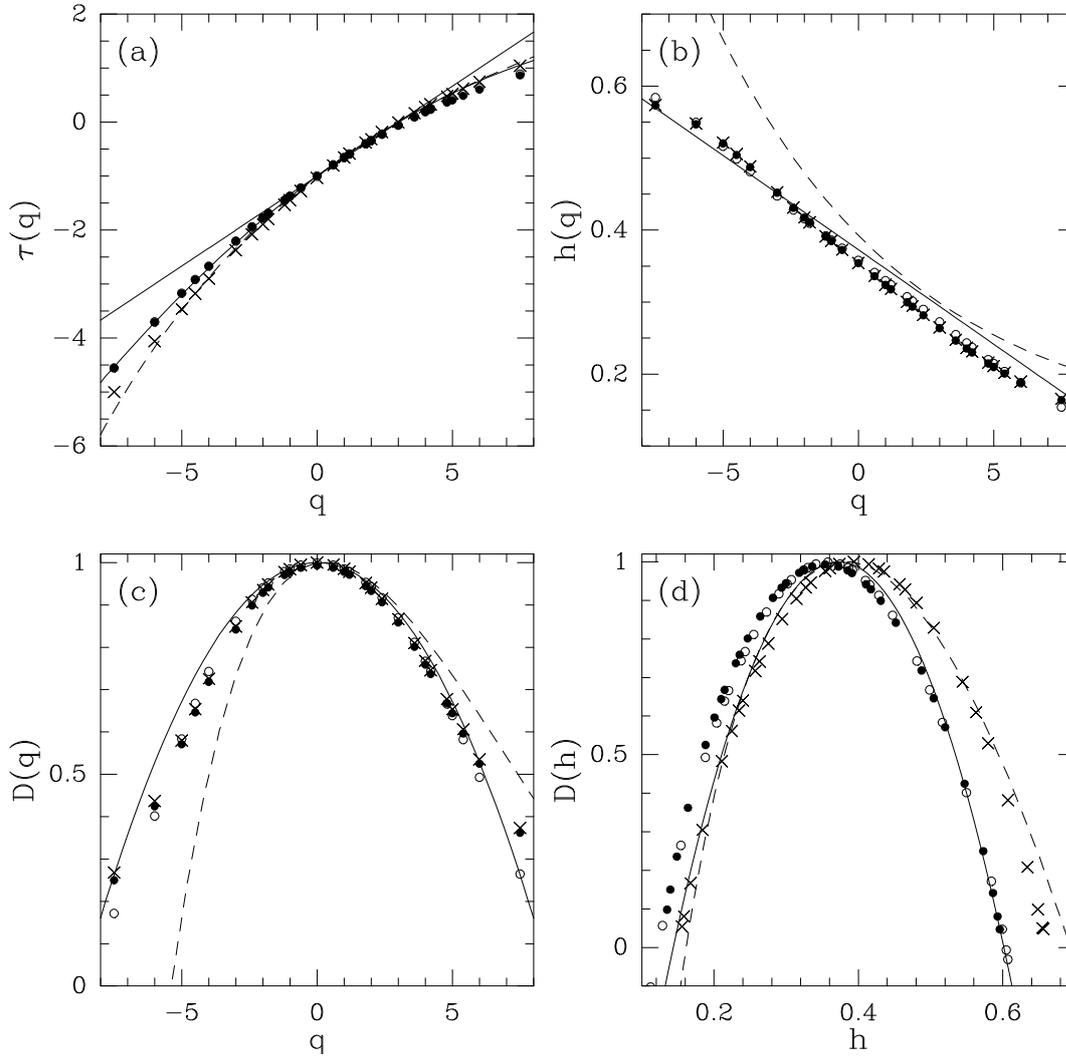


FIG. 3.14 – Résultats de la méthode M.M.T.O. a) Spectre  $\tau(q)$  en fonction de  $q$  (Eq. (2.96)). b)  $h(q)$  en fonction de  $q$  (Eq. 2.99). c)  $D(q)$  en fonction de  $q$  (Eq. 2.99). d) Spectres  $D(h)$  des singularités. Les calculs ont été effectués avec les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\circ$ ). Les lignes continues et discontinues correspondent respectivement au modèle log-normal ( $\sigma^2 = 0.236$ ,  $m = -(1 + \sigma^2/2)$ ) et au modèle log-Poisson ( $\beta = \gamma = 2/3$ ,  $\lambda = 2$ ), pour la dissipation en supposant la validité de l'hypothèse de similarité locale de Kolmogorov et Obukhov (KO62). Les symboles ( $\times$ ) correspondent aux spectres obtenus en utilisant l'Auto-Similarité Étendue (section 3.1.4).

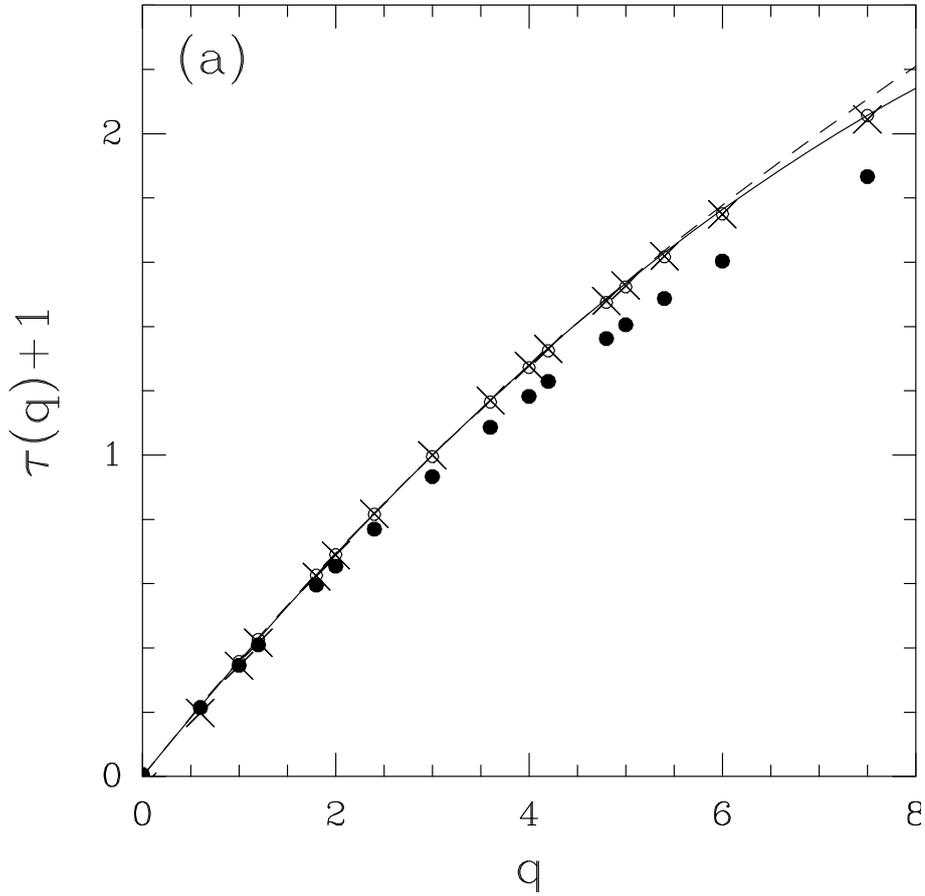


FIG. 3.15 – Comparaison du spectre  $\tau(q) + 1$  obtenu avec la méthode M.M.T.O. (●) avec le spectre  $\zeta_q$  des exposants des fonctions de structure (○). Les symboles (×) correspondent au spectre  $\tau(q) + 1$  obtenu en utilisant la méthode M.M.T.O. et l'Auto-Similarité Étendue. Les lignes continues et discontinues correspondent respectivement aux modèles log-normal ( $\sigma^2 = 0.236$ ,  $m = -(1 + \sigma^2/2)$ ) et log-Poisson ( $\beta = \gamma = 2/3$  et  $\lambda = 2$ ) pour la dissipation, en supposant la validité de l'hypothèse de similarité locale de Kolmogorov et Obukhov (KO62).

rieur à la valeur théorique  $\zeta_3 = 1$ . L'utilisation de l'Auto-Similarité Etendue en imposant  $\tau(3) + 1$  égal à 1, permet ainsi de retrouver le spectre  $\zeta_q$  des exposants des fonctions de structure.

Sur la figure 3.16, nous avons représenté les valeurs de  $\tau(q)$ , estimées dans le domaine inertiel pour différentes valeurs de  $q$ , en fonction du nombre de réalisations prises en considération dans le calcul des fonctions de partition. Chaque réalisation correspond à une partie du signal d'une longueur de 65536 points, ce qui équivaut à deux échelles intégrales. Le taux des fluctuations  $\Delta\tau = \left| \frac{\tau_N - \tau_f}{\tau_f} \right|$ , où  $\tau_f$  représente la valeur finale estimée sur toute la longueur du signal, diminue très rapidement pour devenir inférieure à 1% quand le nombre  $N$  de réalisations dépasse 180, et ceci pour les valeurs de  $q$  comprises entre  $-3$  et  $6$ . Cette figure montre que l'on a atteint une bonne convergence des exposants  $\tau(q)$  et que la différence des estimations obtenues respectivement avec la méthode M.M.T.O. et avec la méthode des fonctions de structure, ne peut être imputée à une statistique insuffisante.

#### • Densité de probabilité des maxima du module de la T.O.

L'étude des histogrammes des coefficients en ondelettes est maintenant différente dans la mesure où à chaque échelle, on ne prend plus en considération que les maxima du module de la T.O., c'est-à-dire les coefficients appartenant au squelette de la T.O.. Ces histogrammes, représentés dans la figure 3.17a, sont désormais nuls en 0 ; ceci reflète simplement le fait que, par définition, les coefficients en ondelettes ne s'annulent pas sur les lignes de maxima (rappelons que l'on prend en considération le "sup" le long des lignes de maxima). On a utilisé la même normalisation et les mêmes échelles, appartenant toutes au domaine inertiel, que dans les figures 3.7 et 3.11. L'ondelette analysatrice utilisée est l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Ces histogrammes ont à nouveau des queues exponentielles qui évoluent dans les échelles de la même manière que les histogrammes précédents de la T.O. continue : de queues "Gaussiennes" à grande échelle, on passe à des queues de type exponentielle étirée à petite échelle. Ces distributions sont représentées dans la figure 3.17b selon la variable  $x = (a_0/a)^{1/3}T$ . Ces histogrammes ne se remettent pas sur une courbe unique mais évoluent dans les échelles. Cette dépendance dans les échelles est aussi évidente dans les figures 3.17c et 3.17d où nous avons représenté les quantités  $x^3 P_a(x)$  et  $x^{-1} P_a(x)$ . Cette dépendance montre clairement la multifractalité du champ de vitesse caractérisée par la non linéarité du spectre  $\tau(q)$ . La figure 3.17d illustre parfaitement l'un des avantages notables de la méthode M.M.T.O., à savoir le fait que les histogrammes des maxima du module de la T.O. soient nuls pour la valeur  $T = 0$ , ce qui rend possible le calcul des

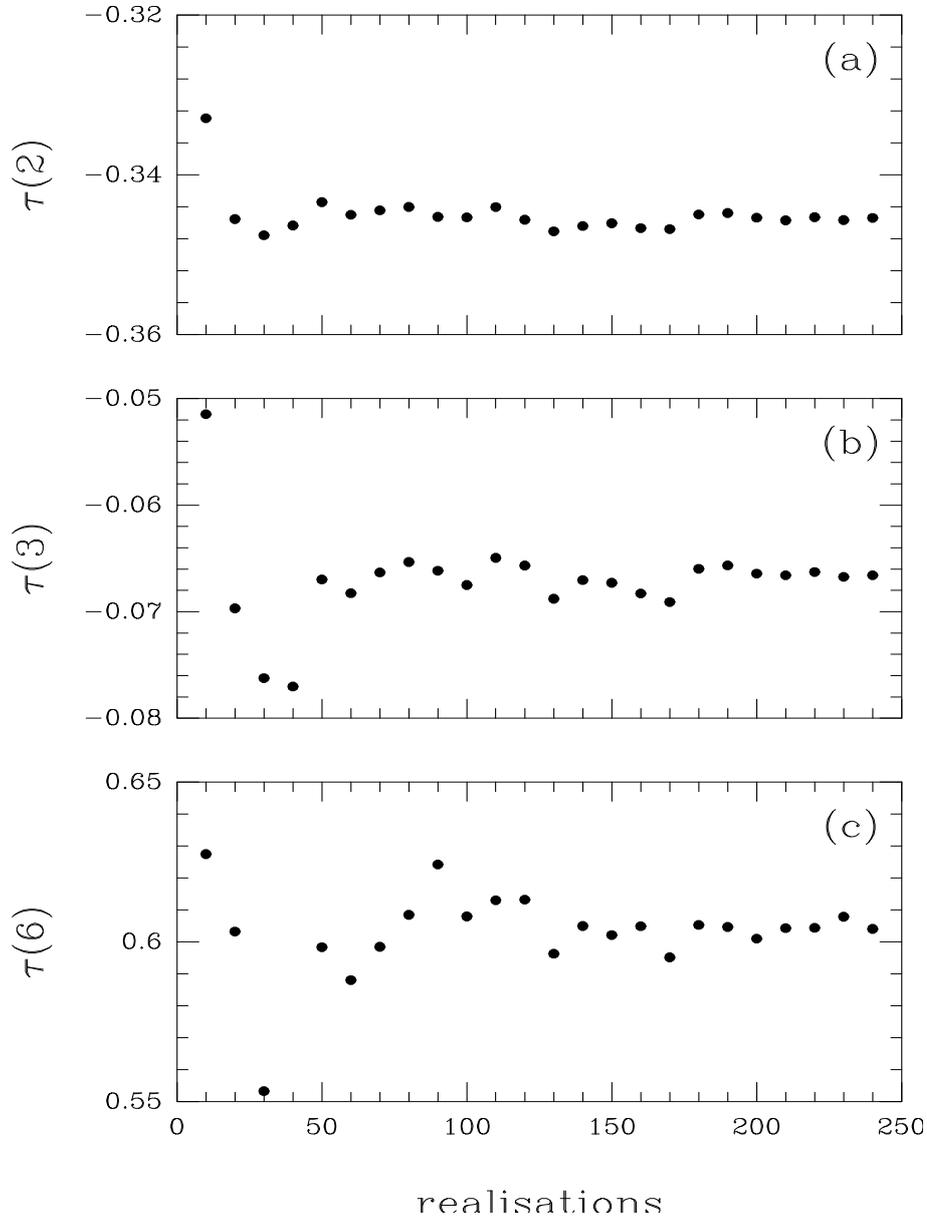


FIG. 3.16 – Valeur de  $\tau(q)$  estimée dans la zone inertielle en fonction du nombre de réalisations considérées dans le calcul des fonctions de partition (une réalisation est constituée de 65536 points et correspond à peu près à deux échelles intégrales). a)  $q = 2$ . b)  $q = 3$ . c)  $q = 6$ . La convergence est atteinte très vite pour  $q = 2$ ; pour  $q = 3$  et 6 elle est atteinte lorsqu'on dépasse 180 réalisations.

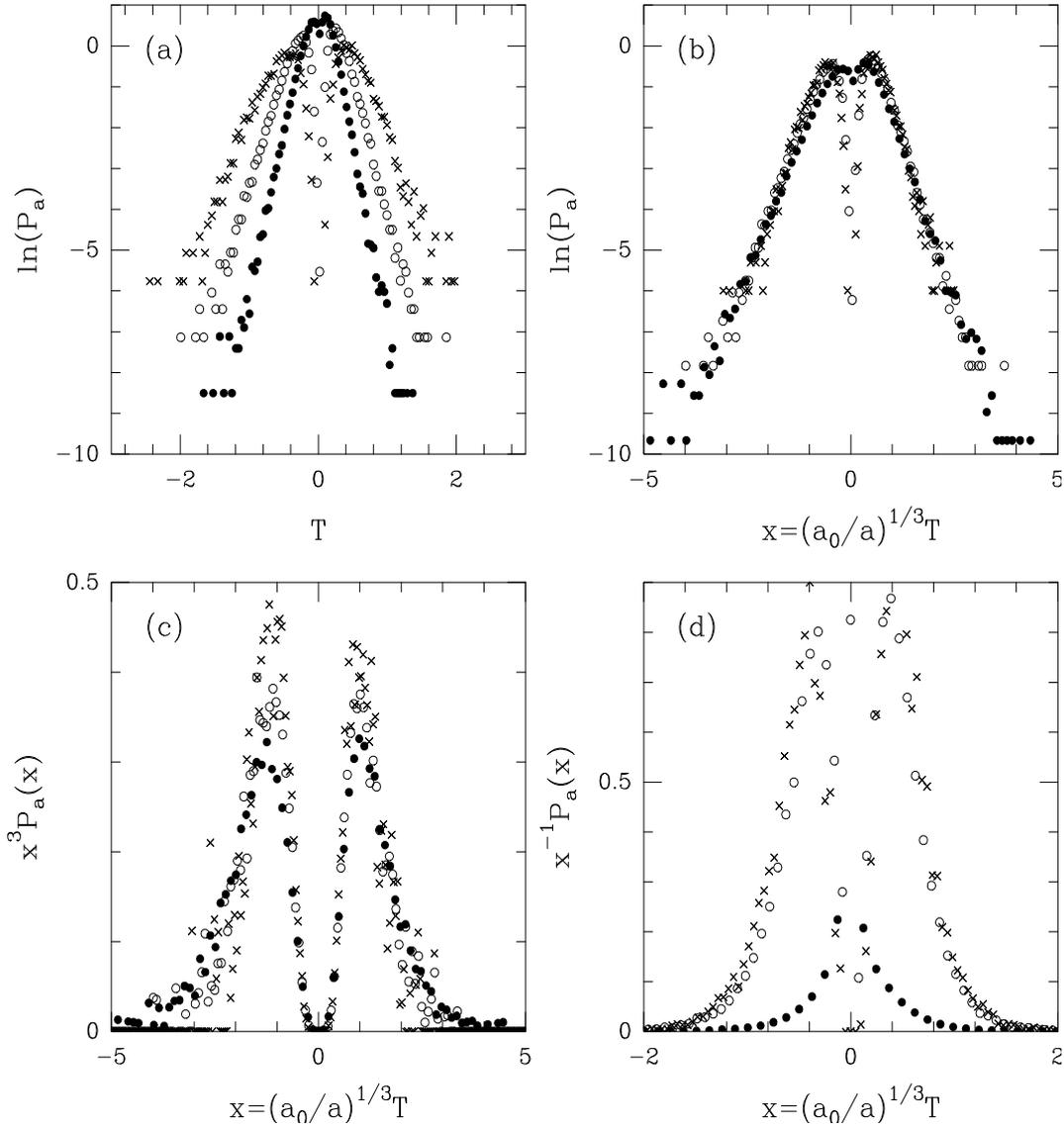


FIG. 3.17 – Densité de probabilité des maxima du module de la T.O.. L'ondelette utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . a) Histogrammes normalisés en représentation semi-logarithmique. Les échelles présentées sont les mêmes que celles des figures 3.7 et 3.11 et correspondent à  $a = 1230\eta$  ( $\times$ ),  $308\eta$  ( $\circ$ ) et  $77\eta$  ( $\bullet$ ). b) Ces mêmes histogrammes mais représentés selon la variable  $(a_0/a)^{1/3}T$  avec  $a_0 = 1230\eta$ . Les queues de ces distributions évoluent de la même manière que celles des distributions de tous les coefficients. La différence vient du fait que ces distributions sont nulles pour la valeur  $T = 0$ , ce qui rend possible l'estimation des exposants  $\tau(q)$  pour  $q < 0$ . c) Evolution dans les échelles de la quantité  $x^q P_a(x)$  pour  $q = 3$ . d)  $x^q P_a(x)$  pour  $q = -1$ .

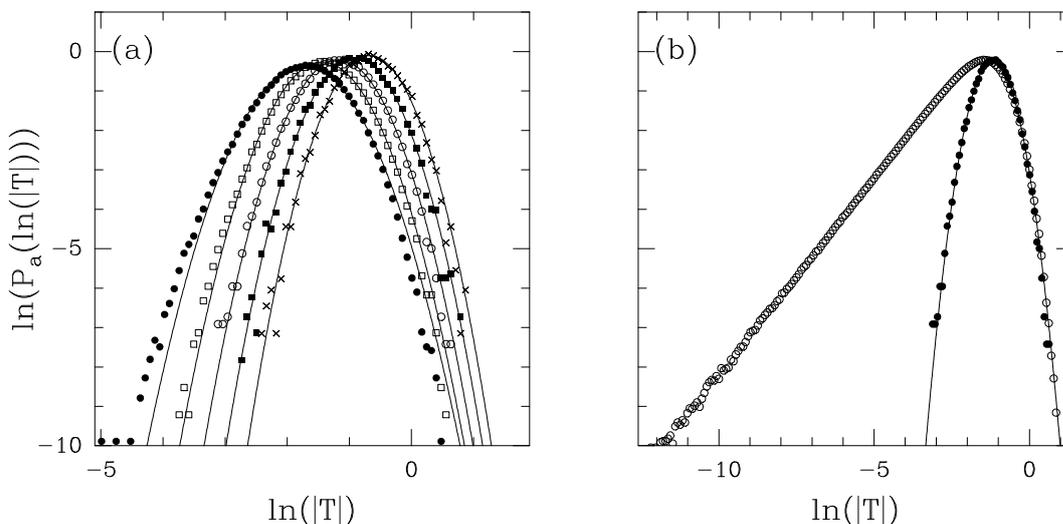


FIG. 3.18 – a) Logarithme des histogrammes normalisés du logarithme des maxima du module de la T.O. pour différentes échelles appartenant toutes au domaine inertiel :  $a = 1230\eta$  ( $\times$ ),  $614\eta$  ( $\blacksquare$ ),  $308\eta$  ( $\circ$ ),  $154\eta$  ( $\square$ ) et  $77\eta$  ( $\bullet$ ). L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . b) Comparaison des histogrammes normalisés du logarithme des maxima du module de la T.O. ( $\bullet$ ) avec ceux du logarithme des incréments ( $\circ$ ) à l'échelle  $a = 308\eta$ . Les lignes continues correspondent à l'approximation Gaussienne de ces histogrammes.

exposants  $\tau(q)$  pour les valeurs de  $q$  négatives. De plus, la régularité des distributions obtenues pour les quantités  $x^q P_a(x)$ , avec deux maxima bien définis, permet de s'assurer que la convergence dans le calcul des fonctions de partition est bien atteinte pour les valeurs de  $q$  comprises entre  $-3$  et  $6$ .

Sur la figure 3.18a, nous avons représenté le logarithme des histogrammes du logarithme des maxima du module de la T.O., pour différentes échelles appartenant au domaine inertiel. L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Toutes ces courbes ressemblent fortement à des paraboles. Les lignes continues, qui représentent l'approximation Gaussienne de ces histogrammes, modélisent très bien les données expérimentales. Une déviation au caractère Gaussien est cependant visible pour les valeurs les plus négatives de  $\ln |T|$  et ceci d'autant plus que l'échelle considérée est petite. Ainsi, les histogrammes des maxima du module de la T.O. semblent suivre une loi log-normale. Sur la figure 3.18b, nous avons comparé, à l'échelle  $a = 308\eta$ , le logarithme de l'histogramme des maxima du module de la T.O. en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\bullet$ )), avec celui du logarithme des incréments (symboles ( $\circ$ )). Ces courbes ont été décalées arbitrairement selon les  $x$  pour que la par-

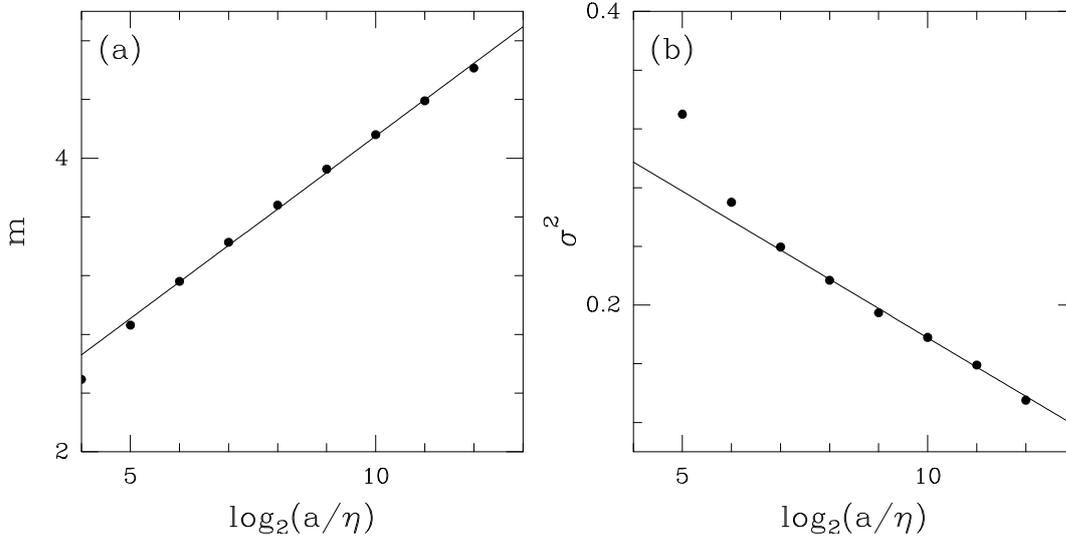


FIG. 3.19 – a) Moyenne  $m$  des histogrammes du logarithme des maxima du module de la transformée en ondelettes en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . b) Variance  $\sigma^2$  de ces histogrammes en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . L'ondelette analysatrice est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Les lignes continues correspondent aux droites obtenues par régression linéaire des données sur la gamme d'échelles  $\log_2(a/\eta) > 6$ .

tie décroissante de ces histogrammes se remettent l'une sur l'autre. Cette représentation montre que la partie correspondant aux grandes valeurs de  $\ln |T|$  se comporte de la même manière pour les deux histogrammes, c'est-à-dire de façon Gaussienne, contrairement à la partie croissante correspondant aux valeurs les plus négatives de  $\ln |T|$ . En effet, pour les petites valeurs de  $|T|$ , l'histogramme du logarithme des incréments se comporte clairement de manière exponentielle et non Gaussienne (cela est simplement dû au fait que l'histogramme est fini et dérivable en zéro). Ainsi, la restrictions aux maxima du module de la T.O. nous permet de mettre en évidence une statistique log-normale des coefficients en ondelettes, statistique qui est en quelque sorte masquée lorsqu'on considère la T.O. continue (ainsi que les incréments) à cause de la redondance de cette transformation.

Sur la figure 3.19, nous avons représenté la moyenne et la variance des Gaussiennes modélisant les histogrammes du logarithme des maxima de la T.O. en fonction du logarithme des échelles. Bien que les données soient compatibles dans les deux cas avec un comportement linéaire, on peut néanmoins remarquer une certaine courbure systématique, signe d'une possible brisure de l'invariance d'échelle. Ces résultats suggèrent donc que les maxima du module de la T.O. ont une statistique log-normale, mais dont les paramètres,

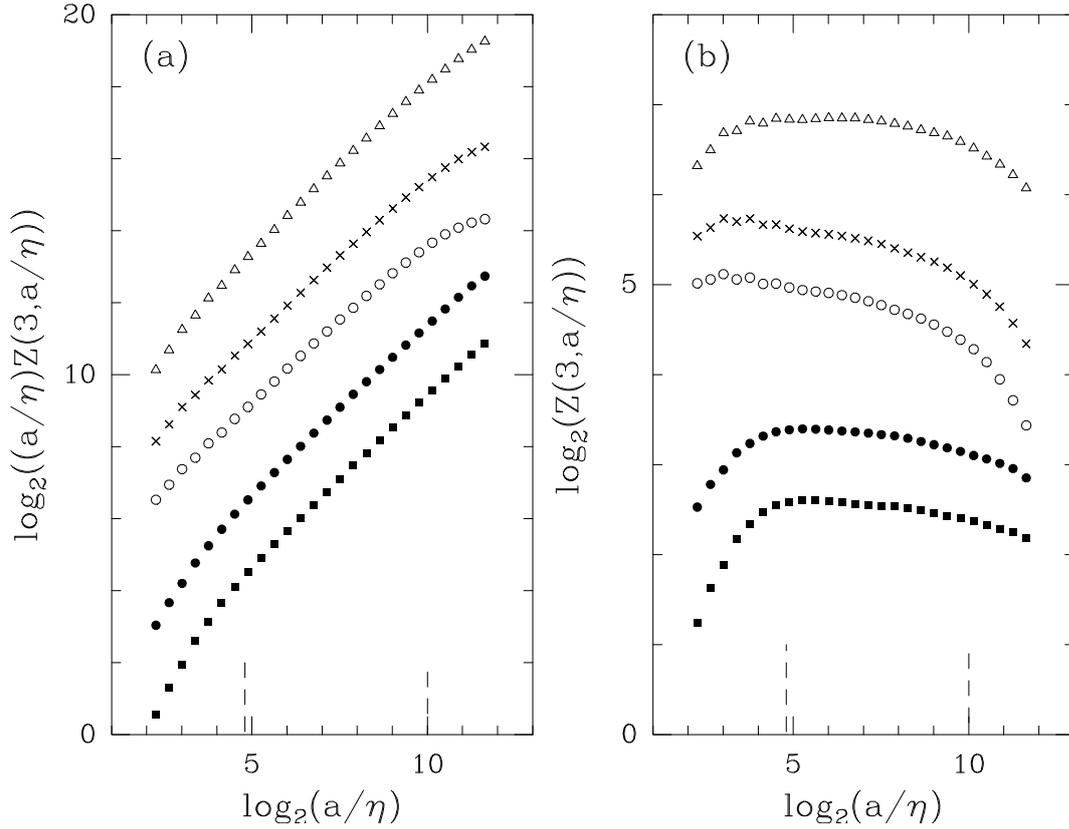


FIG. 3.20 – Comportement des fonctions de partition d'ordre 3. a) Fonctions de partition continues  $K(3, a/\eta)$  calculées en utilisant les ondelettes analysatrices :  $\psi_{(0)}^{(1)}$  ( $\Delta$ ),  $\psi_{(1)}^{(1)}$  ( $\times$ ),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\circ$ ), ainsi que les fonctions de partition  $(a/\eta)Z(3, a/\eta)$  restreintes aux maxima calculés avec les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\blacksquare$ ). b) Ces mêmes courbes auxquelles on a enlevé la droite théorique de pente  $\zeta_3 = \tau_c(3) = \tau(3) + 1 = 1$ . Les lignes verticales discontinues délimitent le domaine inertiel.

la moyenne et la variance des approximations normales, ont un comportement qui pourrait se révéler plus complexe qu'une simple dépendance logarithmique. Nous reviendrons sur ce point dans la section 3.4.

La variation enregistrée du spectre  $\tau(q)$  selon le choix de l'ondelette analysatrice permet de rejeter tous les modèles de cascade d'énergie proposés dans la littérature<sup>[126][152],[153],[155]–[161]</sup>176 pour modéliser le phénomène d'intermittence. Nos résultats obtenus sur le comportement de la moyenne et la variance des histogrammes du logarithme des maxima de la T.O. suggèrent que cette dépendance est peut être le signe que les fonctions de partition ne se comportent pas vraiment en loi de puissance en fonction de l'échelle comme le prédit le formalisme multifractal, mais de manière plus complexe. Nous avons représenté dans la figure 3.20a, les fonctions de partition continues d'ordre 3,  $K(3, a/\eta)$  obtenues en utilisant les ondelettes analysatrices  $\psi_{(0)}^{(1)}$  (symboles ( $\Delta$ )),  $\psi_{(1)}^{(1)}$  (symboles ( $\times$ )) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\circ$ )), ainsi que les fonctions de partition  $(a/\eta)Z(3, a/\eta)$  calculées avec la méthode M.M.T.O. avec les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\bullet$ )) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles ( $\blacksquare$ )). D'après la relation (3.12) de Kolmogorov, ces deux types de fonctions de partition devraient se comporter linéairement en fonction de l'échelle :  $\zeta_3 = \tau_c(3) = \tau(3) + 1 = 1$  (Eq. (2.110)). Les différences de pente observées en représentation logarithmique dans la figure 3.20a montrent sans contexte que tel n'est pas le cas. De façon plus quantitative, nous avons représenté ces mêmes résultats sur la figure 3.20b mais en enlevant cette fois la droite théorique de pente 1. Non seulement ces courbes ne présentent pas vraiment de plateau, mais de plus l'invariance d'échelle apparaît sérieusement discutable. C'est ce point que nous allons essayer d'élucider dans la section qui suit.

## 3.4 La méthode du propagateur

### 3.4.1 Méthode de calcul

Récemment, Castaing et ses collaborateurs<sup>[127]–[133]</sup> se sont intéressés tout particulièrement à l'évolution dans les échelles de la forme des fonctions de densité de probabilité des incréments de la vitesse longitudinale. Ils ont ainsi proposé une description statistique de la turbulence pleinement développée au travers d'une équation fonctionnelle reliant les distributions de probabilité des incréments à deux échelles différentes. Plus précisément, si l'on note  $P_l(\delta v)$  la fonction de probabilité des incréments d'un processus  $v$  sur une distance  $l$ , la théorie de Castaing *et al*<sup>[129]–[133]</sup> consiste à supposer que  $\forall l$  et  $l'$  ( $l' > l$ ),

$P_l$  peut s'exprimer en fonction de  $P_{l'}$  de la façon suivante<sup>[129]</sup> :

$$P_l(\delta v) = \int G_{ll'}(\ln \alpha) P_{l'}\left(\frac{\delta v}{\alpha}\right) \frac{d \ln \alpha}{\alpha}, \quad (3.32)$$

où le noyau (ou propagateur dans les échelles)  $G_{ll'}$  dépend uniquement de  $l$  et  $l'$ . Ainsi,  $P_l(\delta v)$  se décrit comme une somme pondérée de versions dilatées de la fonction de densité de probabilité  $P_{l'}$ . Remarquons que le noyau  $G_{ll'}(\ln \alpha)$  peut être aussi considéré comme la probabilité d'avoir le facteur de dilatation  $\alpha = \sigma_l / \sigma_{l'}$  où  $\sigma_l$  et  $\sigma_{l'}$  représentent respectivement une vitesse caractéristique aux échelles  $l$  et  $l'$ . Ces mêmes auteurs<sup>[133]</sup> ont montré que la plupart des modèles multiplicatifs de cascade d'énergie conduisent à une telle relation entre la statistique des incréments de vitesse aux deux échelles  $l$  et  $l'$  : la forme de  $G$  est reliée à la nature même d'une étape de la cascade et la façon dont  $G_{ll'}$  dépend de  $l$  et  $l'$  permet de déterminer le caractère auto-similaire et invariant d'échelle de la cascade.

Comme les incréments de la vitesse correspondent aux coefficients de la T.O. avec comme ondelette analysatrice l'ondelette du pauvre  $\Delta^{(1)}(x) = \delta(x+1) - \delta(x)$  (Eq. (2.105)), il est facile de généraliser cette approche à la statistique des coefficients de la T.O. en utilisant une ondelette analysatrice quelconque. Nous définirons ainsi la notion de *cascade abstraite*<sup>[253]</sup>, tout processus tel que la fonction de densité de probabilité des coefficients en ondelettes à l'échelle  $a$ ,  $P_a(T)$ , peut s'écrire, quelle que soit  $a' > a$ , de la manière suivante :

$$P_a(T) = \int G_{aa'}(x) e^{-x} P_{a'}(e^{-x}T) dx, \quad (3.33)$$

où  $G_{aa'}$  ne dépend pas a priori de l'ondelette analysatrice dans la mesure où celle-ci est suffisamment régulière et oscillante. Suivant les travaux de Castaing et Dubrulle<sup>[131]</sup>, la notion de cascade intervient tout à fait naturellement en remarquant que quelle que soit la séquence d'échelle  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall i \in \mathbb{N}, a_{i+1} < a_i$ , on a :

$$G_{a_n, a_1} = G_{a_n, a_{n-1}} \otimes G_{a_{n-1}, a_{n-2}} \otimes \dots \otimes G_{a_2, a_1}, \quad (3.34)$$

où  $\otimes$  représente le produit de convolution.

### Définitions

- La cascade est qualifiée d'*auto-similaire* s'il existe une fonction  $G (\in \mathbb{C})$  et une suite décroissante  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que<sup>[131]</sup> :

$$G_{a_{n+1}, a_n} = G. \quad (3.35)$$

- La cascade est dite *continûment auto-similaire* s'il existe une fonction  $s(a)$  telle que :

$$G_{aa'}(x) = G(x, S(a, a')) , \quad (3.36)$$

où

$$S(a, a') = s(a) - s(a') . \quad (3.37)$$

- On appelle cascade *invariante d'échelle* toute cascade auto-similaire pour laquelle<sup>[131]</sup> :

$$s(a) = \ln(a) . \quad (3.38)$$

Par analogie avec les processus stochastiques, si l'on identifie le temps  $t$  à  $\ln a$ , une cascade invariante d'échelle est l'analogie d'un processus dont les incréments sont indépendants et stationnaires.

Cette notion de cascade sur les coefficients en ondelettes est appelée *cascade abstraite* car les définitions ne font pas référence à une construction bien définie.

Le problème qui se pose est celui de l'estimation numérique du noyau  $G$ . Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les propriétés espace-échelle des distributions auto-similaires sont indépendantes de l'ondelette analysatrice. On s'attend donc à ce que la forme de  $G$  ne change pas pour une large classe d'ondelettes analysatrices et qu'elle soit insensible au fait que l'on se restreigne ou non aux maxima du module de la T.O. La généralisation de la notion de cascade abstraite aux distributions de probabilité de ces maxima est alors possible; ceci va nous permettre d'estimer le propagateur  $G_{aa'}$  quelles que soient  $a'$  et  $a$ .

*Propriété :* Notons  $M(p, a)$  la fonction caractéristique associée au logarithme de la valeur absolue des coefficients de la transformée en ondelettes :

$$M(p, a) = \int e^{ip \ln |T|} P_a(T) dT . \quad (3.39)$$

En faisant le changement de variable  $y = e^{-x}T$ , on obtient, via l'équation (3.33) :

$$\begin{aligned} M(p, a) &= \int e^{ip \ln |T|} \int G_{aa'}(x) P_{a'}(e^{-x}T) e^{-x} dx dT , \\ &= \int G_{aa'}(x) e^{ipx} dx \int e^{ip \ln |y|} P_{a'}(y) dy , \end{aligned}$$

d'où l'on déduit la relation remarquable<sup>[253]</sup> :

$$M(p, a) = \hat{G}_{aa'}(p) M(p, a') , \quad (3.40)$$

où  $\hat{G}_{aa'}$  représente la transformée de Fourier de  $G_{aa'}$ .

Ainsi, l'estimation de  $\hat{G}$  se résume à une simple déconvolution : si la fonction  $M(p, a')$  est différente de 0, on peut espérer estimer  $\hat{G}_{aa'}$  comme le rapport des fonctions caractéristiques évaluées à deux échelles différentes<sup>[253]</sup> :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = \frac{M(p, a)}{M(p, a')} . \quad (3.41)$$

D'après les propriétés de convolution de  $G$  (Eq. (3.34)), l'auto-similarité de la cascade (Eq. (3.35)) et l'additivité de la fonction  $S$ , on en déduit que la cascade est continûment auto-similaire si et seulement si

$$\hat{G}_{aa'}(p) = \left[ \hat{G}(p) \right]^{S(a, a')} . \quad (3.42)$$

De cette équation, il ressort que  $\hat{G}$  est la fonction caractéristique d'une distribution de probabilité infiniment divisible. Une telle cascade est appelée *cascade log-infiniment divisible*<sup>[131],[233]</sup>.

Pour éviter les instabilités numériques dans le calcul de la fonction caractéristique  $M(p, a)$  d'un processus quelconque, il faut en particulier s'assurer que la fonction de densité de probabilité des coefficients en ondelettes décroisse suffisamment rapidement quand  $T$  tend vers 0 et  $+\infty$ . A priori, la restriction aux maxima du module de la T.O. est donc préférable pour l'estimation de  $G$ . Les parties réelle et imaginaire de  $M(p, a)$  sont calculées séparément de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Re(M(p, a)) &= \langle \cos(p \ln |T_a|) \rangle_{|T_a|} , \\ Im(M(p, a)) &= \langle \sin(p \ln |T_a|) \rangle_{|T_a|} . \end{aligned} \quad (3.43)$$

où  $\langle \rangle_{|T_a|}$  représente la moyenne sur les maxima du module de la T.O. existant à l'échelle  $a$ . D'après l'équation (3.41), on peut donc calculer séparément :

$$Re(\hat{G}_{aa'}(p)) = \frac{Re(M(p, a))Re(M(p, a')) + Im(M(p, a))Im(M(p, a'))}{[Re(M(p, a'))]^2 + [Im(M(p, a'))]^2} , \quad (3.44)$$

et

$$Im(\hat{G}_{aa'}(p)) = \frac{Im(M(p, a))Re(M(p, a')) - Re(M(p, a))Im(M(p, a'))}{[Re(M(p, a'))]^2 + [Im(M(p, a'))]^2} . \quad (3.45)$$

D'un point de vue général, il n'est pas évident que pour une fonction  $G$  donnée, il existe un processus de cascade vérifiant l'équation (3.34) et que si tel est le cas que ce processus

soit unique. Cependant, la plupart des modèles de cascade multiplicative auto-similaire correspondent bien à une fonction  $G$  unique. En effet, si l'on considère par exemple une cascade multiplicative sur une base orthogonale d'ondelettes, les coefficients en ondelettes  $C_{jk}$  à l'échelle  $a = 2^{-j}$  peuvent s'écrire comme un produit  $\prod_{i=1}^j W_i$  où les  $W_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi donnée  $\rho$ . Si  $P_j(C)$  représente la fonction de densité de probabilité des coefficients en ondelettes à l'échelle  $a = 2^{-j}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} P_j(C) &= \int \int \dots \int \delta(C - \prod_{i=1}^j W_i) \prod_{i=1}^j \rho(W_i) dW_i = \int P_{j-1}\left(\frac{C}{W}\right) \rho(W) dW, \\ &= \int e^x \rho(e^x) P_{j-1}(e^{-x}C) dx = \int G(x) P_{j-1}(e^{-x}C) dx, \end{aligned}$$

où  $G(x) = e^x \rho(e^x)$  est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $\ln W$ . Si la cascade est auto-similaire et invariante d'échelle, la statistique de  $W$ , et donc de  $G$  ne va pas dépendre de l'ondelette analysatrice utilisée pourvu que celle-ci soit suffisamment régulière et oscillante.

**Remarque :** Contrairement aux algorithmes multiplicatifs habituels de répartition de masse ou d'énergie qui ne permettent de générer que des mesures positives, cette notion de cascade multiplicative sur une base d'ondelettes orthogonales, nous permet de générer numériquement des signaux fractals quelconques. Cette méthode de construction de signaux, présentée dans l'Annexe A, nous permet ainsi de modéliser directement le comportement de quantités physiques non positives telles que le champ de vitesse turbulent. Nous allons maintenant tester la méthode d'estimation du noyau  $G$  que nous venons de présenter, sur quelques exemples types de processus aléatoires souvent évoqués pour décrire le phénomène d'intermittence en turbulence pleinement développée.

### 3.4.2 Applications

#### • Processus globalement auto-similaires : processus Browniens fractionnaires

Tout processus homogène, aléatoire ou non, est caractérisé par un exposant de Hölder  $H$  unique. D'après l'équation (2.80), quand  $a$  tend vers  $0^+$ , la transformée en ondelettes se comporte localement comme :

$$T(x_0, \lambda a) \sim \lambda^H T(x_0, a), \quad (3.46)$$

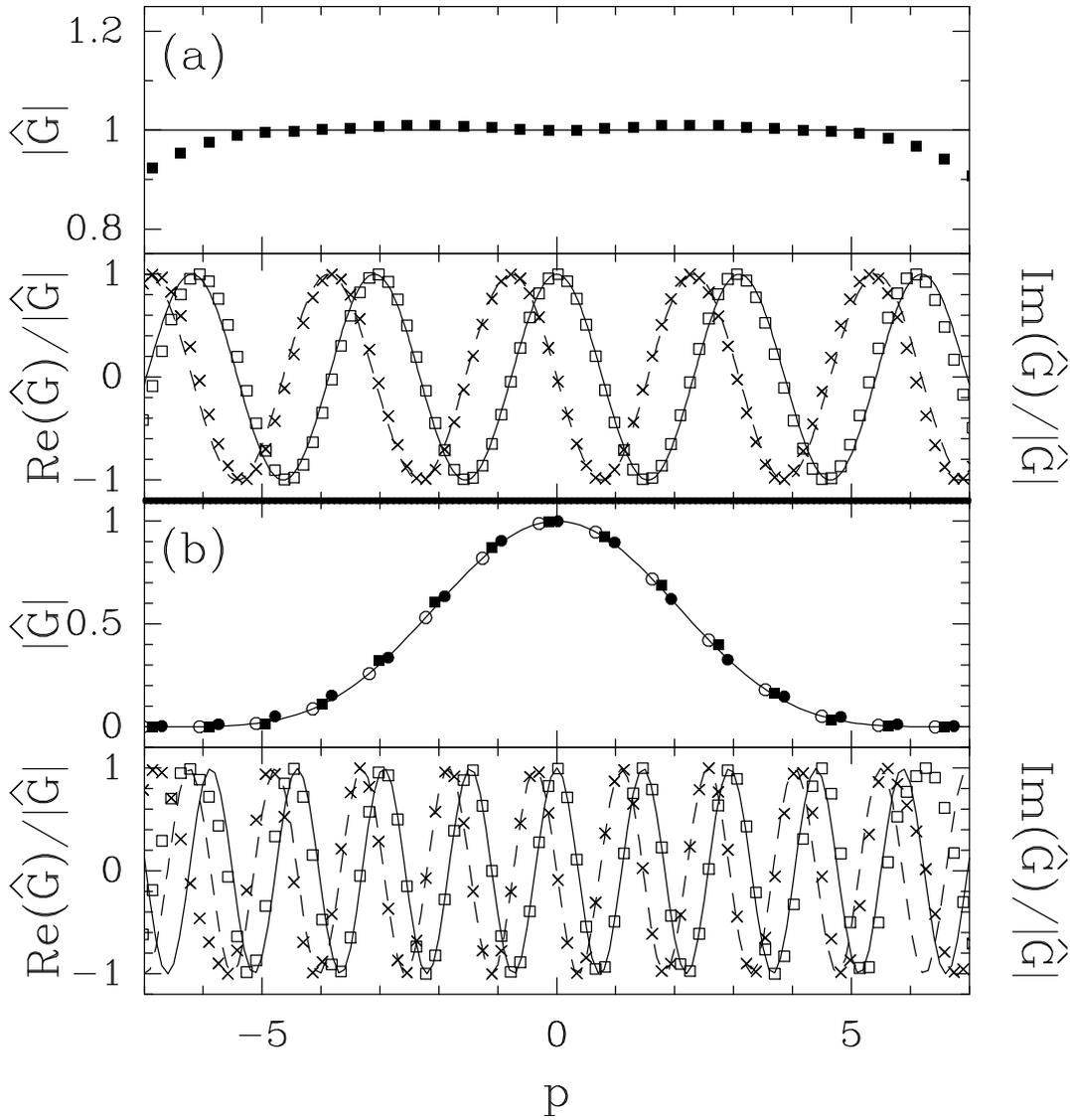


FIG. 3.21 – Calcul de la transformée de Fourier du noyau  $G$  à partir des maxima du module de la transformée en ondelettes. Module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu en utilisant respectivement l'ondelette complexe  $\psi_{(C)}$  ( $\blacksquare$ ),  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ( $\bullet$ ) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\circ$ ), ainsi que sa partie réelle ( $\square$ ), et sa partie imaginaire ( $\times$ ) obtenues en utilisant  $\psi_{(C)}$ . a) Processus Brownien fractionnaire de paramètre  $H = 1/2$ . b) Mesure binômiale caractérisée par les poids  $p_1 = 0.6$  et  $p_2 = 0.4$ . Ces estimations numériques de  $\hat{G}_{aa'}$  effectuées pour le couple d'échelles  $a = 2^5$  et  $a' = 2^{11}$ , sont en excellent accord avec les prédictions théoriques représentées en lignes continues et discontinues.

et ce quel que soit le point  $x_0$ . On obtient alors facilement<sup>[97]</sup>, pour toute échelle  $a = \lambda a'$  ( $\lambda < 1$ ) :

$$P_a(T) = \lambda^{-H} P_{a'}(\lambda^{-H} T) = e^{-H \ln \lambda} P_{a'}(e^{-H \ln \lambda} T), \quad (3.47)$$

et donc d'après la définition du noyau  $G$  (Eq. (3.33)) :

$$G_{aa'}(x) = \delta(x - H \ln \lambda). \quad (3.48)$$

La transformée de Fourier de  $G$  est donc égale à :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = e^{ipH \ln \lambda}. \quad (3.49)$$

Ainsi, de façon générale, la transformée de Fourier du propagateur  $G_{aa'}$  d'un processus globalement invariant d'échelle est simplement une "onde" de pulsation  $H \ln(a/a')$ .

Nous avons calculé  $\hat{G}$  d'après les équations (3.41) et (3.43) pour un processus Brownien non corrélé de paramètre  $H = 1/2$ , en utilisant successivement les ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(1)}$ ,  $\psi_{(3)}^{(2)}$  et l'ondelette complexe de Morlet  $\psi_{(C)}(x) = e^{i\Omega x}(e^{-x^2/2} - \sqrt{2}e^{-\Omega^2/4}e^{-x^2})$ . Les résultats sont reportés sur la figures 3.21a où nous avons représenté le module de  $\hat{G}_{aa'}$  (symboles (■)), sa partie réelle (symboles (□)) et sa partie imaginaire (symboles (×)) obtenus en utilisant  $\psi_{(C)}$  pour le rapport d'échelle  $a'/a = 2^6$ . Les résultats obtenus sont en excellent accord avec l'équation (3.49) pour les valeurs de  $p$  comprises entre  $-6$  et  $6$ . Les déviations par rapport à ces prédictions observées aux grandes valeurs de  $p$  viennent de la décroissance rapide de la fonction caractéristique qui rend très instable l'estimation du rapport de ces fonctions évaluées à deux échelles différentes (Eq. (3.41)). Des résultats tout à fait similaires sont obtenus avec les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . Il est important de remarquer que d'après l'équation (3.49), le calcul de la dérivée de la partie imaginaire de  $G$  permet théoriquement de déterminer l'exposant de Hölder  $H$ . Dans la figure 3.22a, nous avons représenté la quantité  $m(a, a') = \partial \text{Im} \hat{G}_{a, a'} / \partial p |_{p=0}$  en fonction de  $\ln(a/a')$  pour différentes valeurs de  $a'$  :  $a' = 2^5$  (symboles (●)),  $2^6$  (symboles (○)),  $2^7$  (symboles (■)),  $2^8$  (symboles (□)),  $2^9$  (symboles (×)) et  $2^{10}$  (symboles (△)). L'ondelette analysatrice est l'ondelette complexe de Morlet. Les données obtenues se placent toutes remarquablement sur une droite unique de pente  $0.49 + -0.02$ , valeur en excellent accord avec la prédiction théorique :

$$m(a, a') = H \ln(a/a'), \quad (3.50)$$

avec  $H = 1/2$ . Des résultats identiques sont obtenus en utilisant  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . Ainsi l'utilisation de ces différentes ondelettes permet de vérifier le caractère auto-similaire et invariant

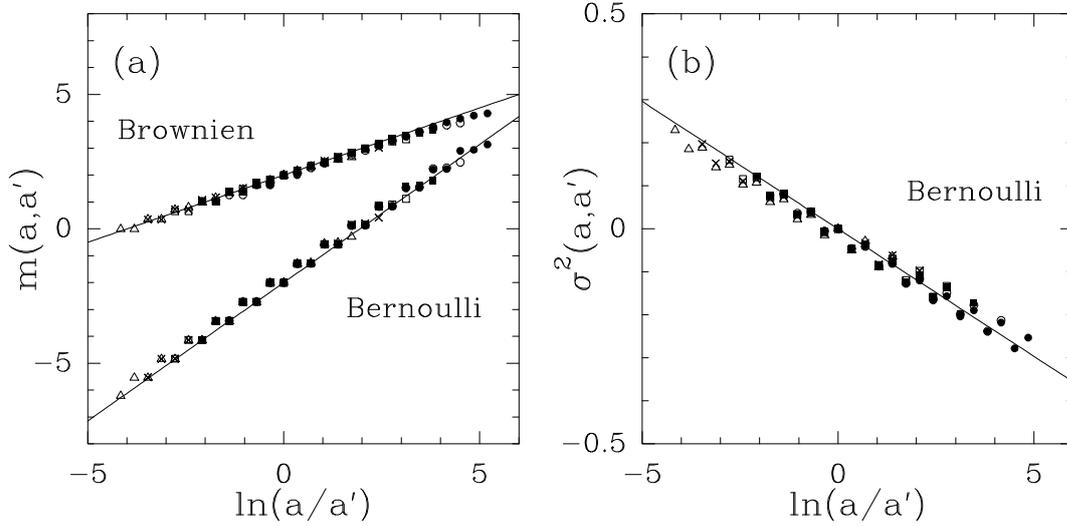


FIG. 3.22 – Vérification du caractère invariant d'échelle du processus Brownien ( $H = 1/2$ ), et de la mesure de Bernoulli caractérisée par les poids  $p_1 = 0.6$ ,  $p_2 = 0.4$  et le rapport  $r = 1/2$ . a)  $m(a, a') = \partial I m \hat{G}_{aa'} / \partial p |_{p=0}$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b)  $\sigma^2(a, a') = -\partial^2 \ln |\hat{G}_{aa'}| / \partial p^2 |_{p=0}$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . Les échelles présentées correspondent à  $a' = 2^5$  ( $\bullet$ ),  $2^6$  ( $\circ$ ),  $2^7$  ( $\blacksquare$ ),  $2^8$  ( $\square$ ),  $2^9$  ( $\times$ ) et  $2^{10}$  ( $\triangle$ ). Les lignes continues représentent les prédictions théoriques, à savoir l'équation (3.50) pour le processus Brownien et les équations (3.53) pour la mesure de Bernoulli.

d'échelle de ce processus Brownien. La généralisation de cette étude aux processus Browniens fractionnaires ( $H \neq 1/2$ ) conduit à la même conclusion avec des résultats de même qualité.

### • Mesures binômiales

Les mesures singulières binômiales<sup>[55],[58]</sup>, dont la règle de construction a été présentée dans le chapitre 2, sont caractérisées par les poids  $p_1, p_2$  et le rapport  $r < 1$  des longueurs des intervalles d'une étape de construction à l'autre (Fig. 2.1). A une échelle  $a = r^n$  donnée, les coefficients en ondelettes vont prendre les valeurs  $T = p_1^m p_2^{n-m}$  où  $m$  et  $(n-m)$  représentent respectivement les nombres de fois où l'on a attribué le poids  $p_1$  et le poids  $p_2$  sur cet intervalle lors de la construction. A cette échelle, la densité de probabilité de ces coefficients s'écrit simplement :

$$P_a(W) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \delta(W - p_1^k p_2^{(n-k)}) . \quad (3.51)$$

La fonction caractéristique correspondant à la distribution de probabilité du logarithme des coefficients en ondelettes s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
M(p, a) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \int e^{ip \ln W} \delta(W - p_1^k p_2^{(n-k)}) dW, \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ip \ln(p_1^k p_2^{(n-k)})} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k p_1^{ipk} p_2^{ip(n-k)}, \\
&= \left( \frac{p_1^{ip} + p_2^{ip}}{2} \right)^n = \left( \frac{p_1^{ip} + p_2^{ip}}{2} \right)^{\ln a / \ln r}.
\end{aligned}$$

On obtient donc, d'après l'équation (3.41), la forme analytique suivante pour la transformée de Fourier du noyau  $G$  ( $\forall a' > a$ ) :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = \left( \frac{p_1^{ip} + p_2^{ip}}{2} \right)^{\log_r(a/a')}. \quad (3.52)$$

Remarquons que rigoureusement, cette formule n'est vraie que pour  $a = r^n$  et  $a' = r^m$ , mais qu'elle se généralise à des valeurs quelconques de  $a$  et  $a'$  moyennant une modulation log-périodique qui est d'ailleurs visible dans la figure 3.22.

Nous avons estimé ce propagateur à partir des maxima du module de la transformée en ondelettes, pour une mesure générée en prenant les valeurs suivantes des paramètres :  $p_1 = 0.6$ ,  $p_2 = 0.4$  et  $r = 1/2$ . Ces poids sont donc distribués sur tout l'intervalle sans laisser d'espace vide (mesure non lacunaire). Le module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu en utilisant respectivement l'ondelette complexe  $\psi_{(C)}$  (symboles (■)), et les ondelettes réelles  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles (●)) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles (○)) est représenté sur la figure 3.21b ainsi que la partie réelle (symboles (□)) et la partie imaginaire (symboles (×)) de  $\hat{G}_{aa'}$  calculées avec l'ondelette complexe  $\psi_{(C)}$ . Le rapport d'échelle  $a'/a$  est pris égal à  $2^6$ . Ces résultats sont en parfait accord avec les prédictions théoriques pour des valeurs de  $p$  comprises entre  $-6$  et  $6$ . Les fonctions  $m(a, a') = \partial \text{Im} \hat{G}_{a,a'} / \partial p |_{p=0}$  et  $\sigma^2(a, a') = -\partial^2 \ln |\hat{G}_{a,a'}| / \partial p^2 |_{p=0}$  sont représentées en fonction de  $\ln(a/a')$  sur la figure 3.22 pour différentes échelles de référence  $a' = 2^5$  (symboles (●)),  $2^6$  (symboles (○)),  $2^7$  (symboles (■)),  $2^8$  (symboles (□)),  $2^9$  (symboles (×)) et  $2^{10}$  (symboles (△)). Les courbes obtenues pour  $m(a, a')$  comme pour  $\sigma^2(a, a')$  se remettent toutes sur une même droite, et montrent donc le caractère invariant d'échelle de ce processus. De plus ces résultats sont en remarquable accord avec les prédictions

théoriques :

$$\begin{cases} m(a, a') &= \frac{1}{2 \ln r} \ln(p_1 p_2) \ln(a/a') , \\ \sigma^2(a, a') &= \frac{1}{4 \ln r} \ln^2 \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \ln(a/a') . \end{cases} \quad (3.53)$$

Précisons que pour cette mesure fractale, non aléatoire, les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(0)}$  et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  permettent également une bonne détermination de la forme de  $\hat{G}$ .

### • Modèle “log-Poisson”

Comme nous le discutons dans l’Annexe A, on peut généraliser l’équation (2.37) à un processus de cascade construite sur une base orthonormale d’ondelettes. La probabilité des coefficients en ondelettes à l’échelle  $a < 1$  (où 1 représente l’échelle de référence) s’écrit de la manière suivante :

$$P_a(W_{a1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda \ln a)^k}{k!} e^{\lambda \ln a} \delta(W_{a1} - \beta^k a^{-\gamma}) . \quad (3.54)$$

où  $\lambda, \gamma, \beta$  sont les paramètres du modèle. La fonction caractéristique associée à la distribution du logarithme des coefficients en ondelettes à l’échelle  $a$  s’écrit donc :

$$\begin{aligned} M(p, a) &= \int e^{ip \ln |W|} P_a(W) dW , \\ &= e^{(\lambda - ip\gamma) \ln a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda \ln a)^k}{k!} e^{ipk \ln \beta} , \\ &= e^{(\lambda - ip\gamma) \ln a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda \ln a)^k}{k!} \beta^{ipk} , \\ &= e^{(\lambda - ip\gamma) \ln a} e^{-\beta^{ip} \lambda \ln a} . \end{aligned}$$

On obtient donc, d’après l’équation (3.41) quelle que soit  $a' > a$  :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = e^{(\lambda(1 - \cos(p \ln \beta)) - i(p\gamma + \lambda \sin(p \ln \beta))) \ln(a/a')} . \quad (3.55)$$

Nous avons estimé numériquement, via les équations (3.41) et (3.43), la fonction  $\hat{G}$  sur des signaux générés sur une base orthonormale d’ondelettes avec une loi log-Poisson (Annexe A). Les paramètres utilisés sont les suivants :  $\lambda = 2$ ,  $\beta = (\frac{2}{3})^{1/3}$  et  $\gamma = -\frac{1}{9}$ . Comme nous le verrons par la suite, ils permettent une bonne modélisation statistique du champ de vitesse turbulent. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 3.23a où nous avons reporté d’une part  $|\hat{G}|$ , obtenu en utilisant respectivement l’ondelette complexe

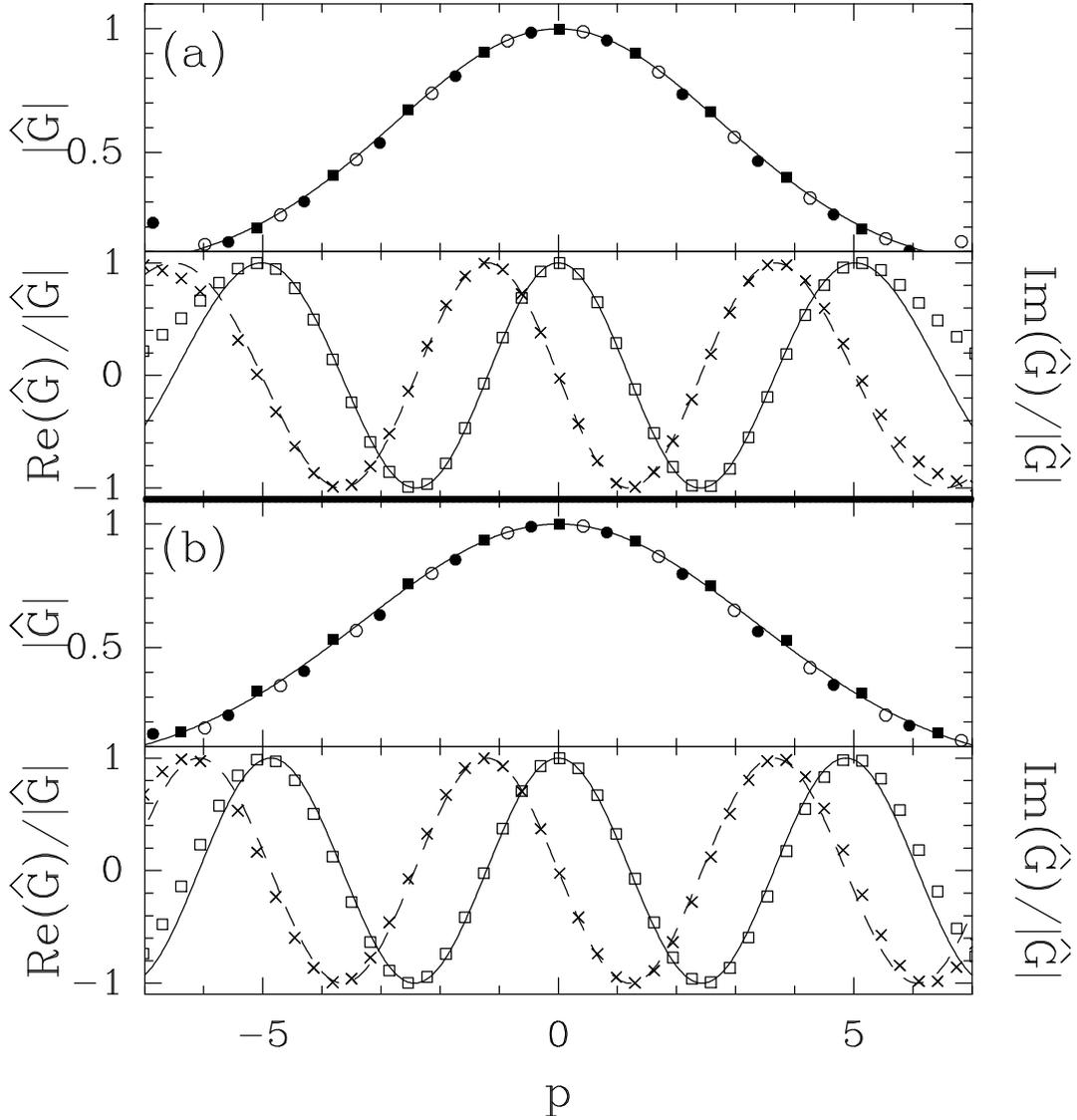


FIG. 3.23 – Calcul de la transformée de Fourier du noyau  $G$  à partir des maxima du module de la transformée en ondelettes. Module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu en utilisant respectivement l'ondelette complexe  $\psi_{(C)}$  ( $\blacksquare$ ),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\circ$ ), ainsi que sa partie réelle ( $\square$ ) et sa partie imaginaire ( $\times$ ) obtenues en utilisant  $\psi_{(C)}$ . Le rapport d'échelle  $a'/a$  est pris égal à  $2^5$ . a) Cascade abstraite de loi log-Poisson de paramètres  $\lambda = 2$ ,  $\beta = (\frac{2}{3})^{1/3}$  et  $\gamma = -\frac{1}{9}$ . b) Cascade abstraite de loi log-normale de paramètres  $m = -0.37$  et  $\sigma^2 = 0.026$ . Les prédictions théoriques sont reportées en lignes continues et discontinues.

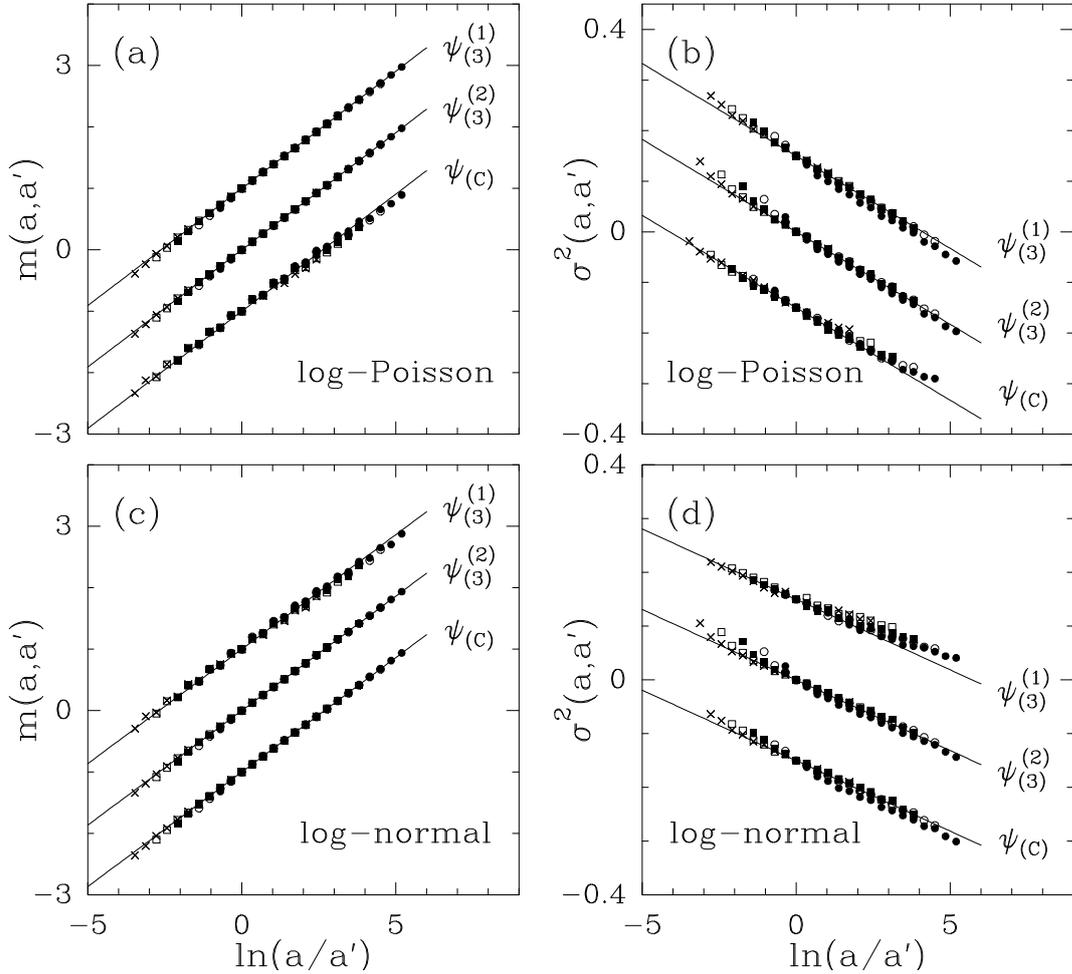


FIG. 3.24 – Vérification du caractère invariant d'échelle d'un processus log-Poisson ( $\lambda = 2$ ,  $\beta = (\frac{2}{3})^{1/3}$  et  $\gamma = -\frac{1}{9}$ ) et d'un processus log-normal ( $m = -0.37$  et  $\sigma^2 = 0.026$ ) générés sur une base orthonormale d'ondelettes. a) et c)  $m(a, a') = \partial \text{Im} \hat{G}_{a, a'} / \partial p |_{p=0}$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b) et d)  $\sigma^2(a, a') = -\partial^2 \ln |\hat{G}_{a, a'}| / \partial p^2 |_{p=0}$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . Les échelles présentées correspondent à  $a' = 2^5$  ( $\bullet$ ),  $2^6$  ( $\circ$ ),  $2^7$  ( $\blacksquare$ ),  $2^8$  ( $\square$ ),  $2^9$  ( $\times$ ) et  $2^{10}$  ( $\triangle$ ). Les lignes continues représentent les prédictions théoriques, à savoir les équations (3.56) pour le processus log-Poisson et (3.59) pour le processus log-normal.

$\psi_{(C)}$  (symboles (■)) ainsi que les ondelettes réelles  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles (●)) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles (○)), et d'autre part sa partie réelle (symboles (□)) et sa partie imaginaire (symboles (×)) obtenues en utilisant  $\psi_{(C)}$ . Quelle que soit l'ondelette utilisée, les données sont en excellent accord avec la formule (3.55) (ligne continue), et ce jusqu'à des valeurs de  $|p|$  de l'ordre de 6. Ces calculs ont été menés sur une statistique de 230 signaux de 65536 points. Les déviations par rapport aux prédictions théoriques pour les grandes valeurs de  $|p|$  sont dues aux très faibles valeurs de la fonction caractéristique. Sur les figures 3.24a et 3.24b, nous avons représenté respectivement les quantités  $m(a, a') = \partial \text{Im} \hat{G}_{a, a'} / \partial p \big|_{p=0}$  et  $\sigma^2(a, a') = -\partial^2 \ln |\hat{G}_{a, a'}| / \partial p^2 \big|_{p=0}$  en fonction de  $\ln(a/a')$  pour différentes valeurs de l'échelle de référence :  $a' = 2^5$  (symboles (●)),  $2^6$  (symboles (○)),  $2^7$  (symboles (■)),  $2^8$  (symboles (□)),  $2^9$  (symboles (×)) et  $2^{10}$  (symboles (△)). Les données (décalées pour distinguer l'ondelette analysatrice choisie), se remettent bien sur une droite unique dont la pente ne dépend pas de l'ondelette. Cette figure permet ainsi de confirmer le caractère invariant d'échelle du processus. De plus, l'accord est à nouveau excellent avec les formules théoriques :

$$\begin{cases} m(a, a') &= -(\gamma + \lambda \ln \beta) \ln(a/a') , \\ \sigma^2(a, a') &= -\lambda(\ln \beta)^2 \ln(a/a') , \end{cases} \quad (3.56)$$

représentées par les lignes continues dans la figure 3.24.

### • Modèle "log-normal"

La généralisation de l'équation (2.40) à un processus de cascade sur une base orthonormale d'ondelettes, conduit à l'expression suivante de la densité de probabilité des coefficients en ondelettes à l'échelle  $a < 1$  (Annexe A) :

$$P_a(\ln |W_{a1}|) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi\sigma^2 \ln a}} \exp\left(\frac{(\ln |W_{a1}| + m \ln a)^2}{2\sigma^2 \ln a}\right). \quad (3.57)$$

La fonction caractéristique associée à la distribution de probabilité du logarithme des coefficients s'écrit donc :

$$\begin{aligned} M(p, a) &= \int e^{ip \ln |W|} \frac{1}{\sqrt{-2\pi\sigma^2 \ln a}} \exp\left(\frac{(\ln |W| + m \ln a)^2}{2\sigma^2 \ln a}\right) d(\ln |W|) , \\ &= e^{-ipm \ln a} \int e^{ipy} \frac{1}{\sqrt{-2\pi\sigma^2 \ln a}} \exp\left(\frac{y^2}{2\sigma^2 \ln a}\right) dy , \\ &= e^{-ipm \ln a} \sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{p^2 \sigma^2 \ln a}{2}\right)^k = \exp(-ipm \ln a) \exp\left(\frac{p^2 \sigma^2 \ln a}{2}\right) . \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.41), on obtient :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = \exp(-ipm \ln(a/a')) \exp(p^2 \sigma^2 \ln(a/a')/2) . \quad (3.58)$$

De la même manière que précédemment, nous avons estimé  $|\hat{G}|$  sur des signaux construits par cascade selon une loi log-normale de paramètres  $m = -0.37$  et  $\sigma^2 = 0.026$  (Annexe A). Ces paramètres constituent un jeu de paramètres réalistes pour modéliser le spectre  $\zeta_p$  des exposants des fonctions de structure du signal de vitesse de Modane. Le module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu en utilisant respectivement l'ondelette complexe  $\psi_{(C)}$  (symboles (■)) et les ondelettes réelles  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles (●)) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles (○)), ainsi que sa partie réelle (symboles (□)) et sa partie imaginaire (symboles (×)) obtenues en utilisant  $\psi_{(C)}$ , sont représentés sur la figure 3.23b pour  $a'/a = 2^5$ . A nouveau, ces différentes ondelettes permettent une bonne estimation de  $\hat{G}(p)$  pour des valeurs de  $|p|$  inférieures ou égales à 6. Ce bon accord avec les prédictions théoriques est aussi vérifié pour la dépendance de  $m(a, a')$  et de  $\sigma^2(a, a')$  en fonction des échelles  $a$  et  $a'$ . Comme on peut le constater sur les figures 3.24c et 3.24d, ces deux quantités varient linéairement en fonction de  $\ln(a/a')$  comme cela est le cas de tout processus invariant d'échelle. En fait, les résultats numériques obtenus avec notre méthode reproduisent remarquablement les expressions analytiques :

$$\begin{cases} m(a, a') &= -m \ln(a/a') , \\ \sigma^2(a, a') &= -\sigma^2 \ln(a/a') . \end{cases} \quad (3.59)$$

Précisons que la statistique utilisée pour cette étude est identique à celle utilisée pour le modèle log-Poisson.

Ces différentes applications montrent la fiabilité de la méthode utilisée pour estimer  $\hat{G}$  et ceci pour des processus déterministes comme aléatoires. L'utilisation de l'ondelette complexe  $\psi_{(C)}$  permet de déterminer avec une grande précision le noyau  $G$ . Les résultats obtenus avec les ondelettes réelles  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  sont aussi de très bonne qualité. Nous allons maintenant appliquer cette approche à l'étude des signaux de vitesse turbulents.

### 3.5 Estimation du propagateur de signaux de vitesse turbulents expérimentaux : mise en évidence d'un processus de cascade non invariant d'échelle

Dans le paragraphe précédent, nous avons testé notre méthode de déconvolution sur quelques exemples. Les résultats obtenus permettent non seulement de déterminer la forme du propagateur  $G$  mais aussi de vérifier les propriétés d'invariance d'échelle du processus étudié. Nous avons donc entrepris la détermination du propagateur du signal de vitesse turbulent enregistré dans la soufflerie de Modane. Cette étude a porté sur l'ensemble du signal à notre disposition, correspondant à une statistique équivalente à celle utilisée pour les exemples précédents ( $\sim 1.5 \cdot 10^7$  points). Le module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu en utilisant respectivement les ondelettes  $\psi_{(C)}$  (symboles (■)),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles (●)) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles (○)) est représenté sur la figure 3.25a. La partie réelle (symboles (□)) et la partie imaginaire (symboles (×)) de  $\hat{G}$  obtenues en utilisant  $\psi_{(C)}$  sont représentées sur la figure 3.25b. Les échelles sélectionnées dans le domaine inertiel sont dans un rapport  $a'/a = 2^5$ . Quelle que soit l'ondelette utilisée, les données observées sont très bien reproduites par la forme du propagateur (Eq. (3.58)) des processus log-normaux. Remarquons que si l'on pouvait se douter que le modèle log-normal fournirait une bonne approximation du propagateur  $\hat{G}(p)$  au voisinage de  $p = 0$ , il est beaucoup plus surprenant de constater que l'accord avec les données expérimentales s'étend jusqu'aux valeurs de  $|p| \sim 6$ , c'est-à-dire aux valeurs extrêmes de validité de notre analyse relativement à la statistique dont nous disposons. D'autre part, il est important de remarquer que la largeur de  $\hat{G}$  obtenue avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(C)}$  diffère clairement de celle obtenue en utilisant  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ou  $\psi_{(3)}^{(2)}$  contrairement aux résultats obtenus précédemment sur des processus de cascade invariants d'échelle. Ce résultat nous suggère une possible brisure de l'invariance d'échelle du processus de cascade sous-jacent à ce signal.

Pour poursuivre plus avant notre analyse, nous nous sommes ensuite intéressés à la dépendance du propagateur  $\hat{G}_{aa'}(p)$  en fonction du choix des échelles  $a$  et  $a'$  dans le domaine inertiel. Nous avons ainsi estimé les quantités  $m(a, a') = \partial \text{Im} \hat{G}_{aa'} / \partial p \big|_{p=0}$  et  $\sigma(a, a') = -\partial^2 \ln |\hat{G}_{aa'}| / \partial p^2 \big|_{p=0}$  pour différents couples  $(a, a')$ . Les résultats obtenus pour les valeurs suivantes de l'échelle de référence  $a' = 2^5$  (symboles (●)),  $2^6$  (symboles (○)),  $2^7$  (symboles (■)),  $2^8$  (symboles (□)),  $2^9$  (symboles (×)) et  $2^{10}$  (symboles (△)) sont représentés sur la figure 3.26 pour les trois ondelettes analysatrices utilisées jusqu'à présent.

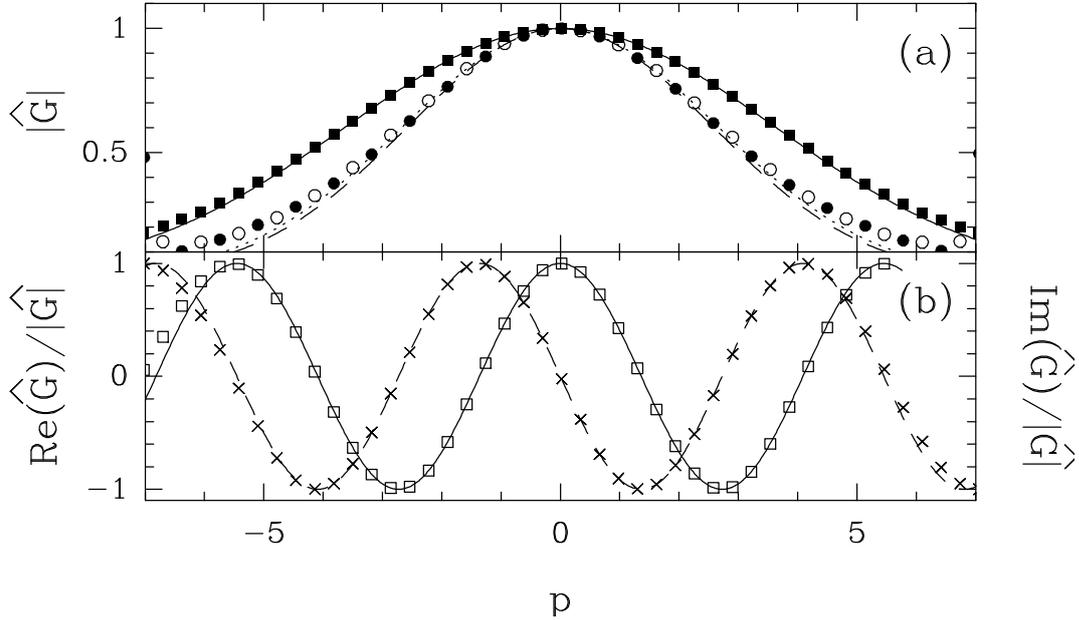


FIG. 3.25 – Estimation de la transformée de Fourier du propagateur du signal expérimental de vitesse de Modane ( $R_\lambda = 3050$ ). a) Module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu en utilisant les ondelettes analysatrice  $\psi_{(C)}$  (■),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (●) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (○). b) Partie réelle (□) et partie imaginaire (×) de  $\hat{G}_{aa'}$  calculées avec  $\psi_{(C)}$ . Les échelles  $a = 2^6$  et  $a' = 2^{11}$  sont situées dans le domaine inertiel. Les lignes continues et discontinues correspondent à une forme Gaussienne du noyau prédite par le modèle log-normal (Eq. (3.58)).

Les courbes  $m(a, a')$  (Fig. 3.26a) et  $\sigma^2(a, a')$  (Fig. 3.26c) se rassemblent respectivement avec une relativement bonne précision, sur une même droite en très bon accord avec les prédictions théoriques (Eq. (3.59)) de l'approximation log-normale pour les valeurs des paramètres  $m = -0.33$  et  $\sigma^2 = 0.020$ . Les observations semblent donc confirmer la pertinence de cette approximation, avec toutefois comme information supplémentaire le fait que la cascade serait invariante d'échelle. Malheureusement, un examen plus quantitatif et plus approfondi des données révèle une courbure systématique des courbes  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$  que l'on peut entrevoir sur la figure 3.26a. Cette possible violation de l'invariance d'échelle semble plus claire sur les courbes  $\sigma^2(a, a')$ , mais il faut cependant prendre en considération le fait que  $\sigma^2(a, a')$  prend des valeurs très faibles.

Pour essayer d'élucider cette possible brisure de l'invariance d'échelle, nous avons entrepris le même type d'étude sur un second signal expérimental de vitesse correspondant à un nombre de Reynolds plus faible. Ce signal enregistré par Gagne et ses collaborateurs

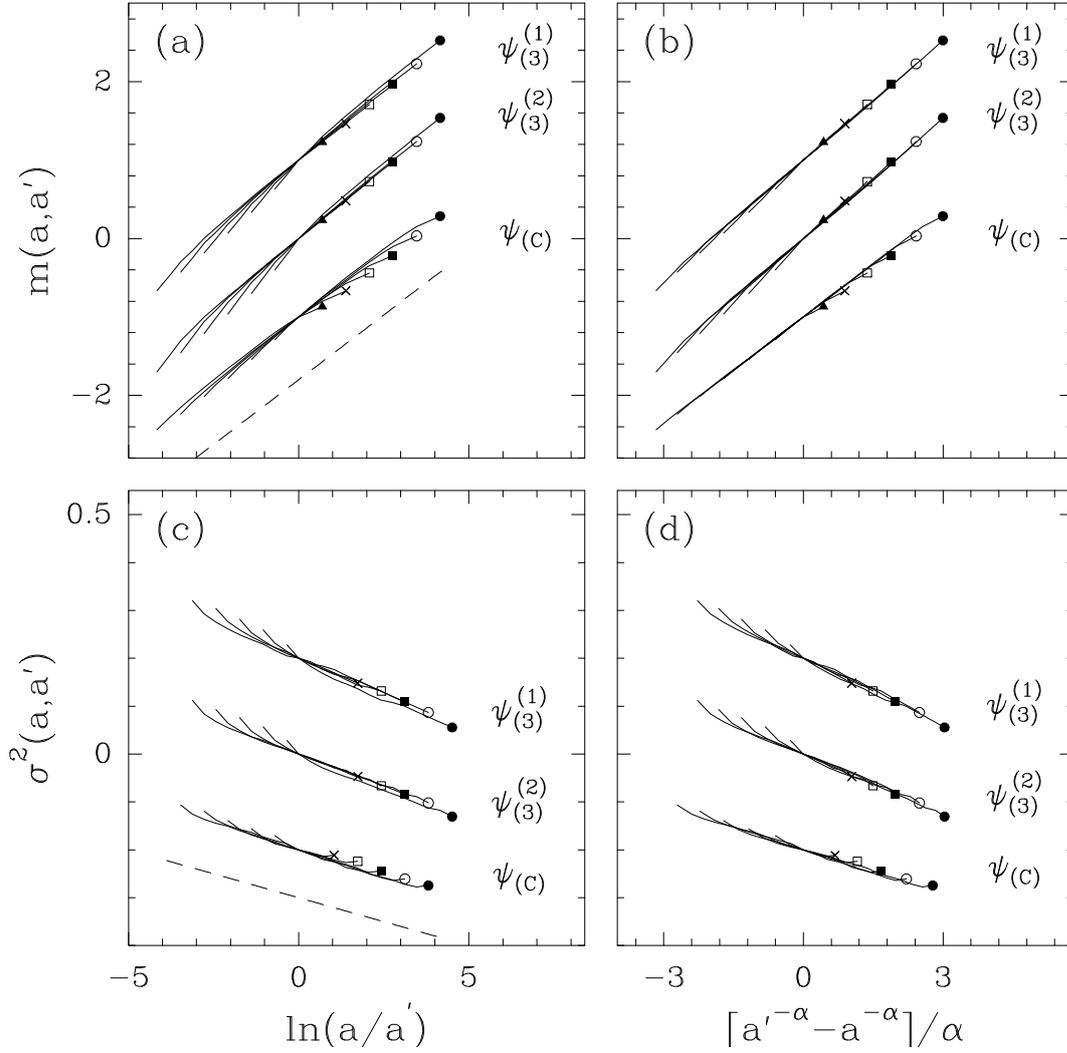


FIG. 3.26 – Comportement des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  pour le signal de vitesse de Modane. Les symboles correspondent aux valeurs suivantes de l'échelle de référence :  $a' = 2^5$  ( $\bullet$ ),  $2^6$  ( $\circ$ ),  $2^7$  ( $\blacksquare$ ),  $2^8$  ( $\square$ ),  $2^9$  ( $\times$ ) et  $2^{10}$  ( $\triangle$ ). a)  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . Ces courbes présentent une légère courbure et dépendent des échelles considérées. b)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.08$ . c)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . d)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec la même valeur de  $\alpha = 0.08$ . Les lignes discontinues dans (a) et (c) correspondent respectivement aux prédictions théoriques (Eq. (3.59)) du modèle log-normal avec les valeurs des paramètres  $m = -0.33$  et  $\sigma^2 = 0.02$ .

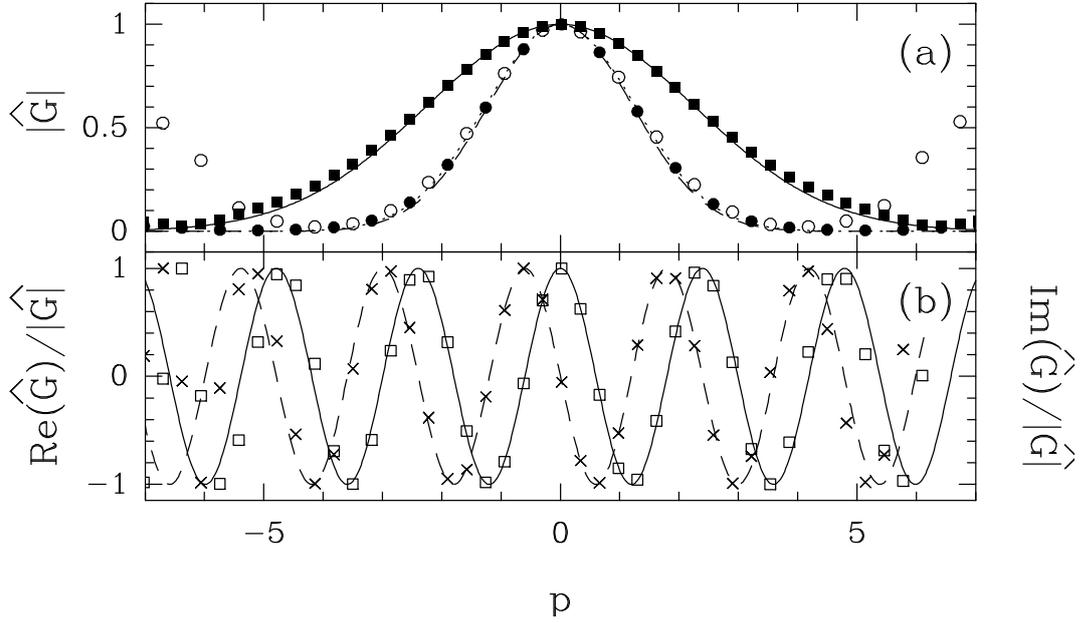


FIG. 3.27 – Estimation de la transformée de Fourier  $\hat{G}_{aa'}(p)$  du propagateur du signal expérimental de vitesse : turbulence de jet avec  $R_\lambda = 835$ . Même représentation que dans la figure 3.25. Le rapport des échelles est  $a'/a = 2^6$ . Les lignes continues et discontinues correspondent à la forme Gaussienne du noyau prédite par le modèle log-normal (Eq. (3.58)).

correspond aux fluctuations temporelles de la vitesse longitudinale dans une turbulence de jet. Ce flot a les caractéristiques suivantes :

- La vitesse moyenne :  $U = 6.48 \text{ m s}^{-1}$  ;
- L'écart type des fluctuations de la vitesse :  $v_{rms} = 1.65 \text{ m s}^{-1}$  ;
- L'échelle de Taylor :  $\lambda \simeq 0.0078 \text{ m}$  ;
- La viscosité :  $\nu = 15.37 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  ;
- Le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor :  $R_\lambda = 835$  ;
- L'échelle de Kolmogorov :  $\eta \simeq 0.00014 \text{ m}$  ;
- La fréquence d'échantillonnage :  $f_e = 25 \text{ kHz}$  ;
- L'échantillonnage :  $\Delta x = \frac{U}{f_e} \simeq 2\eta$ .

En utilisant l'hypothèse de Taylor, on identifie à nouveau les fluctuations temporelles aux fluctuations spatiales. L'échantillonnage (en nombre d'échelles de Kolmogorov  $\eta$ ) est du même ordre que celui obtenu pour le signal de Modane. Par contre, le taux de turbulence est plus important, de l'ordre de 25%, et le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de

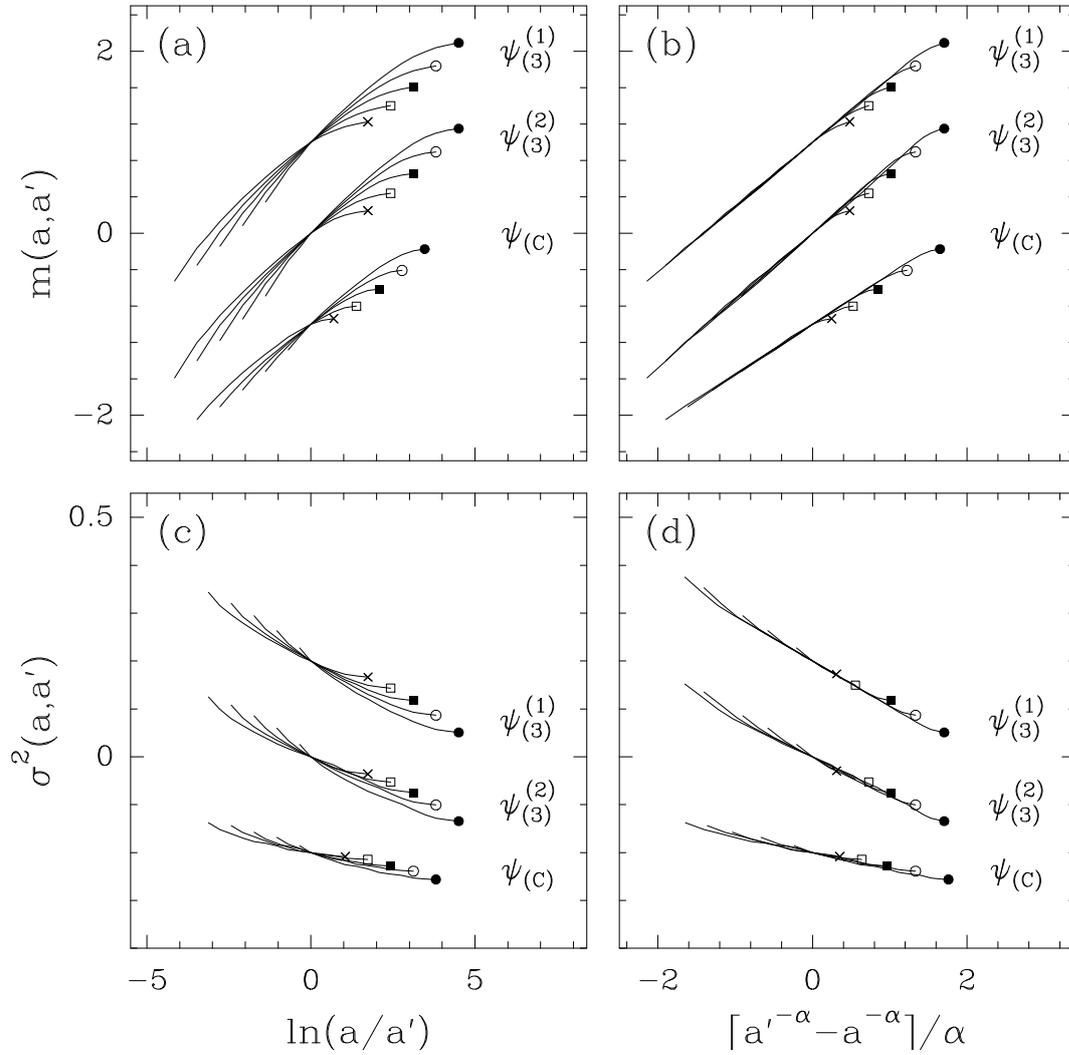


FIG. 3.28 – Comportement des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  pour le signal de vitesse du jet turbulent. Les symboles correspondent aux échelles  $a' = 2^5$  ( $\bullet$ ),  $2^6$  ( $\circ$ ),  $2^7$  ( $\blacksquare$ ),  $2^8$  ( $\square$ ),  $2^9$  ( $\times$ ) et  $2^{10}$  ( $\triangle$ ). a)  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$ . c)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . d)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec la même valeur de  $\alpha = 0.2$ .

Taylor est trois fois moins important. La zone inertielle obtenue en posant  $\zeta_3 = 1$  s'étend approximativement de  $40\eta$  à  $512\eta$ .

Dans la figure 3.27, nous avons reproduit notre calcul de  $\hat{G}_{aa'}(p)$  pour ce nouveau signal de vitesse. Les résultats obtenus confirment la pertinence du modèle log-normal : les données expérimentales sont en effet remarquablement modélisées par la forme analytique du noyau prédite par ce modèle (Eq. (3.58)). On remarque à nouveau une dépendance suivant le choix de l'ondelette analysatrice utilisée. Le calcul de la dépendance dans les échelles de  $\hat{G}_{aa'}$  met cette fois ci clairement en évidence une brisure de l'invariance d'échelle. Les différentes courbes reportées dans les figures 3.28a et 3.28c, respectivement pour  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$ , présentent d'une part une dépendance dans l'échelle de référence  $a'$  et d'autre part une courbure prononcée en fonction de  $\ln(a)$ .  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  ne se comportent donc pas linéairement en fonction de  $\ln(a/a')$  comme nous avons pu déjà le deviner sur les figures 3.26a et 3.26c pour le signal de Modane.

Dans le cadre de la classe des modèles de cascade auto-similaire dont le noyau s'exprime sous la forme  $G_{aa'}(x) = G(x, S(a, a'))$  (Eq. (3.36)), nous nous sommes attachés à chercher une forme pour  $s(a)$  différente de  $\ln(a)$ . Les résultats remarquables obtenus dans les figures 3.28b et 3.28d, où nous avons réussi à rassembler toutes les données expérimentales sur une même droite et ce quelle que soit l'échelle de référence  $a'$  en représentant  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $s(a, a') = [a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$ , suggèrent la forme suivante pour  $s(a)$  :

$$s(a) = \frac{1 - a^{-\alpha}}{\alpha} . \quad (3.60)$$

Remarquons que dans la limite où l'exposant  $\alpha \rightarrow 0$ , nous retrouvons le comportement logarithmique  $s(a) = \ln(a)$ . L'exposant  $\alpha$  caractérise donc en quelque sorte, l'écart à l'invariance d'échelle. A cet égard, il est intéressant de remarquer que pour le signal de Modane, les données pour  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  se prêtent aussi à une modélisation avec cette nouvelle forme de fonction  $S(a, a')$ , comme cela est illustré sur les figures 3.26b et 3.26d, mais pour une valeur de  $\alpha$  ( $\alpha = 0.08$ ) beaucoup plus faible que pour le signal de turbulence de jet. Cette observation permet de comprendre pourquoi la brisure d'invariance d'échelle n'était pas vraiment flagrante sur le signal de Modane. De plus, elle suggère que l'exposant  $\alpha$  pourrait bien être une fonction décroissante du nombre de Reynolds, la forme (3.60) rendant compte d'un comportement transitoire à nombre de Reynolds fini, l'invariance d'échelle n'étant effectivement atteinte que dans la limite  $R_\lambda \rightarrow +\infty$ .

D'après les équations (3.42) et (3.60),  $\hat{G}_{aa'}(p)$  est de la forme :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = \left[ \hat{G}(p) \right]^{\frac{a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}}{\alpha}} . \quad (3.61)$$

Dans la mesure où le modèle log-normal semble fournir une excellente approximation de  $\hat{G}(p)$  sur une gamme de valeurs de  $p \in [-6, 6]$  compatible avec notre statistique expérimentale, cela signifie que le propagateur des signaux de vitesse turbulents est bien reproduit par la forme analytique :

$$G_{aa'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 S(a, a')}} e^{-\frac{(x+mS(a, a'))^2}{2\sigma^2 S(a, a')}} , \quad (3.62)$$

à savoir une fonction Gaussienne de moyenne  $m(a, a') = m(a'^{-\alpha} - a^{-\alpha})/\alpha$  et de variance  $\sigma^2(a, a') = \sigma^2(a'^{-\alpha} - a^{-\alpha})/\alpha$ .

D'après l'équation (3.32), on obtient la relation de convolution suivante :

$$P_a(\ln |T|) = \int G_{aa'}(x) P_{a'}(\ln |T| - x) dx . \quad (3.63)$$

Ainsi, si l'on convolue la fonction de probabilité du logarithme de la valeur absolue des coefficients en ondelettes à une échelle  $a'$  donnée avec  $G_{aa'}$ , on obtient la fonction de probabilité à l'échelle  $a$ . Sur les figures 3.29 et 3.30, nous nous servons de cette relation de convolution pour tester la pertinence de la forme (3.62) du propagateur  $G_{aa'}(x)$  pour les deux signaux de vitesse précédemment étudiés (Modane et jet turbulent). Sur la figure 3.29a, nous voyons le logarithme des histogrammes de la valeur absolue des incréments de vitesse de Modane à différentes échelles  $a' = 2^5$  (symboles (●)),  $2^7$  (symboles (○)),  $2^9$  (symboles (×)) et  $2^{11}$  (symboles (■)). Sur la figure 3.29b, nous avons représenté ces fonctions convoluées avec le noyau  $G_{aa'}$  (Eq. (3.62)), en prenant les valeurs suivantes des paramètres  $m = -0.5$ ,  $\sigma^2 = 0.036$ ,  $\alpha = 0.08$  et comme échelle de référence  $a = 2^5$ . Ces divers histogrammes se remettent tous parfaitement sur un même histogramme, à savoir l'histogramme obtenu à l'échelle  $a$ , vérifiant ainsi l'équation (3.63). Sur les figures 3.29c et 3.29d, nous avons répété ce test en considérant cette fois les histogrammes des coefficients de la transformée en ondelettes calculés avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Comme précédemment, on arrive à regrouper divers histogrammes, correspondant à différentes échelles dans le domaine inertiel, sur l'histogramme des coefficients à l'échelle  $a = 2^5$  et ce jusqu'à des valeurs très importantes de  $T$ , en utilisant la forme (3.62) de  $G_{aa'}$  avec comme paramètres  $m = -0.48$ ,  $\sigma^2 = 0.04$  et  $\alpha = 0.08$ . Il est important de rappeler ici l'observation effectuée dans la figure 3.18a, à savoir que tous ces histogrammes ont une

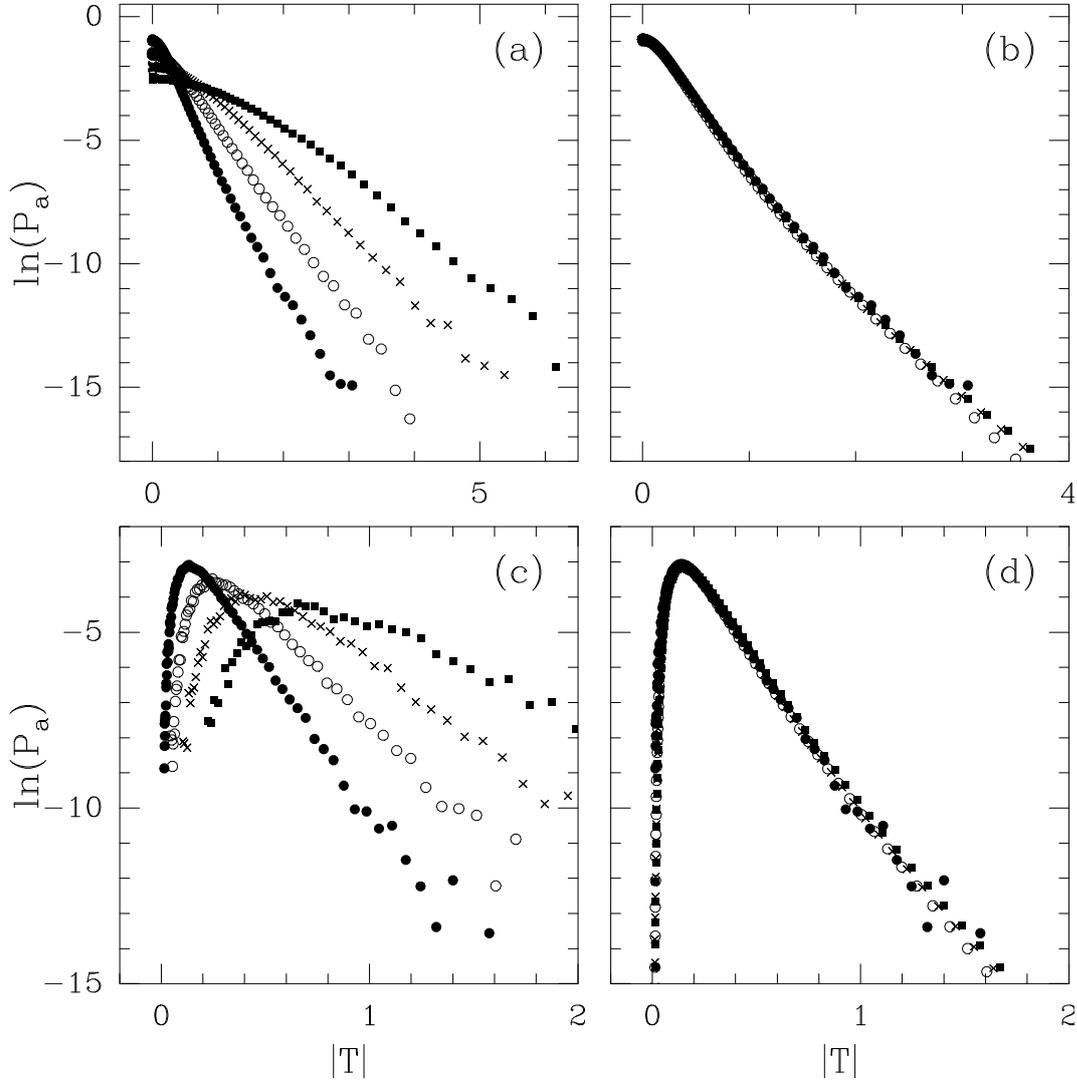


FIG. 3.29 – Signal de vitesse de Modane ( $R_\lambda = 3050$ ) : a) Logarithme des histogrammes de la valeur absolue des incréments de la vitesse pour les échelles  $a' = 2^5$  ( $\bullet$ ),  $2^7$  ( $\circ$ ),  $a = 2^9$  ( $\times$ ) et  $2^{11}$  ( $\blacksquare$ ). b) Les histogrammes de (a) après convolution avec  $G_{aa'}(x)$  donné par l'équation (3.62) avec les paramètres  $m = -0.5$ ,  $\sigma^2 = 0.036$ ,  $\alpha = 0.08$  et l'échelle de référence  $a = 2^5$ . c) Logarithme des histogrammes de la valeur absolue des maxima du module de la T.O. calculée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  aux mêmes échelles que dans (a). d) Les histogrammes de (c) après convolution avec  $G_{aa'}(x)$  donné par l'équation (3.62) avec les paramètres  $m = -0.48$ ,  $\sigma^2 = 0.04$ ,  $\alpha = 0.08$  et l'échelle de référence  $a = 2^5$ .

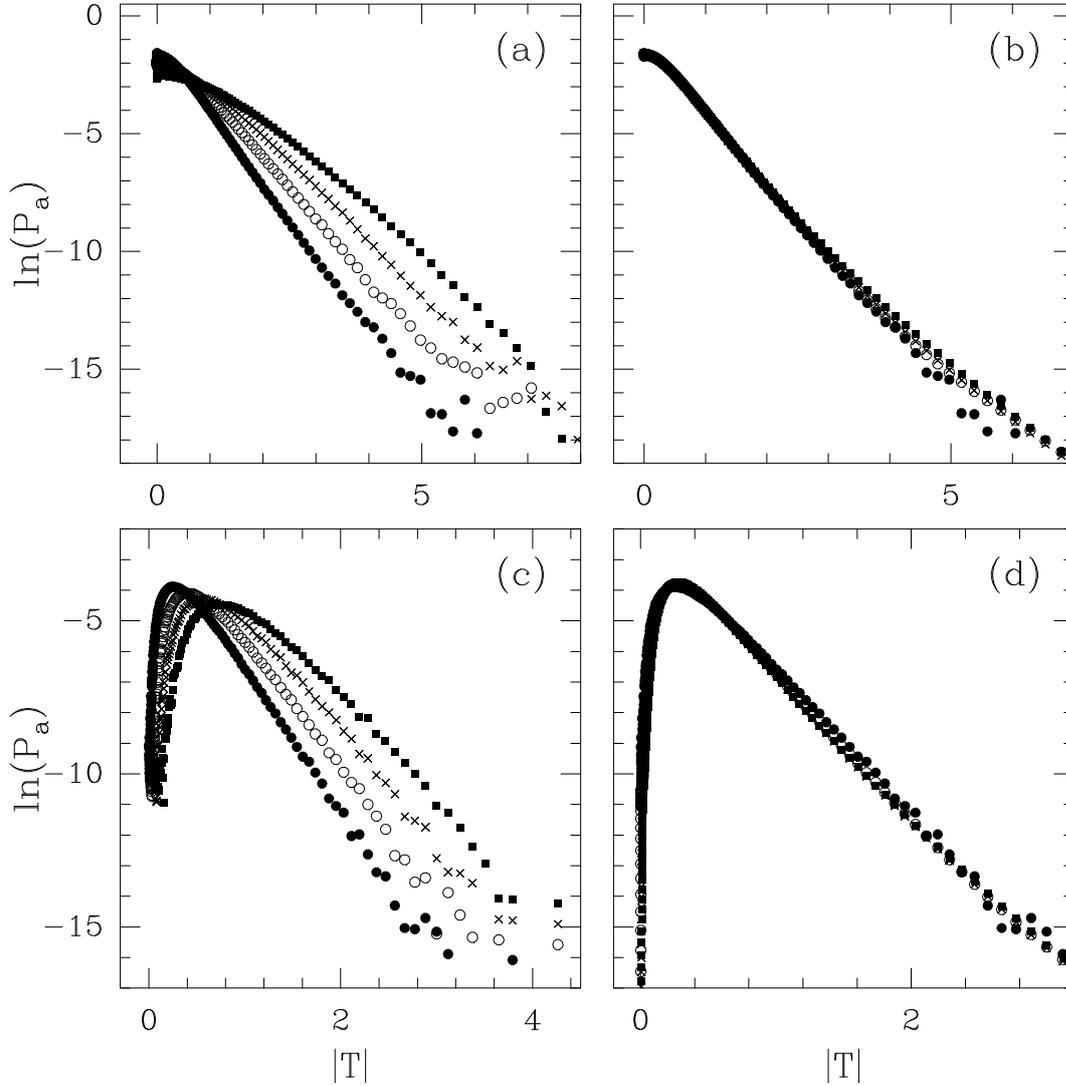


FIG. 3.30 – Signal de vitesse du jet turbulent ( $R_\lambda = 835$ ) : a) Logarithme des histogrammes de la valeur absolue des incréments de la vitesse pour les échelles  $a' = 2^4$  ( $\bullet$ ),  $2^5$  ( $\circ$ ),  $2^6$  ( $\times$ ) et  $2^7$  ( $\blacksquare$ ). b) Les histogrammes de (a) après convolution avec  $G_{aa'}(x)$  donné par l'équation (3.62) avec les paramètres  $m = -0.7$ ,  $\sigma^2 = 0.09$ ,  $\alpha = 0.22$  et l'échelle de référence  $a = 2^5$ . c) Logarithme des histogrammes de la valeur absolue des maxima du module de la T.O. calculée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  aux mêmes échelles que dans (a). d) Les histogrammes de (c) après convolution avec le même noyau  $G_{aa'}(x)$  que dans (b).

forme log-normale. La figure 3.30, représente le même test effectué sur des histogrammes obtenus à partir du signal provenant du jet turbulent. La valeur des paramètres utilisés pour le noyau sont désormais  $m = -0.70$ ,  $\sigma^2 = 0.09$  et  $\alpha = 0.22$ , ceci pour les deux ondelettes analysatrices  $\psi_{(0)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . A nouveau on obtient sur les figures 3.30b et 3.30d, un remarquable regroupement des histogrammes calculés à différentes échelles sur une courbe unique qui correspond à l'histogramme des coefficients obtenus à l'échelle de référence  $a$ . Ainsi, l'approximation log-normale pour le propagateur  $G$  du champ de vitesse, avec un comportement auto-similaire dans les échelles selon la loi  $(a'^{-\alpha} - a^{-\alpha})/\alpha$ , où  $\alpha$  dépend du flot considéré et à priori du nombre de Reynolds, permet de modéliser avec précision l'évolution des fonctions de probabilité des coefficients en ondelettes. L'invariance d'échelle est donc violée dans la mesure où les valeurs de  $\alpha$  extraites des données expérimentales sont suffisamment importantes. Cela est certainement le cas du signal de vitesse du jet turbulent. Aux nombres de Reynolds atteints dans la soufflerie de Modane, on commence à se rapprocher de la limite où l'invariance d'échelle devient effective, sans l'avoir totalement atteinte (si tenté que l'on puisse l'atteindre pour des valeurs finies de  $R_\lambda$ ).

A ce point de notre étude, on ne peut pas ne pas s'interroger sur les conséquences des résultats rapportés dans cette section sur l'analyse multifractale du signal de vitesse de Modane développée dans la section 3.3. La forme particulière du noyau  $G_{aa'}(x)$  obtenue dans l'équation (3.62) implique pour les fonctions de partition continues (Eq. (2.88)), qui correspondent aux moments de la fonction de probabilité des coefficients en ondelettes, un comportement de la forme :

$$K(q, a) = C_q e^{a^{-\alpha} \zeta_q}, \quad (3.64)$$

où la constante  $C_q$  dépend de  $q$ ,  $\alpha$  et de l'ondelette analysatrice  $\psi$  et  $\zeta_q = \tau_c(q) = \tau(q) + 1 = -mq - \sigma^2 q^2/2$  est le spectre des exposants du modèle log-normal (Eq. (2.41)) avec, comme nous l'avons vu,  $m$  et  $\sigma^2$  dépendant à la fois de  $\alpha$  et de  $\psi$ . Pour vérifier ce comportement, nous avons représenté sur la figure 3.31 les fonctions de partition continues  $K(q, a/\eta)$  obtenues avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(0)}^{(1)}$  (symboles (o)) (et donc équivalentes aux fonctions de structure), et les fonctions de partition  $(a/\eta)Z(q, a/\eta)$  restreintes aux maxima du module de la T.O. calculée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles (●)), pour le signal de Modane. Lorsqu'on représente  $\ln((a/\eta)Z(q, a/\eta))$  en fonction de  $\ln(a/\eta)$  (Fig. 3.31a), les courbes obtenues semblent se comporter linéairement mais présentent toutes une légère courbure. Ces mêmes courbes représentées en fonction de  $-(a/\eta)^{-0.08}/0.08$  présentent elles aussi un comportement linéaire qui s'étend incontestablement sur une gamme d'échelles plus importante. Nous avons représenté pour comparaison, les estima-

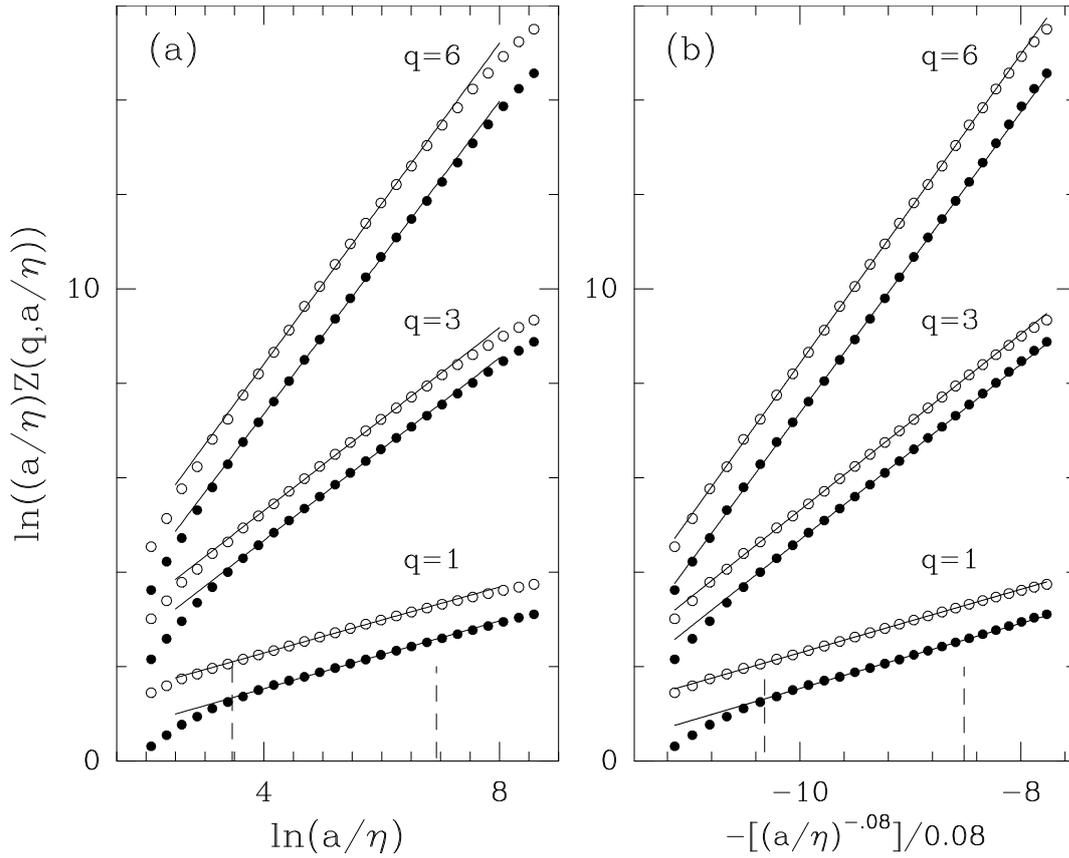


FIG. 3.31 – Signal de vitesse de Modane ( $R_\lambda = 3050$ ) : fonctions de structure ( $\circ$ ) et fonctions de partition  $(a/\eta)Z(q, a/\eta)$  restreintes aux maxima du module de la T.O. calculée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ), pour différentes valeurs de  $q$ . a)  $\ln((a/\eta)Z(q, a/\eta))$  en fonction de  $\ln(a/\eta)$ . b)  $\ln((a/\eta)Z(q, a/\eta))$  en fonction de  $-(a/\eta)^{-\alpha}/\alpha$ , avec  $\alpha = 0.08$ . Les lignes continues correspondent aux pentes  $\zeta_q$  estimées dans la région délimitée par les lignes verticales discontinues.

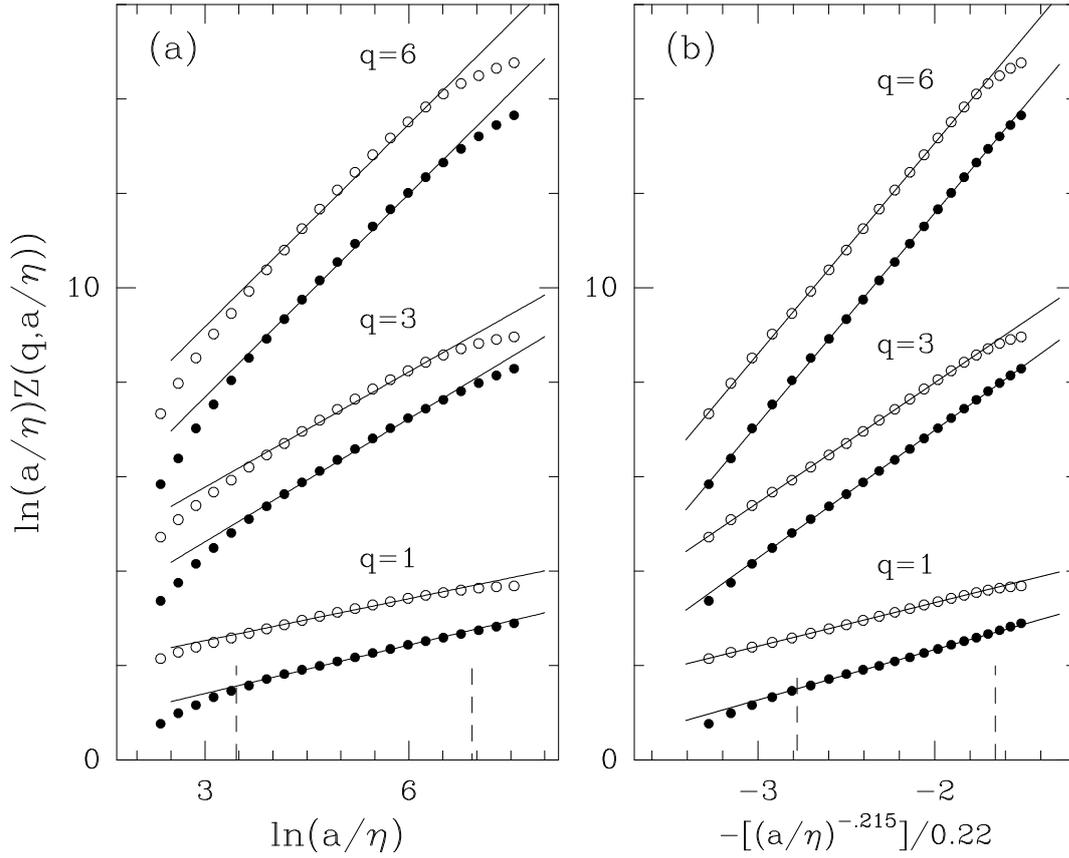


FIG. 3.32 – Signal de vitesse du jet turbulent ( $R_\lambda = 835$ ) : fonctions de structure ( $\circ$ ) et fonctions de partition  $(a/\eta)Z(q, a/\eta)$  restreintes aux maxima du module de la T.O. calculée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) pour différentes valeurs de  $q$ . a)  $\ln((a/\eta)Z(q, a/\eta))$  en fonction de  $\ln(a/\eta)$ . b)  $\ln((a/\eta)Z(q, a/\eta))$  en fonction de  $-(a/\eta)^{-\alpha}/\alpha$ , avec  $\alpha = 0.22$ . Les lignes continues correspondent aux pentes  $\zeta_q$  estimées dans la région délimitée par les lignes verticales discontinues.

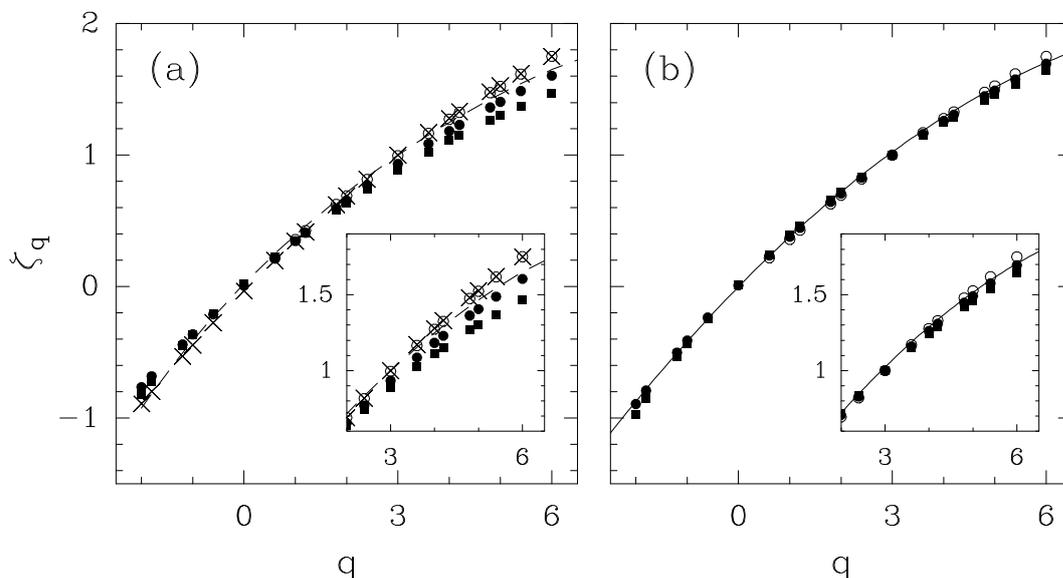


FIG. 3.33 – a) Spectre  $\zeta_q$  obtenu pour les signaux de vitesse de Modane et du jet turbulent avec différentes ondelettes analysatrice : fonctions de structure ( $\circ$ ), ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  pour le signal de Modane ( $\bullet$ ) et pour le jet ( $\blacksquare$ ), ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et en utilisant l'Auto-Similarité Étendue pour le signal de Modane ( $\times$ ) et le jet ( $- - -$ ). b) Spectre  $\zeta_q$  obtenu en estimant les pentes du logarithme des fonctions de partition représentées en fonction de  $-(a/\eta)^{-\alpha}/\alpha$  et en posant  $\zeta_3 = 1$  :  $\alpha = 0.08$  pour le signal de Modane et  $0.22$  pour le jet (Figs 3.31b et 3.32b). Les symboles utilisés sont les mêmes que dans la figure (a). La ligne continue correspond à l'approximation log-normale  $\zeta_q = -mq - \sigma^2 q^2/2$  avec  $m = -0.40$  et  $\sigma^2 = 0.038$ .

tions des exposants  $\zeta_q$  obtenues par régression linéaire de ces courbes (lignes continues) dans un même domaine inertiel (représenté par les lignes verticales discontinues). Sur la figure 3.32, nous avons répété cette même étude pour le signal de vitesse provenant du jet turbulent. Quand elles sont représentées en fonction de  $\ln(a/\eta)$  (Fig. 3.32a), les données obtenues pour  $\ln((a/\eta)Z(q, a/\eta))$  présentent une courbure franche et la zone linéaire est d'autant plus difficile à déterminer que la valeur de  $q$  considérée est grande. Par contre, les données se replacent remarquablement sur une droite lorsqu'on les représente en fonction de  $-(a/\eta)^{-0.22}/0.22$  (Fig. 3.32b) et ce sur une gamme d'échelle qui s'étend de  $30\eta$  à environ  $1700\eta$ . Les lignes verticales discontinues délimitent à nouveau le domaine inertiel utilisé pour estimer  $\zeta_q$  par régression linéaire. Ces résultats semblent donc confirmer le caractère non invariant d'échelle du champ de vitesse turbulent.

Sur la figure 3.33a, nous avons regroupé les différents spectres  $\zeta_q = \tau(q) + 1$  obtenus pour les deux flots (Modane et turbulence de jet) avec différentes ondelettes analysatrices et en supposant vraie l'invariance d'échelle (c'est-à-dire en supposant que les fonctions de partition se comportent en loi de puissance). Les spectres obtenus à partir des maxima du module de la T.O. avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , représentés pour Modane avec les symboles ( $\bullet$ ) et pour le jet avec les symboles ( $\blacksquare$ ), sont différents et dépendent donc du flot considéré. De plus, ces spectres sont systématiquement inférieurs à celui obtenu avec les fonctions de structure (ondelette  $\psi_{(0)}^{(1)}$ ) en imposant  $\zeta_3 = 1$ . Ce dernier spectre, seulement représenté pour le signal de Modane (symboles ( $\circ$ )), est en fait le même pour les deux flots et est très voisin des spectres (Modane ( $\times$ ), et jet turbulent (- -)) obtenus avec les fonctions de partition restreintes aux maxima en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et l'Auto-Similarité Etendue (section 3.1.4). En résumé, si l'on n'utilise pas l'Auto-Similarité Etendue, le spectre  $\zeta_q$  mesuré dépend de l'ondelette analysatrice choisie. Par contre, cette hypothèse permet de regrouper tous les résultats sur un même spectre universel. Il est important de remarquer que comme cela est illustré sur la figure 3.33b, ce spectre universel est obtenu tout naturellement en estimant les pentes de  $\ln((a/\eta)Z(q, a))$  en fonction de  $-(a/\eta)^{-\alpha}/\alpha$ , avec  $\alpha = 0.08$  pour le signal de Modane et  $\alpha = 0.22$  pour le jet, en imposant  $\zeta_3 = 1$ . Les spectres ainsi obtenus avec différentes ondelettes, en supposant valide le comportement des fonctions de partition donné par l'équation (3.64), sont désormais indiscernables et remarquablement bien modélisés par l'approximation log-normale  $\zeta_q = -mq - \sigma^2 q^2/2$  représentée en ligne continue où désormais  $m$  et  $\sigma^2$  ne dépendent plus de  $\alpha$  et de  $\psi$ . Cette observation suggère que l'équation (3.64) se réécrit simplement sous la forme :

$$K(q, a) = C_q e^{C_{\psi, \alpha} a^{-\alpha} \zeta_q} . \quad (3.65)$$

où toute la dépendance en  $\psi$  et en  $\alpha$  est prise en compte par la constante  $C_{\psi, \alpha}$ . Ces résultats confirment donc le caractère non invariant d'échelle du champ de vitesse turbulent et remettent ainsi en question tous les modèles proposés pour décrire la multifractalité de ce champ<sup>[57],[126],[152],[153],[155],[161]–[178]</sup>.

La pertinence de l'équation (3.65) pour rendre compte de cette brisure de l'invariance d'échelle confirme la validité de l'hypothèse d'Auto-Similarité Etendue et permet de comprendre la cohérence des estimations expérimentales du spectre  $\zeta_q$  précédemment effectuées. De plus, s'il s'avérait que la dépendance dans le nombre de Reynolds se traduise par la simple décroissance de l'exposant  $\alpha$  vers zéro, alors d'après la forme (Eq. (3.65)) particulière des fonctions de partition révélée par notre analyse, on pourrait conclure que

le spectre  $\zeta_q$  obtenu à nombre de Reynolds fini dans la figure 3.33b est bien équivalent au spectre asymptotique obtenu dans la limite  $R_\lambda \rightarrow +\infty$ .

## 3.6 Discussion

Notre analyse du champ de vitesse turbulent à grand nombre de Reynolds à l'aide de la transformée en ondelettes, a permis de dégager un certain nombre de résultats importants.

- La dépendance du spectre  $\tau(q)$  calculé avec la méthode M.M.T.O. en fonction de l'ondelette analysatrice invalide l'hypothèse d'invariance d'échelle du signal de vitesse.
- La détermination de la transformée de Fourier  $\hat{G}_{aa'}(p)$  du propagateur, quelles que soient  $a$  et  $a'$ , ne nous permet pas de différencier la plupart des modèles proposés pour rendre compte du phénomène d'intermittence de leur approximation log-normale. En effet, seuls les deux premiers cumulants de  $G_{aa'}$  sont significativement différents de zéro et donc la forme de  $G_{aa'}(x)$  est, en première approximation, une Gaussienne dont les paramètres dépendent de l'ondelette analysatrice utilisée. Cette dépendance invalide de nouveau l'hypothèse d'une cascade invariante d'échelle.
- L'étude du comportement de la moyenne  $m(a, a')$  et de la variance  $\sigma^2(a, a')$ , du propagateur  $G_{aa'}$  en fonction des échelles, nous a permis de révéler un comportement non pas logarithmique mais de la forme  $(a'^{-\alpha} - a^{-\alpha})/\alpha$ , où  $\alpha$  dépend clairement du flot considéré mais pas de l'ondelette analysatrice utilisée.
- Les histogrammes du logarithme des maxima du module de la T.O. sont très bien approchés par des Gaussiennes dans tout le domaine inertiel. La statistique des maxima de la T.O. est donc, en très bonne approximation, log-normale.
- Par contre, les histogrammes du logarithme des incréments présentent un comportement Gaussien seulement pour les grandes valeurs de  $\ln |\delta v|$ . Pour les valeurs très négatives de  $\ln |\delta v|$  (correspondant aux faibles valeurs de  $|\delta v|$ ), ce comportement est exponentiel. Cependant, le processus de cascade sous-jacent est encore un processus log-normal et le propagateur obtenu à partir des incréments est toujours bien approché par une Gaussienne.
- L'étude du comportement des fonctions de partition en fonction de  $e^{C_{\psi, \alpha} a^{-\alpha} \tau(q)}$  (et non  $a^{\tau(q)}$ ), nous a permis de déterminer un spectre  $\tau(q)$  indépendant de  $\alpha$  et de  $\psi$  et qui correspond, pour les valeurs de  $q$  positives, au spectre  $\zeta_q = \tau(q) + 1$  obtenu en utilisant l'Auto-Similarité Etendue. Ce spectre "universel" est bien approché par

le spectre d'un processus log-normal.

- L'hypothèse d'un processus log-normal (c'est-à-dire d'un propagateur  $G_{aa'}$  Gaussien) associé à l'hypothèse d'un comportement dans les échelles de sa moyenne et de sa variance en  $(a'^{-\alpha} - a^{-\alpha})/\alpha$  et non en  $\ln(a/a')$ , permet de remettre tous les histogrammes des coefficients en ondelettes calculés à différentes échelles sur une courbe unique et ceci quelle que soit l'ondelette analysatrice considérée. Ainsi, un processus de cascade log-normal non invariant d'échelle caractérise très bien l'évolution de la statistique des incréments ainsi que celle des coefficients en ondelettes sur tout le domaine inertiel.

Pour confirmer le caractère log-normal du processus de cascade sous-jacent au champ de vitesse turbulent, une étude analogue devrait être généralisée à différentes sortes de flots. L'accès à une statistique plus importante permettrait de plus une meilleure estimation des cumulants d'ordres supérieurs et ainsi de pouvoir différencier le modèle log-Poisson (ou tout autre modèle) de son approximation log-normale. On peut en effet s'attendre à ce que la log-normalité des fluctuations de vitesse ne soit qu'une approximation car sinon, une telle observation conduirait à la remise en cause de l'hypothèse d'incompressibilité<sup>[30],[235]</sup>. Il serait aussi très intéressant d'étudier le comportement du paramètre  $\alpha$  en fonction du nombre de Reynolds; la confirmation que dans la limite  $R_\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $\alpha \rightarrow 0^+$  apporterait la preuve expérimentale de la validité asymptotique de la description multifractale<sup>[29],[30],[152],[167]</sup> des fluctuations des signaux de vitesse turbulents.

Ainsi, l'utilisation de la transformée en ondelettes dans le domaine de l'étude de la turbulence pleinement développée, s'avère être un outil très puissant pour déterminer les propriétés d'auto-similarité et d'invariance d'échelle des quantités physiques telles que le champ de vitesse. Une étude similaire entreprise sur le champ de dissipation va nous permettre de tester, de manière originale, la validité de l'hypothèse de Kolmogorov-Obukhov<sup>[177],[178]</sup> (KO62) et le bien fondé de l'hypothèse d'un mécanisme sous-jacent de cascade d'énergie dont nous allons nous attacher à définir les principales caractéristiques.

## Chapitre 4

Analyse multifractale de la  
dissipation d'énergie : évidences en  
défaveur de l'hypothèse de  
Kolmogorov-Obukhov KO62



## 4.1 Introduction

Le champ de dissipation de l'énergie ( $\epsilon$ ), qui caractérise les mouvements à petite échelle, à joué un rôle central dans l'étude de la turbulence pleinement développée. En effet, dans la théorie de Kolmogorov K41, cette quantité représente non seulement le taux auquel l'énergie est dissipée aux petites échelles mais aussi le taux auquel l'énergie est transférée aux plus petites échelles. Cette quantité, supposée constante dans tout le domaine inertiel d'après l'hypothèse K41, s'est révélée expérimentalement être répartie spatialement de façon particulièrement inhomogène. Pour rendre compte de ce phénomène communément dénommé "intermittence", Kolmogorov<sup>[177]</sup> et Obukhov<sup>[178]</sup> ont proposé de relier localement les fluctuations de la dissipation à celles de la vitesse par la célèbre hypothèse KO62 (Eq. (3.16)) :

$$\delta v_l^3(x) = V \epsilon_l(x) , \quad (4.1)$$

où  $\delta v_l(x) = v(x+l) - v(x)$  est l'incrément de la vitesse au point  $x$  sur une distance  $l$ ,  $\epsilon_l(x) = \int_{x-l/2}^{x+l/2} \epsilon(y) dy$  représente l'énergie dissipée dans une boule de taille  $l$  centrée au point  $x$  et  $V$  une variable aléatoire indépendante de  $l$  et de  $\epsilon_l$ , et dont la statistique est supposée universelle (c'est à dire indépendante du nombre de Reynolds). Ces deux mêmes auteurs sont à l'origine du premier modèle phénoménologique de l'intermittence. Ce modèle, appelé "modèle log-normal"<sup>[177],[178]</sup>, a été décrit dans la section 2.1.4. Il s'agit d'un modèle multiplicatif de cascade d'énergie dont la fraction d'énergie distribuée à chaque étape n'est pas fixée mais est une variable aléatoire distribuée selon une loi log-normale. Ce modèle qui, comme nous l'avons vu (Eq. (2.41)), prédit une divergence des moments positifs élevés, apparaît peu raisonnable physiquement et ne peut donc constituer une description acceptable des fluctuations du taux de transfert d'énergie<sup>[30],[235]</sup>. Cependant, il a ouvert la voie à un nombre considérable de modèles phénoménologiques de cascade d'énergie<sup>[55]-[57],[152],[153],[155],[161]-[176]</sup> avec entre autres, le  $\beta$  modèle de Frisch, Sulem et Nelkin<sup>[161]</sup> qui reformule un modèle initialement proposé par Novikov et Stewart<sup>[162]</sup> dans le contexte unificateur défini par Mandelbrot<sup>[53],[55]-[57],[167]</sup> et sur lequel nous allons revenir. Ce modèle multiplicatif cherche à décrire la caractéristique intermittente de la dissipation d'énergie en préservant toutefois l'hypothèse d'homogénéité : l'énergie se distribue sur des zones actives qui n'occupent pas tout l'espace mais seulement une fraction  $\beta$  de cet espace. Ce modèle, trop simple pour rendre compte des observations expérimentales, a été généralisé de manière aléatoire (la fraction active  $\beta$  de l'espace n'est plus fixée mais fluctue à chaque étape selon une loi prédéfinie) par Benzi *et al*<sup>[163]</sup>. afin de reproduire le phénomène d'intermittence. Plus récemment, She et ses collaborateurs<sup>[126],[233]</sup> ont

proposé une généralisation “log-Poisson” du modèle “log-normal” en supposant que la variable aléatoire mise en jeu dans le processus de redistribution de l’énergie suit une loi “log-Poisson”.

C’est Mandelbrot<sup>[53],[57]</sup> qui le premier s’est attaché à regrouper et classifier les divers modèles multiplicatifs de cascade d’énergie au sein d’un même formalisme et introduit la notion de mesure fractale. Comme nous avons déjà eu l’occasion de le mentionner dans le chapitre 2, c’est dans ses travaux dédiés à l’étude de la turbulence pleinement développée<sup>[56],[167]</sup> que l’on trouve les prémices du formalisme multifractal formalisé quelques années après par les physiciens de la théorie des systèmes dynamiques. Ce formalisme statistique<sup>[58]–[67]</sup> doit son succès à sa relative simplicité conceptuelle mais aussi au fait qu’il permet de prédire des quantités mesurables dans la pratique. Sur le plan expérimental, assez peu d’études ont été entreprises pour déterminer les propriétés multifractales du champ de dissipation de l’énergie. C’est à Meneveau et Sreenivasan<sup>[152],[155]</sup> que l’on doit l’une des premières et des plus complètes études des fluctuations du champ de dissipation. En utilisant essentiellement des algorithmes de comptage de boîtes, ils ont apporté de nombreuses évidences expérimentales du caractère multifractal de la dissipation en déterminant le spectre  $\tau_\epsilon(q)$  (Eq. (2.13)) et le spectre  $f(\alpha)$  des singularités (Eq. (2.22)) pour différents flots turbulents. La vérification systématique de la non linéarité du spectre  $\tau(q)$ , l’observation d’un spectre  $f(\alpha)$  en forme de cloche s’étalant sur un domaine important de valeurs de  $\alpha$  ( $\alpha \in [0.46, 1.78]$ ), sont autant de preuves que ces expérimentateurs ont apportées de la non-homogénéité des fluctuations de dissipation<sup>[152],[153],[155],[166]</sup>. La donnée de ces quantités leur ont permis de comparer leurs résultats expérimentaux aux spectres théoriques prédits par les différents modèles de cascade d’énergie proposés dans la littérature<sup>[126],[152],[153],[155],[161]–[178]</sup>. Le modèle qui décrit apparemment le mieux les spectres obtenus par Meneveau et Sreenivasan<sup>[155]</sup> est une simple mesure de Bernoulli générée par un modèle binomial de poids  $p_1 = 0.7$  et  $p_2 = 0.3$  avec un rapport d’échelle  $r = 1/2$  (section 2.1.2).

Dans le contexte général d’une description multifractale de la turbulence pleinement développée, il est important de remarquer que l’hypothèse de similarité locale de Kolmogorov-Obukhov KO62 permet de déduire le spectre  $D(h)$  des exposants de Hurst du signal de vitesse à partir du spectre  $f(\alpha)$  des singularités de la dissipation d’énergie. En effet, si l’on note  $\langle \rangle$  la moyenne spatiale, la relation (4.1) se réécrit sous la forme<sup>[152],[258]</sup> :

$$\langle \delta v_l^{3q} \rangle = \langle V^q \epsilon_l^q \rangle, \quad \forall q > 0. \quad (4.2)$$

Comme la variable aléatoire  $V$  est indépendante de  $l$  et  $\epsilon_l$ , on obtient :

$$S_{3q}(l) = C_q K_\epsilon(q, l), \quad \forall q > 0, \quad (4.3)$$

où  $C_q = \langle V^q \rangle$  sont des constantes universelles et  $K_\epsilon(q, l)$  et  $S_q(l)$  représentent respectivement les fonctions de partition du formalisme multifractal continue de la dissipation en utilisant l'ondelette  $\psi_{(1)}^{(0)}$  (Eq. (2.88)) et les fonctions de structure du champ de vitesse (Eq. (2.60)). Si l'on suppose la multifractalité de ces deux champs, c'est-à-dire  $S_q(l) \sim l^{\zeta_q}$  et  $K_\epsilon(q, l) \sim l^{\tau_\epsilon(q)}$ , on obtient :

$$\zeta_{3q} = \tau_\epsilon(q) = \tau_\epsilon(q) + 1, \quad \forall q > 0. \quad (4.4)$$

Par transformation de Legendre (Eqs (2.24) et (2.61)), on établit la relation suivante :

$$\alpha = \frac{\partial \tau_\epsilon(q)}{\partial q} = \frac{\partial \zeta_{3q}}{\partial q} = 3 \frac{\partial \zeta_q}{\partial q} = 3h, \quad (4.5)$$

entre  $\alpha$  l'exposant de singularité de la dissipation et  $h$  l'exposant de Hurst du champ de vitesse.

L'hypothèse KO62 est largement controversée et est à l'origine de nombreux travaux entrepris pour essayer de la vérifier ou l'infirmier<sup>[155],[179]–[191]</sup>. Ces travaux reposent essentiellement sur la comparaison, pour les valeurs positives de  $q$ , du spectre  $\zeta_q$  des fonctions de structure avec le spectre  $\tau_\epsilon(q)$  de la dissipation. Il s'avère, par exemple, que les résultats de Meneveau et Sreenivasan obtenus sur la dissipation<sup>[152],[155]</sup> se situent systématiquement au dessous du spectre  $\zeta_q$  de la vitesse obtenu par Anselmet *et al*<sup>[136]</sup> et montrent ainsi un comportement apparemment plus intermittent. Mais l'accord entre ces courbes est suffisamment bon et ne permet pas de trancher quant à la validité de cette hypothèse. Une autre manière de tester l'hypothèse KO62 est de vérifier l'équation (4.3) sans supposer de comportement en loi de puissance en fonction des échelles. Pour cela, il suffit de représenter  $S_{3q}(l)$  en fonction de  $K_\epsilon(q, l)$  grâce au paramètre libre  $l$ , et de vérifier si l'on obtient bien un comportement linéaire. Un tel comportement a été obtenu de façon plus ou moins convaincante par différents groupes dont le groupe de Benzi et Ciliberto<sup>[147],[148],[262]</sup>, et ce pour différents signaux expérimentaux. Une autre méthode utilisée dans la littérature consiste à étudier le comportement dans les échelles des histogrammes des incréments de la vitesse conditionnés par la valeur de la dissipation d'énergie<sup>[179]–[183],[187]</sup>. En effet, si l'on note  $\langle X^q | y \rangle$  les moments d'ordre  $q$  de la variable aléatoire  $X$  conditionnés par la valeur  $y$  de la variable aléatoire  $Y$ , l'équation (4.1) conduit à la relation :

$$\langle \delta v_l^{3q} | \epsilon_l \rangle = C \epsilon_l^q, \quad (4.6)$$

où  $C$  est une constante universelle. Les différents travaux entrepris pour déterminer le comportement de ces quantités<sup>[179]–[183],[187]</sup>, ont mis en évidence un comportement linéaire des moments d'ordre  $3q$  de la vitesse conditionnée par la dissipation  $\epsilon_l$ , en fonction de  $\epsilon_l^q$ . Ces résultats sont à nouveau en accord avec l'hypothèse KO62. Notons cependant que cette comparaison n'est que partielle et qu'elle ne porte que sur les valeurs de  $q$  positives.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'utiliser la méthode M.M.T.O. pour déterminer le spectre des singularités du champ de dissipation de l'énergie et son éventuelle dépendance dans l'ondelette analysatrice utilisée. La détermination de ce spectre va nous permettre de tester la validité des différents modèles de cascade d'énergie proposés dans la littérature. Le calcul du propagateur  $G_{aa'}$ , qui rend compte du processus de cascade, ainsi que la détermination de son comportement dans les échelles, va nous conduire à discuter les propriétés d'auto-similarité et d'invariance d'échelle de la dissipation d'énergie. D'autre part, le calcul des spectres  $\tau_\epsilon(q)$  et  $f(\alpha)$  de la dissipation et des spectres  $\tau_v(q)$  et  $D(h)$  de la vitesse obtenus à partir des fonctions de partition restreintes aux maxima de la T.O., va nous permettre d'étendre la relation (4.4) aux valeurs négatives<sup>[94],[96],[97],[100],[249],[266],[267]</sup> de  $q$  :

$$\tau_\epsilon(q) = \tau_v(3q) , \quad \forall q \in \mathbf{R} \quad (4.7)$$

et par transformation de Legendre, de tester expérimentalement la validité de l'hypothèse KO62 à travers la relation suivante entre les spectres de singularités de la dissipation et de la vitesse<sup>[94],[96],[97],[100],[249],[266],[267]</sup> :

$$\begin{cases} \alpha = 3h , \\ f(\alpha = 3h) = D(h) . \end{cases} \quad (4.8)$$

Ces deux relations vont donc nous permettre de généraliser la comparaison des propriétés multifractales de la dissipation et de la vitesse aux régions où ces deux champs sont les plus réguliers. Enfin, la relation (4.1) implique aussi une relation entre les propagateurs du champ de vitesse ( $G_{aa'}^v$ ) et de la dissipation d'énergie ( $G_{aa'}^\epsilon$ ) :

$$G_{aa'}^\epsilon(x) = \frac{1}{3} G_{aa'}^v\left(\frac{x}{3}\right) , \quad \forall a, a' \in \mathbf{R}_{+*} . \quad (4.9)$$

Cette relation va nous permettre de discuter de manière originale l'hypothèse KO62 et d'apporter certaines preuves de sa non validité.

## 4.2 Analyse multifractale du champ de dissipation de l'énergie à l'aide de la méthode M.M.T.O. : remise en cause de l'invariance d'échelle

### 4.2.1 Définition

Dans la théorie de Kolmogorov, le transfert de l'énergie cinétique des grandes vers les petites échelles se produit jusqu'à la plus petite échelle du mouvement où se produit la dissipation, c'est-à-dire à l'échelle de Kolmogorov  $\eta$ . La dissipation locale est définie par le champ :

$$\epsilon(x, t) = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad (4.10)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide considérée et les  $v_j$  sont les composantes du champ de vitesse à l'instant  $t$ . Dans la pratique, il est bien sûr difficile d'accéder directement à cette quantité qui fait intervenir les trois composantes du champ de vitesse. On la remplace généralement au moyen de l'hypothèse d'isotropie de l'écoulement et de l'hypothèse de Taylor par le substitut suivant :

$$\epsilon'(t) = 15\nu U^{-2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2, \quad (4.11)$$

où  $v(t)$  est la composante longitudinale de la vitesse mesurée expérimentalement. Cette équation définit donc la dissipation comme le carré de la dérivée temporelle du signal de vitesse. Cette quantité est délicate à estimer car expérimentalement il est difficile de résoudre le signal à des échelles inférieures à l'échelle dissipative où celui-ci est doux. Il va donc nous falloir être très vigilant quant à la sensibilité de nos résultats vis à vis du schéma numérique de différentiation utilisé pour calculer  $\epsilon(t)$ . Nous avons calculé  $\epsilon'$  par trois méthodes de différences finies :

- $\epsilon'_1(t) = \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_1 \right]^2$  avec  $\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_1 = v(t + \delta t) - v(t)$  ;
- $\epsilon'_2(t) = \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_2 \right]^2$  avec  $\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_2 = [v(t + 5\delta t) - v(t)]/5$  ;
- $\epsilon'_3(t) = \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_3 \right]^2$  avec  $\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_3 = [v(t + 3\delta t) + v(t + 2\delta t) + v(t + \delta t) - v(t) - v(t - \delta t) - v(t - 2\delta t)]/9$  ;

où  $\delta t$  correspond au pas d'échantillonnage. Sur la figure 4.1, nous avons représenté  $\epsilon'$  obtenue à partir du signal de vitesse enregistré à la soufflerie de Modane, à l'aide des trois méthodes de différentiation précédentes. Ces signaux qui ont la même allure générale, présentent des amplitudes beaucoup plus importantes pour  $\epsilon'_1$  (la queue de l'histogramme de  $\epsilon'_1$  est en fait

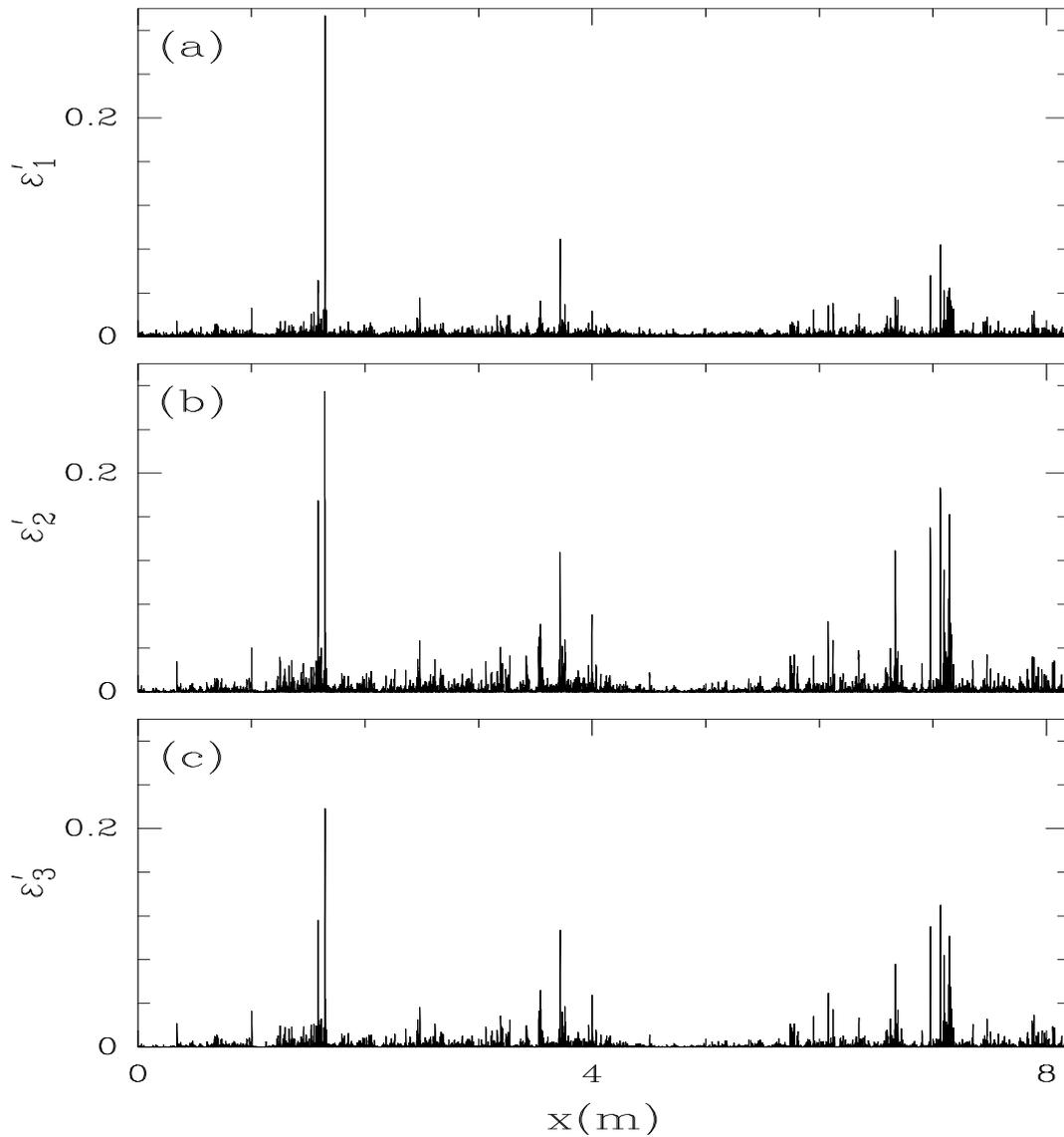


FIG. 4.1 – Dissipation de l'énergie calculée à partir du signal de Modane à l'aide des trois méthodes de différences finies définies dans le texte. Ces signaux ont la même allure générale mais l'écart type de l'histogramme des valeurs de  $\epsilon'$  augmente quand le nombre de points pris en compte dans la méthode de différentiation augmente.

très étalée à cause du bruit numérique introduit par le schéma de différentiation utilisé). Par contre, l'écart type de l'histogramme de ces amplitudes augmente avec l'ordre du schéma de différentiation pour se stabiliser définitivement lorsque cet ordre atteint des valeurs supérieures ou égales à 5 : l'écart type obtenu pour  $\epsilon'_2$  et  $\epsilon'_3$  sont du même ordre de grandeur, contrairement à celui obtenu pour  $\epsilon'_1$  qui est près de dix fois plus petit.

## 4.2.2 Application de la méthode M.M.T.O.

### • Etude du comportement des fonctions de partition suivant le schéma de dérivation utilisé

Nous avons appliqué la méthode M.M.T.O. sur le signal de dissipation d'énergie obtenu par les trois méthodes de différentiation précédentes. Les différentes étapes de cette étude sont illustrées sur la figure 4.2 où nous avons représenté une partie du signal de Modane d'une longueur approximative de deux échelles intégrales, la dissipation  $\epsilon'_3$  correspondante, sa transformée en ondelettes en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ainsi que l'ensemble des lignes de maxima correspondant. C'est à partir du "squelette" de la T.O. ainsi défini que nous avons calculé les fonctions de partition (restreintes aux maxima) définies par les équations (2.96) et (2.98). Ces fonctions sont représentées sur les figures 4.3a et 4.3b où nous avons reporté respectivement les courbes  $\log_2(Z(q, a/\eta))$  et  $\alpha(q, a/\eta)$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ , pour quelques valeurs de  $q$  et pour les trois définitions de la dissipation  $\epsilon'_1$  (symboles  $(\times)$ ),  $\epsilon'_2$  (symboles  $(\circ)$ ) et  $\epsilon'_3$  (symboles  $(\bullet)$ ). Une évolution est visible selon la méthode de différentiation choisie. Pour  $q < 0$ , la pente de ces courbes est clairement plus faible si l'ordre du schéma n'est pas suffisamment important. L'exposant  $\alpha_{max}$  (caractérisant les régions où la dissipation est la plus "raréfiée") est estimé égal à  $\alpha_{max} = 1$  pour  $\epsilon'_1$ , valeur qui est significativement inférieure à  $\alpha_{max} = 1.6$ , valeur obtenue pour  $\epsilon'_2$  et  $\epsilon'_3$ . Pour  $q > 0$ , la différence est plus visible sur la figure 4.3b où  $\alpha(q, a/\eta)$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$  ne présente pas vraiment de comportement linéaire quand on considère  $\epsilon'_1$ . Si la pente locale obtenue à petite échelle est équivalente à celle obtenue avec  $\epsilon'_2$  et  $\epsilon'_3$ , elle ne cesse d'augmenter pour tendre vers 1 à grande échelle. Cette tendance est aussi présente pour  $\epsilon'_2$  et  $\epsilon'_3$  mais est nettement moins importante. Ces observations traduisent simplement le fait que pour  $\epsilon'_1$ , les fluctuations de petite amplitude qui dominent dans les fonctions de partition d'ordre  $q$  négatif, sont masquées par la moyenne du bruit numérique. Pour  $q > 0$ , il y a compétition entre deux termes : le comportement trivial de la moyenne ( $\alpha = 1$ ) qui domine à grande échelle et le comportement plus singulier ( $\alpha < 1$ ) des fluctuations les plus importantes à petite échelle. Les deux autres méthodes ( $\epsilon'_2$  et  $\epsilon'_3$ ) semblent diminuer

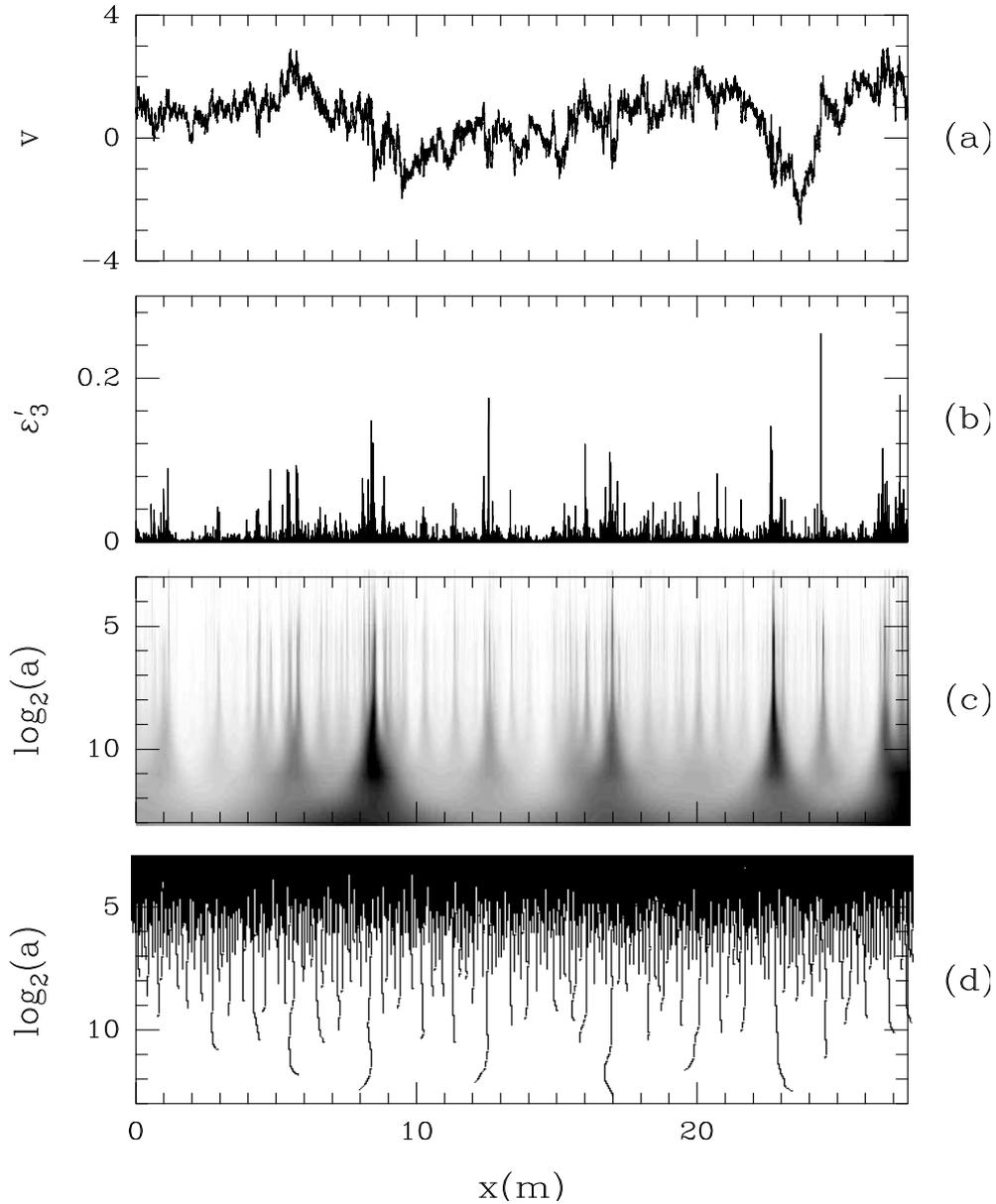


FIG. 4.2 – Lignes de maxima de la transformée en ondelettes de la dissipation d'énergie. a) Signal de vitesse de Modane. b) Dissipation  $\epsilon'_3$  correspondante. c) Transformée en ondelettes de  $\epsilon'_3$  obtenue avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$  : l'amplitude est codée avec une palette de 32 niveaux de gris, du blanc ( $|T_\psi(x, a)| = 0$ ) au noir ( $|T_\psi(x, a)| = \max_x |T_\psi(x, a)|$ ) et ce, indépendamment à chaque échelle. d) Squelette de la T.O. défini par l'ensemble des lignes de maxima du module de la T.O. La méthode M.M.T.O. ne prend en compte que ces coefficients pour le calcul des fonctions de partition (Eq. (2.96)).

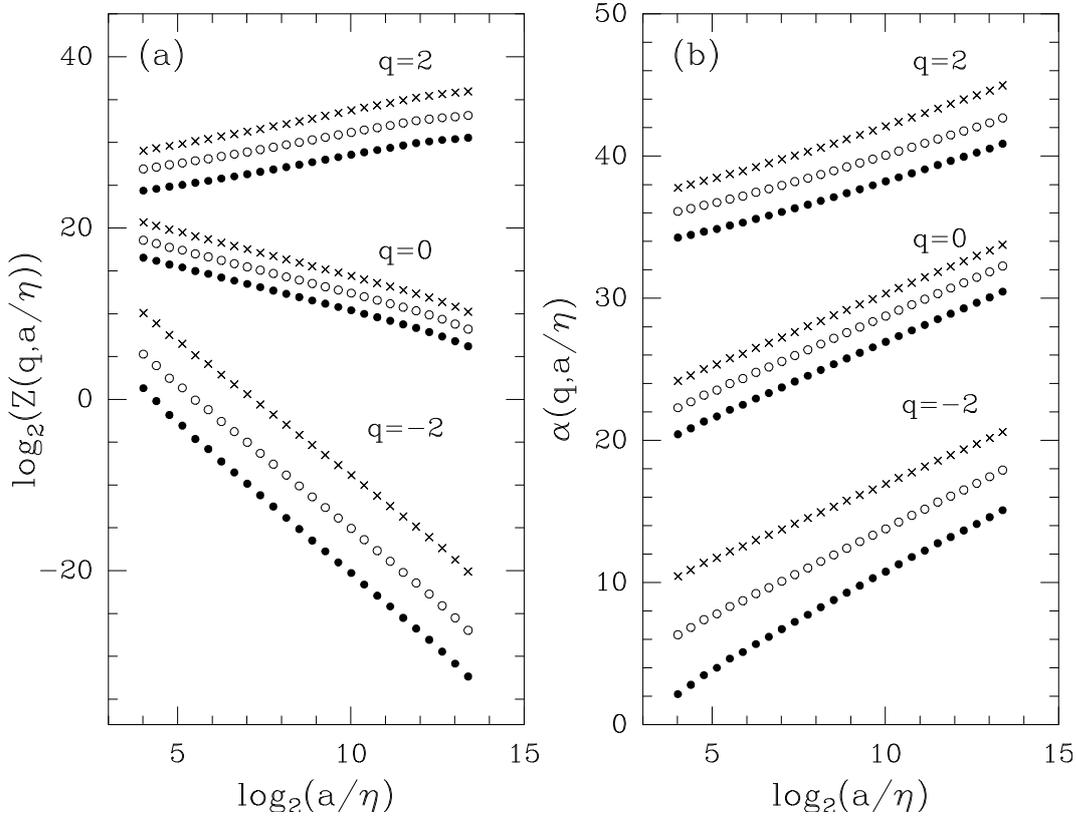


FIG. 4.3 – Comportement des fonctions de partition suivant la définition de la dissipation choisie :  $\epsilon'_1$  ( $\times$ ),  $\epsilon'_2$  ( $\circ$ ) et  $\epsilon'_3$  ( $\bullet$ ). a)  $\log_2(Z(q, a/\eta))$  (Eq. (2.96)) en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . b)  $\alpha(q, a/\eta) = h(q, a/\eta) + 1$  (Eq. (2.98)) en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . L'ondelette analysatrice choisie est l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$ .

l'effet de la moyenne et permettent de faire ressortir les propriétés d'auto-similarité des fluctuations sur une plus grande gamme d'échelles.

Nous avons reproduit cette analyse de la dissipation en utilisant maintenant l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Cette ondelette qui a son premier moment nul, est aveugle aux comportements constants et donc à la moyenne du signal. Sur la figure 4.4 est représenté le même signal que sur la figure 4.2, l'énergie  $\epsilon'_3$  correspondante ainsi que sa transformée en ondelettes et l'ensemble des lignes de maxima obtenu en utilisant cette nouvelle ondelette. Le nombre des lignes de maxima est maintenant plus important car chaque singularité donne typiquement naissance à deux fois plus de lignes de maxima. Les courbes  $\log_2(Z(q, a/\eta))$  et  $\alpha(q, a/\eta)$  obtenues à partir du squelette défini par ces maxima, sont représentées respec-

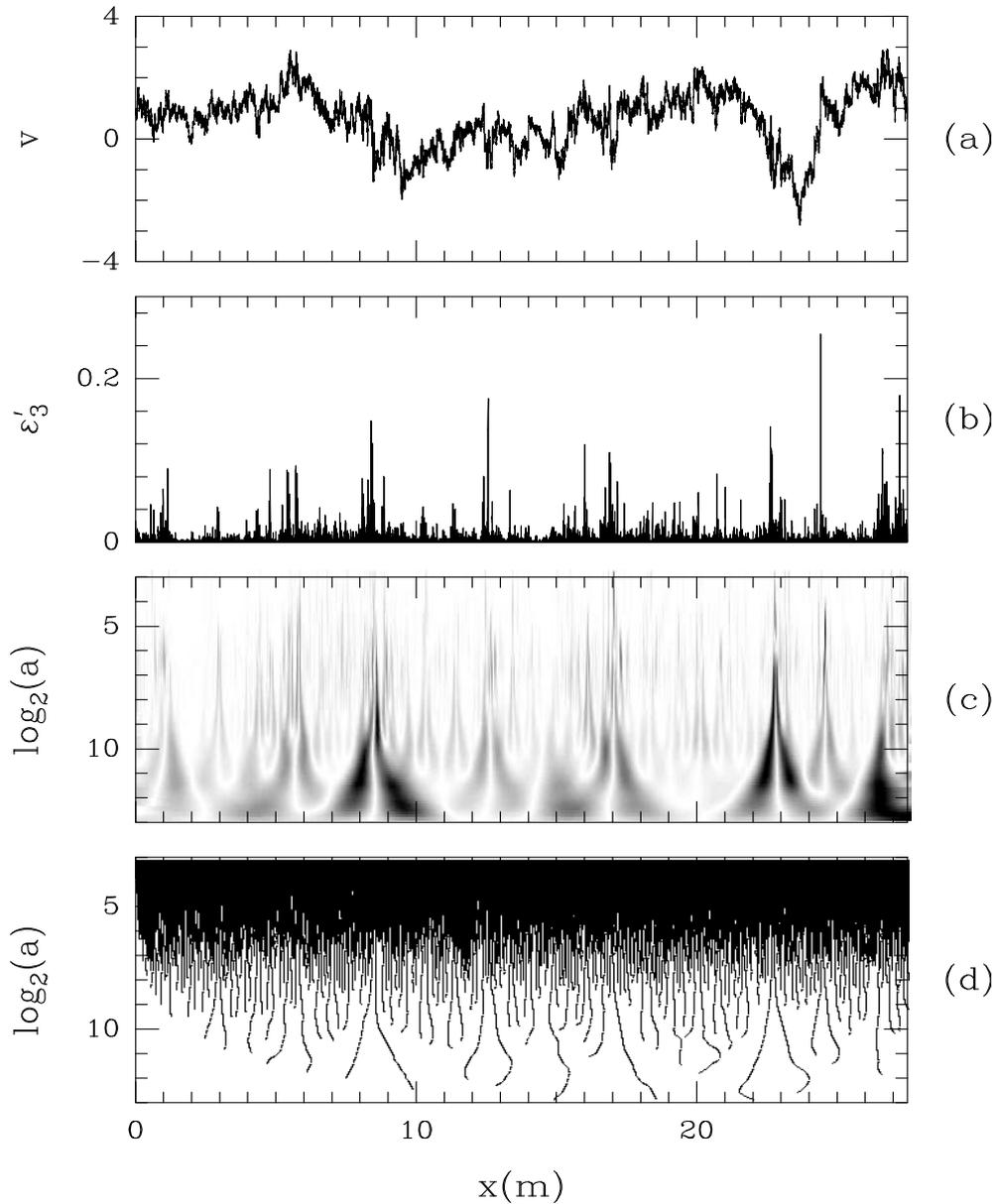


FIG. 4.4 – Lignes de maxima de la transformée en ondelettes de la dissipation d'énergie. a) Signal de vitesse de Modane. b) Dissipation  $\epsilon'_3$  correspondante. c) Transformée en ondelettes de  $\epsilon'_3$  obtenue avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  : l'amplitude est codée avec une palette de 32 niveaux de gris, du blanc ( $|T_\psi(x, a)| = 0$ ) au noir ( $|T_\psi(x, a)| = \max_x |T_\psi(x, a)|$ ) et ce, indépendamment à chaque échelle. d) Squelette de la T.O. défini par l'ensemble des lignes de maxima du module de la T.O..

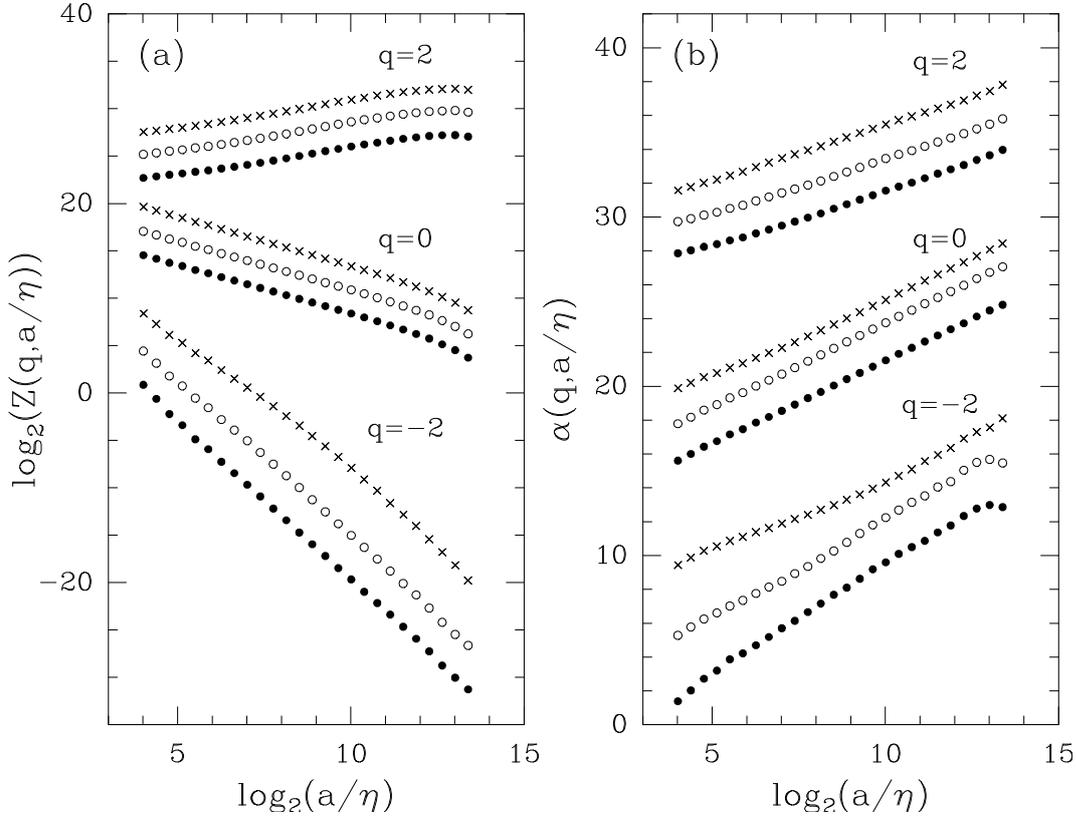


FIG. 4.5 – Comportement des fonctions de partition suivant la définition de la dissipation choisie :  $\epsilon'_1$  ( $\times$ ),  $\epsilon'_2$  ( $\circ$ ) et  $\epsilon'_3$  ( $\bullet$ ). a)  $\log_2(Z(q, a/\eta))$  (Eq. (2.96)) en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . b)  $\alpha(q, a/\eta) = h(q, a/\eta) + 1$  (Eq. (2.98)) en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . L'ondelette analysatrice choisie est l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

tivement sur les figures 4.5a et 4.5b pour les trois énergies  $\epsilon'_1$  (symboles ( $\times$ )),  $\epsilon'_2$  (symboles ( $\circ$ )) et  $\epsilon'_3$  (symboles ( $\bullet$ )). Pour les valeurs de  $q$  positives, ces fonctions présentent maintenant le même comportement, indépendamment du schéma de différentiation utilisé. Par contre, pour  $\epsilon'_1$ , il apparaît un changement de comportement aux petites échelles quand  $q$  tend vers 0, comportement qui se propage vers les grandes échelles lorsque  $q$  devient négatif. Ce comportement linéaire anormal, induit par la moyenne du bruit numérique, est perceptible pour  $\epsilon'_2$  mais a complètement disparu pour  $\epsilon'_3$ . Ainsi, l'utilisation de l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  permet d'annuler l'effet de la moyenne qui domine à grande échelle dans les fonctions de partition obtenues avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$ . Le comportement linéaire qui apparaît à petite échelle pour les valeurs de  $q$  petites ou négatives, montre le caractère plus singulier ou plus

“bruité” de la dissipation quand on prend en compte de moins en moins de points dans l’estimation de la dérivée du signal de vitesse. Cependant, il est important de remarquer que le comportement à grande échelle est le même pour les trois méthodes d’estimation.

### Remarques

- Nous avons répété cette étude sur un signal provenant de la même soufflerie, également enregistré par Gagne et ses collaborateurs, caractérisé par un nombre de Reynolds légèrement inférieur ( $R_\lambda = 2780$ ) et un pas d’échantillonnage beaucoup plus important,  $\Delta x \approx 12\eta$  (au lieu de  $1.2\eta$ ). Les trois schémas de dérivation précédents conduisent cette fois-ci à des résultats équivalents qui correspondent à ceux obtenus avec  $\epsilon'_3$ .
- Par contre, cette même étude effectuée sur un signal provenant d’un jet turbulent de nombre de Reynolds  $R_\lambda = 835$  et dont le pas d’échantillonnage est  $2\eta$ , montre à nouveau une dépendance suivant la définition de la dissipation utilisée. Notons tout de même que cette évolution est beaucoup moins importante que celle observée précédemment et que les fonctions de partition présentent un changement de comportement (brisure de l’invariance d’échelle) aux petites échelles pour les valeurs de  $q$  négatives. Pour ces valeurs, un comportement linéaire est seulement visible à grande échelle et ceci pour les trois méthodes de différentiation utilisées.
- Dans leur étude détaillée de la dissipation d’énergie, Meneveau et Sreenivasan<sup>[155]</sup> ont eux aussi comparé les résultats obtenus par différentes méthodes de dérivation. Ils ont effectué cette étude sur différents signaux expérimentaux de vitesse pour des nombres de Reynolds  $R_\lambda$  variant de 50 à 1500, et des pas d’échantillonnage allant de 1 à  $3\eta$ . Ces études n’ont pas mis en évidence de dépendance des résultats suivant la méthode de différentiation utilisée.

Cette sensibilité à la méthode de différentiation, qui n’apparaît que sur certains signaux, pourrait résulter de la méthode d’acquisition des données susceptible d’entraîner l’apparition d’un bruit à haute fréquence. Quand on prend le carré de la dérivée de ce signal (Eq. (4.11)), la dissipation obtenue présente des fluctuations de faible amplitude dues à ce bruit qui dominent les fonctions de partition d’ordre  $q$  négatif. D’autre part, le poids relatif des fluctuations physiques de forte amplitude par rapport à la valeur moyenne est moins important à grande échelle qu’à petite échelle et les fonctions de partition d’ordre  $q$  positif ne présentent pas de réelle loi de puissance mais plutôt un comportement transitoire résultant de la compétition de ces deux termes. L’utilisation de méthodes de différentiation d’ordre suffisamment élevé permet de diminuer ce bruit présent à petite échelle. Comme

les résultats obtenus pour  $\epsilon'_3$  semblent robustes vis-à-vis d'une nouvelle augmentation du nombre de points pris en compte par la méthode de différentiation, c'est cette définition que nous prendrons dorénavant pour la dissipation d'énergie.

**• Etude du comportement des fonctions de partition suivant l' ondelette analysatrice utilisée**

Sur la figure 4.6a, nous avons reporté les fonctions de partition  $\log_2(Z(q, a/\eta))$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ , obtenues à partir de l'énergie  $\epsilon'_3$  en utilisant les ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles ( $\square$ )),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\bullet$ )) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles ( $\circ$ )). Ces courbes présentent un comportement linéaire relativement bien défini. Les pentes obtenues par régression linéaire dans le domaine inertiel sont reportées en lignes continues. La pente obtenue pour  $q = 0$  est égale à  $\tau(0) = -1$  quelle que soit l'ondelette utilisée. Par contre, pour les autres valeurs de  $q$ , cette pente diffère quand on utilise  $\psi_{(3)}^{(0)}$  par rapport à celles obtenues de façon consistante avec  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . Cette dépendance suivant l'ondelette analysatrice est beaucoup plus visible sur la figure 4.6b, où nous avons représenté la fonction  $\alpha(q, a/\eta)$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$  pour différentes valeurs de  $q$ . La valeur de la pente de ces courbes, qui est égale à l'exposant de singularité  $\alpha(q)$ , est systématiquement supérieure lorsqu'on utilise  $\psi_{(3)}^{(0)}$  au lieu de  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (ou  $\psi_{(3)}^{(2)}$ ), et ceci quelle que soit la valeur de  $q$  considérée. Pour  $q = 0$ , l'exposant de singularité mesuré est  $\alpha(0) = 1.07 + -0.01$  avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$  et  $0.99 + -0.01$  avec  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . Remarquons cependant que ces courbes ne sont pas vraiment linéaires et que la pente locale varie sensiblement. En particulier l'exposant  $\alpha(q)$  tend vers 1 quand on se déplace vers les grandes échelles principalement lorsqu'on utilise  $\psi_{(3)}^{(0)}$ .

Les résultats de cette analyse sont résumés sur la figure 4.7, où nous avons représenté les différents spectres multifractals. L'utilisation des ondelettes  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\bullet$ )) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles ( $\circ$ )) donne des résultats totalement similaires mais systématiquement différents de ceux obtenus avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles ( $\square$ )). Cette différence peu visible sur le spectre  $\tau(q)$  (Fig. (4.7a)), est évidente pour les autres spectres présentées ( $D_q$ ,  $\alpha(q)$  et  $f(\alpha)$ ). Le spectre des dimensions fractales généralisées  $D_q$  (Fig. 4.7b) obtenu avec  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (ou  $\psi_{(3)}^{(2)}$ ), diverge en  $q = 1$  et est inférieur à celui estimé avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$  qui lui ne diverge pas. Cette divergence est la conséquence du fait que  $\tau(1) \neq 0$  lorsqu'on utilise  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ou  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . La fonction  $\alpha(q) = h(q) + 1$  (Eq. (2.99)) obtenue avec les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  présente un comportement linéaire remarquable pour les valeurs de  $q$  comprises entre  $-3$  et  $3$ , mais avec une pente totalement différente de celle obtenue avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (Fig. 4.7c). Quand  $q \rightarrow +\infty$ , les résultats semblent converger vers la même valeur  $\alpha_{min} = 0.42 + -0.03$  quelle

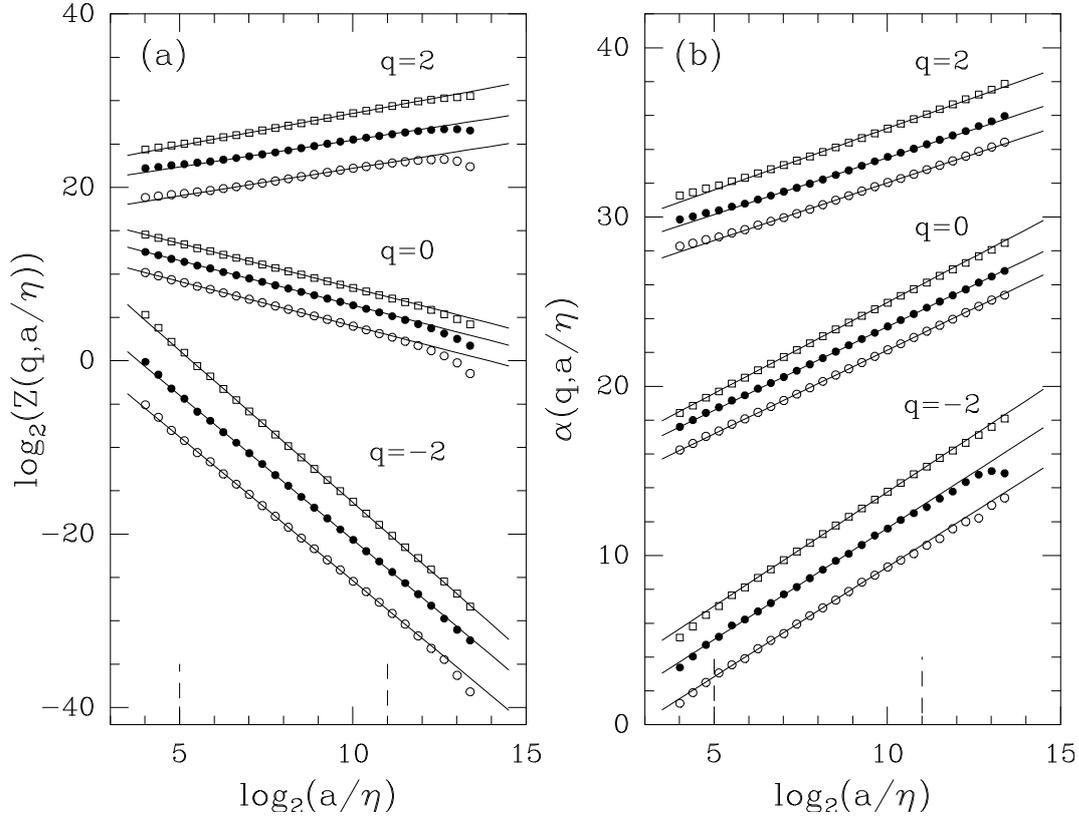


FIG. 4.6 – Comportement des fonctions de partition de la dissipation  $\epsilon'_3$  suivant l'ondelette analysatrice choisie :  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ( $\square$ ),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\circ$ ). a)  $\log_2(Z(q, a/\eta))$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . b)  $\alpha(q, a/\eta)$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . Les lignes continues correspondent aux pentes estimées par régression linéaire dans le domaine compris entre les lignes verticales discontinues.

que soit l'ondelette utilisée. Sur la figure 4.7d, nous avons représenté les spectres  $f(\alpha)$  des singularités obtenus par transformation de Legendre des spectres  $\tau(q)$ . Ces spectres, qui sont équivalents aux spectres canoniques, atteignent leur maximum égal à 1 en des valeurs différentes de  $\alpha$  :  $\alpha(0) = 1.07 \pm 0.01$  pour  $\psi_{(3)}^{(0)}$  et  $\alpha(0) = 0.99 \pm 0.01$  pour  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . Les spectres obtenus avec ces deux dernières ondelettes ne sont pas tangents à la diagonale (ligne discontinue) et sont donc caractéristiques d'un processus non conservatif ( $\tau(1) \neq 0$ ). Pour comparaison, nous avons représenté en ligne continue les résultats obtenus par Meneveau et Sreenivasan<sup>[155]</sup> sur un signal de turbulence en couche limite par algorithme de comptage de boîtes. Les spectres  $\tau(q)$  et  $D_q$  sont apparemment en bon accord avec ceux obtenus avec les ondelettes pour les valeurs de  $q$  positives mais diffèrent sensiblement

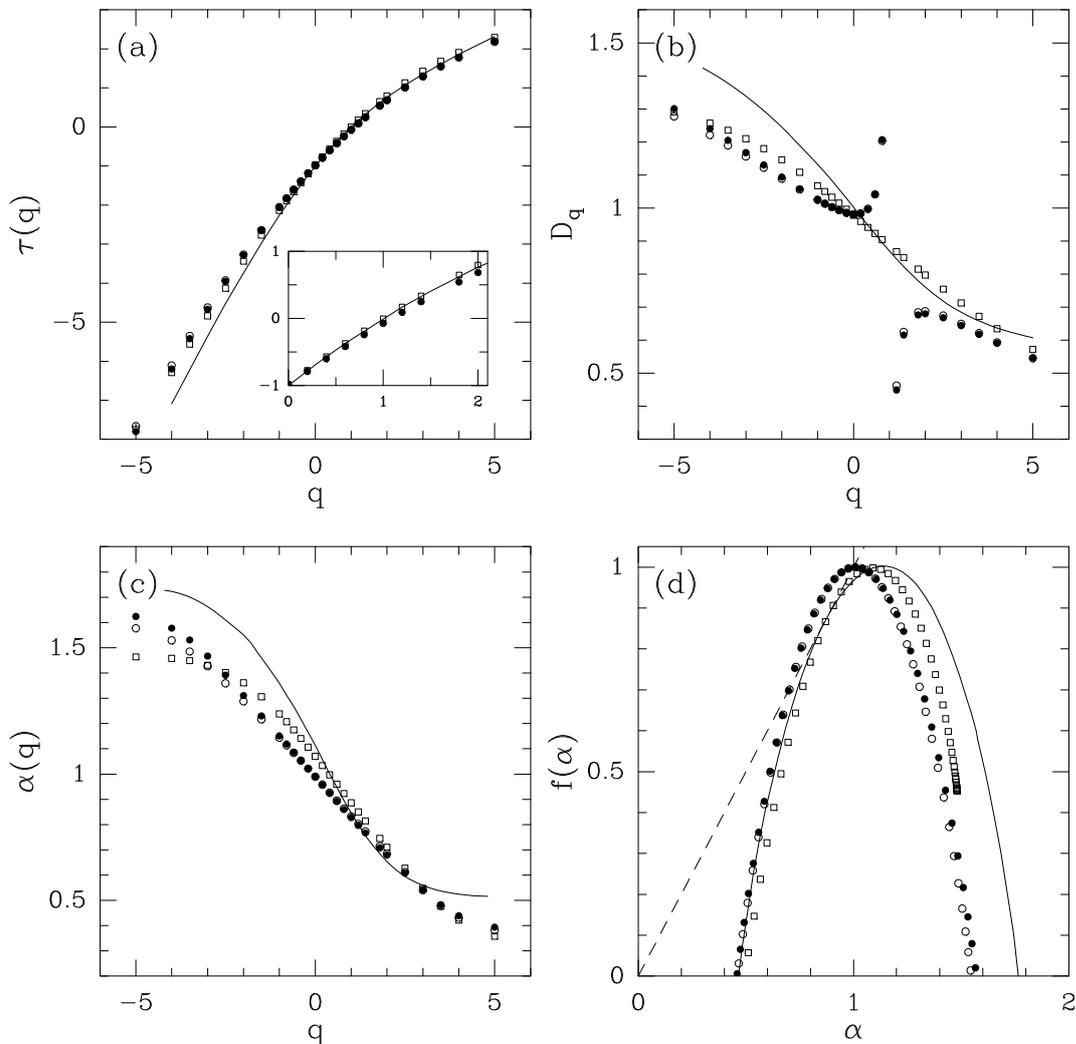


FIG. 4.7 – Spectres multifractals de la dissipation  $\epsilon'_3$  obtenus en utilisant la méthode M.M.T.O. avec les ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ( $\square$ ),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\circ$ ). Les lignes continues correspondent aux résultats obtenus par Meneveau et Sreenivasan<sup>[155]</sup> sur un signal turbulent de couche limite avec l'algorithme de comptage de boîtes. a) Spectre  $\tau(q)$ . b) Spectre des dimensions fractales généralisées  $D_q$ . c) Fonction  $\alpha(q)$ . d) Spectre  $f(\alpha)$  des singularités. La ligne discontinue dans la figure (d) correspond à la diagonale.

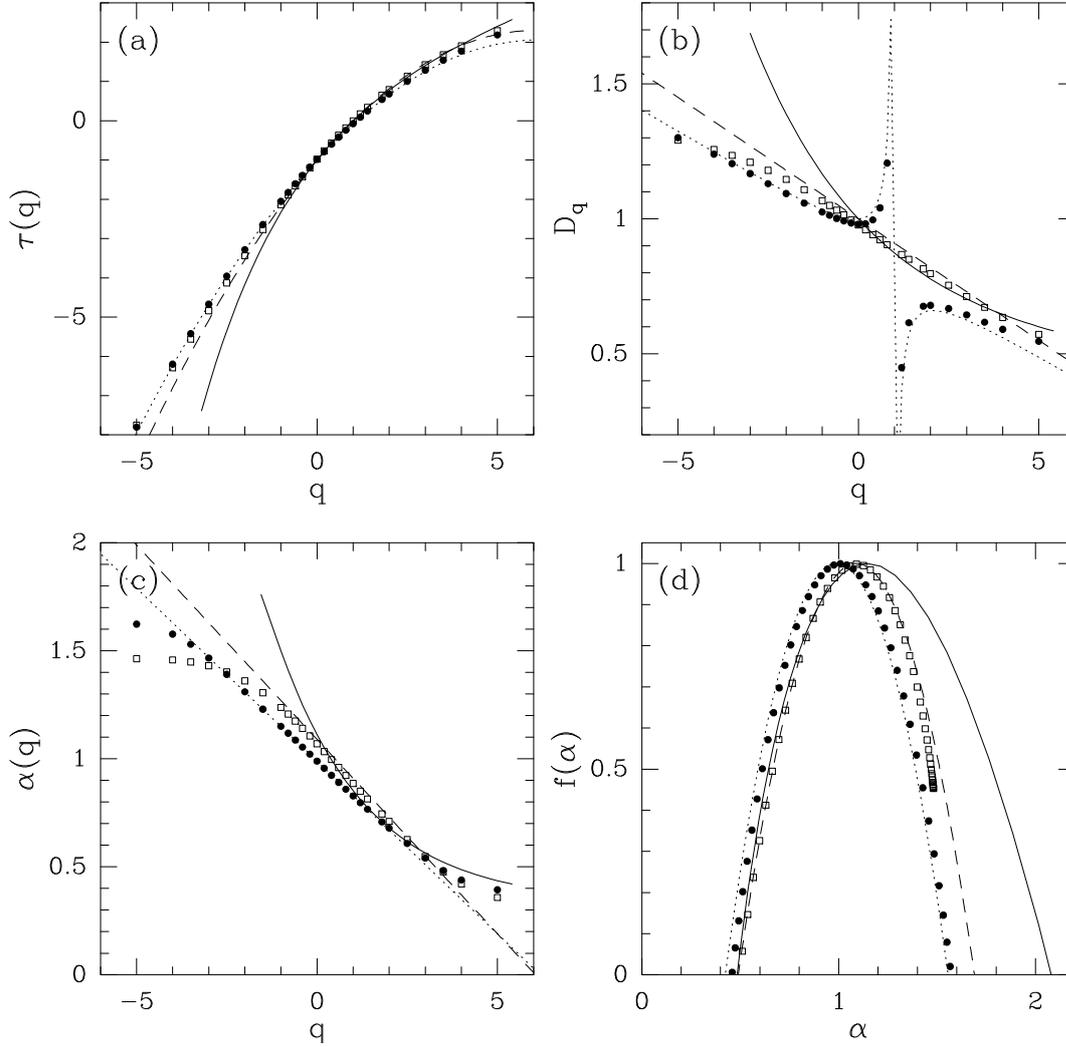


FIG. 4.8 – Spectres multifractals de la dissipation  $\epsilon'_3$ . Comparaison des résultats obtenus avec la méthode M.M.T.O. en utilisant les ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ( $\square$ ) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) avec les prédictions théoriques de différents modèles de cascade d'énergie (section 2.1.4) : le modèle log-Poisson avec les paramètres  $\beta = \gamma = 2/3$  et  $\lambda = 2$  (lignes continues), et le modèle log-normal en prenant les paramètres  $\sigma^2 = 0.18$  et  $m = -(1 + \sigma^2/2) = -1.09$  pour  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (lignes discontinues) et  $\sigma^2 = 0.16$  et  $m = -0.99$  pour  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (lignes en pointillés). a) Spectre  $\tau(q)$ . b) Spectre des dimensions fractales généralisées  $D_q$ . c) Fonction  $\alpha(q)$ . d) Spectre  $f(\alpha)$  des singularités.

pour les autres valeurs. Par contre, la fonction  $\alpha(q) = \partial\tau/\partial q$  a une forme totalement différente avec une pente en  $q = 0$  beaucoup plus importante. La partie singulière du spectre  $f(\alpha)$  des singularités ( $\alpha < 1$ ) est en bon accord avec nos résultats obtenus avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$ . La partie "régulière" de ce spectre ( $\alpha > 1$ ) met en évidence la présence de comportements plus réguliers et  $\alpha_{max} = 1.78 + -0.03$  est plus important. Notons cependant que les différences observées entre nos résultats obtenus avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$  et ceux de Meneveau et Sreenivasan s'atténuent quand on estime ces spectres sur une gamme déplacée vers les petites échelles. La partie la plus sensible à ce déplacement concerne les valeurs de  $q$  négatives qui correspondent à la partie du spectre  $f(\alpha)$  concernant les valeurs de  $\alpha > 1$ . Ces résultats montrent que le champ de dissipation d'énergie est singulier partout ( $\max f(\alpha) = f(\alpha(0)) = 1$ ), mais avec un exposant de singularité le plus fréquent  $\alpha(q = 0)$  différent suivant que l'on utilise  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ou des ondelettes possédant au moins un moment nul. Or, nous avons vu dans le chapitre 2, que pour toute mesure auto-similaire invariante d'échelle, les spectres multifractals doivent être indépendants de l'ondelette analysatrice utilisée. Ainsi, la dépendance observée en appliquant la méthode M.M.T.O. à la dissipation est caractéristique d'un comportement des fonctions de partition dans les échelles plus complexe qu'une simple loi de puissance, ce qui remet en cause l'invariance d'échelle de ce champ.

Sur la figure 4.8, nous avons comparé nos résultats obtenus avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles  $\square$ ) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles  $\bullet$ ), avec les prédictions théoriques du modèle log-Poisson (lignes continues) en prenant les paramètres  $\beta = \gamma = 2/3$ ,  $\lambda = 2$  proposés par She et Waymire<sup>[233]</sup>, et celles du modèle log-normal en prenant les paramètres  $\sigma^2 = 0.18$  et  $m = -(1 + \sigma^2/2) = -1.09$  pour  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (lignes discontinues) et  $\sigma^2 = 0.16$  et  $m = -0.99$  pour  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (lignes en pointillés). Le modèle log-Poisson permet de bien approcher les données obtenues pour  $\tau(q)$ ,  $D_q$  et  $f(\alpha)$  avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$  pour les valeurs de  $q$  positives. Par contre, la fonction  $\alpha(q)$  n'a pas du tout le même comportement et ceci quelque soit  $q$ . D'un autre côté, l'approximation log-normale permet de très bien modéliser toute ces fonctions pour des valeurs de  $|q| \leq 3$  et ceci quelle que soit l'ondelette analysatrice utilisée. Remarquons que le processus log-normal utilisé pour modéliser les données obtenues avec  $\psi_{(3)}^{(1)}$  n'est pas conservatif et ne vérifie pas  $\tau(1) = 0$ . La saturation observée pour  $|q| > 3$  de la fonction  $\alpha(q)$  (Fig. 4.8c), nous donne les exposants  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$  des deux singularités extrêmes (la plus forte et la plus faible) présentes dans notre échantillon statistique. Cette déviation par rapport au spectre  $\alpha(q)$  linéaire (Eq. (2.43)) a déjà été observée dans la figure 2.24c lors de nos tests de la méthode M.M.T.O. sur des réalisations d'un processus de cascade

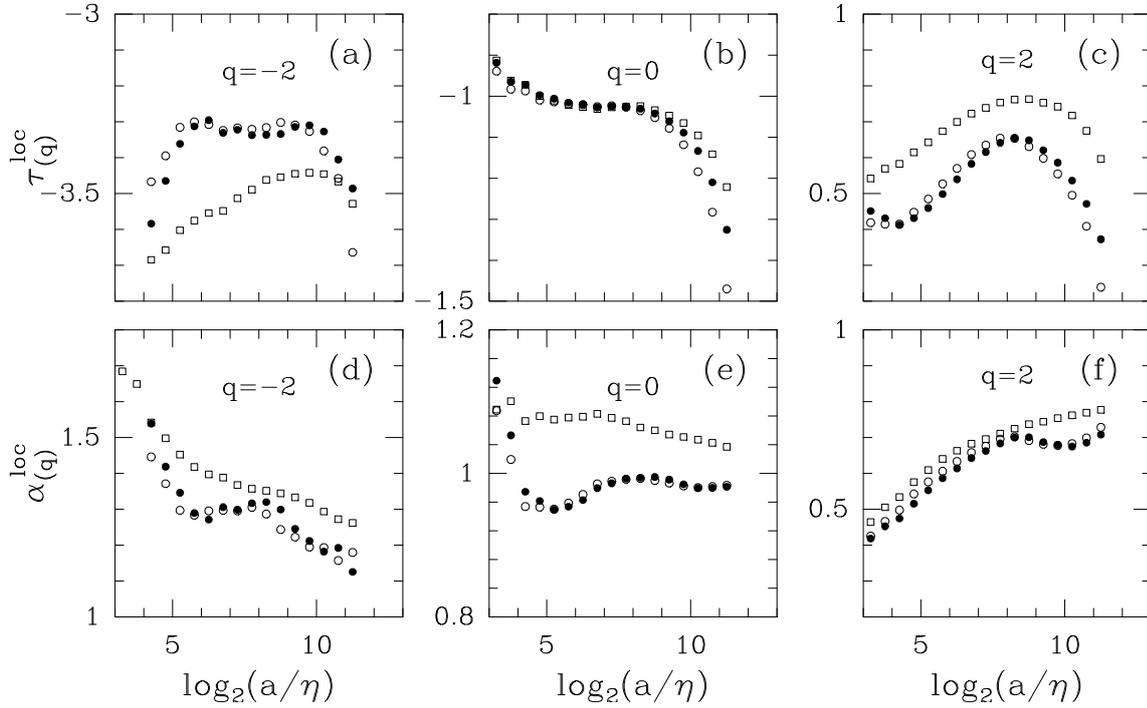


FIG. 4.9 – Pente locale des courbes  $\log_2(Z(q, a/\eta))$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$  (Fig. 4.6a) pour les ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ( $\square$ ),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\circ$ ) : a)  $q = -2$ , b)  $q = 0$  et c)  $q = 2$ . Pente locale des courbes  $\alpha(q, a/\eta)$  en fonction de  $\log_2(a/\eta)$  (Fig. 4.6b) : d)  $q = -2$ , e)  $q = 0$  et f)  $q = 2$ . La fenêtre utilisée pour calculer ces pentes locales a une largeur de deux dyades.

“log-normale”. Nous avons vu qu’elle est due à un effet de statistique finie et qu’elle est prévisible théoriquement. Toutefois, tous ces modèles sont auto-similaires et invariants d’échelle et prédisent des spectres multifractals indépendants de l’ondelette analysatrice utilisée, ce qui n’est pas le cas dans notre étude de la dissipation.

Pour essayer d’illustrer cette possible brisure de l’invariance d’échelle de la dissipation d’énergie, nous avons représenté sur la figure 4.9, les fonctions  $\tau^{\text{loc}}(q, a/\eta) = \partial \ln(Z(q, a/\eta)) / \partial \ln(a/\eta)$  et  $\alpha^{\text{loc}}(q, a/\eta) = \partial \alpha(q, a/\eta) / \partial \ln(a/\eta)$  pour les valeurs de  $q = -2, 0$  et  $2$ . Ces pentes locales sont estimées sur une fenêtre de taille égale à deux dyades et les symboles correspondent aux ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles ( $\square$ )),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\bullet$ )) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles ( $\circ$ )). Les fonctions  $\tau^{\text{loc}}(q)$  obtenues avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ne présentent pas de plateau pour  $q \neq 0$ . Quelque soit  $q$ , les fonctions  $\alpha^{\text{loc}}(q)$  correspondantes semblent tendre à grande échelle vers la valeur  $\alpha = 1$  et ne présentent pas de plateau sauf pour  $q = 0$  où la

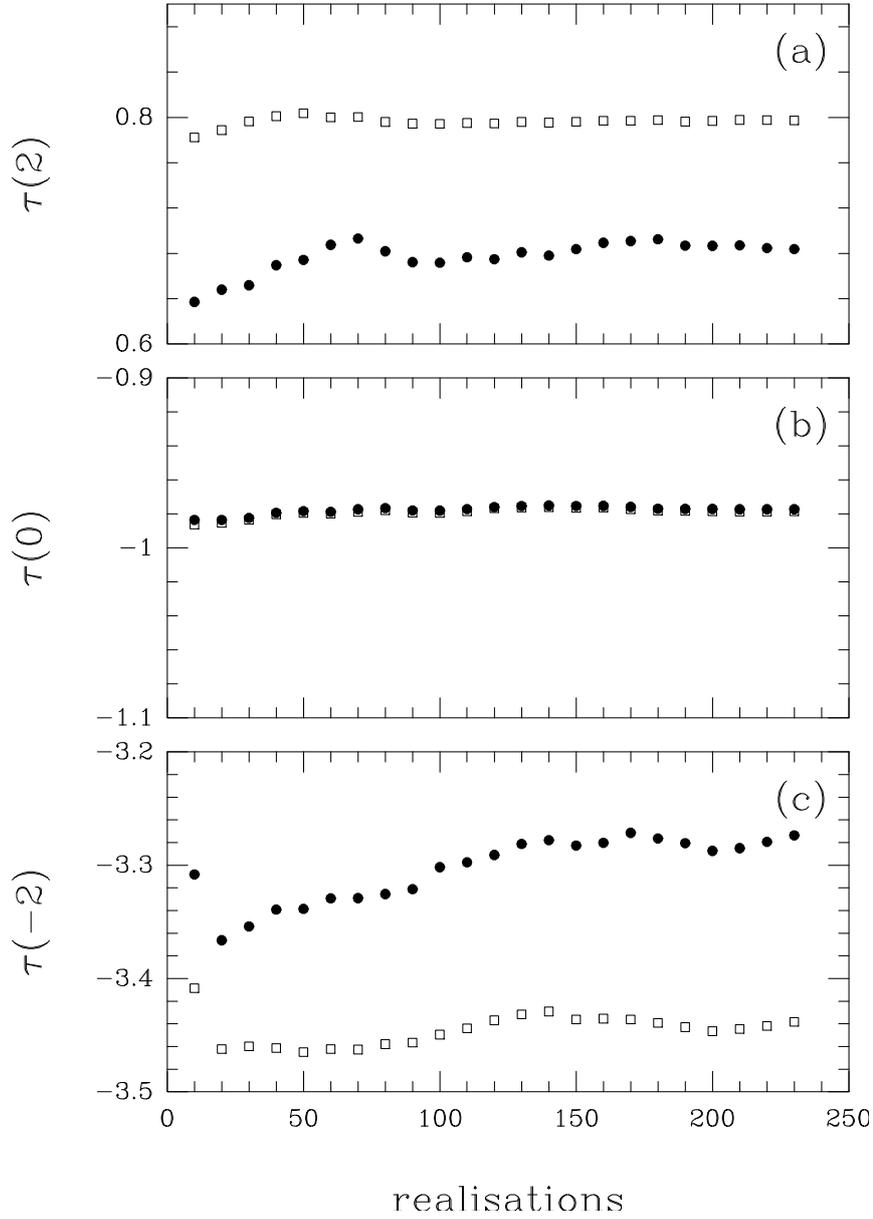


FIG. 4.10 – Convergence du spectre  $\tau(q)$  estimé dans la zone inertielle suivant le nombre de réalisations (une réalisation égale à peu près deux échelles intégrales c'est-à-dire 65536 points). Les symboles correspondent aux ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ( $\square$ ) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ). a)  $q = 2$ , b)  $q = 0$  et c)  $q = -2$ .

valeur obtenue est  $\alpha^{loc}(0) = 1.07 \pm 0.02$ . En utilisant les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles  $(\bullet)$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles  $(\circ)$ ), les fonctions  $\tau^{loc}(q)$  présentent désormais un plateau pour les valeurs de  $q \leq 0$ . Remarquons que les valeurs  $\tau^{loc}(q)$  sont de plus totalement différentes de celles obtenues avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$ . Les fonctions  $\alpha^{loc}(q)$  ont toujours tendance à converger vers 1, valeur prise par  $\alpha^{loc}(0) \sim 1$  sur presque toute la gamme d'échelles représentée. Cette évolution de l'exposant  $\alpha(0)$  des singularités les plus fréquentes (en nombre) dans la dissipation, lorsqu'on passe de l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$  à  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , est très nette (c'est-à-dire significativement plus importante que les barres d'erreurs) et ce quelle que soit l'échelle  $a$ .

Sur la figure 4.10, nous avons représenté la valeur des exposants  $\tau(q)$  de  $Z(q, a/\eta)$ , pour quelques valeurs de  $q$ , obtenue en utilisant les ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles  $(\square)$ ) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles  $(\bullet)$ ), en fonction de la statistique de l'échantillon considéré. Chaque réalisation correspond à une longueur approximative de deux échelles intégrales et les valeurs présentées sont celles obtenues par régression linéaire en prenant en compte les échelles comprises dans le domaine inertiel indiqué dans la figure 4.6. Les résultats obtenus avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$  montrent une très rapide convergence quelque soit  $q$  et atteignent la valeur asymptotique à 1% près pour un nombre de réalisations supérieur à 50. Pour l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , la convergence est plus lente et on obtient la valeur asymptotique à 1% près quand le nombre de réalisations est supérieur à 190. Pour les valeurs de  $q$  négatives, l'évolution est beaucoup plus importante en utilisant  $\psi_{(3)}^{(1)}$  au lieu de  $\psi_{(3)}^{(0)}$  et la différence entre les deux ondelettes semble augmenter en fonction de la statistique. Cette figure montre à nouveau que la sensibilité des résultats en fonction de l'ondelette analysatrice ne provient pas d'un problème de convergence statistique.

### • Densité de probabilité des coefficients de la T.O.

*Ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(0)}$*

Les histogrammes des valeurs des maxima du module de la transformée en ondelettes de la dissipation obtenus en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$ , sont représentés sur la figure 4.11 pour différentes échelles appartenant toutes au domaine inertiel :  $a = 77\eta$  (symboles  $(\bullet)$ ),  $154\eta$  (symboles  $(\circ)$ ) et  $307\eta$  (symboles  $(\times)$ ). Tous ces histogrammes sont normalisés de telle manière que leur intégrale soit égale à l'unité. La représentation semi-logarithmique dans la figure 4.11a, montre l'évolution de la forme de ces histogrammes selon l'échelle considérée. Ces distributions représentées selon la variable  $x = (a_0/a)T$  montrent elles aussi une évolution systématique (en particulier au niveau de l'étalement de leur queue en fonction de l'échelle) qui caractérise le phénomène d'intermittence de la dissipation d'énergie. En

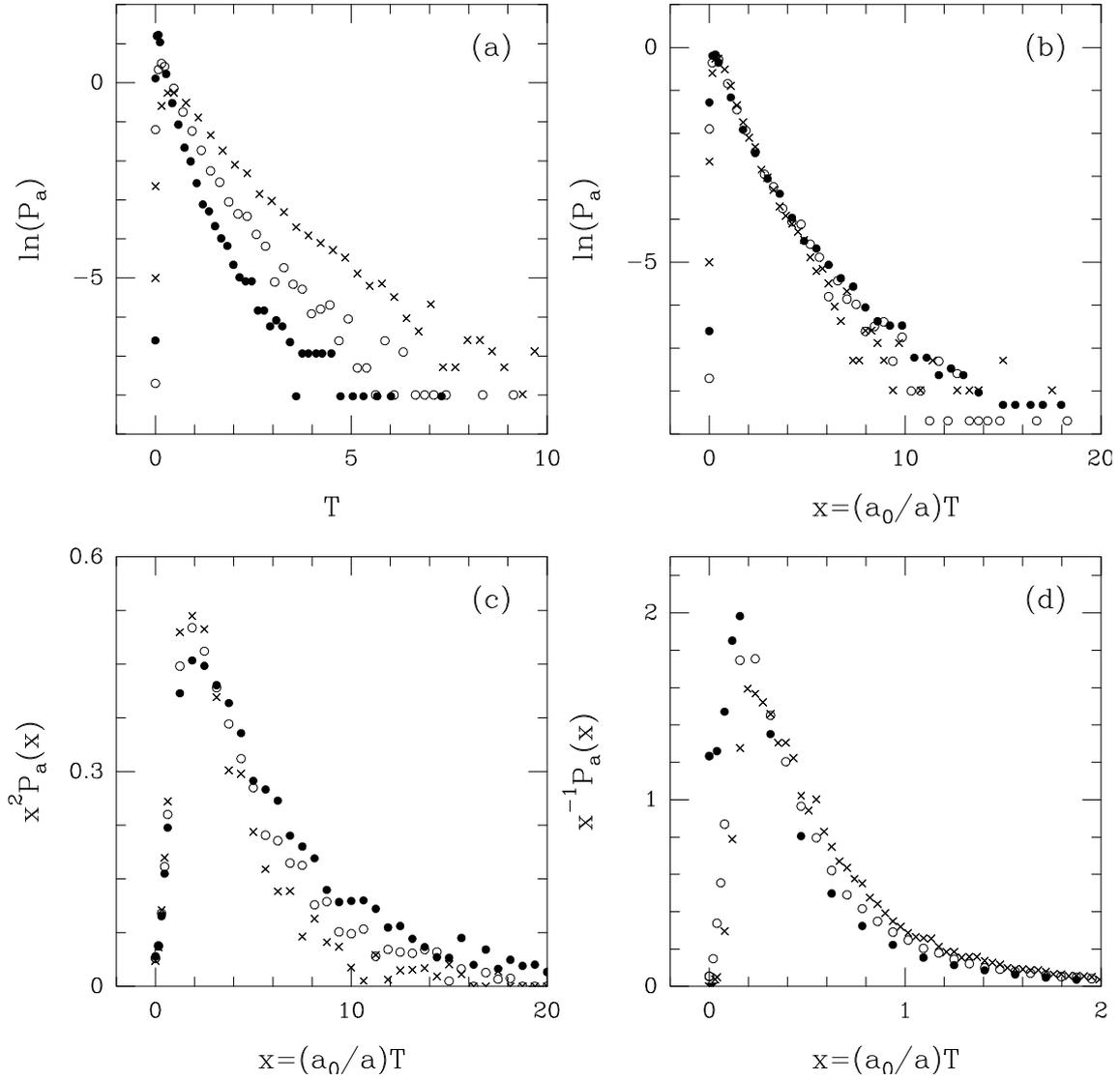


FIG. 4.11 – Densité de probabilité des maxima du module de la T.O. de la dissipation calculée avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(0)}$ . a) Histogrammes normalisés ( $\int P_a(T)dT = 1$ ) en représentation semi-logarithmique. Les échelles présentées correspondent à  $a = 77\eta$  ( $\bullet$ ),  $154\eta$  ( $\circ$ ) et  $307\eta$  ( $\times$ ). b) Ces mêmes histogrammes mais représentés selon la variable  $x = (a_0/a)T$  avec  $a_0 = 307\eta$ . c) Evolution dans les échelles de la quantité  $x^q P_a(x)$  pour  $q = 2$ . d)  $x^q P_a(x)$  pour  $q = -1$ .

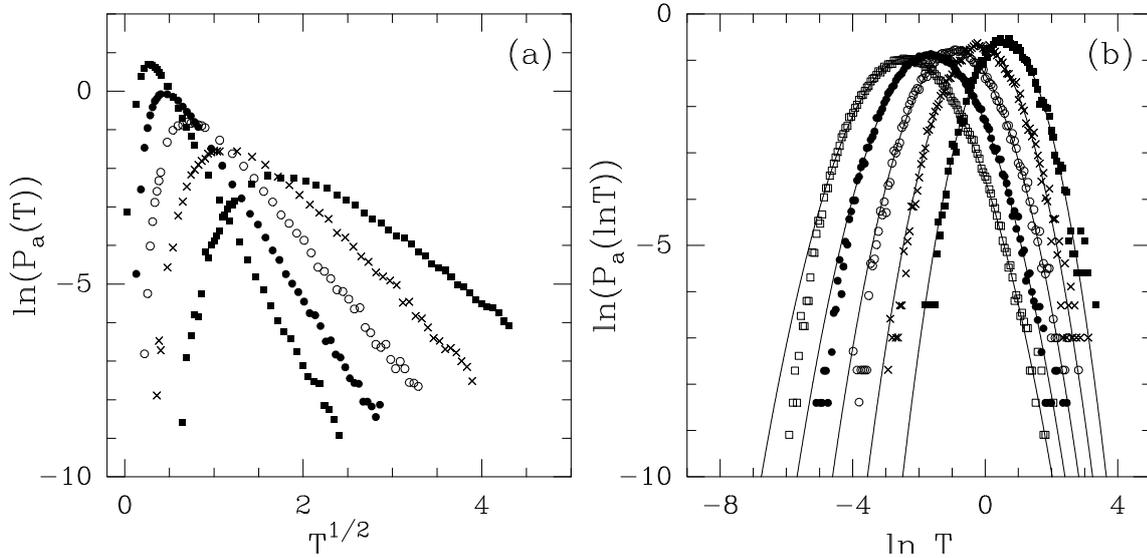


FIG. 4.12 – Logarithme des histogrammes normalisés ( $\int P_a(T)dT = 1$ ) des maxima de la T.O. de la dissipation à différentes échelles appartenant toutes au domaine inertiel :  $a = 38\eta$  ( $\square$ ),  $77\eta$  ( $\bullet$ ),  $154\eta$  ( $\circ$ ),  $307\eta$  ( $\times$ ) et  $616\eta$  ( $\blacksquare$ ). L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(0)}$ . a)  $\ln(P_a(T))$  en fonction de  $T^{1/2}$ . b)  $\ln(P_a(\ln T))$  en fonction de  $\ln T$ . Les lignes continues correspondent à l'approximation Gaussienne de ces histogrammes.

effet, d'après la théorie K41, la dissipation est homogène et caractérisée par un exposant de singularité unique  $\alpha = 1$ . Selon cette hypothèse, la variable  $x$  est donc indépendante de l'échelle ainsi que les quantités  $x^q P_a(x)$ ,  $\forall q \in \mathbb{R}$ . Ces quantités sont représentées pour  $q = 2$  et  $-1$ , respectivement sur les figures 4.11c et 4.11d. Les résultats obtenus à différentes échelles ne se remettent pas sur une courbe unique et suggèrent la présence d'exposants de singularité  $\alpha$  inférieurs à 1 pour les valeurs de  $q$  positives, et supérieurs à 1 pour les valeurs de  $q$  négatives. Remarquons que ces histogrammes présentent une bonne convergence, preuve que la statistique utilisée pour évaluer les fonctions de partition est suffisante pour les valeurs de  $q$  comprises entre  $-2$  et  $2$ .

Sur la figure 4.12a, nous avons représenté comme fonction de  $T^{1/2}$ , le logarithme des histogrammes des maxima du module de la T.O. estimés à différentes échelles appartenant au domaine inertiel :  $a = 38\eta$  (symboles ( $\square$ )),  $77\eta$  (symboles ( $\bullet$ )),  $154\eta$  (symboles ( $\circ$ )),  $307\eta$  (symboles ( $\times$ )) et  $616\eta$  (symboles ( $\blacksquare$ )). Ces courbes montrent toutes un comportement approximativement linéaire pour les grandes valeurs de  $T$ . Ces résultats semblent donc en bon accord avec un comportement asymptotique des fonctions de densité de probabilité

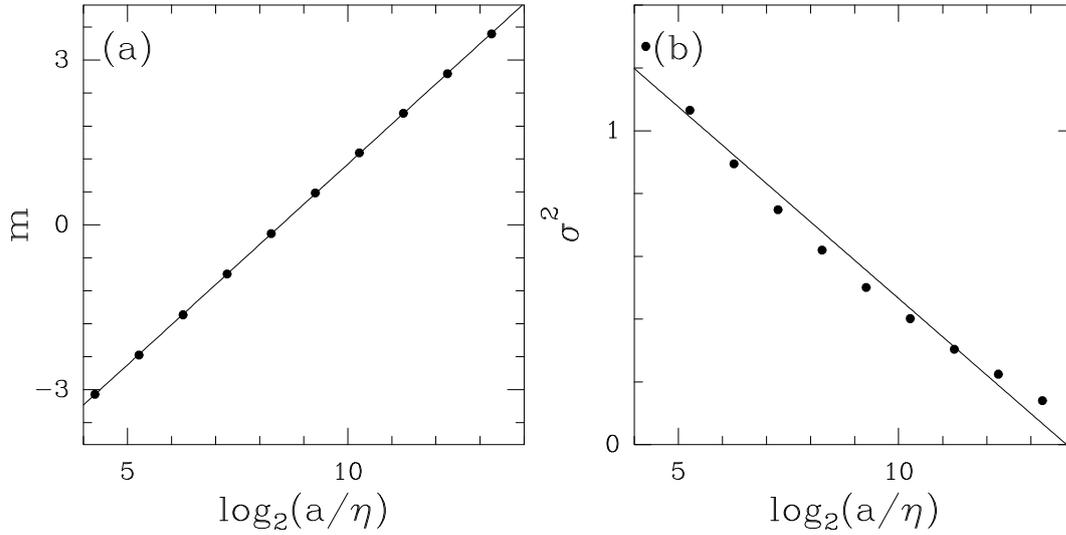


FIG. 4.13 – a) Moyenne  $m(a/\eta)$  des histogrammes du logarithme des maxima du module de la transformée en ondelettes (Fig. 4.12a) en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . b) Variance  $\sigma^2(a/\eta)$  de ces histogrammes en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . L'ondelette analysatrice est  $\psi_{(3)}^{(0)}$ .

des coefficients en ondelettes de la forme :

$$P(T) \sim_{T \rightarrow +\infty} e^{(c(a)T^\beta + b(a))}, \quad (4.12)$$

où  $\beta = 1/2$  et où  $c(a)$  diminue lentement en fonction de  $a$  alors que  $b(a)$  augmente. Cette hypothèse qui a été suggérée par Gagne<sup>[137]</sup> pour modéliser les incréments de la vitesse, permet de bien caractériser le comportement asymptotique ( $T \rightarrow +\infty$ ) dans la région inertielle de la densité de probabilité des coefficients en ondelettes de la dissipation d'énergie en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$ . Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par Meneveau et Sreenivasan<sup>[155]</sup>. Toutefois, pour plus de précision, nous avons représenté sur la figure 4.12b, le logarithme de l'histogramme du logarithme des maxima du module de la T.O. estimé aux mêmes échelles. Ces histogrammes ont en fait une forme très proche d'une parabole ce qui nous a conduit à représenter leur approximation Gaussienne en ligne continue pour chaque échelle. L'accord avec cette approximation est excellent et permet de modéliser ces histogrammes pour toutes les valeurs de  $\ln T$  et non pas seulement le comportement asymptotique. Pour  $\ln T$  très négatif ( $T$  proche de 0), une légère déviation par rapport à la Gaussienne est visible, déviation d'autant plus importante que l'échelle est petite. Ainsi, le modèle log-normal semble être un modèle tout à fait acceptable pour

les histogrammes du logarithme des maxima du module de la T.O. :

$$P_a(\ln T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(a)}} e^{-\frac{(\ln T - m(a))^2}{2\sigma^2(a)}}, \quad (4.13)$$

ce qui correspond à la forme suivante de la densité de probabilité des maxima du module de la T.O. :

$$P_a(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(a)}} T^{-1} e^{-\frac{(\ln T - m(a))^2}{2\sigma^2(a)}}. \quad (4.14)$$

Les caractéristiques de ces Gaussiennes, à savoir  $m(a)$  et  $\sigma^2(a)$ , sont représentées sur la figure 4.13 en fonction de  $\log_2(a)$ . Contrairement à la moyenne  $m(a)$  (Fig. 4.13a), la variance  $\sigma^2(a)$  (Fig. 4.13b) ne présente pas de comportement linéaire très convaincant. Ainsi, les caractéristiques de ces Gaussiennes ne se comportent pas de la même manière en fonction des échelles, ce qui remet en cause l'auto-similarité et l'invariance d'échelle de la dissipation. Cette observation semble donc confirmer les déviations au comportement en loi d'échelle observées sur les fonctions de partition dans la figure 4.9.

#### *Ondelette analysatrice $\psi_{(3)}^{(1)}$*

Les histogrammes des valeurs des maxima du module de la transformée en ondelettes de la dissipation calculée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  sont représentés sur la figure 4.14 pour les mêmes échelles (appartenant au domaine inertiel) que celles examinées dans la figure 4.11. Tous ces histogrammes sont normalisés de telle manière que leur intégrale soit égale à l'unité. La représentation semi-logarithmique utilisée dans la figure 4.14a, montre l'évolution dans les échelles de ces histogrammes. Sur la figure 4.14b, nous avons représenté ces histogrammes selon la variable  $x = (a_0/a)|T|$  qui est supposée être indépendante de l'échelle d'après l'hypothèse K41. La queue de ces courbes évolue clairement et de façon systématique dans les échelles, mettant en évidence le phénomène d'intermittence : le nombre d'événements de forte amplitude augmente quand l'échelle considérée diminue. Ce phénomène est aussi visible sur les figures 4.14c et 4.14d, où nous avons représenté  $x^q P_a(x)$  respectivement pour  $q = 2$  et  $q = -1$ . Ces quantités, qui ne devraient pas dépendre de l'échelle d'après l'hypothèse K41, présentent une évolution systématique qui confirme la présence de singularités d'exposant  $\alpha > 1$  (pour  $q < 0$ , l'intégrale de  $x^q P_a(x)$  croît lorsque l'on descend dans les échelles) et  $\alpha < 1$  (pour  $q > 0$ , l'intégrale de  $x^q P_a(x)$  décroît lorsque  $a$  diminue). De nouveau la forme de ces courbes est bien définie (bien que légèrement bruitée pour  $q = 2$ ), ce qui montre une bonne convergence dans le calcul des fonctions de partition pour les valeurs de  $q$  comprises entre  $-2$  et  $2$ .

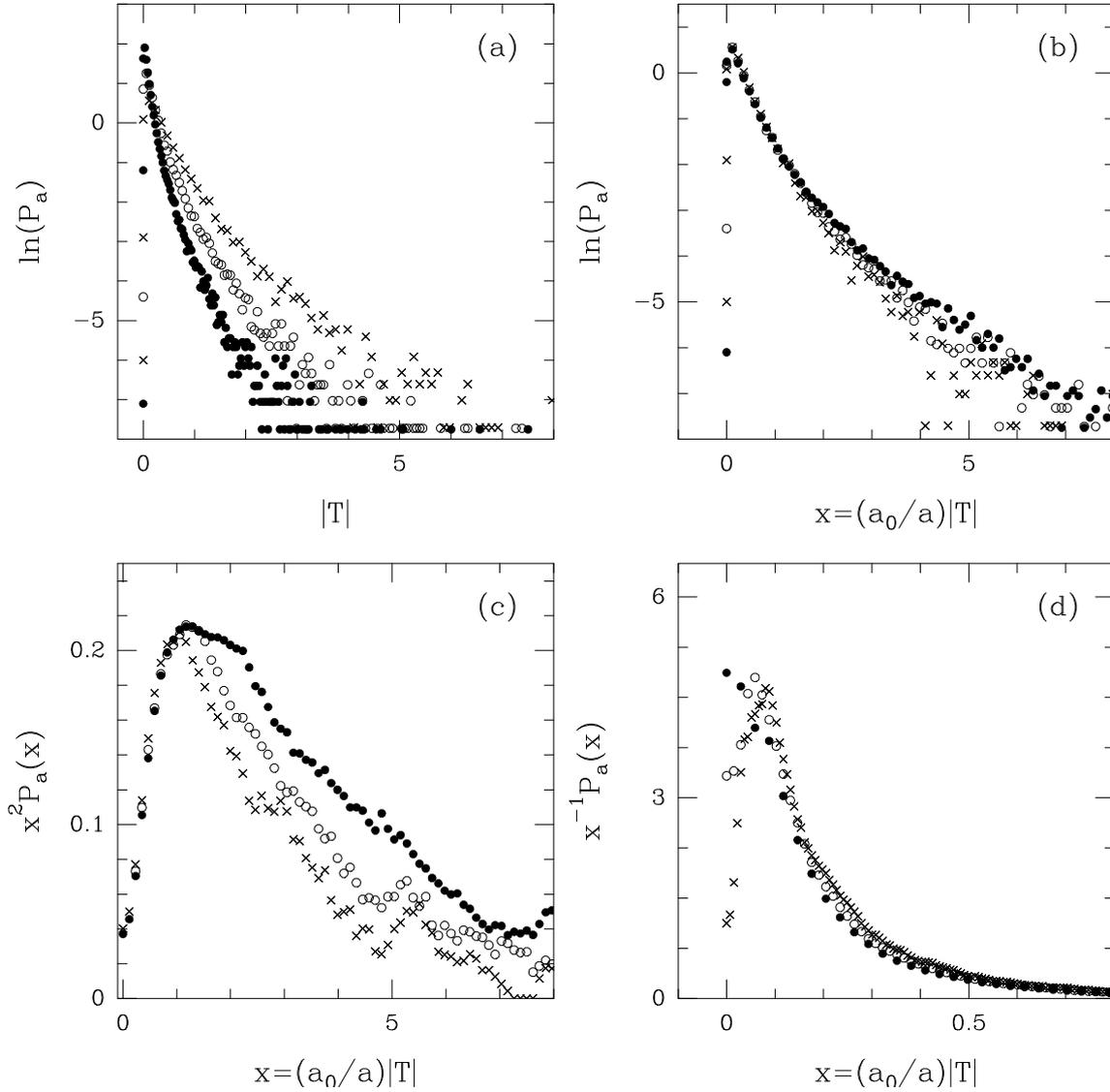


FIG. 4.14 – Densité de probabilité des maxima du module de la T.O. de la dissipation calculée avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . a) Histogrammes normalisés ( $\int P_a(|T|)d|T| = 1$ ) en représentation semi-logarithmique. Les échelles présentées correspondent à  $a = 77\eta$  ( $\bullet$ ),  $154\eta$  ( $\circ$ ) et  $307\eta$  ( $\times$ ). b) Ces mêmes histogrammes mais représentés selon la variable  $x = (a_0/a)|T|$  avec  $a_0 = 307\eta$ . c) Evolution dans les échelles de la quantité  $x^q P_a(x)$  pour  $q = 2$ . d)  $x^q P_a(x)$  pour  $q = -1$ .

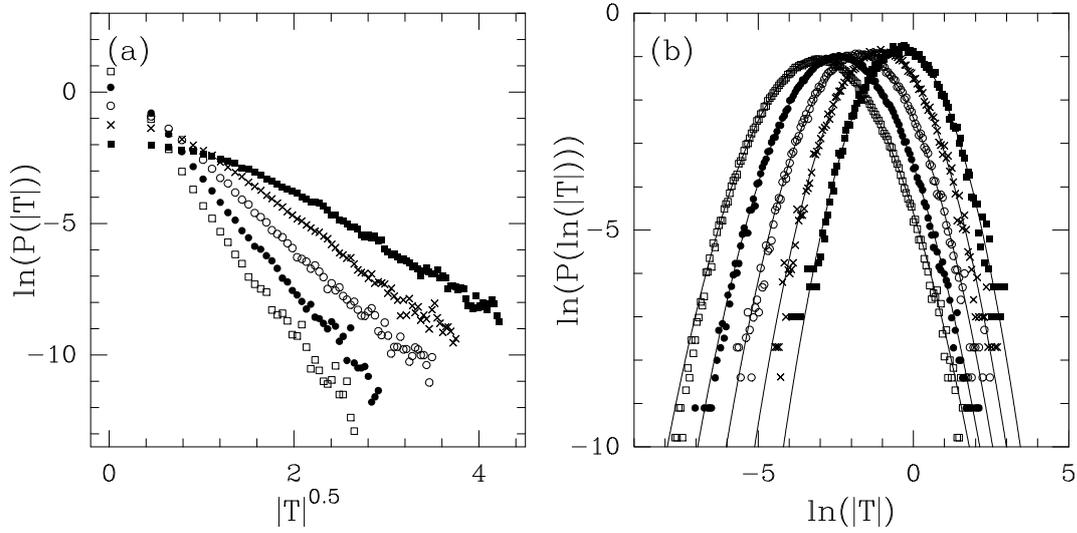


FIG. 4.15 – a) Logarithme des histogrammes normalisés des maxima du module de la T.O. représentés en fonction de  $|T|^{1/2}$  pour différentes échelles appartenant toutes au domaine inertiel :  $a = 38\eta$  ( $\square$ ),  $77\eta$  ( $\bullet$ ),  $154\eta$  ( $\circ$ ),  $307\eta$  ( $\times$ ) et  $616\eta$  ( $\blacksquare$ ). b)  $\ln(P_a(\ln |T|))$  en fonction de  $\ln |T|$ . L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Les lignes continues correspondent à l'approximation Gaussienne de ces histogrammes.

Sur la figure 4.15a, nous avons représenté les histogrammes des maxima du module de la T.O. obtenus pour les mêmes échelles, appartenant à la région inertielle, que celles examinées dans la figure 4.12. Ces courbes représentées en fonction de  $|T|^{1/2}$  présentent toutes un comportement approximativement linéaire pour les grandes valeurs de  $|T|$  et semblent donc se comporter comme :

$$P(T) \sim_{|T| \rightarrow +\infty} e^{(c(a)|T|^\beta + b(a))}, \quad (4.15)$$

où les paramètres  $c(a)$  et  $b(a)$  évoluent de la même manière que ceux de l'équation 4.12 obtenue avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$ . Par contre, les histogrammes du logarithme des maxima du module sont très bien modélisés par des Gaussiennes. En effet, le logarithme de ces histogrammes, représenté sur la figure 4.15b, est remarquablement modélisé par des paraboles représentées en lignes continues. L'accord avec les données est excellent sur toute la gamme des valeurs de  $\ln |T|$  et ceci pour toutes les échelles examinées dans le domaine inertiel. En particulier, les légères déviations par rapport aux paraboles observées sur les histogrammes obtenus avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (Fig. 4.12b) ont complètement disparu. A nouveau ces résultats semblent confirmer le caractère log-normal du processus de cascade d'énergie. La moyenne et la variance

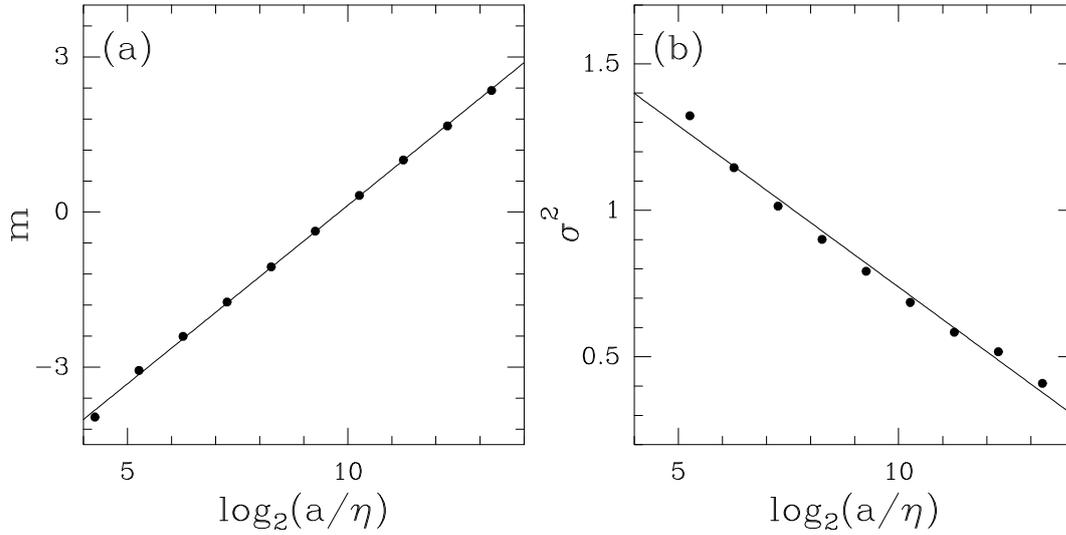


FIG. 4.16 – a) Moyenne  $m(a/\eta)$  des histogrammes du logarithme des maxima du module de la transformée en ondelettes (Fig. 4.15a) en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . b) Variance  $\sigma^2(a/\eta)$  de ces histogrammes en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . L'ondelette analysatrice est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

des approximations Gaussiennes sont représentées respectivement sur les figures 4.16a et 4.16b en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ . La variance présente à nouveau une courbure très nette, contrairement à la moyenne qui se comporte linéairement en fonction de  $\log_2(a/\eta)$ , confirmant la possibilité d'une absence d'invariance d'échelle. Sur la figure 4.17, nous avons comparé, en représentation semi-logarithmique, l'histogramme de tous les coefficients en ondelettes obtenu à l'échelle  $a = 154\eta$  avec celui des maxima du module de la T.O. obtenu à la même échelle en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Ces histogrammes (décalés arbitrairement verticalement pour comparaison) présentent le même comportement pour les grandes valeurs de  $|T|$ . La seule différence vient du fait que l'histogramme des maxima est nul pour  $T = 0$  ce qui permet l'estimation des fonctions de partition pour des valeurs de  $q$  négatives. Ceci explique pourquoi les fonctions de partition continues ou restreintes aux maxima calculées pour des valeurs de  $q$  positives présentent le même comportement. Par contre, l'histogramme du logarithme du module de tous les coefficients en ondelettes n'est plus Gaussien. La partie correspondant aux valeurs très négatives de  $\ln |T|$  est maintenant de forme exponentielle, la partie de l'histogramme correspondant aux valeurs positives de  $\ln |T|$  étant toujours de forme Gaussienne. C'est donc à priori uniquement le processus de cascade sur les maxima du module de la T.O. de la dissipation qui est de loi log-normale.

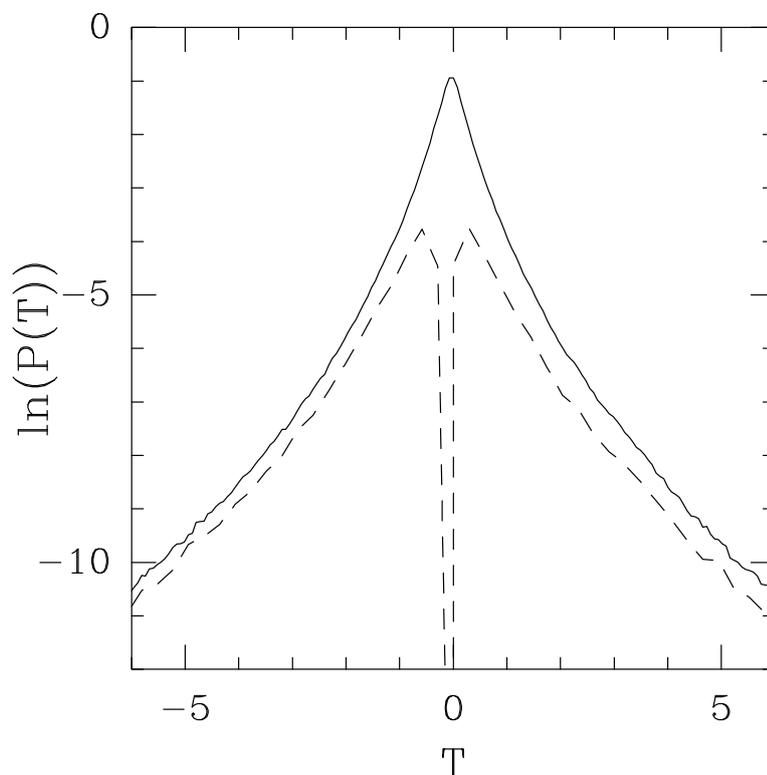


FIG. 4.17 – Comparaison de la forme de l’histogramme normalisé de tous les coefficients en ondelettes (ligne continue) avec celle de l’histogramme des maxima du module de la T.O. (ligne discontinue) à l’échelle  $a = 154\eta$ . L’ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

Ces résultats confirment donc d’une certaine façon ceux obtenus précédemment avec l’ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$ . L’étude de l’évolution dans les échelles de la forme des histogrammes des coefficients en ondelettes permet de montrer le caractère non auto-similaire du processus de cascade et apporte ainsi, à posteriori, une explication de la non consistance des résultats des mesures effectuées avec la méthode M.M.T.O. suivant que l’on utilise l’ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ou  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Le processus de cascade sous-jacent au squelette de la T.O. de la dissipation est donc de loi log-normale. L’étude du propagateur de cette quantité va nous permettre de confirmer ces résultats et de déterminer le comportement dans les échelles des caractéristiques de cette cascade.

### 4.3 Estimation du propagateur du champ de dissipation d'énergie : mise en évidence du caractère non auto-similaire du processus de cascade

Dans la section 3.4, nous avons vu que la plupart des processus auto-similaires peuvent se décrire par la donnée du propagateur  $G_{aa'}$  qui permet d'obtenir la fonction de probabilité des coefficients en ondelettes à une échelle  $a$ , à partir de la fonction de probabilité obtenue à une échelle plus grande  $a'$ . Dans cette section, nous nous proposons de calculer la transformée de Fourier  $\hat{G}_{aa'}$  de ce propagateur, d'après les équations (3.41) et (3.43,) à partir des fonctions caractéristiques  $M(p, a)$  des histogrammes du logarithme des maxima du module de la transformée en ondelettes du champ de dissipation. Nous effectuerons successivement cette étude sur la dissipation  $\epsilon'_3$  obtenue à partir du signal de vitesse de Modane et sur celle dérivée du jet turbulent.

#### 4.3.1 Propagateur de la dissipation d'énergie du signal de Modane ( $R_\lambda = 3050$ )

Le module  $|\hat{G}_{aa'}(p)|$  du propagateur de la dissipation du signal de Modane est représenté sur la figure 4.18a, pour des échelles appartenant au domaine inertiel et telles que  $a'/a = 2^6$ . Les résultats obtenus avec les ondelettes réelles  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles (•)) et  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles (◦)) sont équivalents mais diffèrent sensiblement de ceux obtenus avec l'ondelette complexe de Morlet  $\psi_{(C)}$  (symboles (■)). Sur la figure 4.18b, nous avons reporté la partie réelle  $Re \hat{G}_{aa'}/|\hat{G}_{aa'}|$  (symboles (◻)) et la partie imaginaire  $Im \hat{G}_{aa'}/|\hat{G}_{aa'}|$  (symboles (×)) de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenues en utilisant  $\psi_{(C)}$ . Les lignes continues et discontinues correspondent à l'approximation Gaussienne de  $G$ , c'est-à-dire :

$$G_{aa'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(a, a')}} \exp\left(-\frac{(x - m(a, a'))^2}{2\sigma^2(a, a')}\right), \quad (4.16)$$

et

$$\hat{G}_{a,a'}(p) = \exp(ipm(a, a')) \exp(-p^2\sigma^2(a, a')/2), \quad (4.17)$$

où  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  correspondent respectivement à la moyenne et à la variance de  $G_{aa'}$ . Cette approximation est supposée très bien modéliser les résultats obtenus aux voisinage de  $p = 0$  et ceci quelle que soit l'ondelette analysatrice utilisée. En fait, l'accord obtenu est excellent et est valable pour les valeurs de  $|p| \leq 3$ , c'est-à-dire jusqu'aux valeurs extrêmes de validité de notre analyse relativement à la statistique dont nous disposons.

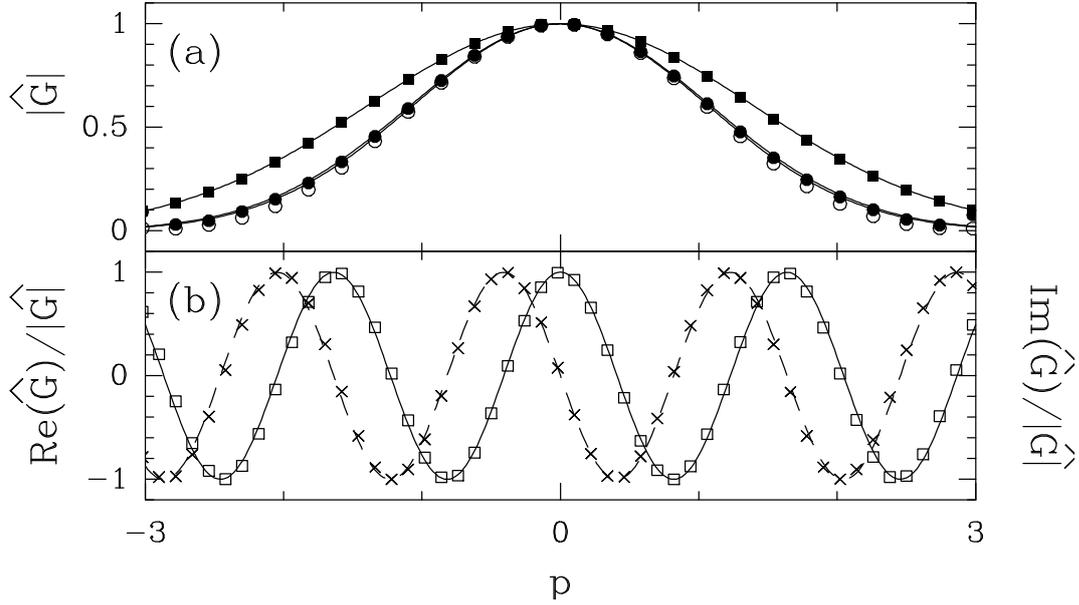


FIG. 4.18 – Estimation de la transformée de Fourier du propagateur de la dissipation d'énergie  $\epsilon'_3$  obtenue à partir du signal expérimental de vitesse de Modane ( $R_\lambda = 3050$ ). a) Module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu en utilisant les ondelettes  $\psi_{(C)}$  (■),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (●) et  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (○). b) Partie réelle (□) et partie imaginaire (×) de  $\hat{G}_{aa'}$  calculées avec  $\psi_{(C)}$ . Les échelles  $a = 2^5$  et  $a' = 2^{11}$  sont situées dans le domaine inertiel. Les lignes continues et discontinues correspondent à la forme analytique (Eq. (3.58)) du noyau prédite par le modèle log-normal.

Les fluctuations qui apparaissent dans le calcul de  $\hat{G}_{aa'}(p)$  pour les valeurs de  $|p| \geq 3$  proviennent des faibles valeurs prises par  $M(p, a')$ . Par contre, une évolution suivant l'ondelette analysatrice utilisée met à nouveau en doute l'hypothèse d'un processus invariant d'échelle.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la dépendance de  $\hat{G}_{aa'}(p)$  dans les échelles  $a$  et  $a'$ . Pour cela, nous avons estimé les quantités  $m(a, a') = \partial \text{Im}(\hat{G}_{aa'}(p)) / \partial p |_{p=0}$  et  $\sigma^2(a, a') = -\partial^2 \ln(|\hat{G}_{aa'}(p)|) / \partial p^2 |_{p=0}$  pour différents couples  $(a, a')$ . Les résultats obtenus pour l'ondelette  $\psi_{(C)}$  sont reportés sur la figure 4.19 pour les échelles  $a' = 2^5\eta$  (symboles (●)),  $2^6\eta$  (symboles (○)),  $2^7\eta$  (symboles (■)),  $2^8\eta$  (symboles (□)),  $2^9\eta$  (symboles (×)) et  $2^{10}\eta$  (symboles ( $\Delta$ )). Les courbes obtenues représentées suivant  $\ln(a/a')$  sont quasiment linéaires et indiscernables pour  $m(a, a')$  (Fig. 4.19a) alors qu'elles sont différentes et présentent une courbure très marquée pour  $\sigma^2(a, a')$  (Fig. 4.19d). La représentation de ces données en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}] / \alpha$  avec  $\alpha = 0.05$ , permet de remettre tous les données

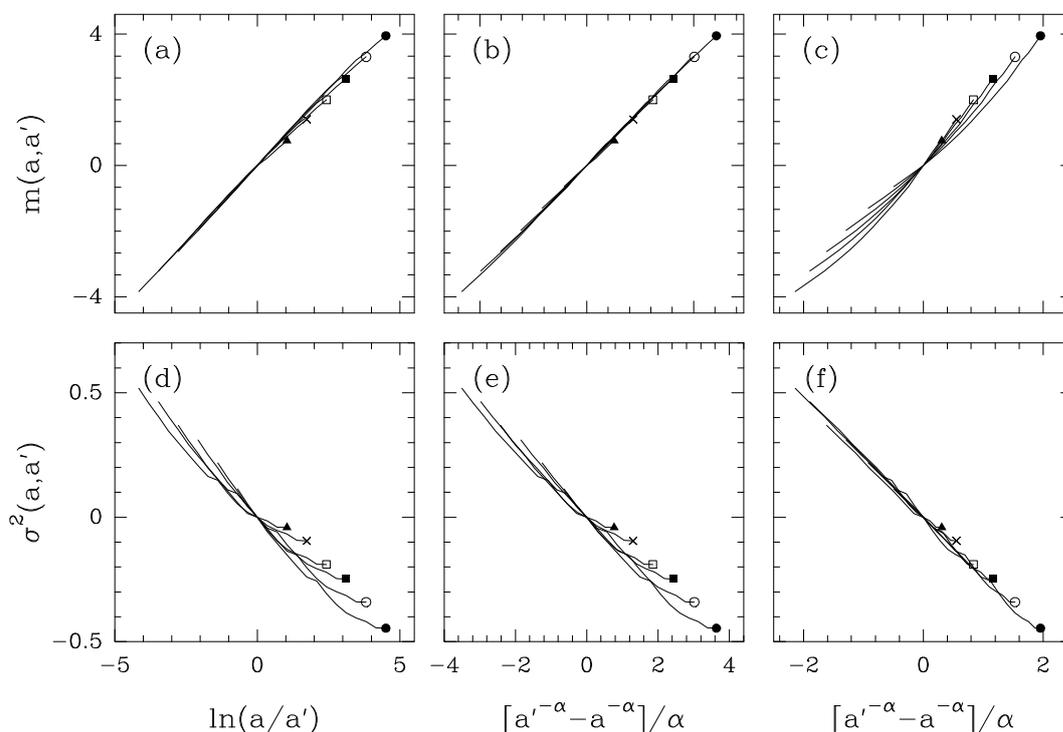


FIG. 4.19 – Comportement des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  obtenues en analysant la dissipation du signal de Modane avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(C)}$ . Les différents symboles correspondent aux valeurs suivantes de l'échelle de référence  $a' = 2^5$  ( $\bullet$ ),  $2^6$  ( $\circ$ ),  $2^7$  ( $\blacksquare$ ),  $2^8$  ( $\square$ ),  $2^9$  ( $\times$ ) et  $2^{10}$  ( $\triangle$ ). a)  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.05$ . c)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$ . d)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . e)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.05$ . f)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$ .

pour  $m(a, a')$  sur une droite unique de pente  $1.1 \pm 0.01$  (Fig. 4.19b). Cependant, si l'on fait de même pour  $\sigma^2(a, a')$ , les courbes ne présentent toujours pas de comportement linéaire (Fig. 4.19e) et il faut prendre  $\alpha = 0.2$  pour que toutes ces courbes se remettent sur une droite unique de pente  $-0.23 \pm 0.02$  (Fig. 4.19f). Avec cette deuxième valeur de  $\alpha$ , les courbes  $m(a, a')$  présentent à nouveau une courbure très nette (Fig. 4.19c). Ainsi, la moyenne et la variance des Gaussiennes modélisant la forme de  $G$  calculé avec  $\psi_{(C)}$  ont des comportements différents dans les échelles. Contrairement à ce que nous avons observé pour la vitesse, la forme analytique (3.60) de  $s(a)$  ne s'applique pas à la dissipation.

Nous avons de la même manière estimé  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  à partir de la forme de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenue avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Ces résultats sont présentés sur la figure 4.20. Les

courbes  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$  se comportent bien de manière linéaire avec une pente égale à  $0.97 + -0.01$  (Fig. 4.20a) contrairement aux courbes  $\sigma^2(a, a')$  qui ne se superposent pas et présentent à nouveau une courbure très nette (Fig. 4.20c). Si l'on représente maintenant ces quantités suivant  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.15$ , les données pour  $\sigma^2(a, a')$  se remettent parfaitement sur une droite unique de pente  $-0.33 + -0.02$   $\forall(a, a')$  (Fig. 4.20d). Par contre, il n'en est plus de même pour  $m(a, a')$  (Fig. 4.20b). De nouveau, en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , les quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  se comportent de manière différente suivant les échelles. Les résultats obtenus en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$  sont qualitativement les mêmes. Nous avons représenté ces résultats sur la figure 4.21, où on peut voir que la fonction  $m(a, a')$  se comporte à nouveau linéairement suivant  $\ln(a/a')$  avec une pente égale à  $1.05 + -0.01$  (Fig. 4.21a), contrairement à  $\sigma^2(a, a')$  qui se comporte linéairement en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$  (Fig. 4.21d). La pente obtenue est égale à  $-0.42 + -0.02$ .

Ainsi, quelle que soit l'ondelette analysatrice utilisée, on obtient qualitativement les mêmes résultats. Le propagateur qui relie la statistique des maxima du module de la transformée en ondelettes de la dissipation d'énergie calculé à différentes échelles est compatible avec un modèle de cascade log-normale. Ainsi :

$$P_a(T) = \int G_{aa'}(x)e^{-x}P_{a'}(Te^{-x})dx, \quad (4.18)$$

où

$$G_{aa'}(x) = P(x = \ln(T_a/T_{a'})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(a, a')}} \exp^{-\frac{(x-m(a, a'))^2}{2\sigma^2(a, a')}}, \quad (4.19)$$

avec

$$\begin{cases} m(a, a') &= C_1 \left[ \frac{a^{-\alpha_1} - a'^{-\alpha_1}}{-\alpha_1} \right], \\ \sigma^2(a, a') &= C_2 \left[ \frac{a^{-\alpha_2} - a'^{-\alpha_2}}{-\alpha_2} \right]. \end{cases} \quad (4.20)$$

Les exposants  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dépendent légèrement de l'ondelette analysatrice choisie, mais le fait important est que ces deux exposants aient des valeurs significativement différentes :  $\alpha_1 = 0.03 + -0.03$  et  $\alpha_2 \approx 0.18 + -0.03$ . Si l'on note  $m(a)$  et  $\sigma^2(a)$ , la moyenne et la variance de la fonction de probabilité du logarithme des maxima du module de la T.O. à l'échelle  $a$ , on obtient d'après les relations :

$$\begin{cases} m(a, a') &= m(a) - m(a'), \\ \sigma^2(a, a') &= \sigma^2(a) - \sigma^2(a'), \end{cases} \quad (4.21)$$

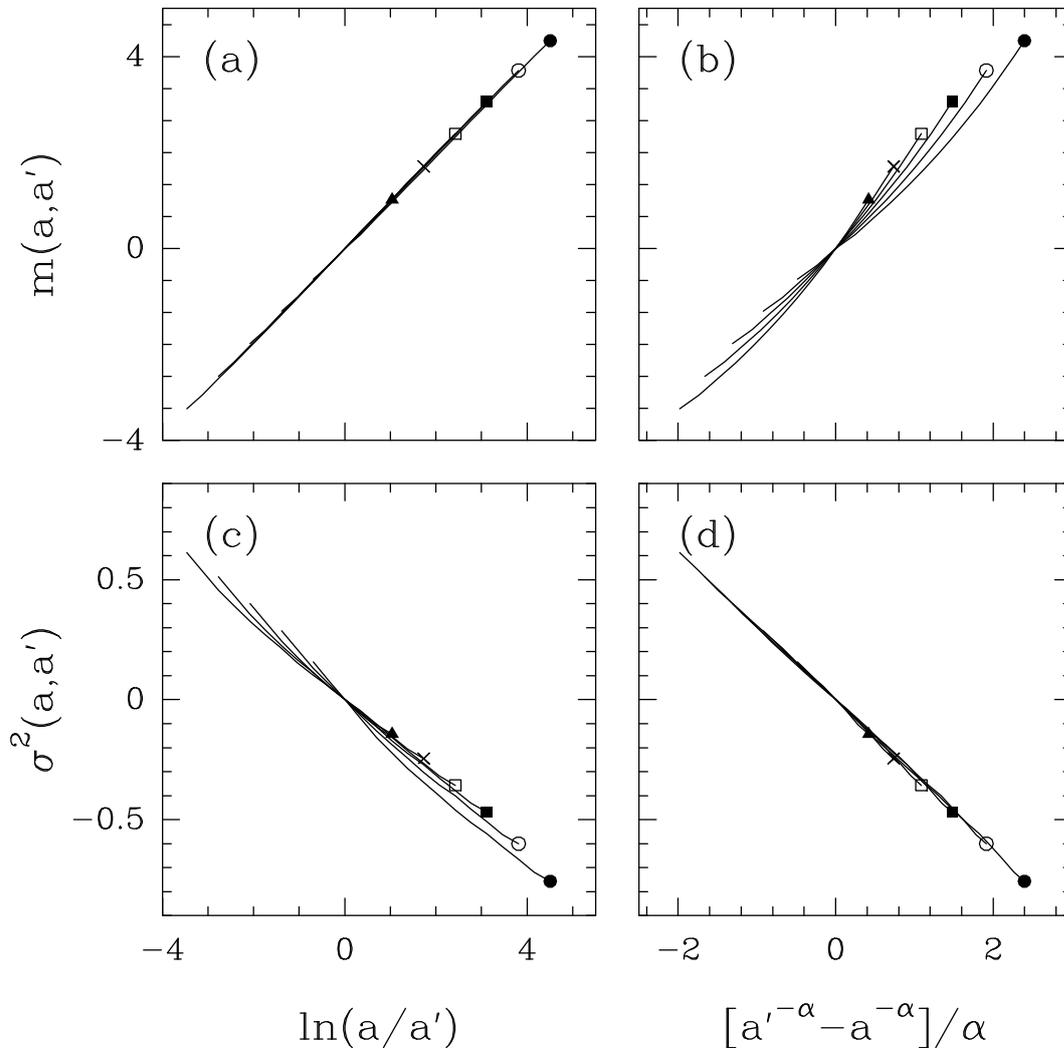


FIG. 4.20 – Comportement des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  obtenues en analysant la dissipation du signal de Modane avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Les différents symboles correspondent aux échelles  $a' = 2^4$  ( $\bullet$ ),  $2^5$  ( $\circ$ ),  $2^6$  ( $\blacksquare$ ),  $2^7$  ( $\square$ ),  $2^8$  ( $\times$ ) et  $2^9$  ( $\triangle$ ). a)  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.15$ . c)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . d)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.15$ .

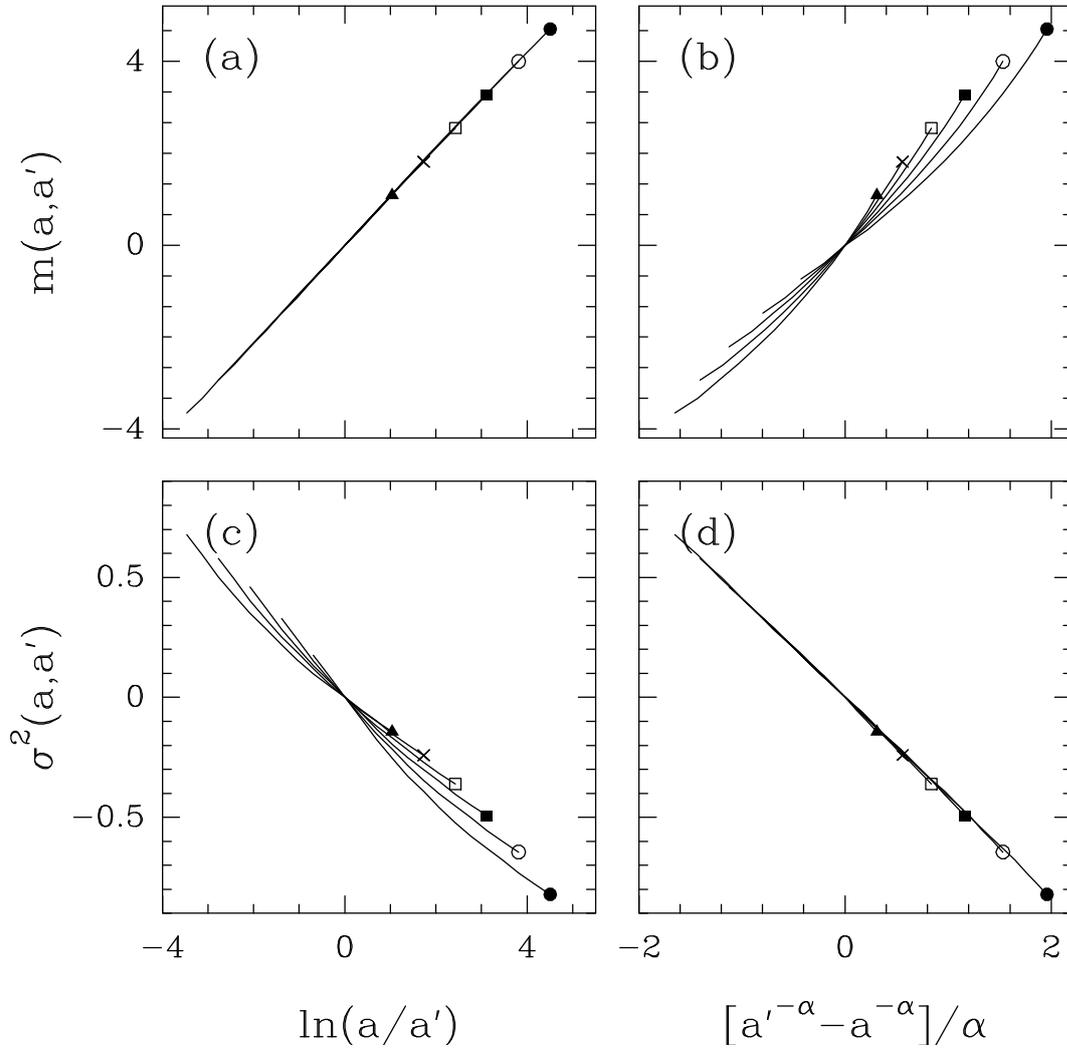


FIG. 4.21 – Comportement des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  obtenues en analysant la dissipation du signal de Modane avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(0)}$ . Les différents symboles correspondent aux mêmes échelles de référence  $a'$  que dans la figure 4.20. a)  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$ . c)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . d)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$ .

les comportements dans les échelles suivant :  $m(a) \sim a^{-\alpha_1}$  et  $\sigma^2(a) \sim a^{-\alpha_2}$ . Les fonctions de partition  $Z(q, a)$  s'écrivent alors sous la forme (Eqs. (2.41) et (2.96)) :

$$Z(q, a) = Z(0, a)C_q e^{c_\psi(m(a)q + \sigma^2(a)q^2/2)}, \quad (4.22)$$

où  $m(a)$  et  $\sigma^2(a)$  se comportent de manière différente dans les échelles. Ainsi  $\ln(Z(q, a)/Z(0, a))$  ne se comporte pas de manière linéaire en fonction de  $\ln(a)$  mais plutôt comme :

$$\ln \left( \frac{Z(q, a)}{Z(0, a)} \right) = \frac{qC_1}{\alpha_1} a^{-\alpha_1} + \frac{q^2 C_2}{2\alpha_2} a^{-\alpha_2}. \quad (4.23)$$

Quand  $\alpha \rightarrow 0^+$ , on a  $(1 - a^{-\alpha})/\alpha \rightarrow \ln a$ . Pour le signal de Modane, la moyenne se comporte bien comme  $\ln a$  puisque  $\alpha_1 \approx 0$ , contrairement à la variance où  $\alpha_2 \approx 0.18$  est significativement différent de zéro. Le processus de cascade sous-jacent à la dissipation d'énergie ne présente donc pas de propriété d'auto-similarité et le formalisme multifractal n'est donc pas adapté pour caractériser statistiquement les fluctuations de ce champ. La donnée du propagateur permet quant à elle de caractériser l'évolution dans les échelles de la statistique de ces fluctuations.

### 4.3.2 Propagateur de la dissipation d'énergie du jet turbulent ( $R_\lambda = 835$ )

Pour confirmer ces résultats, nous avons reproduit cette même étude du propagateur  $G_{aa'}$  pour la dissipation d'énergie obtenue à partir du signal de vitesse provenant du jet turbulent et présenté dans la section 3.5. La définition de  $\epsilon$  utilisée est à nouveau  $\epsilon'_3$ . Les estimations du module  $|\hat{G}_{aa'}|$  obtenus pour  $a'/a = 2^6$  en utilisant les ondelettes analysatrices  $\psi_{(C)}$  (symboles (■)),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles (●)) et  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles (○)), sont représentées sur la figure 4.22a. Ces courbes, qui diffèrent suivant l'ondelette utilisée, sont à nouveau bien modélisées par des Gaussiennes représentées en lignes continues. Sur la figure 4.22b, nous avons reporté les parties réelle (symboles (□)) et imaginaire (symboles (×)) de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenues en utilisant  $\psi_{(C)}$ . Les lignes continues et discontinues, qui correspondent à des Gaussiennes, modélisent bien les données obtenues jusqu'à des valeurs de  $|p| \leq 5$ . Ainsi, pour ce nouveau signal de dissipation, la forme du propagateur est compatible avec le modèle log-normal. Toutefois, ses caractéristiques dépendent sensiblement de l'ondelette utilisée ; cela suggère fortement que le processus de cascade n'est pas auto-similaire.

Pour tester la pertinence de ces résultats, nous avons représenté sur la figure 4.23, le comportement en fonction des échelles  $a$  et  $a'$  des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  calculées en utilisant l'ondelette analysatrice  $\psi_{(C)}$ . A nouveau ces quantités se comportent

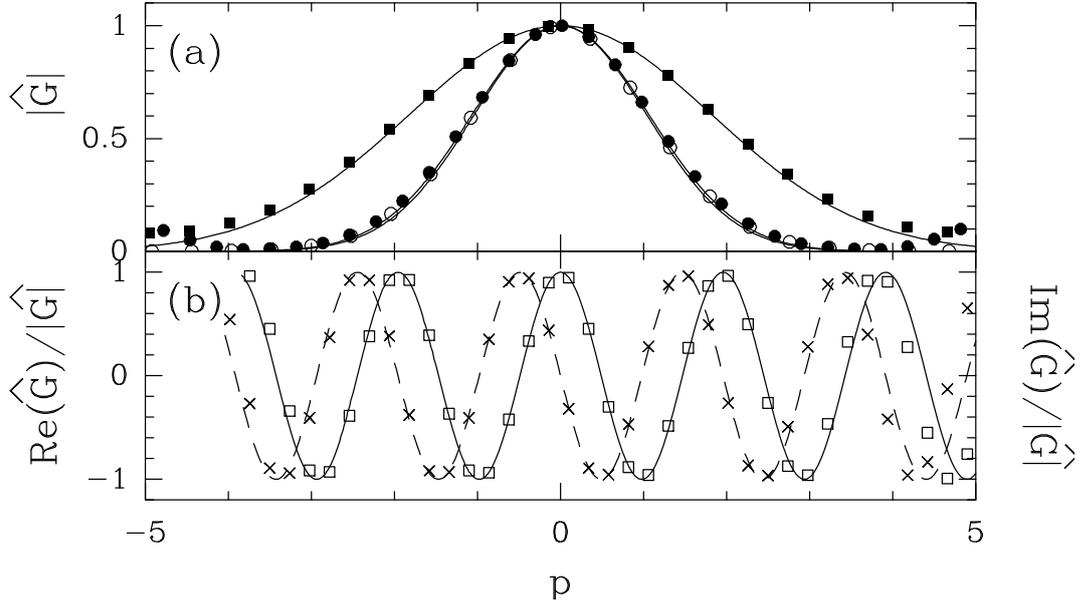


FIG. 4.22 – Estimation de la transformée de Fourier du propagateur de la dissipation d'énergie  $\epsilon'_3$  obtenue à partir du signal expérimental de vitesse provenant du jet turbulent ( $R_\lambda = 835$ ). a) Module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu en utilisant les ondelettes  $\psi_{(C)}$  (■),  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (●) et  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (○). b) Partie réelle (□) et partie imaginaire (×) de  $\hat{G}_{aa'}$  calculées avec  $\psi_{(C)}$ . Les échelles  $a = 2^5$  et  $a' = 2^{11}$  sont situées dans le domaine inertiel. Les lignes continues et discontinues correspondent à la forme analytique (Eq. (3.58)) du noyau prédite par le modèle log-normal.

différemment. Sur les figures 4.23a et 4.23d,  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  sont représentées suivant  $\ln(a/a')$ . Pour chacune de ces quantités, les différentes courbes ne se superposent pas sur une même droite mais sont clairement distinctes et présentent une courbure très nette. Pour que toutes ces courbes se confondent sur une même droite, il faut à nouveau les représenter suivant  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.1 + -0.03$  (Fig. 4.23b) pour  $m(a, a')$  et  $\alpha = 0.5 + -0.05$  pour  $\sigma^2(a, a')$  (Fig. 4.23f). Les pentes obtenues sont alors respectivement égales à  $1.08 + -0.02$  et  $-0.34 + -0.03$ . Le fait que la valeur de  $\alpha$  soit différente pour  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  confirme que le processus de cascade d'énergie n'est ni invariant d'échelle, ni auto-similaire.

Sur la figure 4.24, nous avons répété cette étude en utilisant cette fois l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .  $m(a, a')$  et surtout  $\sigma^2(a, a')$  représentés suivant  $\ln(a/a')$  présentent une courbure très nette (Figs 4.24a et 4.24d). Par contre, il suffit de représenter  $m(a, a')$  suivant  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec

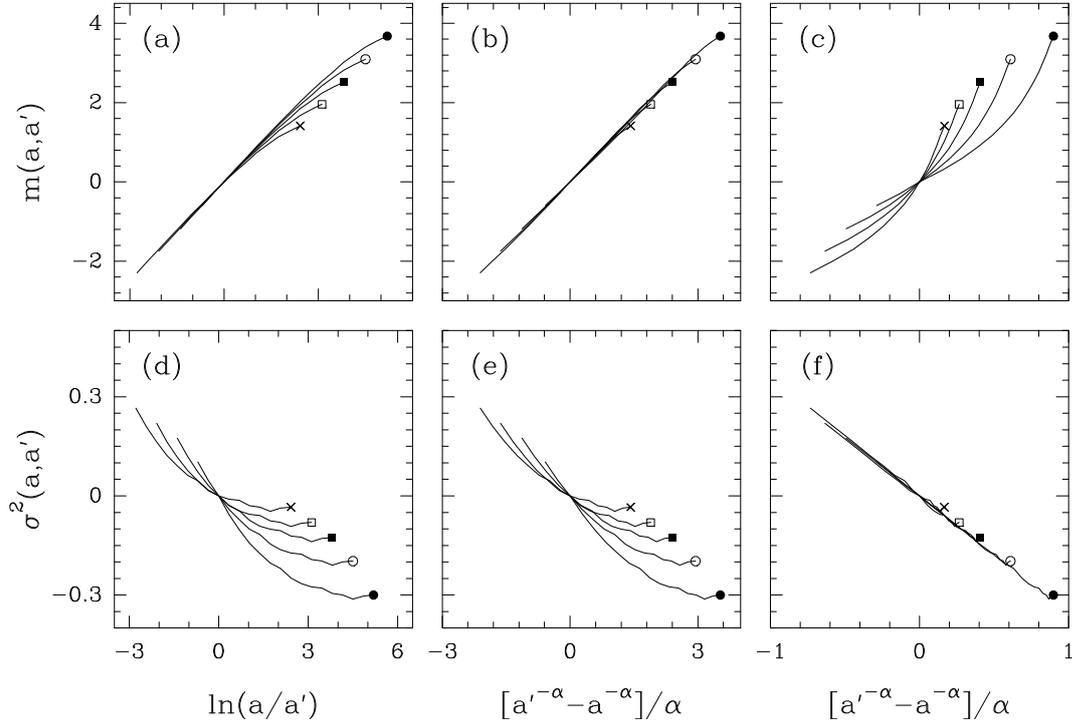


FIG. 4.23 – Comportement des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  obtenues en analysant la dissipation du jet turbulent avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(C)}$ . Les différents symboles correspondent aux valeurs suivantes de l'échelle de référence  $a' = 2^5$  ( $\bullet$ ),  $2^6$  ( $\circ$ ),  $2^7$  ( $\blacksquare$ ),  $2^8$  ( $\square$ ),  $2^9$  ( $\times$ ) et  $2^{10}$  ( $\triangle$ ). a)  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.1$ . c)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.5$ . d)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . e)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.1$ . f)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.5$ .

$\alpha = 0.05 + -0.02$  pour obtenir un comportement linéaire commun de pente  $1.07 + -0.02$  (Fig. 4.24b). Remarquons que pour cette valeur de  $\alpha$ ,  $\sigma^2(a, a')$  présente toujours une courbure (Fig. 4.24e) et qu'il est nécessaire d'ajuster  $\alpha$  ( $\alpha = 0.35 + -0.05$ ) pour que toutes les courbes (correspondant à différentes échelles de référence  $a'$ ) se remettent sur une droite unique de pente  $-0.65 + -0.02$  (Fig. 4.24f). Nous avons vérifié sur la figure 4.24c, que cette nouvelle valeur de  $\alpha$  ne convenait pas pour  $m(a, a')$ . A nouveau, les comportements des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  suivant les échelles sont significativement différents.

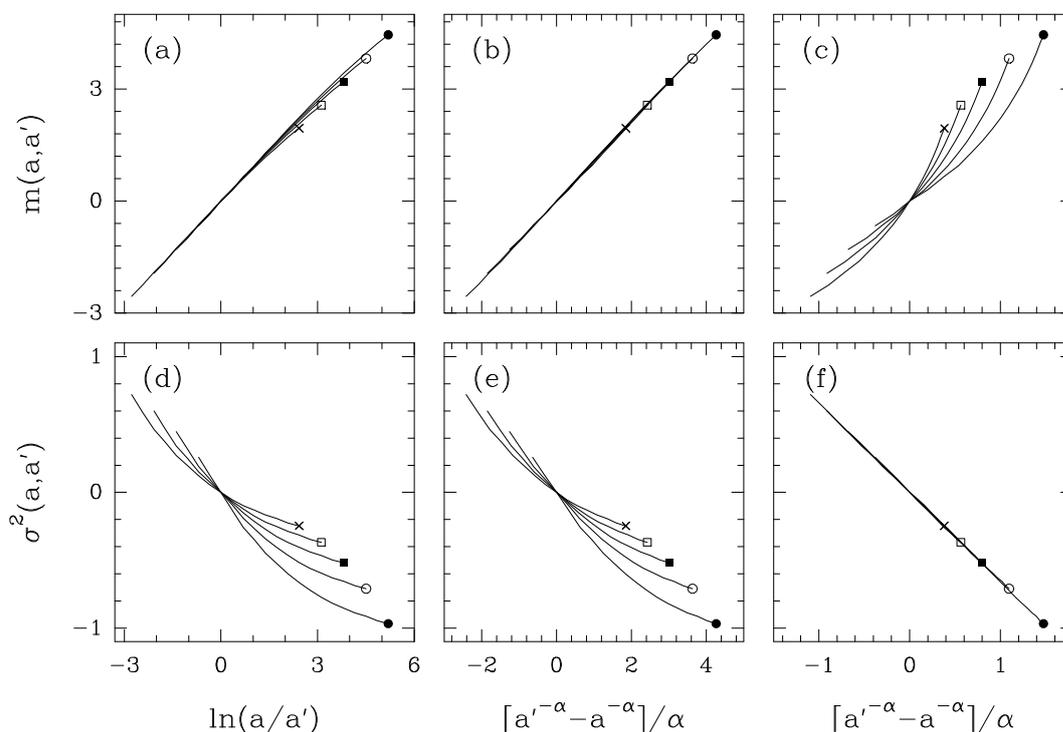


FIG. 4.24 – Comportement des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  obtenues en analysant la dissipation du jet turbulent avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$  aux valeurs suivantes de l'échelle de référence  $a' = 2^5$  ( $\bullet$ ),  $2^6$  ( $\circ$ ),  $2^7$  ( $\blacksquare$ ),  $2^8$  ( $\square$ ),  $2^9$  ( $\times$ ) et  $2^{10}$  ( $\triangle$ ). a)  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.05$ . c)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.35$ . d)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . e)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.05$ . f)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.35$ .

Dans le but de nous convaincre que l'utilisation d'algorithmes classiques de "comptage de boîtes" auraient conduit à la même conclusion, nous avons représenté sur la figure 4.25, les résultats d'une même étude effectuée cette fois avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(0)}$ . On retrouve bien un comportement pour les quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  compatible avec celui défini dans l'équation (4.20) pour les valeurs suivantes des paramètres :  $C_1 = 1.1$ ,  $\alpha_1 = 0.02$  et  $C_2 = 0.7$ ,  $\alpha_2 = 0.35$ . Les résultats obtenus avec les différentes ondelettes sont donc qualitativement les mêmes : le comportement de la moyenne et de la variance de la fonction de probabilité du logarithme des coefficients en ondelettes ne se comportent donc pas comme le logarithme des échelles, mais plutôt comme une loi de puissance dont l'exposant  $\alpha$  diffère pour ces deux quantités. Ainsi, les résultats obtenus sur la turbulence de

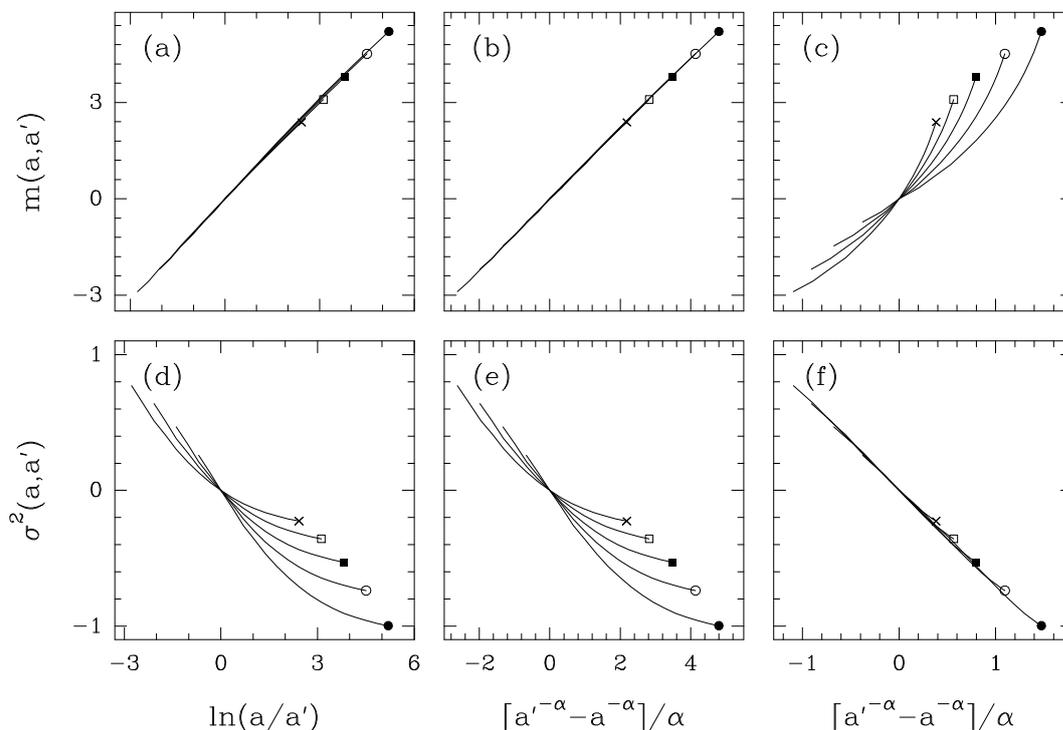


FIG. 4.25 – Comportement des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  obtenues en analysant la dissipation du jet turbulent avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(0)}$  aux valeurs suivantes de l'échelle de référence  $a' = 2^5$  ( $\bullet$ ),  $2^6$  ( $\circ$ ),  $2^7$  ( $\blacksquare$ ),  $2^8$  ( $\square$ ),  $2^9$  ( $\times$ ) et  $2^{10}$  ( $\triangle$ ). a)  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.02$ . c)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.35$ . d)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . e)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.02$ . f)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.35$ .

grille de la soufflerie de Modane et sur la turbulence de jet sont qualitativement identiques et mettent en évidence la non auto-similarité du processus de cascade d'énergie.

Nous avons par ailleurs calculé  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  directement à partir des histogrammes du logarithme des maxima du module estimés à différentes échelles (Eq. (4.21)). Les résultats obtenus par cette méthode sont exactement les mêmes et confirment donc les conclusions émises précédemment. La cascade d'énergie est compatible avec un processus de loi log-normale mais qui malheureusement ne présente pas de propriétés d'auto-similarité. Le logarithme des fonctions de partition a en particulier un comportement de la forme donnée par l'équation (4.23). Pour vérifier si cette hypothèse est plus réaliste qu'un comportement en loi de puissance, nous avons représenté sur la figure 4.26,

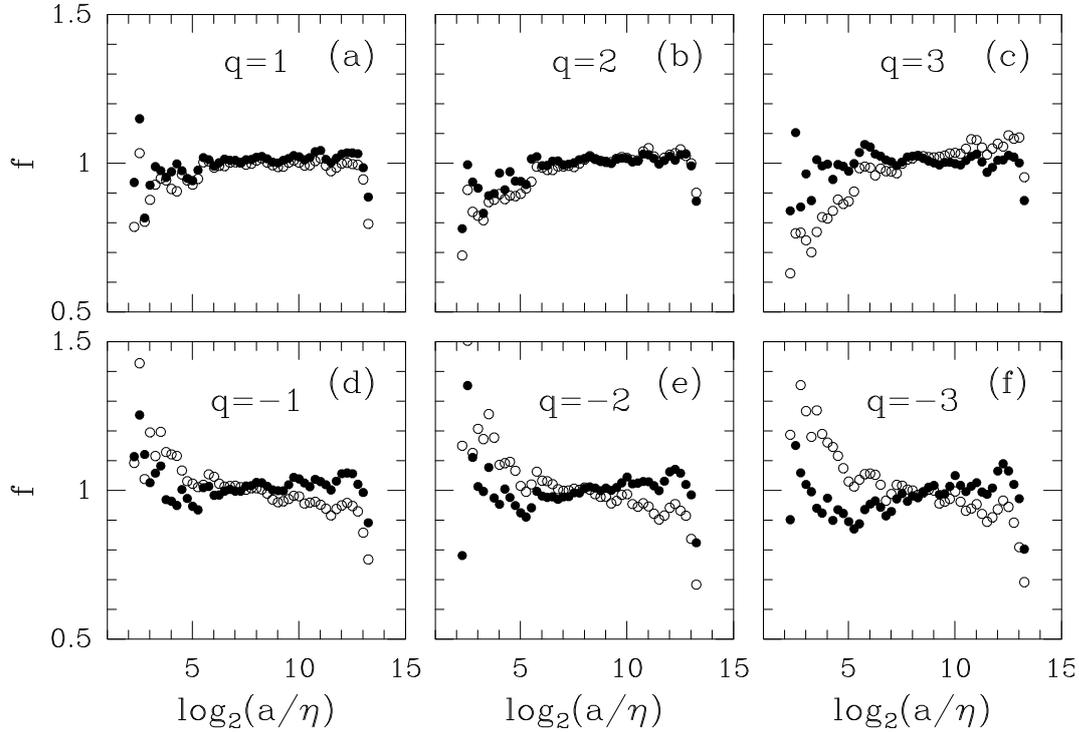


FIG. 4.26 – Comportement des fonctions de partition calculées à partir de la dissipation du signal de Modane : fonctions  $f_1(q, a) = \partial(\ln[Z(q, a)/Z(0, a)])/\partial(\frac{qC_1}{\alpha_1}a^{-\alpha_1} + \frac{q^2C_2}{2\alpha_2}a^{-\alpha_2})$  (symboles (●)) et  $f_2(q, a) = \partial(\ln[Z(q, a)/Z(0, a)])/\partial(\tau(q) \ln(a))$  (symboles (○)) pour différentes valeurs de  $q$ . Ces pentes locales sont estimées sur une fenêtre en échelle de taille égale à une dyade. L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(0)}$ .

les fonctions  $f_1(q, a) = \partial(\ln[Z(q, a)/Z(0, a)])/\partial(\frac{qC_1}{\alpha_1}a^{-\alpha_1} + \frac{q^2C_2}{2\alpha_2}a^{-\alpha_2})$  (symboles (●)) et  $f_2(q, a) = \partial(\ln[Z(q, a)/Z(0, a)])/\partial(\tau(q) \ln(a))$  (symboles (○)) pour quelques valeurs de  $q$ .  $Z(q, a)$  sont les fonctions de partition obtenues en utilisant l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(0)}$  et  $\tau(q)$  le spectre correspondant calculé avec la méthode M.M.T.O. En fait les résultats présentés dans la figure 4.26 correspondent à la pente locale (estimée sur une fenêtre d'échelle égale à une dyade) de  $\ln[Z(q, a)/Z(0, a)]$  comme fonction de  $(\frac{qC_1}{\alpha_1}a^{-\alpha_1} + \frac{q^2C_2}{2\alpha_2}a^{-\alpha_2})$  et de  $\tau(q) \ln a$  respectivement. Les paramètres utilisés  $C_1 = 1.15$ ,  $\alpha_1 = 0.02$  et  $C_2 = -0.73$ ,  $\alpha_2 = 0.19$  permettent d'obtenir une fonction  $f_1$  très proche de 1 sur toute la gamme d'échelle considérée et ce quel que soit  $q$ . La fonction  $f_2$  présente un plateau seulement pour les valeurs de  $q = 1$  et 2. Pour  $q = 3$ , cette fonction est sensiblement croissante et ne présente pas de véritable plateau. Pour les valeurs de  $q$  négatives, la fonction  $f_2$  décroît

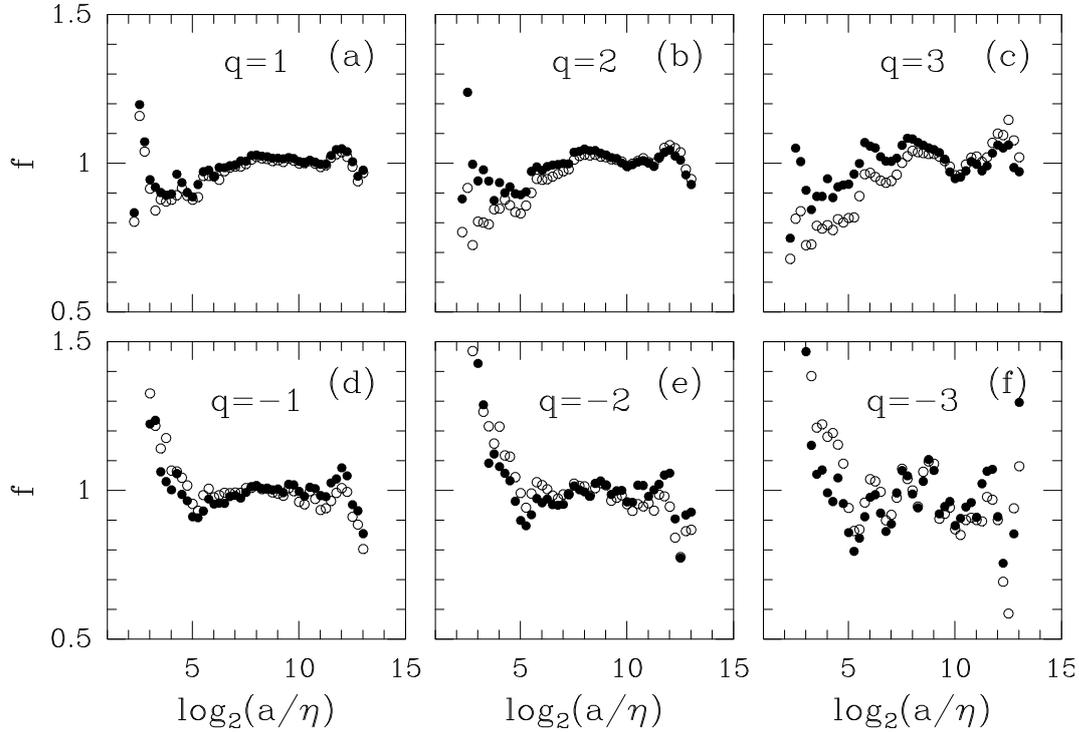


FIG. 4.27 – Comportement des fonctions de partition calculées à partir de la dissipation du signal de Modane : fonctions  $f_1(q, a) = \partial(\ln[Z(q, a)/Z(0, a)])/\partial(\frac{qC_1}{\alpha_1}a^{-\alpha_1} + \frac{q^2C_2}{2\alpha_2}a^{-\alpha_2})$  (symboles (●)) et  $f_2(q, a) = \partial(\ln[Z(q, a)/Z(0, a)])/\partial(\tau(q) \ln(a))$  (symboles (○)) pour différentes valeurs de  $q$ . Ces pentes locales sont estimées sur une fenêtre en échelle de taille égale à une dyade. L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

nettement sur toute la gamme d'échelle remettant ainsi en cause la signification même de l'exposant d'invariance d'échelle  $\tau(q)$ . Ces fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont représentées avec les mêmes symboles sur la figure 4.27, mais maintenant  $Z(q, a)$  représente les fonctions de partition obtenues avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Les paramètres désormais utilisés sont  $C_1 = 1.03$ ,  $\alpha_1 = 0.01$  et  $C_2 = -0.63$ ,  $\alpha_2 = 0.14$ . Remarquons que les paramètres utilisés sont légèrement différents de ceux obtenus à partir du propagateur mais permettent de bien décrire les fonctions de partition quelle que soit la valeur de  $q$  considérée. Peu de différences sont maintenant visibles entre  $f_1$  et  $f_2$  pour les valeurs de  $q$  négatives. Par contre, pour les valeurs de  $q$  égale à 2 ou 3,  $f_2$  présente à nouveau une certaine tendance à augmenter contrairement à  $f_1$  qui présente un plateau mieux défini et ceci sur presque toute la gamme d'échelles considérée.

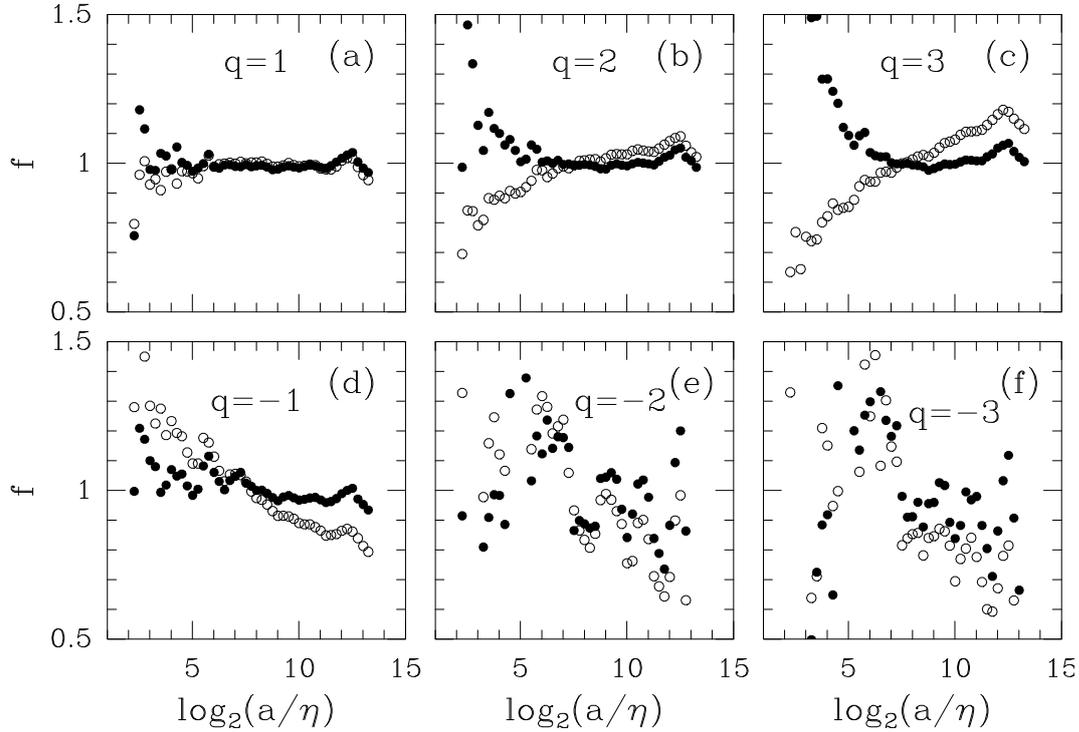


FIG. 4.28 – Comportement des fonctions de partition calculées à partir de la dissipation du signal du jet turbulent : fonctions  $f_1(q, a) = \partial(\ln[Z(q, a)/Z(0, a)]) / \partial(\frac{qC_1}{\alpha_1} a^{-\alpha_1} + \frac{q^2 C_2}{2\alpha_2} a^{-\alpha_2})$  (symboles (●)) et  $f_2(q, a) = \partial(\ln[Z(q, a)/Z(0, a)]) / \partial(\tau(q) \ln(a))$  (symboles (○)) pour différentes valeurs de  $q$ . Ces pentes locales sont estimées sur une fenêtre en échelle de taille égale à une dyade. L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(0)}$ .

Nous avons calculé ces mêmes quantités  $f_1$  et  $f_2$ , pour les fonctions de partition obtenues à partir du signal de dissipation provenant du jet turbulent en utilisant successivement les ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (Fig. 4.28) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (Fig. 4.29). Les paramètres utilisés pour  $f_1$  sont  $C_1 = 1.15$ ,  $\alpha_1 = 0.025$  et  $C_2 = -0.7$ ,  $\alpha_2 = 0.36$  pour  $\psi_{(3)}^{(0)}$  et  $C_1 = 1.16$ ,  $\alpha_1 = 0.07$  et  $C_2 = -0.5$ ,  $\alpha_2 = 0.35$  pour  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Pour ce signal, la fonction  $f_2$  obtenue avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$  présente un plateau uniquement pour la valeur  $q = 1$ . Pour les valeurs de  $q > 1$ , elle augmente franchement contrairement à la fonction  $f_1$  qui présente un plateau bien défini. Pour  $q < 0$ ,  $f_2$  diminue clairement alors que  $f_1$  présente toujours un plateau. Les résultats obtenus avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  sont qualitativement les mêmes :  $f_1$  présente un plateau contrairement à  $f_2$  qui diminue et ceci pour toutes les valeurs de  $q$  considérées. Les fortes fluctuations présentes dans  $f_1$  et  $f_2$  pour les valeurs de  $q \leq -2$  proviennent de

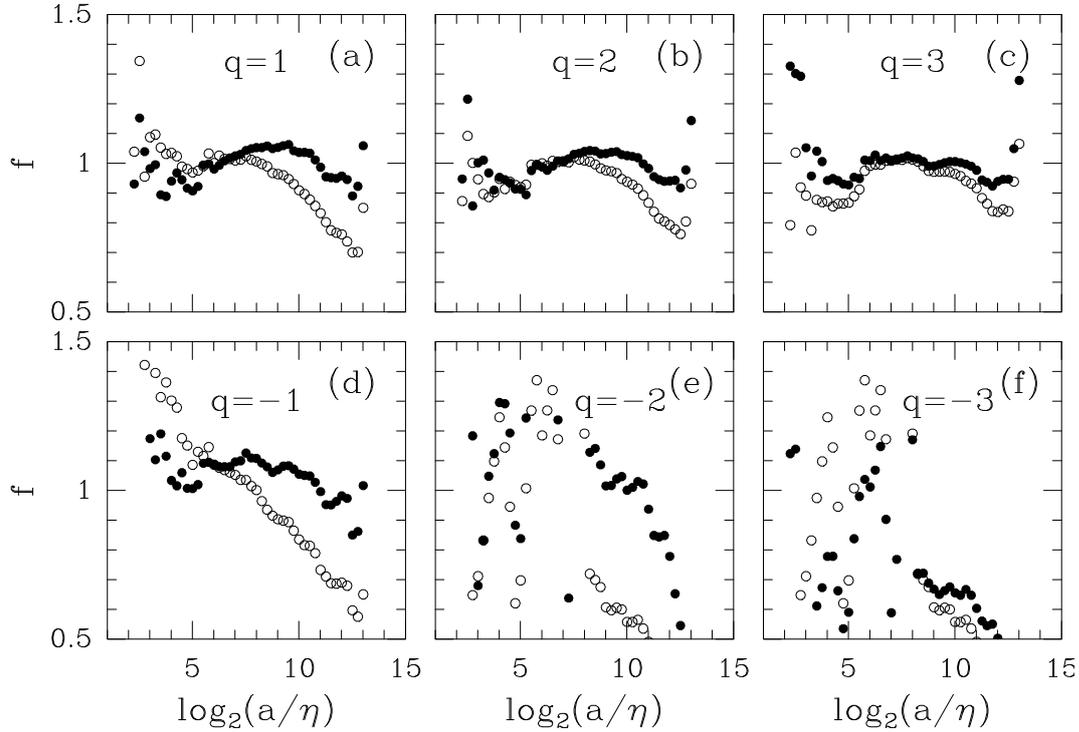


FIG. 4.29 – Comportement des fonctions de partition calculées à partir de la dissipation du signal du jet turbulent : fonctions  $f_1(q, a) = \partial(\ln[Z(q, a)/Z(0, a)]) / \partial(\frac{qC_1}{\alpha_1} a^{-\alpha_1} + \frac{q^2 C_2}{2\alpha_2} a^{-\alpha_2})$  (symboles (●)) et  $f_2(q, a) = \partial(\ln[Z(q, a)/Z(0, a)]) / \partial(\tau(q) \ln(a))$  (symboles (○)) pour différentes valeurs de  $q$ . Ces pentes locales sont estimées sur une fenêtre en échelle de taille égale à une dyade. L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

l'existence de très faibles valeurs des maxima du module de la T.O. qui rend très instable l'estimation des fonctions de partition d'ordre  $q \leq -2$ .

Ainsi pour les deux signaux de dissipation d'énergie étudiés, le comportement dans les échelles des fonctions de partition semble beaucoup mieux modélisé par l'équation (4.23) que par un comportement en loi de puissance en fonction des échelles (Eq. (2.96)). Remarquons de plus que l'une des conséquences de cette observation est que l'hypothèse d'Auto-Similarité Etendue ne s'applique pas à la dissipation d'énergie. En effet, comme la moyenne  $m(a) \sim a^{-\alpha_1}$  et la variance  $\sigma^2(a) \sim a^{-\alpha_2}$  se comportent en fonction de l'échelle avec des exposants  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  différents, on ne peut donc factoriser la dépendance dans les échelles dans l'équation (4.23), contrairement au cas de la vitesse turbulente (Eq. (3.65)).

En conclusion, le champ de dissipation d'énergie obtenu pour les deux signaux en notre

possession, est bien modélisé par un processus log-normal dont les caractéristiques, à savoir la moyenne et la variance, se comportent anormalement et différemment en fonction des échelles. Ce champ de dissipation ne présente donc pas de propriétés d'auto-similarité et l'utilisation du formalisme multifractal est sujette à caution. De plus, l'hypothèse d'Auto-Similarité Etendue ne s'applique pas et ne permet donc pas d'extraire le spectre  $\tau(q)$ , éventuellement universel, caractérisant le processus de cascade d'énergie dans la limite asymptotique des grands nombres de Reynolds.

## 4.4 Evidences expérimentales de la non validité de l'hypothèse de similarité locale de Kolmogorov-Obukhov KO62

### 4.4.1 Comparaison des propagateurs du champ de vitesse et du champ de dissipation

Comme nous l'avons vu, l'hypothèse de similarité locale de Kolmogorov-Obukhov<sup>[177],[178]</sup> (KO62) relie de manière statistique les fluctuations du champ de vitesse à celles de la dissipation d'énergie par la relation (Eq. (3.16)) :

$$\delta v_l^3 \stackrel{s}{=} \epsilon_l , \quad (4.24)$$

dans le sens où les moments des densités de probabilité de ces deux variables aléatoires ont le même comportement dans les échelles.  $\delta v_l$  et  $\epsilon_l$  représentent respectivement les incréments de la vitesse sur une distance  $l$  et la dissipation d'énergie contenue dans une boîte (intervalle) de taille  $l$ . Si l'on suppose que la relation (4.24) est le reflet d'une relation statistique entre les processus de cascade auto-similaire associés respectivement aux fluctuations de vitesse et d'énergie alors elle se généralise facilement aux fluctuations des coefficients en ondelettes correspondants :

$$T_{\psi_{(m)}^{(1)}}^3 [v](a) \stackrel{s}{=} T_{\psi_{(m)}^{(0)}} [\epsilon](a) , \quad (4.25)$$

où  $T_{\psi_{(m)}^{(1)}} [v](a)$  et  $T_{\psi_{(m)}^{(0)}} [\epsilon](a)$  correspondent aux maxima du module de la T.O. du champ de vitesse et de la dissipation de l'énergie calculés respectivement avec les ondelettes analysatrice  $\psi_{(m)}^{(1)}$  et  $\psi_{(m)}^{(0)}$  (Fig. 2.18). Remarquons que dans la relation (4.25), nous avons étendu l'hypothèse KO62 à des versions adoucies des incréments ( $\psi_{(0)}^{(1)}$ ) de la vitesse et de la dissipation contenue dans une boîte ( $\psi_{(1)}^{(0)}$ ).

D'après la relation (4.25), la densité probabilité de la variable aléatoire  $X = \ln |T_{\psi_{(m)}^{(1)}}[v](a)|$  est reliée à celle de la variable aléatoire  $Y = \ln |T_{\psi_{(m)}^{(0)}}[\epsilon](a)|$  par :

$$P_Y(u) = \frac{1}{3} P_X\left(\frac{u}{3}\right). \quad (4.26)$$

Ainsi, si l'on note respectivement  $M^v(p, a)$  et  $M^\epsilon(p, a)$  les fonctions caractéristiques (Eq. (3.39)) associées aux distributions de probabilité du logarithme des maxima du module de la T.O. de la vitesse et de la dissipation d'énergie, on obtient facilement :

$$M^\epsilon(p, a) = M^v(3p, a). \quad (4.27)$$

On en déduit d'après l'équation (3.41) :

$$\hat{G}_{aa'}^\epsilon(p) = \hat{G}_{aa'}^v(3p), \quad (4.28)$$

où  $\hat{G}^v$  et  $\hat{G}^\epsilon$  correspondent aux transformées de Fourier des propagateurs du champ de vitesse et de dissipation de l'énergie. Ces propagateurs sont donc reliés par la relation suivante :

$$G_{aa'}^\epsilon(x) = \frac{1}{3} G_{aa'}^v\left(\frac{x}{3}\right). \quad (4.29)$$

Nous avons vu précédemment que la forme des propagateurs de la vitesse (Eq. (3.62)) et de la dissipation d'énergie (Eq. (4.19)) était bien modélisée par une Gaussienne de moyenne  $m_v(a, a')$  (respectivement  $m_\epsilon(a, a')$ ) et de variance  $\sigma_v^2(a, a')$  (respectivement  $\sigma_\epsilon^2(a, a')$ ). D'après l'équation (4.29), ces quantités sont donc étroitement reliées :

$$\begin{cases} m_\epsilon(a, a') &= 3m_v(a, a'), \\ \sigma_\epsilon^2(a, a') &= 9\sigma_v^2(a, a'). \end{cases} \quad (4.30)$$

De notre analyse des signaux expérimentaux de vitesse et de dissipation, il est clairement apparu que  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  ne se comportaient pas comme  $\ln(a/a')$  mais plutôt comme  $m(a, a') \sim a^{-\alpha_1} - a'^{-\alpha_1}$  et  $\sigma^2(a, a') \sim a^{-\alpha_2} - a'^{-\alpha_2}$ . La validité de l'hypothèse similarité locale KO62 à travers l'équation (4.30) implique que les exposants  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  doivent être les mêmes pour le champ de vitesse et pour le champ de dissipation de l'énergie. Ceci n'est malheureusement pas vérifié pour le signal de Modane puisque  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.08 + -0.02$  (quelle que soit l'ondelette  $\psi_{(m)}^{(1)}$  utilisée) pour la vitesse et  $\alpha_1 = 0 + -0.05$  et  $\alpha_2 \approx 0.3 + -0.1$  (quelle que soit l'ondelette  $\psi_{(m)}^{(1)}$  utilisée) pour la dissipation correspondante. Pour le signal provenant du jet turbulent les résultats sont qualitativement les mêmes : on a  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.22 + -0.05$  (quelle que soit l'ondelette  $\psi_{(m)}^{(1)}$  utilisée) pour la vitesse

et  $\alpha_1 \approx 0 + -0.05$  et  $\alpha_2 \approx 0.35 + -0.1$  (quelle que soit l'ondelette  $\psi_{(m)}^{(1)}$  utilisée) pour la dissipation. Ces résultats ne sont donc pas compatibles avec l'hypothèse de Kolmogorov-Obukhov KO62. Aux nombres de Reynolds accessibles dans les expériences actuelles, le comportement des propagateurs de la vitesse et de la dissipation en fonction des échelles diffère significativement de celui prédit par l'hypothèse KO62. Par contre, si la décroissance des exposants  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  en fonction du nombre de Reynolds se confirmait dans de nouvelles expériences effectuées à plus hauts Reynolds, rien de nos résultats actuels ne permet d'exclure la validité de cette hypothèse dans la limite asymptotique  $R_\lambda \rightarrow +\infty$ .

Depuis quelques années un nombre important d'études numériques et expérimentales ont été entreprises<sup>[155],[179]–[191]</sup> pour confirmer ou infirmer l'hypothèse similarité locale KO62. Contrairement à nos résultats, la plupart d'entre elles ont apporté de nombreuses évidences de sa validité. Nous allons donc passer en revue ces diverses évidences afin d'éclaircir une situation apparemment sujette à controverse.

#### 4.4.2 Analyse multifractale comparative de la vitesse et de la dissipation

Si l'on ne tient pas compte des résultats présentés dans les sections et chapitres précédents et que l'on suppose, comme cela a été fait dans de nombreuses études<sup>[134]–[152],[155],[166]</sup>, que le champ de vitesse et le champ de dissipation de l'énergie sont auto-similaires, on peut alors tester la validité de l'hypothèse KO62 par comparaison des spectres multifractals de ces deux champs. En effet, comme nous l'avons déjà évoqué dans la section 4.1, l'hypothèse KO62 implique une relation remarquable entre ces spectres (Eqs (4.4) et (4.8)) :

$$\tau_\epsilon(q) = \tau_v(3q) = \zeta_{3q} - 1 , \quad (4.31)$$

où  $\zeta_q$ ,  $\tau_v(q)$  et  $\tau_\epsilon(q)$  représentent respectivement le spectre des exposants des fonctions de structure de la vitesse et les spectres des fonctions de partition restreintes aux maxima du module de la T.O. de la vitesse et de la dissipation. Par transformation de Legendre de ces fonctions, on en déduit l'identité suivante :

$$f(\alpha = 3h) = D(h) , \quad (4.32)$$

entre le spectre  $f(\alpha)$  des singularités de la dissipation et le spectre  $D(h)$  des exposants de Hölder de la vitesse.

Dans la figure 4.30, nous avons entrepris de vérifier les relations (4.31) et (4.32) sur les signaux de vitesse et de dissipation de la turbulence de grille générée dans la soufflerie

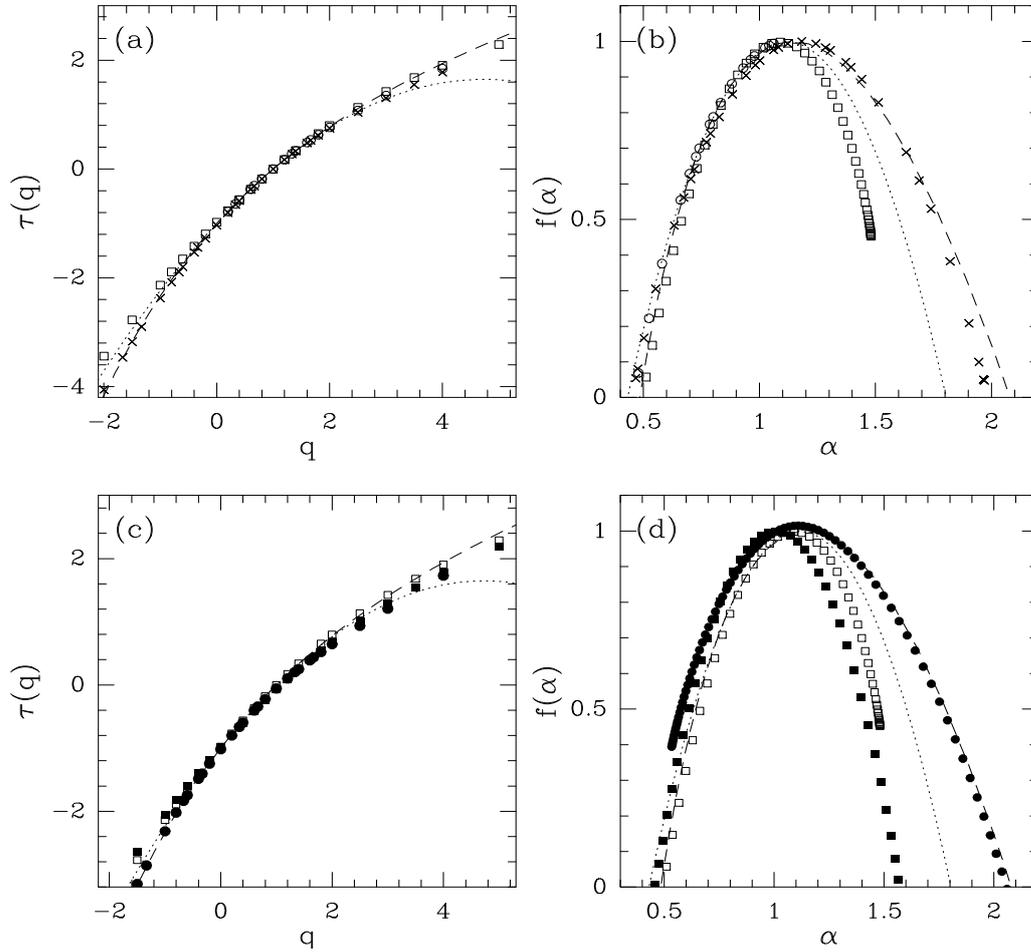


FIG. 4.30 – Comparaison des spectres multifractals des signaux de vitesse et de dissipation enregistrés dans la soufflerie de Modane. a) Spectre  $\tau_\epsilon(q)$  obtenu avec la méthode M.M.T.O. et l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ( $\square$ ), spectre des exposants  $\zeta_{3q} - 1$  des fonctions de structure de la vitesse ( $\circ$ ) et spectre  $\tau_v(3q)$  obtenu avec la méthode M.M.T.O. ( $\psi_{(3)}^{(1)}$ ) et l'Auto-Similarité Etendue ( $\times$ ). b) Spectres  $f(\alpha)$  obtenus par transformation de Legendre des spectres présentés dans la figure (a). c) Spectres  $\tau_\epsilon(q)$  calculés avec la méthode M.M.T.O. en utilisant respectivement l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$  ( $\square$ ) et l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\blacksquare$ ), spectre  $\tau_v(3q)$  obtenu avec la méthode M.M.T.O. et l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ). d) Spectres  $f(\alpha)$  obtenus par transformation de Legendre des spectres présentés dans la figure (c). Les lignes discontinues correspondent aux prédictions du modèle log-Poisson de She et Waymire<sup>[233]</sup>. Les lignes en pointillés correspondent aux prédictions du modèle log-normal pour la dissipation d'énergie; les paramètres ont été fixés de telle sorte que, via l'hypothèse KO62 (Eq. (4.31)), on obtienne une bonne modélisation du spectre  $\zeta_q$  ( $q > 0$ ) des fonctions de structure de la vitesse.

de Modane. Sur la figure 4.30a sont représentés  $\zeta_{3q} - 1$  (symboles ( $\circ$ )) et  $\tau_\epsilon(q)$  calculé avec la méthode M.M.T.O. et l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles ( $\square$ )). Les lignes discontinues et en pointillés correspondent respectivement au modèle log-Poisson de She et Waymire<sup>[233]</sup> et au modèle log-normal<sup>[177],[178]</sup> de la dissipation avec des paramètres choisis tels que, en utilisant l'hypothèse KO62 (Eq. (4.31)), ce spectre modélise le spectre  $\zeta_q$  des fonctions de structure de la vitesse ( $\sigma^2 = 2 - \zeta_6$ ). Tous ces spectres sont en bon accord mais la comparaison n'est que partielle et ne se fait que pour les valeurs de  $q$  positives. Le modèle log-normal s'écarte de  $\tau_\epsilon(q)$  et de  $\zeta_{3q} - 1$  dès que  $q$  est supérieur à 3, c'est-à-dire pour des valeurs de  $q$  pour lesquelles, étant donné la taille de notre échantillon statistique, la convergence de ces exposants n'est pas atteinte. Nous avons superposé sur cette même figure le spectre  $\tau_v(3q)$  obtenu avec la méthode M.M.T.O. en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et l'Auto-Similarité Etendue (symboles ( $\times$ )). Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, ce spectre est équivalent au spectre des exposants des fonctions de structure pour les valeurs de  $q$  positives, et l'étend aux valeurs négatives. Il n'est donc pas surprenant que ce spectre soit en bon accord avec les spectres précédents pour  $q > 0$ ; il diffère toutefois du spectre  $\tau_\epsilon(q)$  et du modèle log-normal dès que  $q$  devient négatif. Sur la figure 4.30b, nous avons représenté, en conservant les mêmes symboles, les spectres  $f(\alpha)$  des singularités obtenus par transformation de Legendre des spectres  $\tau_\epsilon(q)$  pour l'énergie et  $\zeta_{3q} - 1$  et  $\tau_v(3q)$  pour la vitesse. Ces spectres sont en bon accord pour les valeurs de  $\alpha < 1$ , c'est-à-dire pour la partie croissante ( $q > 0$ ) de la courbe  $f(\alpha)$ . Par contre des différences importantes sont observées pour la partie décroissante de ce spectre ( $\alpha > 1$ ). Remarquons que le spectre  $f(\alpha)$  obtenu par transformation de Legendre du spectre  $\tau_v(3q)$  calculé avec la méthode M.M.T.O. et l'Auto-Similarité Etendue, est en très bon accord avec le modèle log-Poisson mais qu'il diffère significativement du spectre  $f(\alpha)$  de l'énergie dans sa partie décroissante ( $\alpha > 1$ ), remettant ainsi en cause la validité de l'équation (4.32).

Sur la figure 4.30c, nous pouvons comparer les spectres obtenus avec la méthode M.M.T.O. pour la dissipation d'énergie, en utilisant les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles ( $\square$ )) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\blacksquare$ )), avec celui obtenu pour la vitesse avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\bullet$ )). Les lignes discontinues et en pointillés représentent toujours les prédictions des modèles log-Poisson et log-normal. S'il existe désormais un très bon accord entre les spectres  $\tau_\epsilon(q)$  et  $\tau_v(3q)$  pour les valeurs de  $q$  positives lorsqu'on utilise l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , accord que l'on retrouve sur la partie croissante ( $\alpha < 1$ ) des spectres  $f(\alpha)$  correspondants (Fig. 4.30d), le désaccord persiste aux valeurs de  $q$  négatives correspondant à la partie décroissante de la courbe  $f(\alpha)$ .

Ainsi, quelle que soit l'ondelette utilisée, aucun des spectres multifractals de la vitesse n'est relié aux spectres correspondants de la dissipation via les relations (4.31) et (4.32). Par contre, le spectre des exposants des fonctions de structure est effectivement, pour les valeurs de  $q$  positives uniquement, en bon accord avec le spectre  $\tau_\epsilon(q)$  de la dissipation calculé avec des boîtes. C'est sur la vérification de cet accord partiel que certains auteurs se sont appuyés pour conclure à la validité de l'hypothèse KO62. La liberté de choix de l'ondelette analysatrice et la restriction aux maxima du module de la T.O. qui permettent d'étendre cette comparaison à toutes les valeurs de  $q$  (et donc à tout le spectre  $f(\alpha)$  des singularités, y compris les singularités les plus faibles), apportent des évidences contradictoires qui suggèrent la non validité de cette hypothèse. En particulier, les contributions statistiques des singularités les plus faibles des champs de vitesse et de dissipation ne semblent pas être reliées par l'équation (4.32), conséquence directe de l'hypothèse KO62.

#### 4.4.3 Comparaison du comportement dans les échelles des fonctions de partition de la vitesse et de la dissipation

Nous pouvons aussi comparer directement les comportements des fonctions de partition continues (Eq. (2.88)) de la vitesse et de la dissipation d'énergie qui sont reliées d'après l'équation (4.1) par la relation (section 2.4) :

$$\langle |T_\epsilon|^q(a) \rangle = K_\epsilon(q, a) \stackrel{s}{=} K_v(3q, a) = \langle |T_v|^{3q}(a) \rangle, \quad (4.33)$$

où  $\stackrel{s}{=}$  signifie que le comportement dans les échelles des deux quantités comparées sont les mêmes et  $\langle \rangle$  représente la moyenne de ces quantités. Dans cette équation,  $T_v(a)$  et  $T_\epsilon(a)$  représentent respectivement les transformées en ondelettes à l'échelle  $a$  du champ de vitesse et du champ de dissipation en utilisant une ondelette analysatrice quelconque. Pour cette comparaison, nous ne supposons pas que ces fonctions de partition se comportent en loi de puissance en fonction de l'échelle comme le présuppose le formalisme multifractal et nous n'anticipons donc pas sur l'éventuelle pertinence des spectres  $\zeta_q$ ,  $\tau_v(q)$  et  $\tau_\epsilon(q)$ . En effet, comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, ces fonctions de partition, que ce soit celles de la vitesse ou celles de la dissipation d'énergie, ne se comportent pas en loi de puissance en fonction de l'échelle  $a$  mais de manière plus complexe. Nous allons donc comparer ces comportements pour essayer de confirmer nos premières conclusions quant à la non validité de l'hypothèse de Kolmogorov-Obukhov (KO62). Cette comparaison est résumée sur la figure 4.31, où nous avons reporté les quantités  $\langle |T_v|^{3q}(a) \rangle$  en fonction de  $\langle |T_\epsilon|^q(a) \rangle$  pour trois valeurs de  $q$ , en représentation logarithmique (Figs 4.31a,

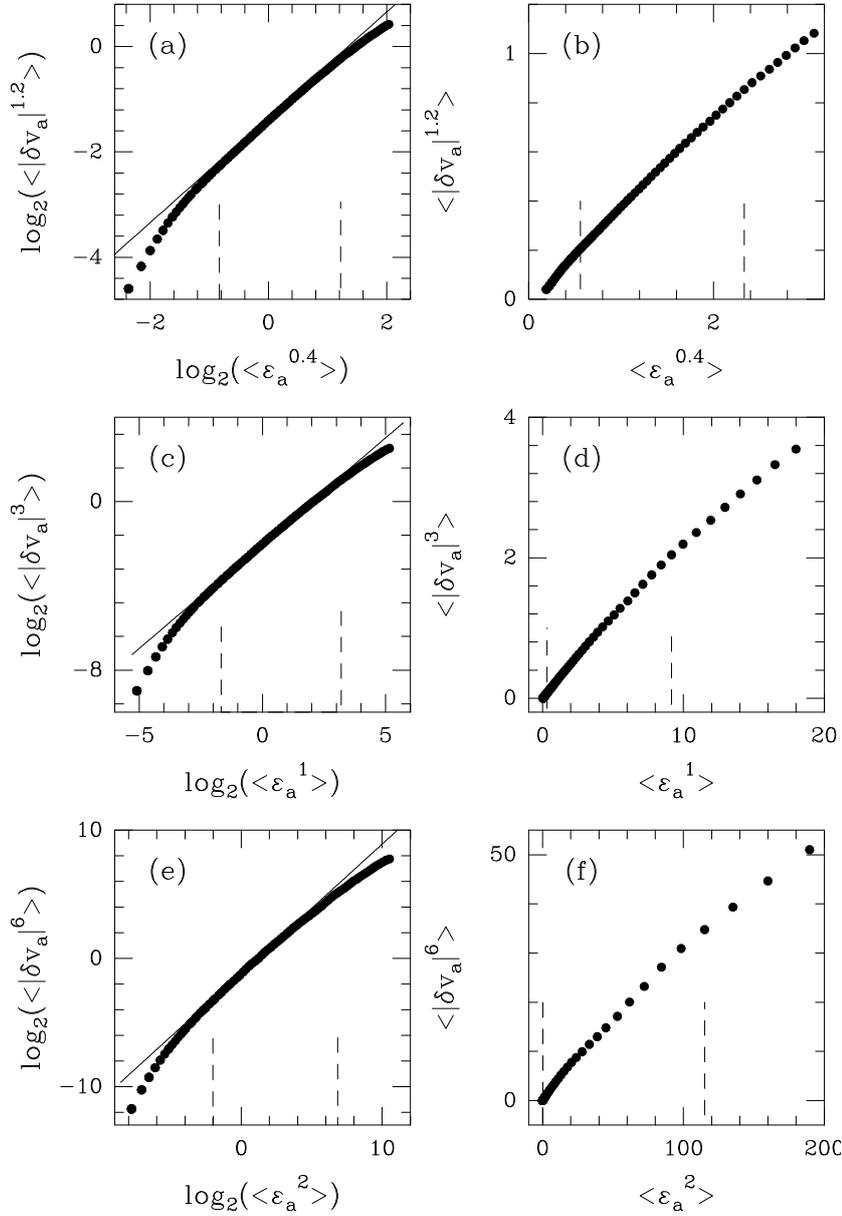


FIG. 4.31 – Signal de Modane : Comparaison du comportement des fonctions de structure de la vitesse  $\langle |\delta v_a|^{3q} \rangle = \langle |T_v|^{3q}(a) \rangle$  ( $\psi = \psi_{(0)}^{(1)}$ ) par rapport au comportement de la dissipation d'énergie moyennée localement sur une échelle  $a$   $\langle \epsilon_a^q \rangle = \langle |T_\epsilon|^q(a) \rangle$  ( $\psi = \psi_{(3)}^{(0)}$ ) pour différentes valeurs de  $q$  :  $q = 0.4$  (a,b),  $q = 1$  (c,d) et  $q = 2$  (e,f). La représentation utilisée est logarithmique dans (a,c,e) et linéaire dans (b,d,f). Les lignes continues sur les figures (a), (c) et (e) représentent la droite de pente 1. Les lignes verticales discontinues délimitent la région inertielle.

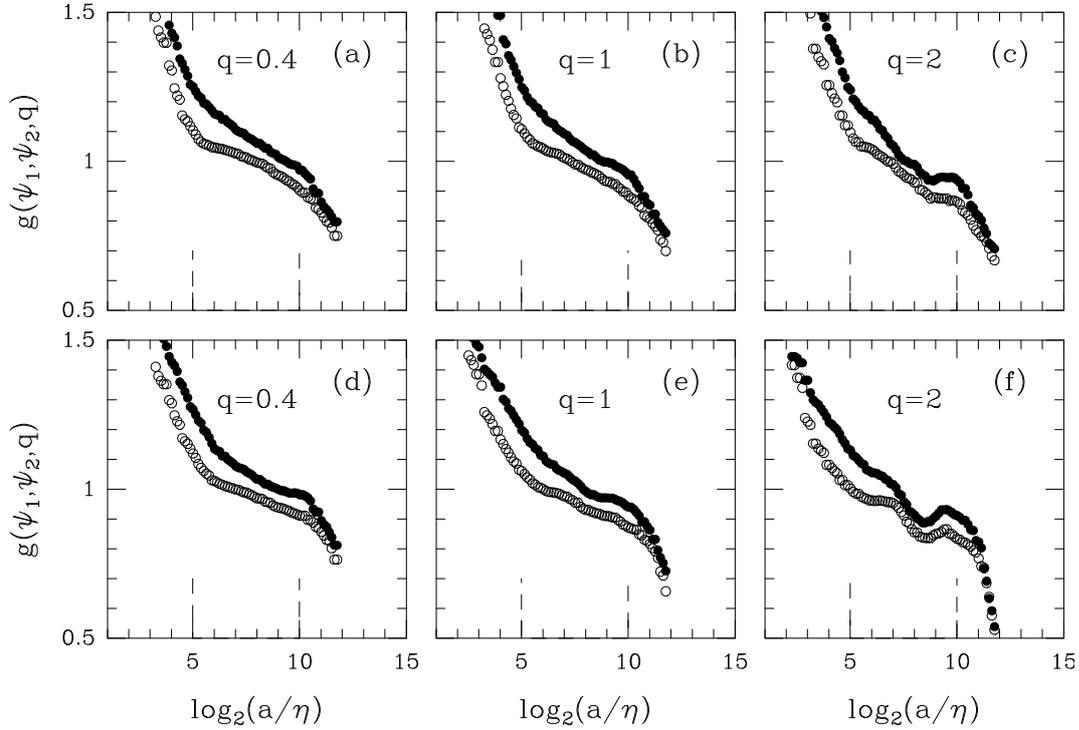


FIG. 4.32 – Signal de Modane ( $R_\lambda = 3050$ ) : Pente locale  $g(\psi_1, \psi_2, q)$  des fonctions  $\log_2(\langle |T_v|^{3q}(a) \rangle) = f(\log_2(\langle |T_\epsilon|^q(a) \rangle))$  pour différentes valeurs de  $q$ . Les différents symboles correspondent à l'ondelette  $\psi_2$  utilisée pour estimer  $\langle |T_\epsilon|^q(a) \rangle$  c'est-à-dire  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (o) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (●). L'ondelette  $\psi_1 = \psi_{(0)}^{(1)}$  (a,b,c) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (d,e,f) correspond à celle utilisée pour estimer  $\langle |T_v|^{3q}(a) \rangle$ . Les lignes verticales discontinues délimitent la région inertielle.

4.31c et 4.31e) et en représentation linéaire (Figs 4.31b, 4.31d et 4.31f). Les ondelettes utilisées sont  $\psi_{(0)}^{(1)}$  pour la vitesse et  $\psi_{(3)}^{(0)}$  pour la dissipation, ce qui correspond donc aux fonctions de structure de la vitesse et au comportement de la dissipation d'énergie contenue dans une boîte (légèrement adoucie comme cela est illustré dans la figure 2.18). Sur les représentations logarithmiques, nous avons superposé la droite de pente 1 qui semble bien reproduire les données expérimentales et donc confirmer l'étroite relation (Eq. (4.33)) entre les comportements de ces fonctions dans la région inertielle. C'est ce type de représentation qui a été utilisée par Benzi, Ciliberto et leurs collaborateurs<sup>[147],[148],[262]</sup> pour démontrer la validité de l'hypothèse KO62. Malheureusement, comme le montre la courbure très nette observée sur les représentations linéaires (pour toutes les valeurs de  $q$  et ceci même dans la région inertielle qui correspond à la zone comprise entre les

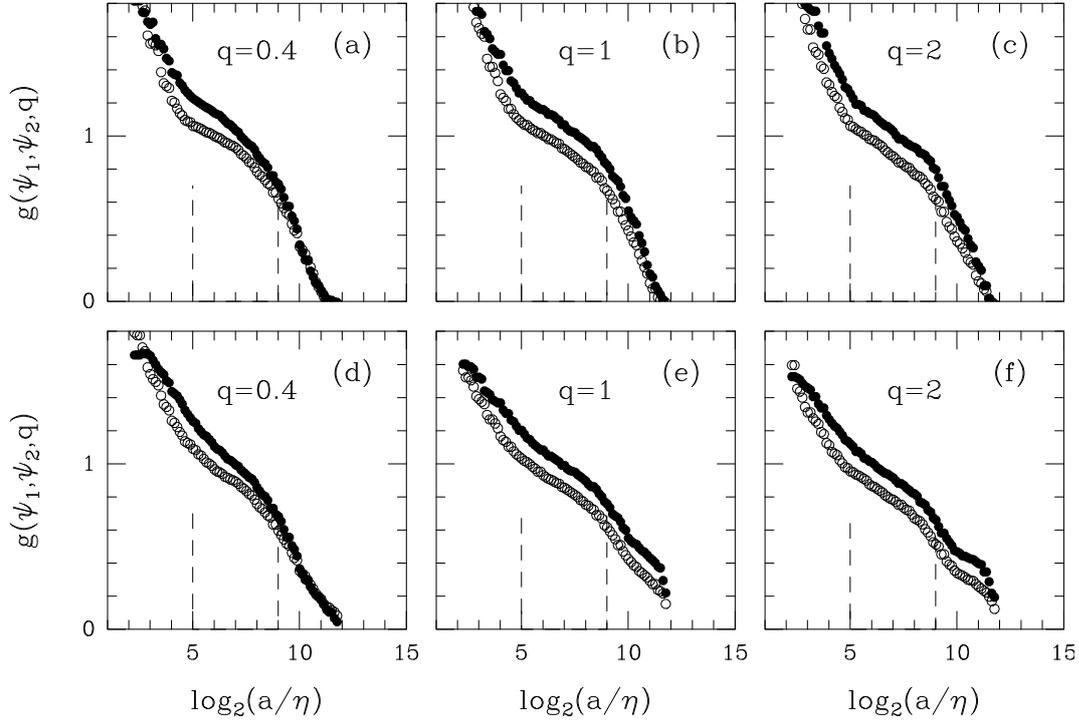


FIG. 4.33 – Jet turbulent ( $R_\lambda = 835$ ) : Pente locale  $g(\psi_1, \psi_2, q)$  des fonctions  $\log_2(\langle |T_v|^{3q}(a) \rangle) = f(\log_2(\langle |T_\epsilon|^q(a) \rangle))$  pour différentes valeurs de  $q$ . Les différents symboles correspondent à l'ondelette  $\psi_2$  utilisée pour estimer  $\langle |T_\epsilon|^q(a) \rangle$  c'est-à-dire  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (o) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (•). L'ondelette  $\psi_1 = \psi_{(0)}^{(1)}$  (a,b,c) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (d,e,f) correspond à celle utilisée pour estimer  $\langle |T_v|^{3q}(a) \rangle$ . Les lignes verticales discontinues délimitent la région inertielle.

lignes verticales discontinues), cette conclusion s'avère être erronée car biaisée par la représentation utilisée. La vérification de l'équation (4.33) ne nécessite pas l'utilisation d'une représentation logarithmique. Les figures 4.31b, 4.31d et 4.31f constituent un test direct de cette relation; elles montrent en fait plus clairement l'existence de certaines déviations à l'hypothèse de KO62.

Pour mieux illustrer l'existence d'une courbure dans les différentes représentations de la figure 4.31, nous avons représenté sur la figure 4.32, les pentes locales  $g(\psi_1, \psi_2, q)$  des fonctions  $\ln(\langle |T_v|^{3q}(a) \rangle) = f(\ln \langle |T_\epsilon|^q(a) \rangle)$  où  $\psi_1$  et  $\psi_2$  représentent respectivement les ondelettes analysatrices utilisées pour estimer respectivement les fonctions de partition de la vitesse et de la dissipation d'énergie. Sur les figures 4.32a, 4.32b et 4.32c, l'ondelette  $\psi_1$  utilisée pour la vitesse est l'ondelette  $\psi_{(0)}^{(1)}$  (fonctions de structure). Pour

les figures 4.32d, 4.32e et 4.32f,  $\psi_1$  est égale à  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Les différents symboles correspondent aux différentes ondelettes  $\psi_2$  utilisées pour la dissipation, c'est-à-dire  $\psi_{(3)}^{(0)}$  (symboles (o)) et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles (●)). Toutes ces courbes sont très nettement décroissantes et ne présentent pas de plateau à la valeur 1 et ceci, même dans la région inertielle (comprise entre les lignes verticales discontinues) où un simple épaulement est observé. Ainsi, même sur la représentation logarithmique, un examen attentif des données montre une déviation systématique par rapport à la relation (4.33) prédite par l'hypothèse KO62. Nous avons de la même manière représenté ces pentes locales sur la figure 4.33, mais en considérant cette fois les fonctions de partition obtenues pour les signaux de vitesse et de dissipation du jet turbulent. A nouveau toutes ces courbes sont décroissantes et ne présentent pas de plateau. Notons cependant que les valeurs de la pente de ces fonctions sont beaucoup plus importantes que celles obtenues sur le signal de Modane et que l'épaulement observé (autour de la valeur 1) dans la région inertielle est beaucoup moins marqué. Si l'on suppose, comme le suggèrent ces résultats, que cet épaulement devient de plus en plus prononcé lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, on peut espérer atteindre un plateau à 1 quand le nombre de Reynolds devient suffisamment grand, et donc réhabiliter asymptotiquement la validité de l'hypothèse KO62. Cependant, aux nombres de Reynolds actuellement accessibles aux expériences, cette hypothèse n'est quantitativement pas vérifiée.

#### 4.4.4 Etude des densités de probabilité des incréments de la vitesse conditionnés par la dissipation

Une autre stratégie utilisée pour tester la validité de l'hypothèse de Kolmogorov-Obukhov (KO62) consiste à réécrire l'équation (4.1) de la manière suivante<sup>[180]–[183],[187]</sup> :

$$\langle \delta v_a^{3q} | \epsilon_a \rangle \stackrel{s}{=} \epsilon_a^q, \quad (4.34)$$

où  $\langle \delta v_a^q | \epsilon_a \rangle$  correspond aux moments de la distribution de probabilité des incréments de la vitesse sur une taille  $a$ , conditionnés par une valeur particulière de la dissipation d'énergie contenue dans une boîte de taille  $a$ . Pour vérifier la pertinence de cette relation, nous avons calculé les histogrammes des incréments de la vitesse conditionnés par la dissipation d'énergie pour différentes échelles et pour plusieurs valeurs de la dissipation  $\epsilon_a$ . Nous avons effectué ce calcul en prenant respectivement les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(0)}$  et  $\psi_{(3)}^{(1)}$  pour estimer la dissipation (en fait la T.O. de la dissipation) que nous noterons  $\epsilon_a$  si elle est estimée avec  $\psi_{(3)}^{(0)}$  et  $\delta\epsilon_a$  si elle est estimée avec  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (Fig. 2.18). Nous avons représenté les

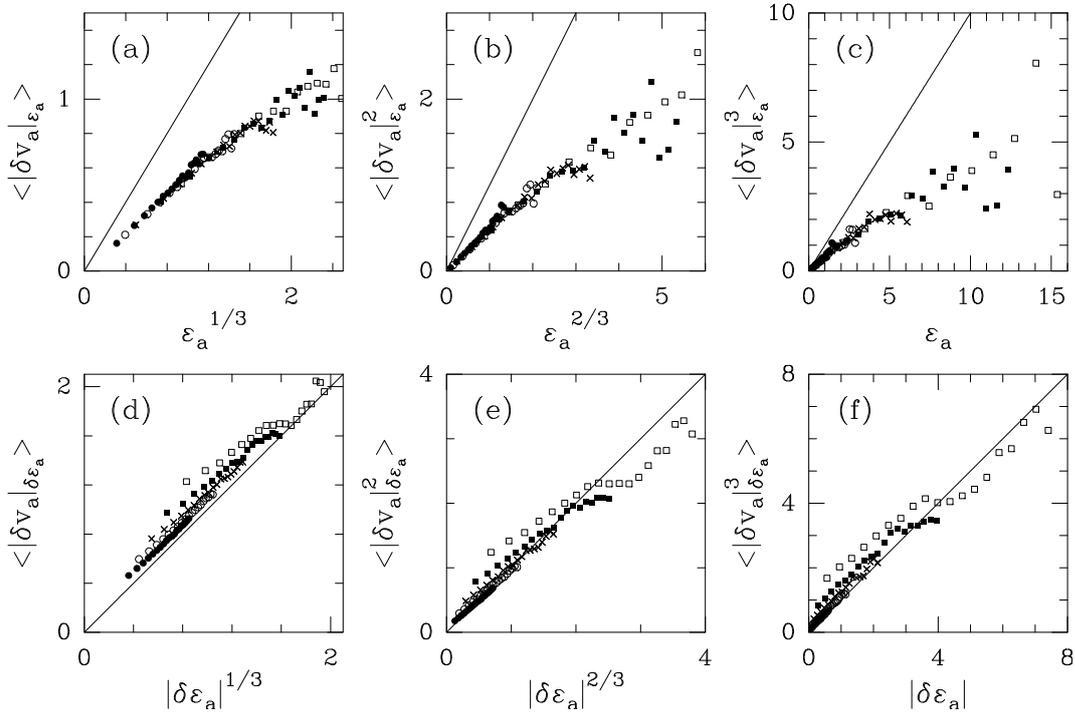


FIG. 4.34 – Signal de Modane :  $\langle |\delta v_a|^{3q} | \epsilon_a \rangle$  en fonction de  $\epsilon_a^q$  pour a)  $q = 1/3$ , b)  $q = 2/3$  et c)  $q = 1$ .  $\langle |\delta v_a|^{3q} | \delta \epsilon_a \rangle$  en fonction de  $|\delta \epsilon_a|^q$  pour d)  $q = 1/3$ , e)  $q = 2/3$  et f)  $q = 1$ . Les différents symboles correspondent aux échelles  $a = 77\eta$  ( $\bullet$ ),  $154\eta$  ( $\circ$ ),  $307\eta$  ( $\times$ ),  $614\eta$  ( $\blacksquare$ ), et  $1229\eta$  ( $\square$ ). Les lignes continues correspondent aux prédictions de l'hypothèse KO62.

résultats obtenus à partir du signal de Modane sur la figure 4.34 où nous avons reporté les moments d'ordre  $q$  des histogrammes de la valeur absolue des incréments de la vitesse conditionnés par la dissipation,  $\langle |\delta v_a|^{3q} | \epsilon_a \rangle$ , en fonction de la dissipation  $\epsilon_a^q$ , pour différentes valeurs de  $q$  :  $q = 1/3$  (Fig. 4.34a),  $2/3$  (Fig. 4.34b) et  $1$  (Fig. 4.34c). Les différents symboles correspondent aux échelles  $a = 77\eta$  (symboles ( $\bullet$ )),  $154\eta$  (symboles ( $\circ$ )),  $307\eta$  (symboles ( $\times$ )),  $614\eta$  (symboles ( $\blacksquare$ )), et  $1229\eta$  (symboles ( $\square$ )) qui appartiennent toutes au domaine inertiel. Pour une valeur de  $q$  donnée, ces courbes se remettent bien sur une courbe unique mais qui n'est pas linéaire et ceci quelle que soit la valeur de  $q$  considérée. Les lignes continues représentent les droites obtenues en prenant en compte seulement les points correspondant aux petites valeurs de  $\epsilon_a$  où les données semblent se comporter linéairement en fonction de  $\epsilon_a^q$ . A nouveau ces résultats sont en contradiction avec l'hypothèse de KO62.

Sur les figures 4.34d, 4.34e et 4.34f nous avons répété cette étude pour les incréments de la vitesse mais cette fois conditionnés par  $\delta\epsilon_a$  et non plus  $\epsilon_a$ . Si le comportement des courbes obtenues semble désormais linéaire, celles ci sont décalées systématiquement les unes des autres et leur pente dépend légèrement de l'échelle considérée. A nouveau, les statistiques des fluctuations de la vitesse et de la dissipation vues à travers l'optique du microscope "transformation en ondelettes" avec respectivement les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(0)}$  et  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , ne semblent pas être reliées aussi intimement que ce qu'une relation à la KO62 exigerait.

Cette étude qui a mis en jeu le même échantillon statistique que les études précédentes, c'est-à-dire sur plus de  $1.5 \cdot 10^7$  points, apporte une nouvelle évidence de la non validité de l'hypothèse de Kolmogorov-Obukhov (KO62) dans le sens où la statistique des coefficients en ondelettes de la vitesse n'est pas reliée à celle des coefficients en ondelettes de la dissipation par la relation (4.34). Notons de plus, que pour une valeur fixée de  $\epsilon_a$  (ou de  $\delta\epsilon_a$ ), les histogrammes conditionnés de la vitesse sont très bien modélisés par des Gaussiennes, résultat totalement en accord avec ceux obtenus par Gagne et ses collaborateurs dans la ref [[187]].

## 4.5 Discussion

L'étude statistique de la dissipation de l'énergie à l'aide de la transformée en ondelettes nous a permis de faire ressortir plusieurs points importants.

- L'étude du comportement dans les échelles des fonctions de partition calculées avec la méthode M.M.T.O. montre clairement une dépendance dans le choix de l'ondelette analysatrice. Cette observation remet fortement en question le caractère auto-similaire du champ de dissipation admis implicitement dans de nombreuses études publiées dans la littérature<sup>[126],[152],[153],[155],[161]–[168],[177],[178]</sup>.
- L'étude des histogrammes du logarithme des maxima du module de la T.O. montre le caractère Gaussien de ces distributions. Si la moyenne de ces distributions se comporte bien comme le logarithme de l'échelle, par contre, l'étude du comportement de leur variance en fonction de l'échelle montre une dépendance clairement non logarithmique. Le champ de dissipation n'est donc pas auto-similaire.
- La détermination de la transformée de Fourier du propagateur du champ de dissipation de l'énergie confirme le caractère log-normal du processus de cascade d'énergie. Cependant, l'évolution de ses caractéristiques suivant les échelles permet à nouveau de montrer le caractère non auto-similaire et non invariant d'échelle de ce proces-

sus. En effet, le propagateur  $G_{aa'}$ , qui est bien modélisé par une Gaussienne, a une moyenne  $m(a, a')$  qui se comporte comme  $\ln(a/a')$  alors que sa variance  $\sigma^2(a, a')$  se comporte comme  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha > 0$ .

- La comparaison des résultats obtenus sur le champ de vitesse avec ceux obtenus sur le champ de dissipation a permis d'apporter des évidences expérimentales de la non validité de l'hypothèse de Kolmogorov-Obukhov<sup>[177],[178]</sup> (KO62), tout au moins pour ce qui concerne les signaux turbulents en notre possession (Modane, jet turbulent). A l'occasion, nous avons porté un regard critique sur les conclusions (et surtout les méthodes utilisées) de précédentes études<sup>[147],[148],[155],[180]–[183],[187]</sup> qui pourraient être considérées comme contradictoires avec nos résultats si nous n'avions pas réussi à démontrer qu'elles étaient pour le moins biaisées.

Cette étude nous a donc permis de déterminer le propagateur associé à une éventuelle cascade d'énergie. L'étude de ce propagateur est plus riche que la simple étude du comportement des fonctions de partition dans la mesure où elle ne présuppose pas la validité de la description multifractale basée sur les hypothèses d'auto-similarité et d'invariance d'échelle. Nous avons ainsi montré que s'il existe un processus de cascade, celui-ci n'est pas auto-similaire ce qui traduit l'absence d'un véritable domaine inertiel dans lequel les échelles intégrales et dissipatives ne jouent aucun rôle.

Enfin, il serait intéressant de poursuivre cette étude comparative du champ de vitesse et du champ de dissipation de l'énergie en fonction du nombre de Reynolds. La détermination de l'évolution des exposants  $\alpha$ , qui caractérisent la dépendance dans les échelles des propagateurs respectifs, permettrait d'extrapoler ce comportement à la limite  $R_\lambda \rightarrow +\infty$  et ainsi de vérifier ou infirmer la validité asymptotique de la description multifractale de ces deux champs ainsi que la pertinence de l'hypothèse de Kolmogorov-Obukhov (KO62) quant à leur corrélationn statistique.

## Chapitre 5

# Détection des filaments de haute vorticité dans les signaux de pression turbulents



## 5.1 Introduction

La plupart des travaux entrepris dans le domaine de la turbulence pleinement développée ont cherché à caractériser les comportements statistiques des fluctuations du champ de vitesse<sup>[127]–[151],[156]–[160]</sup> et du champ de dissipation d'énergie<sup>[152]–[155]</sup> qui sont supposés être reliés par l'hypothèse de similarité locale de Kolmogorov-Obukhov (KO62). L'étude de ces comportements permet non seulement de tester la validité de différents modèles de cascade d'énergie proposés dans la littérature<sup>[57],[126],[152]–[155],[161]–[178]</sup> mais aussi de juger de la pertinence de certaines méthodes de construction qui permettent de générer des signaux turbulents possédant les mêmes propriétés statistiques que les champs expérimentaux. Cependant, ce type d'approche ne fournit qu'une information limitée sur l'origine de la turbulence ainsi que sur l'existence et la dynamique des structures spatialement localisées présentes dans les flots turbulents<sup>[268],[269]</sup>. Ces structures, souvent tourbillonnaires, sont caractérisées par une vorticité,  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ , importante. Il aura fallu les progrès de l'informatique et le développement des simulations numériques pour permettre la mise en évidence de l'existence de ces structures où se concentre la vorticité. En effet, l'avantage des simulations est qu'elles donnent accès à toutes les quantités physiques. Ainsi, la visualisation des régions de haute vorticité a révélé que celles-ci se concentrent naturellement dans des tubes et des nappes<sup>[106]–[116]</sup>. Brachet<sup>[111]</sup> ainsi que Metais et Lesieur<sup>[113]</sup> ont montré que les régions de basse pression correspondent aux tubes de vorticité. En visualisant les régions de grande vorticité  $\omega^2$  conditionnées par le carré du tenseur des déformations,  $\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2$ , Tanaka et Kida<sup>[115]</sup> ont montré que les régions où  $\sigma^2$  est faible sont les tubes qui correspondent à des régions de basse pression. Les régions où  $\omega^2$  et  $\sigma^2$  sont comparables, sont les nappes de cisaillement, structures beaucoup plus instables qui donnent naissance aux tubes par leur enroulement sur elles-mêmes. D'un point de vue expérimental, c'est Couder et son équipe<sup>[119]–[121]</sup> qui ont mis en évidence la présence de filaments de pression en introduisant une nouvelle technique consistant à visualiser les régions de basse pression par l'introduction de micro-bulles d'air dans un flot turbulent en système fermé. Par phénomène de cavitation, ces micro-bulles migrent vers les régions de plus basse pression qui présentent l'apparence de filaments. Ces filaments se déstabilisent par une dynamique d'éclatement tourbillonnaire. La compréhension de la structure, de l'évolution et de la déstabilisation de ces filaments est un objectif important qui pourrait permettre d'apporter un nouvel éclairage sur l'origine du phénomène d'intermittence.

La valeur moyenne du carré de la vorticité, appelée enstrophie, est reliée au taux de

transfert de l'énergie par la relation<sup>[1]</sup> :

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{\langle \epsilon \rangle}{\rho\nu} = \langle \sigma^2 \rangle , \quad (5.1)$$

où  $\nu$  représente la viscosité cinématique,  $\rho$  la densité du fluide et  $\langle \rangle$  la moyenne spatiale (par extension nous appellerons aussi  $\sigma^2$  la dissipation). Ce lien entre  $\epsilon$  et l'enstrophie suggère une relation entre la distribution spatiale intermittente de  $\epsilon$  et la distribution toute aussi intermittente de la vorticité à petite échelle. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, l'intermittence de  $\epsilon$  est la conséquence de l'existence d'évènements caractérisés par de grandes différences de vitesse sur des petites distances. On peut alors imaginer que ces grands sauts de vitesse sont dûs aux structures de haute vorticité. En effet, dans le cas où ces structures sont tourbillonnaires (comme les tubes de vorticité ou les filaments de pression), leur vorticité est de l'ordre de  $u/l$  où  $u$  est la vitesse périphérique et  $l$  le diamètre du tourbillon. Une grande vorticité est équivalente à une grande vitesse périphérique et une petite taille et donc à un grand saut de vitesse sur une petite distance. L'étude du champ de vorticité est donc un objectif important pour la compréhension du phénomène d'intermittence. Ce champ, dans le cas d'un écoulement visqueux, est régi par l'équation :

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \sum_j S_{ij}\omega_j + \nu\Delta\omega_i , \quad (5.2)$$

où  $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$  est le tenseur des déformations. Pour une viscosité nulle, cette équation admet une singularité en temps fini. En effet, on peut réécrire l'équation (5.2) sous la forme :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \wedge \vec{\nabla})\vec{u} . \quad (5.3)$$

Imaginons une structure de grande échelle de la turbulence, par exemple un gros tourbillon. Si cette structure dispose de la plus grande vorticité  $\omega$ , le terme  $\vec{\nabla}\vec{u}$  est aussi grand, de l'ordre de  $|\vec{\nabla}||\vec{u}| \sim |\vec{\omega}|$ . En oubliant les vecteurs dans l'équation (5.3), on obtient :

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega^2 . \quad (5.4)$$

Une simple intégration nous donne l'évolution de cette structure en aval de l'écoulement :

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{1 - \omega_0 t} , \quad (5.5)$$

où  $\omega_0$  correspond à la vorticité au temps  $t = 0$ , qui est de l'ordre de  $\frac{1}{T_0}$  où  $T_0 = L/U$  est le temps de retournement de cette structure. Ainsi cette équation admet une singularité : la

vorticité devient infinie sur un temps fini de l'ordre du temps de retournement. La conservation de la circulation de cette structure  $\Gamma \sim \omega_0 L^2 = \omega(t)l^2$ , nous permet de montrer que l'augmentation de la vorticité s'accompagne d'une diminution de la taille caractéristique  $l$  de la structure qui tend vers 0 sur un même temps caractéristique de l'ordre de  $T_0$ . Dans le cas d'un écoulement visqueux, on présume qu'une dynamique analogue est observée mais les effets de la viscosité vont borner l'augmentation de la vorticité. La viscosité intervient donc en imposant une taille finie et ainsi la vorticité sera finie.

L'étude du champ de vorticité est difficile car, comme pour la dissipation, la vorticité met en jeu les trois composantes de la vitesse. Par contre, le champ de pression est directement accessible dans les expériences et c'est celui-ci que les expérimentateurs<sup>[119]–[125]</sup> ont choisi de mesurer pour étudier ce type de singularités. En effet, l'équation de la pression s'écrit :

$$-\frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial^2 p}{\partial x_j^2} = \sum_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} . \quad (5.6)$$

Comme  $\sigma^2 - \omega^2 = 2 \sum_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ , la divergence de l'équation de Navier-Stokes conduit à l'équation de Poisson suivante pour la pression<sup>[119]</sup> :

$$\frac{2}{\rho} \Delta p = \omega^2 - \sigma^2 = 0 , \quad (5.7)$$

où clairement le Laplacien de la pression résulte directement de la différence entre  $\omega^2$  et  $\sigma^2$ . Dans le cas d'un écoulement fermé par des parois immobiles, les gradients de pression sont tous nuls sur la surface solide et en intégrant l'équation (5.7) sur tout le volume, on obtient :

$$\int_V \vec{\nabla}^2 p dV = \int_S \vec{\nabla} p d\vec{s} = \langle \omega^2 \rangle - \langle \sigma^2 \rangle , \quad (5.8)$$

où  $V$  et  $S$  représentent respectivement le volume et la surface. On obtient donc la relation :

$$\langle \omega^2 \rangle = \langle \sigma^2 \rangle = \frac{\epsilon}{\rho\nu} , \quad (5.9)$$

qui n'est autre que la relation (5.1) entre l'enstrophie et la dissipation. Cette relation montre, que globalement il y a autant d'enstrophie que de dissipation pour un écoulement isolé. Par contre, localement, cet écoulement peut présenter des régions où existe un excès d'enstrophie ou de dissipation, ce qui a des conséquences directes sur le comportement local de la pression. En effet, l'équation (5.7) montre que dans une région de l'écoulement où l'enstrophie est supérieure à la dissipation, la pression présente une courbure positive ( $\Delta p < 0$ ). Au contraire, dans les régions de l'écoulement où la dissipation est supérieure

à l’énstrophie, la pression a une courbure négative ( $\Delta p > 0$ ). Inversement, si une région de l’écoulement présente un minimum local de pression (c’est-à-dire de courbure positive) alors cette région présentera plus d’énstrophie que de dissipation. Au contraire, une région présentant un maximum local de pression contiendra plus de dissipation que d’énstrophie. L’étude du champ de pression nous ouvre donc un nouveau champ d’analyse, à savoir l’identification et la caractérisation de structures localisées présentes dans les flots turbulents.

Nous nous proposons dans ce chapitre d’étudier le champ de pression turbulent à l’aide de la transformée en ondelettes. Dans la section 5.2, nous étudions la signature des filaments sur le signal de pression et sur sa transformée en ondelettes. La distinction des filaments des autres fluctuations va nous permettre de définir deux phases : l’une correspondant aux filaments de vorticité et l’autre aux fluctuations de base (“marais multifractal”). Nous effectuons ensuite, dans la section 5.3, une étude comparative du comportement statistique dans les échelles du champ de pression total et de sa version “marais multifractal” où l’on a éliminé de la statistique les structures identifiées comme des filaments. L’enregistrement simultané de la pression et de la vitesse, s’avère indispensable dans la section 5.4 pour extraire de l’expérience les caractéristiques des filaments, c’est-à-dire, la taille caractéristique de leur coeur, le temps d’attente entre deux filaments, leur vitesse d’advection et leur poids statistique. Dans la section 5.5, nous terminons cette étude par une analyse de la manifestation des filaments sur le signal de vitesse ainsi que des corrélations qui en résultent entre le champ de pression et le champ de vitesse.

## 5.2 Identification des filaments de pression

Les signaux de pression que nous allons étudier ont été enregistrés par Couder et son groupe<sup>[121]</sup>   l’E.N.S   Paris. La cellule expérimentale est constituée d’un cylindre transparent de rayon  $R_0 = 15cm$  et de hauteur  $L_0 = 40cm$ . A chaque extrémité se trouve un rotor constitué d’un disque de rayon  $R = 14cm$ , cerclé de jantes et contenant huit pales perpendiculaires au mouvement. La distance  $H = 14cm$  qui sépare les rotors est égale au rayon des disques  $H = R$ . Ainsi, la dimension caractéristique du système est  $R = 14cm$ . Ce montage, représenté sur la figure 5.1, est ensuite rempli d’eau que l’on entraîne en faisant tourner les deux rotors en sens inverse l’un de l’autre (entraînement contra-rotatif). L’écoulement de base est constitué d’une couche de cisaillement circulaire, délimitée par les deux rotations imposées par les rotors, qui se positionne au centre de la

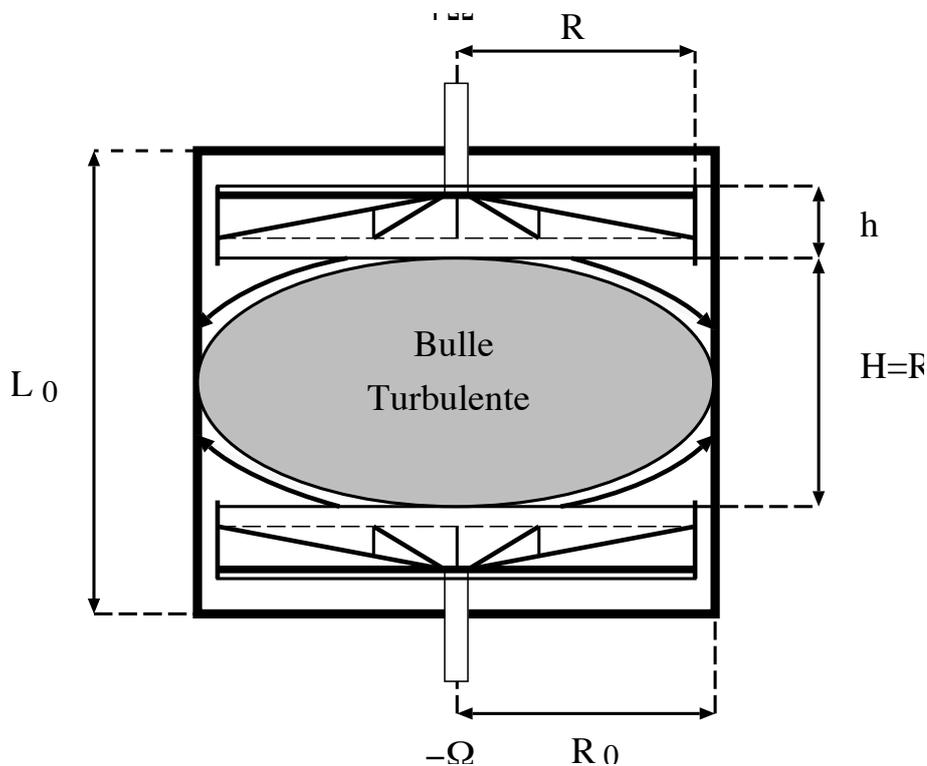


FIG. 5.1 – Coupe de la cellule expérimentale (extrait de la Ref. [[121]]).

cuve lorsque la vitesse des deux rotors est la même. L'épaisseur de ce cisaillement varie en fonction de la position radiale  $r$  : elle est très fine en paroi et envahit toute la hauteur dans le centre de la cellule. L'écoulement est donc très anisotrope en paroi et il est peu turbulent en dehors de la zone de cisaillement. Les mesures de la pression sont faites en paroi dans la couche de cisaillement par un capteur piézo-électrique. Les vitesses de rotation des deux disques sont égales à  $+\Omega_0 = 3Hz$ . Une partie du signal obtenu, d'une longueur de 40 fois le temps de retournement  $T_0 = 1/\Omega_0$ , est présentée sur la figure 5.2a. Ce signal est clairement asymétrique et présente des excursions très violentes de grande amplitude du côté des basses pressions. Il n'existe pas d'évènements comparables pour les fluctuations positives et le signal de pression semble être la somme de fluctuations de faible amplitude symétriques et d'une succession de pics localisés très négatifs, correspondant à des évènements intermittents très intenses. Sur la figure 5.2b, est représentée la densité d'énergie de ce signal, calculée sur 540 réalisations de 32768 points ( $40T_0$ ). La fréquence d'entraînement  $\Omega_0$  et la fréquence de passage des pales ( $\Omega_p = 8\Omega_0$ ) sont représentées par

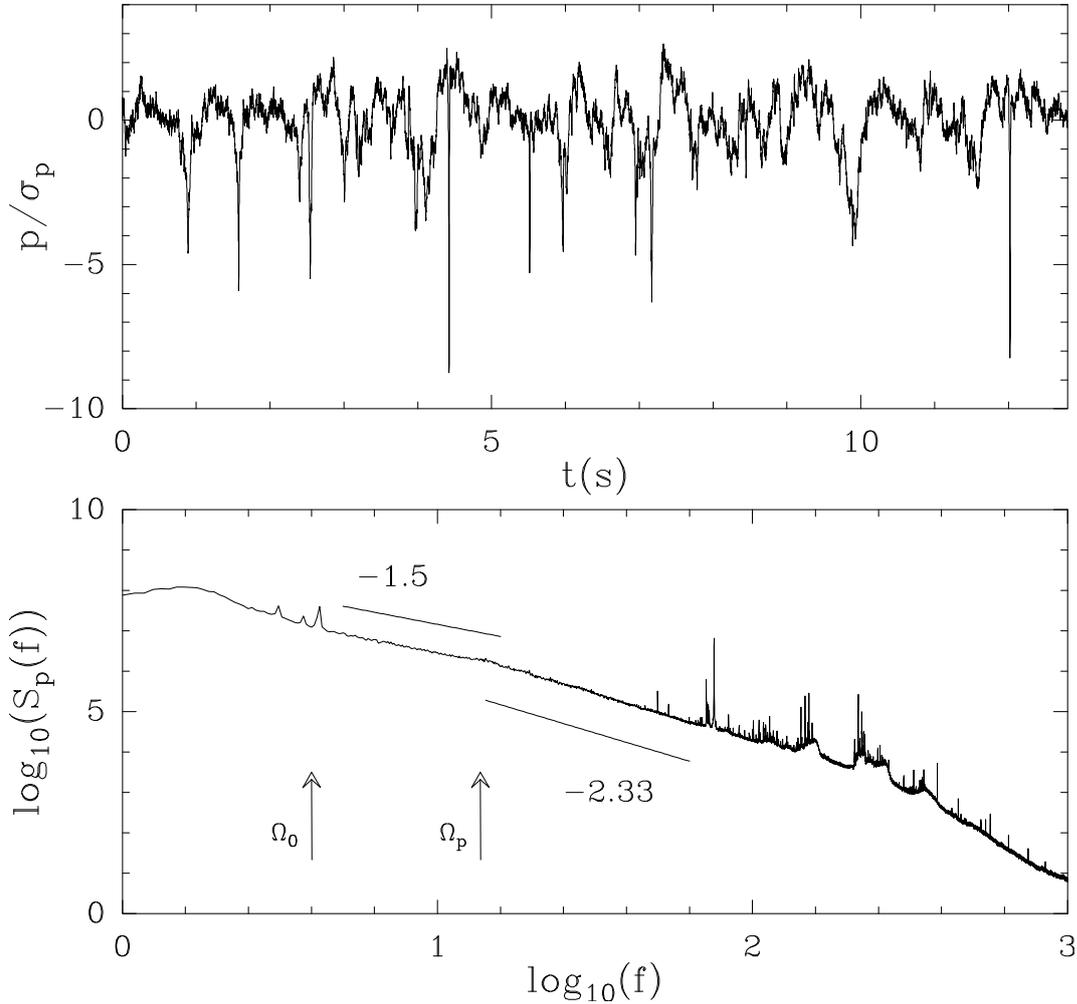


FIG. 5.2 – a) Signal de pression expérimental enregistré par Couder et son équipe<sup>[121]</sup> à l'E.N.S. à Paris. Ce signal est clairement asymétrique et présente des excursions très violentes de grande amplitude du côté des basses pressions. La pression est exprimée en unités d'écart type de l'histogramme des valeurs de la pression. b) Spectre de puissance de la pression. Deux régimes sont clairement visibles : un comportement en loi de puissance avec un exposant spectral (Eq. (2.47))  $\beta = 1.5$  est obtenu pour les fréquences comprises entre la fréquence d'entraînement ( $\Omega_0$ ) et la fréquence des pales ( $\Omega_p$ ); une transition vers un comportement avec un exposant  $\beta = 2.33$  est observée pour les fréquences supérieures à  $\Omega_p$ .

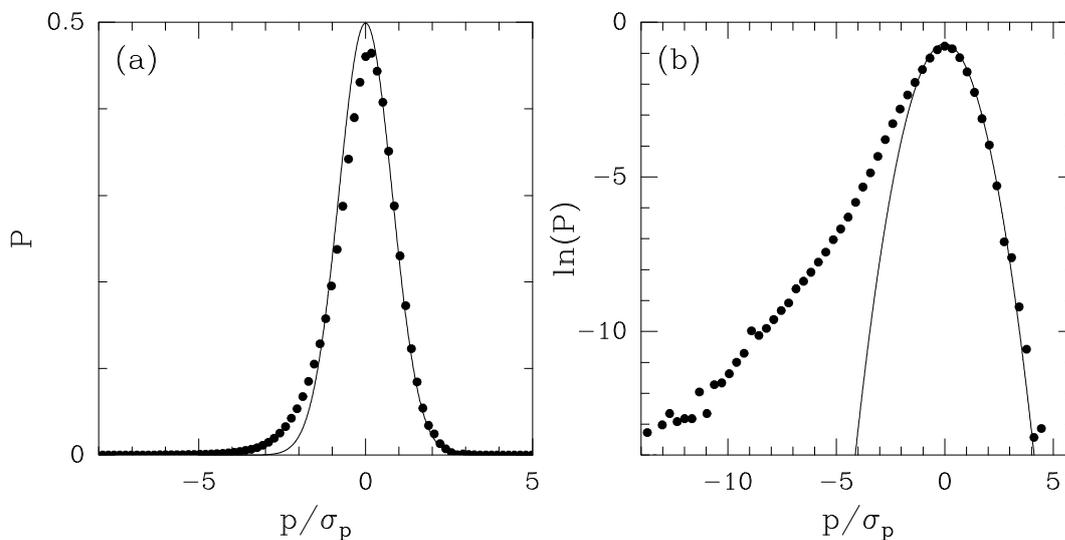


FIG. 5.3 – Histogramme des valeurs prises par la pression : a) représentation linéaire ; b) représentation semi-logarithmique. Cet histogramme apparaît nettement asymétrique et s'écarte d'une forme Gaussienne (ligne continue) pour les fortes dépressions.

des flèches qui délimitent deux comportements en loi d'échelle linéaires différents. Pour les fréquences comprises entre  $\Omega_0$  et  $\Omega_p$ , l'exposant spectral (Eq. (2.47)) est égal à  $\beta = 1.50 + -0.05$ . Par contre, pour les fréquences supérieures à  $\Omega_p$ , on obtient  $\beta = 2.30 + -0.05$ , valeur très proche de la valeur  $7/3$  prédite par des arguments aux dimensions<sup>[270],[271]</sup> d'après l'hypothèse K41 (section 3.1.2.). A grande fréquence, la présence de nombreux pics est visible et bruite le comportement en loi de puissance qui semble se poursuivre jusqu'à des fréquence de l'ordre de 100Hz. Nous avons représenté l'histogramme des valeurs la pression (en unité d'écart type), en représentation linéaire et semi-logarithmique respectivement sur les figures 5.3a et 5.3b. Cet histogramme se révèle être très asymétrique puisque les plus basses pressions mesurées atteignent jusqu'à 13 fois l'écart type alors que les plus grandes surpressions n'atteignent que 5 fois l'écart type. Il est aussi important de remarquer que pour les dépressions, on observe une distribution de forme exponentielle alors que la distribution des surpressions est bien modélisée par une Gaussienne (ligne continue).

### 5.2.1 Identification visuelle

C'est à partir de ce montage expérimental que Couder et son groupe<sup>[119]–[121]</sup> ont visualisé les filaments de vorticité en injectant des micro-bulles d'air dans l'eau contenue dans la cellule. Ces micro-bulles migrent vers les régions de plus basse pression qui apparaissent comme des structures filamentaires. En filmant la région où se trouve le capteur et en enregistrant simultanément la pression, ces auteurs ont montré qu'il existait une corrélation parfaite entre le passage des filaments de vorticité sur le capteur et les pics de basse pression observés dans le signal. Ce montage montre clairement que parmi les filaments présents dans le flot turbulent, seuls les grands filaments en contact avec la paroi en une de leurs extrémités causent les grands pics négatifs observés dans le signal de pression. Couder et ses collaborateurs<sup>[119]–[121]</sup> ont réussi à établir une correspondance entre la forme du signal et le type d' v nement détecté. Les filaments qui sont au début très fins, provoquent, quand ils passent sur le capteur, un pic de dépression lisse et abrupt sur le signal (Fig. 5.4a). Toutefois, le capteur ne voit une grande dépression que lorsqu'un filament passe exactement sur le capteur. S'il passe légèrement à côté, le détecteur ne perçoit qu'une faible dépression sortant à peine des fluctuations caractéristiques du signal (Fig. 5.4b). Ces filaments fins se déstabilisent par une ondulation spatiale suivie d'une explosion violente s'accompagnant de la formation de brins de filaments entrelacés<sup>[120]</sup>. Si le filament passe sur le capteur pendant son éclatement, le pic de dépression présente une multitude de pics secondaires révélant une structure interne complexe (Fig. 5.4c).

*Remarque :* En l'absence de visualisation, on peut déduire qu'un pic de dépression simple, lisse et étroit correspond forcément au passage rapide d'un filament jeune sur la sonde de mesure. Par contre, l'observation de pics larges ou de structures complexes n'est pas toujours associée au passage d'un filament en cours d'éclatement. En effet, la largeur du pic observé dans l'enregistrement temporel dépend de la vitesse d'advection. Cette vitesse prend toutes les valeurs comprises entre  $+\Omega_0 R$  et  $-\Omega_0 R$  et donc la largeur temporelle du pic ne reflète pas nécessairement la taille spatiale de la dépression. Dans des cas rares, il peut même arriver qu'un filament inverse sa vitesse d'advection et que le capteur enregistre plusieurs dépressions consécutives parce que le filament est passé plusieurs fois sur le capteur. Toutefois ceci est relativement rare et une structure complexe enregistrée correspond le plus souvent à un filament éclaté. De plus, la plupart des  v nements intenses sont relativement complexes. Ceci n'est pas étonnant car les filaments occupent moins de place et vivent moins longtemps dans leur état concentré que dans leur état éclaté et la probabilité qu'un filament jeune passe sur le capteur de pression est beaucoup moins

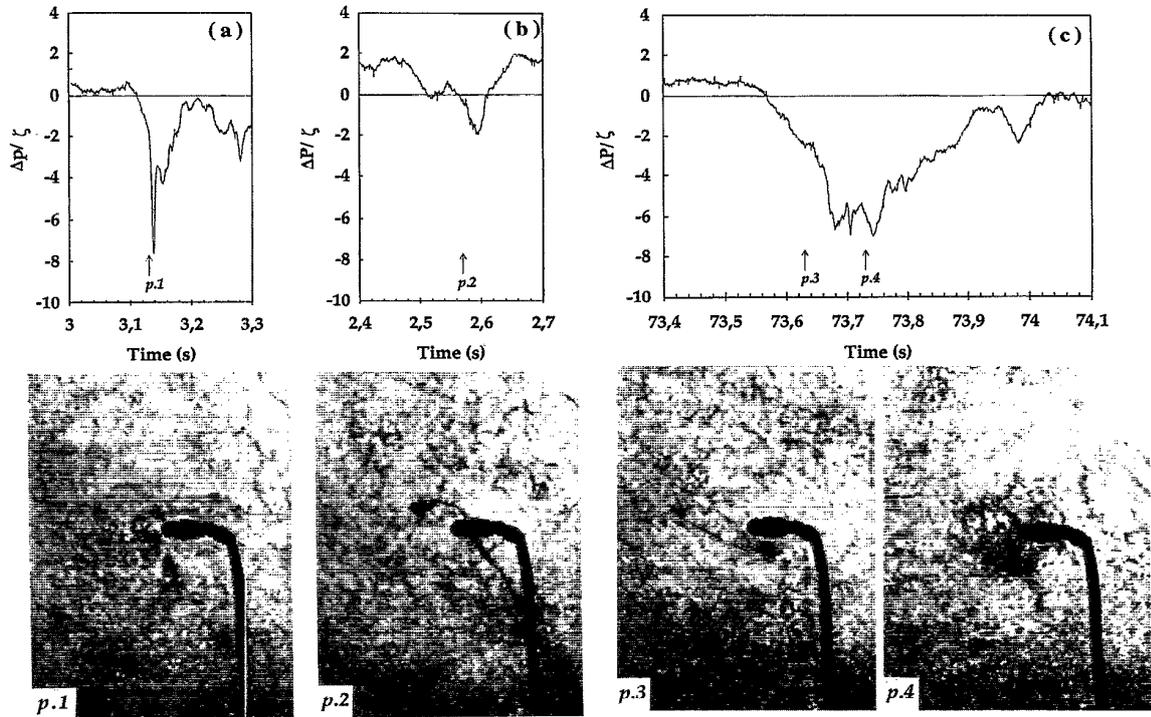


FIG. 5.4 – Visualisation des filaments de vorticité et signal de pression correspondant. a) et p.1) : Passage sur le capteur d'un filament jeune. b) et p.2) : Passage à coté du capteur d'un filament jeune. c) et p.3), p.4) : Passage sur le capteur d'un filament en cours de déstabilisation.(Figure extraite de la référence [[125]])

grande que celle d'un filament éclaté.

## 5.2.2 Identification des filaments par méthode de seuillage

Une des technique utilisée couramment pour repérer les filaments de pression repose sur une simple technique de seuillage : le passage d'un filament sur le capteur est défini sur le signal comme étant un pic de dépression dont la pression minimum est inférieure à un certain seuil. Couder et ses collaborateurs<sup>[121],[125]</sup> ont pris ce seuil égal à  $-4\sigma_p$  où  $\sigma_p$  représente l'écart type de l'histogramme des valeurs prises par la pression (Fig. 5.3). A partir de cette définition, ils ont fait une étude des temps d'attente  $\delta t$  entre deux évènements successifs. La densité de probabilité obtenue pour  $\delta t$  est exponentielle pour les grands intervalles de temps  $\delta t$ . Par contre, pour les faibles valeurs de  $\delta t$ , la distribution

n'est plus exponentielle mais présente une forte remontée pour des intervalles de temps inférieurs ou égaux au temps de retournement  $T_0$ . En fait, la majeure partie des évènements détectés se situe en dessous de ce temps caractéristique. Couder *et al* <sup>[121],[125]</sup> ont montré que pour  $\delta t > T_0$ , cette distribution est de type Poisson caractérisant des évènements indépendants. Par contre, pour  $\delta t < T_0$ , ces évènements très rapprochés dans le temps sont fortement corrélés. Deux explications ont été proposées :

- les filaments peuvent passer plusieurs fois sur le capteur de pression ;
- les filaments détectés pendant leur éclatement causent sur le signal de pression une série de pics due à la structure complexe des filaments fins produits.

Dans chacune de ces éventualités, les pics de dépression sont corrélés entre eux car ils appartiennent à la même structure filamentaire. De plus, dans les deux cas, le temps typique de corrélation est inférieur à la durée de vie des filaments qui est de l'ordre d'un temps de retournement. Ainsi, pour des temps  $\delta t > T_0$ , un pic de dépression semble correspondre à un filament.

Couder et ses collaborateurs<sup>[121],[125]</sup> ont aussi entrepris l'étude de la largeur des pics de dépression estimée à une profondeur égale à  $-4\sigma$ . La largeur ainsi mesurée ne correspond pas à la largeur à mi-hauteur et sera donc d'autant plus grande que le pic observé est profond. Si d'évidence ces mesures ne donnent aucune information physique précise sur la structure filamentaire, elles peuvent toutefois apporter des informations quantitatives sur la dépendance de la largeur réelle avec le nombre de Reynolds. Cette étude effectuée pour différentes vitesses de rotation des rotors, et donc pour différents nombres de Reynolds, montre que la taille (temporelle) du coeur des filaments diminue quand la vitesse d'entraînement (ou le nombre de Reynolds) augmente. Ces mêmes auteurs ont reproduit cette étude en faisant varier cette fois la viscosité tout en gardant la vitesse d'entraînement constante. La taille des filaments augmente clairement avec la viscosité confirmant par là l'augmentation de celle-ci lorsque le nombre de Reynolds diminue. Parallèlement, Couder et son équipe<sup>[121],[125]</sup> ont montré que la densité temporelle des filaments est constante et ne dépend pas du nombre de Reynolds, résultat en accord avec les travaux de Villermaux *et al*<sup>[272]</sup> mais en contradiction avec ceux de Abry *et al*<sup>[123]</sup>.

### 5.2.3 Identification des filaments à partir de leurs propriétés espace-échelles

#### Le vortex de Burgers

Dans sa thèse, Cadot<sup>[125]</sup> a montré que la signature des filaments jeunes sur le signal de pression était très bien modélisée par un vortex de Burgers. Ce vortex est une solution stationnaire exacte de l'équation de Navier-Stokes incompressible. Il correspond à un tourbillon étiré similaire à un tourbillon de vidange ou à une tornade. Cette solution consiste en la superposition d'un écoulement axisymétrique d'étirement satisfaisant l'incompressibilité du fluide :

$$\begin{cases} u_r &= -\frac{1}{2}\Gamma r , \\ u_z &= \Gamma z , \end{cases} \quad (5.10)$$

et d'une vorticité axisymétrique alignée suivant cet étirement :

$$\begin{cases} \omega_r &= 0 , \\ \omega_\phi &= 0 , \\ \omega_z &= \omega(r) . \end{cases} \quad (5.11)$$

Le champ de vitesse du vortex est donc composé du champ de vitesse donné par l'équation (5.10) auquel se superpose une vitesse orthoradiale  $u_\phi$  associée à la vorticité. En injectant ce champ global dans l'équation de la vorticité (Eq. (5.2)) en régime stationnaire, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{\omega}) + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega} &= 0 , \\ \vec{\omega} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{u} , \end{aligned} \quad (5.12)$$

on obtient pour la vorticité :

$$\omega(r) = \omega_0 e^{-\Gamma r^2/4\nu} , \quad (5.13)$$

où  $\Gamma$  correspond à la circulation du vortex et  $\omega_0 = \Gamma/\pi r_0^2$ . Ainsi, la vorticité est distribuée suivant une Gaussienne de largeur caractéristique  $r_0 = \sqrt{\nu/\Gamma}$  résultant d'un équilibre entre l'étirement et les effets de diffusion visqueuse. A partir de cette vorticité, on déduit le champ de vitesse associé :

$$\begin{cases} u_r &= -\frac{1}{2}\Gamma r , \\ u_\phi &= \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - e^{-r^2/4r_0^2}) , \\ u_z &= \Gamma z . \end{cases} \quad (5.14)$$

La circulation du vortex est donc reliée à la vitesse maximale de rotation (ou vitesse périphérique) :  $\Gamma = 2\pi r_0 u_\phi^{max}/0.32 = 2\pi r_0 u_0$ .

En écrivant les équations de Navier-Stokes stationnaires pour la pression et en tenant compte des symétries du système, on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\phi^2}{r} , \\ -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0 , \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} . \end{cases} \quad (5.15)$$

Ainsi la pression ne dépend pas de  $\phi$  et la solution présente une symétrie de révolution autour de l'axe  $z$ . En remplaçant les composantes de la vitesse (Eq. (5.14)) et en intégrant, on obtient :

$$p(r, \phi, z) - p(0, \phi, 0) = -\frac{1}{2} \rho \Gamma^2 \left( r^2 + \frac{z^2}{4} \right) + \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \int_0^r \frac{(1 - e^{-(x/2r_0)^2})^2}{x^3} dx . \quad (5.16)$$

Dans le cas particulier où l'écoulement d'étirement est négligeable devant la rotation ou lorsque le vortex n'est plus étiré, c'est-à-dire :

$$u_r \sim u_z \sim 0 \quad (5.17)$$

on obtient alors pour la pression<sup>[125]</sup> :

$$p(r/r_0) = \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} \int_{-\infty}^{r/r_0} \frac{(1 - e^{-(x/2)^2})^2}{x^3} dx . \quad (5.18)$$

Nous avons représenté la pression définie par l'équation (5.18) sur la figure 5.5a, en prenant comme référence une pression nulle à l'infinie. La pression minimum est reliée à la vitesse maximale par la relation  $p_{min} = -1.69(u_\phi^{max})^2 = -0.173u_0^2$  et la largeur caractéristique de ce pic est égale à  $r_0$ . Sur les figures 5.5b et 5.5c, nous avons représenté respectivement la transformée en ondelettes de ce signal et son squelette calculés avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Ce squelette est constitué de deux lignes de maxima pointant vers la dépression. Le comportement du logarithme des coefficients en ondelettes le long de ces lignes en fonction du logarithme des échelles est représenté respectivement pour la ligne de droite et celle de gauche sur les figures 5.5d et 5.5e. A partir de l'échelle  $a_0$  où apparaissent ces lignes, les coefficients augmentent en loi de puissance jusqu'à une échelle  $a_*$  avec un exposant (de Hölder)  $h$  proche de -1. Pour des échelles  $a < a_*$ , on observe un changement de comportement et les coefficients décroissent désormais avec un exposant égal à  $n_\psi$ , où  $n_\psi$  est le nombre de moments nuls de l'ondelette analysatrice utilisée (Eq. (2.81)). Il est important de remarquer que les coefficients en ondelettes évoluent de façon

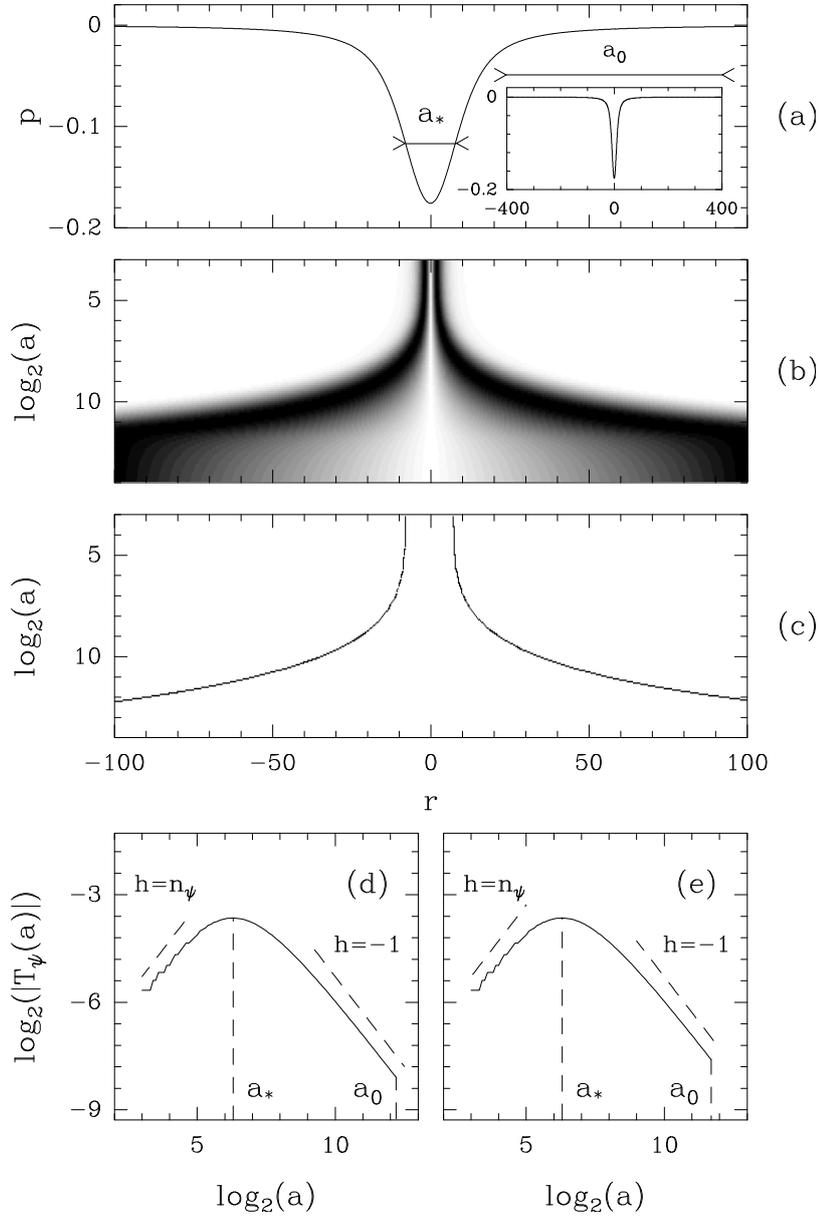


FIG. 5.5 – Transformée en ondelettes du champ de pression d'un vortex de Burgers. a) Profil de pression obtenu avec les paramètres  $u_0 = 1$  et  $r_0 = 10$  (Eq. (5.18)). b) Transformée en ondelettes de ce signal calculée avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ ; même codage que dans la Figure 2.15. c) Squelette de la T.O. défini par les lignes de maxima correspondantes. d) et e) représentent le comportement des coefficients en ondelettes respectivement le long de la ligne de maxima de gauche et de droite. Les échelles  $a_*$  et  $a_0$  correspondent aux tailles caractéristiques représentées sur la figure a).

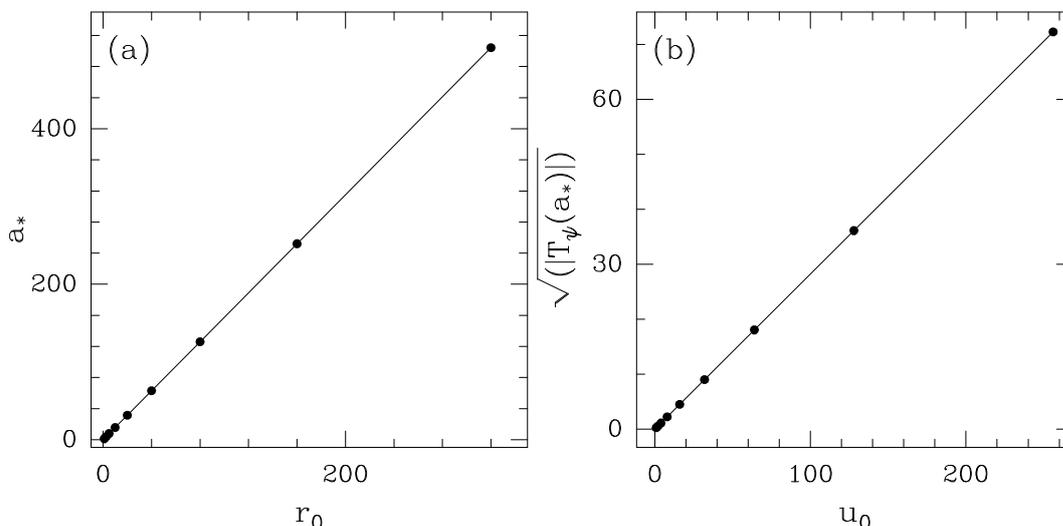


FIG. 5.6 – Etude du comportement de  $a_*$  et de  $|T_\psi(a_*)|$  en fonction des paramètres caractéristiques du vortex de Burgers. a)  $a_*$  en fonction de  $r_0$  : la droite obtenue par régression linéaire et représentée en ligne continue, a une pente égale à 1.58 et une ordonnée à l’origine quasiment nulle ( $\sim -0.1$ ). b)  $\sqrt{|T_\psi(a_*)|}$  en fonction de  $u_0$  : la droite en ligne continue à une pente égale à 0.28 et une ordonnée à l’origine nulle.

identique sur les deux lignes de maxima comme on peut le voir sur les figures 5.5d et 5.5e. Ainsi, l’analyse espace-échelle de la pression d’un vortex de Burgers révèle deux comportements caractéristiques :

- à grande échelle :  $a > a_*$ , ce vortex est assimilé à une distribution de Dirac qui correspond à une singularité très forte d’exposant de Hölder négatif  $h = -1$ .
- à petite échelle :  $a < a_*$ , l’ondelette voit essentiellement le coeur du vortex qui est une fonction infiniment dérivable et l’exposant obtenu est alors égal au nombre de moments nuls de l’ondelette analysatrice (Eq. (2.81)).

L’échelle  $a_0$ , représentée dans l’encart de la figure 5.5a, correspond en fait à la taille du signal étudié. Par contre l’échelle  $a_*$  est reliée à la largeur du coeur du vortex. On peut montrer facilement que cette échelle  $a_*$  varie linéairement en fonction du paramètre  $r_0$  qui impose la taille du coeur du vortex. Nous avons représenté sur la figure 5.6a, la valeur de  $a_*$  obtenue numériquement en fonction de  $r_0$  ; les données se placent bien sur une droite de pente égale à 1.58 :  $a_* \simeq 1.58r$ . De même, la valeur du maxima du module de la T.O. à l’échelle  $a_*$ ,  $|T_\psi(a_*)|$ , est reliée à la profondeur du vortex et donc au carré du second paramètre  $u_0$  du problème ( $P_{min} = 0.173u_0^2$ ). Pour vérifier cela, nous avons représenté sur

la figure 5.6b, la racine carrée de  $|T_\psi(a_*)|$  en fonction du paramètre  $u_0$ . La courbe obtenue est bien une droite de pente 0.28 :  $|T_\psi(a_*)|^{1/2} = 0.28u_0$ . Ainsi, la transformée en ondelettes continue nous permet de remonter directement aux paramètres caractéristiques d'un vortex de Burgers, c'est-à-dire  $r_0$  et  $u_0$ . Le comportement caractéristique des coefficients en ondelettes le long des lignes de maxima doit donc nous permettre de repérer et d'étudier les caractéristiques des filaments à partir du signal expérimental de pression sans avoir recours à une technique de seuillage sur l'amplitude plus ou moins arbitraire.

*Remarque :* La pression du vortex de Burgers définie par l'équation (5.18) est une fonction infiniment dérivable en 0. L'exposant de Hölder de cette fonction en ce point est donc  $h(0) = +\infty$ . Toutefois, l'existence d'une échelle caractéristique  $a_*$  au-dessus de laquelle cette dépression peut être assimilée à un pic localisé fait que, par abus de langage, les vortex de Burgers peuvent être assimilés à des singularité fortes du champ de pression.

Nous avons repéré par simple méthode de seuillage, un grand nombre de filaments jeunes pour lesquels nous avons étudié localement le comportement des maxima du module de la T.O. Sur la figure 5.7a, nous avons représenté une partie du signal de pression comportant un filament jeune dont l'amplitude atteint une valeur proche de  $-20\sigma_p$ . Le squelette de la transformée en ondelettes de ce signal obtenu avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , est représentée sur la figure 5.7b. On peut remarquer que le passage du filament a gommé toutes les fluctuations aux alentours et que ce squelette ne présente pas de ligne de maxima autour de celles correspondant au filament lui-même. Ceci est aussi visible sur le "petit filament" qui le précède. Sur les figures 5.7c et 5.7d, nous avons représenté en fonction du logarithme des échelles, le comportement du logarithme des maxima du module de la T.O. le long des deux lignes correspondant au grand filament. Ces courbes sont croissantes depuis l'échelle  $a_0$  jusqu'à une échelle  $a_*$  petite et identique pour les deux lignes de maxima. Pour  $a > a_*$ , ce comportement est caractéristique d'une très forte singularité d'exposant de Hölder négatif proche de la valeur  $-1$ . Sur les figures 5.8a et 5.8d, nous avons représenté deux autres filaments dont les amplitudes sont inférieures à  $-10\sigma_p$ . Sur les figures 5.8b et 5.8c et les figures 5.8e et 5.8f, nous avons représenté le comportement du logarithme des maxima du module de la T.O. le long des deux lignes de maxima pointant vers ces deux filaments, en fonction du logarithme des échelles. A nouveau les courbes obtenues présentent une croissance caractéristique d'une singularité très forte d'exposant de Hölder  $h$  négatif lorsqu'on descend dans les échelle et ce jusqu'à une échelle caractéristique  $a_*$  qui est à peu près la même pour les deux lignes de maxima correspondant au même filament. Une étude systématique des filaments jeunes nous a

permis de montrer que ce comportement “anormal” (dans le sens où les coefficients en ondelettes ne décroissent pas lorsqu’on descend dans les échelles comme cela est généralement le cas) était toujours vérifié : l’échelle  $a_*$  qui ne dépend que très peu de la ligne considérée est proportionnelle à la largeur de ces dépressions. La prise en compte de la vitesse d’advection nous a permis de vérifier que pour la grande majorité des filaments jeunes détectés, l’échelle  $a_*$  ainsi mesurée correspond approximativement à une taille du coeur des filaments de l’ordre de la taille du capteur. L’amplitude de la T.O.,  $|T_\psi(a_*)|$  est quant à elle proportionnelle à l’amplitude de la dépression.

De la même manière, nous nous sommes attachés à repérer les filaments éclatés, c’est-à-dire les filaments dont la structure interne est plus complexe. Sur la figure 5.9, nous avons représenté l’un de ces filament (Fig. 5.9a) ainsi que le squelette de la T.O. de ce signal calculée avec l’ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (Fig. 5.9b). Désormais ce squelette présente des lignes de maxima dans un voisinage et en particulier entre les deux lignes correspondant aux grands sauts délimitant ce filament. Le comportement dans les échelles du logarithme des coefficients en ondelettes le long de ces deux lignes de maxima est représenté sur les figures 5.9c et 5.9d. Ce comportement est très similaire à celui obtenu pour un filament jeune : pour des échelles  $a > a_*$ , les coefficients en ondelettes croissent lorsqu’on descend dans les échelles comme s’il s’agissait d’une singularité forte d’exposant de Hölder négatif. Pour  $a < a_*$ , ces coefficients décroissent en loi de puissance mais avec un exposant clairement inférieur à  $n_\psi$ . Pour le filament éclaté de la figure 5.9a, les exposants mesurés respectivement sur la ligne de maxima de gauche et celle de droite sont  $h \simeq 0.57$  et  $h \simeq 0.4$ . Ainsi, le coeur de ce filament n’est plus lisse mais rugueux, avec une rugosité semblable aux autres fluctuations du signal de pression puisque caractérisée par des singularités d’exposant de Hölder  $h > 0$ . Il est important toutefois de remarquer que l’échelle caractéristique  $a_*$  n’est pas forcément identique sur les deux lignes de maxima ; pour ce cas particulier,  $a_*$  prend des valeurs qui passent du simple au double. La valeur obtenue reste tout de même proportionnelle à la largeur de la dépression à l’endroit où pointe la ligne de maxima considérée. Sur la figure 5.10, nous avons répété cette analyse pour deux autres exemples de filaments éclatés. Le comportement des coefficients en ondelettes le long des lignes de maxima correspondant aux grands sauts délimitant ces filaments est tout à fait similaire au comportement observé sur la figure 5.9 pour le premier filament éclaté que nous avons étudié. Il est toutefois intéressant de noter qu’à petite échelle ( $a < a_*$ ), le comportement de la T.O. dépend énormément du type de fluctuations présentes à l’intérieur du filament. Sur la figure 5.10b, par exemple, on peut remarquer que la T.O. après une

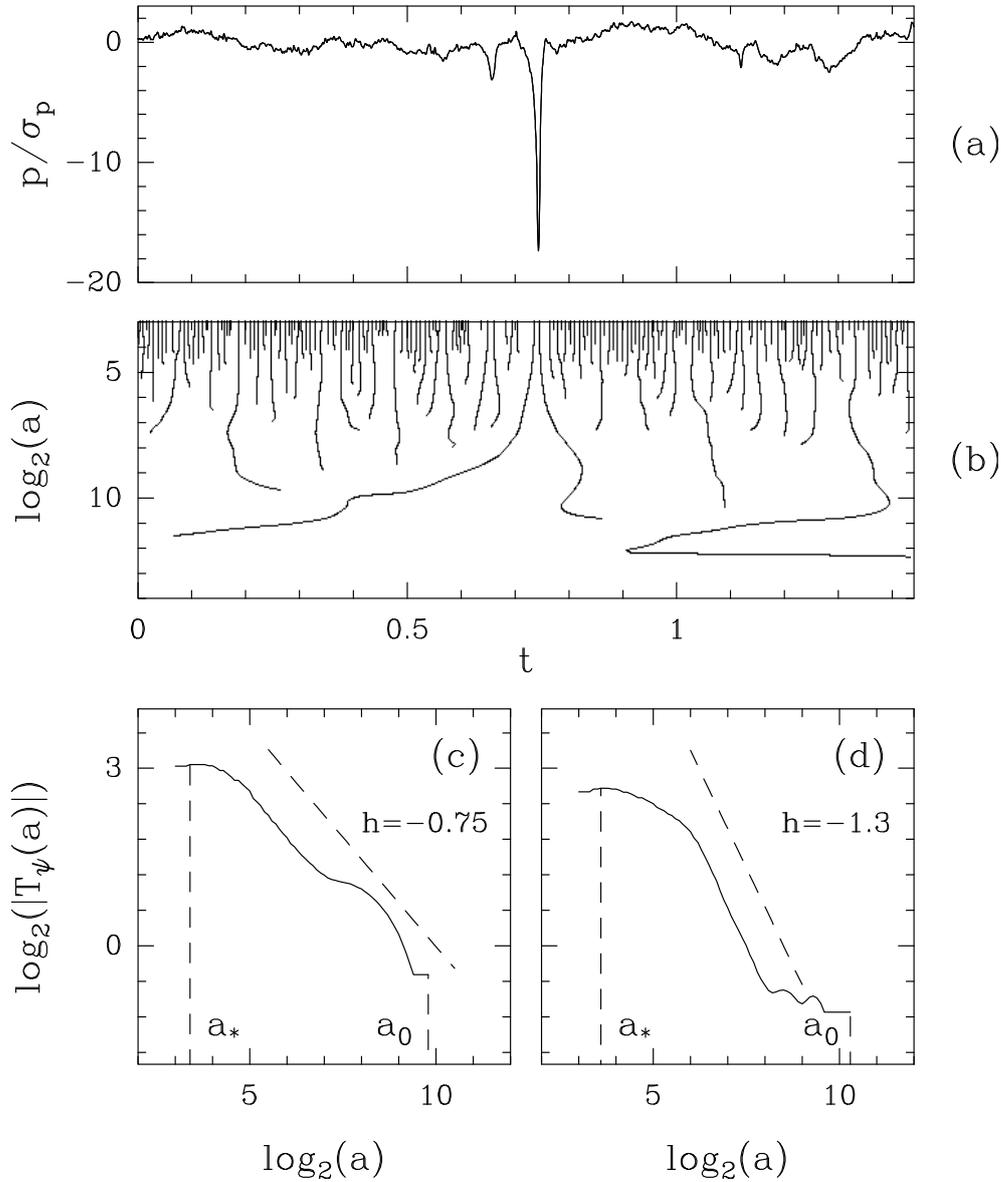


FIG. 5.7 – Analyse espace-échelle du signal de pression expérimental lors du passage d'un filament jeune. a) Signal contenant un de ces filaments. b) Squelette de la T.O. de ce signal calculée avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . On remarquera que le passage du filament gomme les “petites” fluctuations et que le squelette ne présente pas de ligne de maxima autour des deux lignes correspondant à ce filament. c) et d) Comportement du logarithme des maxima du module de la T.O. le long des deux lignes de maxima correspondant au filament, en fonction du logarithme des échelles. Ce comportement est similaire à celui obtenu pour la pression d'un vortex de Burgers dans les figures 5.5d et 5.5e.

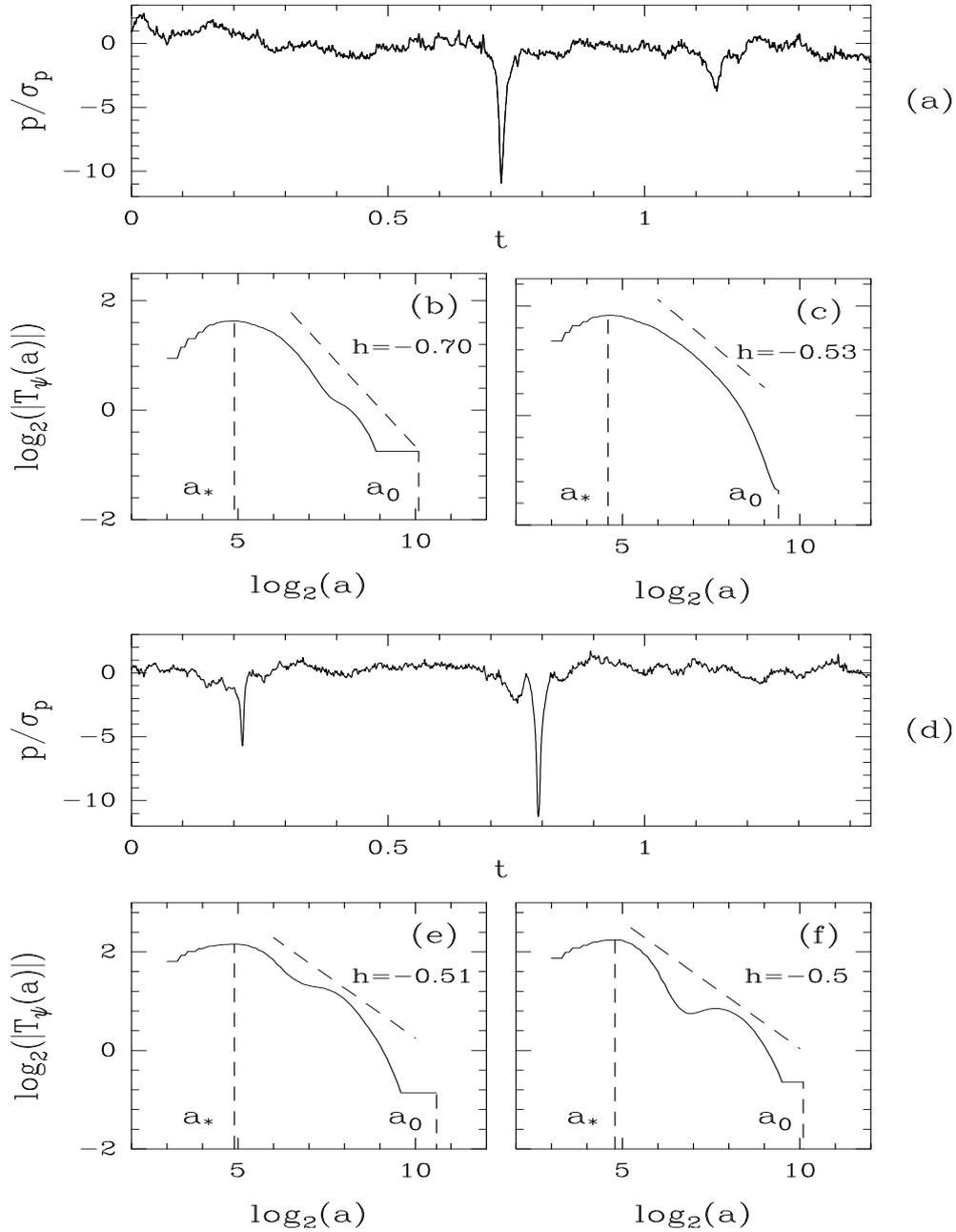


FIG. 5.8 – a) Signal de pression expérimental contenant un filament jeune. b) et c) Comportement des maxima du module de la T.O. le long des deux lignes de maxima correspondant à ce filament. d) Signal contenant un autre filament jeune. e) et f) Comportement des maxima du module de la T.O. le long des deux lignes de maxima correspondant à ce deuxième filament. L'ondelette utilisée est l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

amorce de décroissance pour des  $a < a_*$ , recommence à croître à toute petite échelle due à la présence d’une forte singularité correspondant certainement à un brin de filament issu de l’explosion du filament (on ne peut aussi exclure la possibilité d’un changement de sens, peut-être répété, de la vitesse du filament conduisant à plusieurs passages de celui-ci sur le capteur).

Ainsi, la transformée en ondelettes et sa restriction aux maxima de son module nous permettent de distinguer les fluctuations correspondant au passage d’un filament des autres fluctuations (symétriques par rapport à 0). En effet, pour chaque ligne de maxima, il nous suffit de mesurer l’échelle  $a_0$  où apparaît cette ligne et de trouver le maximum de  $|T_\psi[p](a)|$  en descendant le long de cette ligne depuis les grandes vers les petites échelles pour déterminer les quantités  $a_*$  et  $|T_\psi(a_*)|$ . Si l’échelle  $a_*$  est égale à  $a_0$ , alors cette ligne de maxima correspond à une singularité “faible” reliée sans aucun doute aux fluctuations symétriques. Par contre si l’échelle  $a_*$  est “suffisamment” différente de l’échelle  $a_0$ , alors cette ligne suggère le présence d’une singularité “forte” et donc d’un filament. Cependant ce type d’étude menée sur des signaux Browniens fractionnaires (section 2.2.2) de paramètre  $H = 2/3$  (c’est-à-dire des signaux dont le spectre de puissance se comporte en  $k^{-7/3}$ ) montre qu’un nombre non négligeable de lignes de maxima présente une valeur de  $a_*$  différente de celle de  $a_0$ . Il nous faut donc avoir recours à d’autres critères que la simple condition  $a_* \neq a_0$  pour distinguer les filaments des autres fluctuations. Sur la figure 5.11, nous avons représenté les résultats de l’étude comparative des caractéristiques des lignes de maxima obtenues sur des Browniens fractionnaires de paramètres  $H = 2/3$  (et de même écart type que le signal de pression expérimental étudié), avec celles obtenues sur la pression. Les valeurs de  $\log_2(|T_\psi(a_*)|)$  obtenues pour le signal Brownien fractionnaire en fonction de  $\log_2(a_*)$  (Fig. 5.11a), forment un nuage dont la pente moyenne est proche de  $H = 2/3$  (ligne discontinue). Par contre, pour le signal de pression (Fig. 5.11c), ce nuage est beaucoup plus large et diffus et les valeurs de  $|T_\psi(a_*)|$  pour une même valeur de  $a_*$  sont nettement plus importantes. Sur les figures 5.11b et 5.11d, nous avons représenté, respectivement pour le signal numérique et le signal expérimental, les valeurs de  $a_*$  obtenues en fonction de  $a_0$  en échelles logarithmiques. Pour le Brownien fractionnaire, 82% des lignes de maxima ont un  $a_*$  égal à  $a_0$ , alors que pour la pression on obtient seulement un pourcentage de 55%. De plus, pour une même valeur de  $a_0$ ,  $a_*$  prend des valeurs beaucoup plus petites pour le signal de pression ce qui atteste d’une étendue beaucoup plus importante de la gamme d’échelles où l’on observe une croissance (et non une décroissance) des coefficients en ondelettes lorsqu’on descend le long des lignes de maxima depuis l’échelle

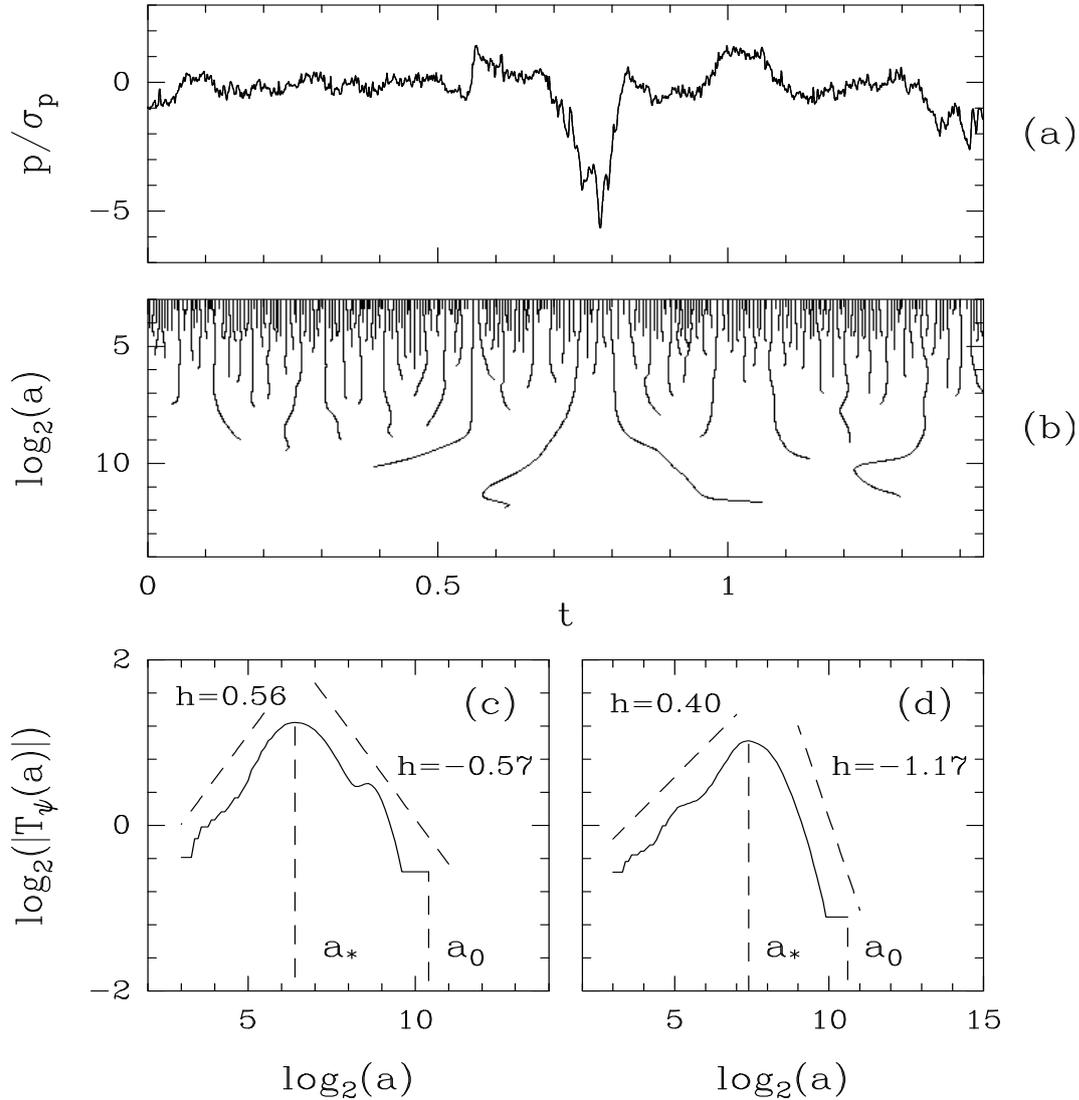


FIG. 5.9 – Analyse espace-échelle du signal de pression lors du passage d'un filament éclaté. a) Signal contenant un de ces filaments. b) Squelette de la T.O. de ce signal calculée avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Ce squelette présente des lignes de maxima au coeur même du filament et montre donc la nature plus complexe de cette structure localisée. c) et d) Comportement du logarithme des maxima de la T.O. le long des deux lignes de maxima correspondant aux grands sauts de pression délimitant le filament éclaté, en fonction du logarithme des échelles. Ce comportement est similaire à celui obtenu pour la pression d'un vortex de Burgers, à ceci près que l'échelle caractéristique  $a_*$  dépend maintenant de la ligne considérée et que le coeur du filament n'est plus lisse comme en atteste la présence de lignes de maxima entre les deux lignes qui délimitent l'étendue de celui-ci.

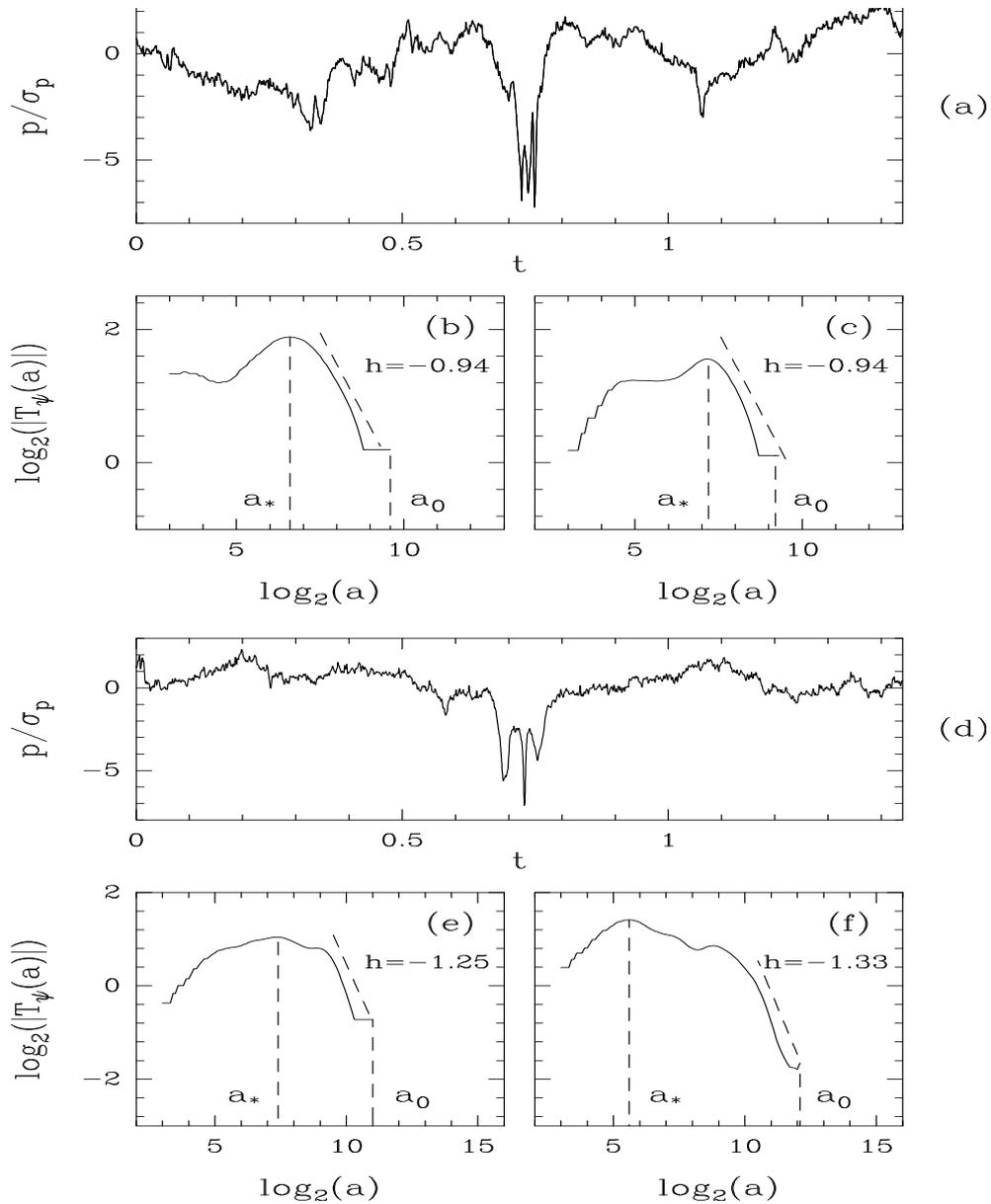


FIG. 5.10 – a) Signal de pression expérimental contenant un filament éclaté. b) et c) Comportement des maxima du module de la T.O. le long des deux lignes de maxima correspondant aux grands sauts de pression délimitant ce filament. d) Signal contenant un autre filament éclaté. e) et f). Comportement des maxima du module de la T.O. le long des deux lignes de maxima délimitant l'étendue du coeur de ce filament. L'ondelette utilisée est l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

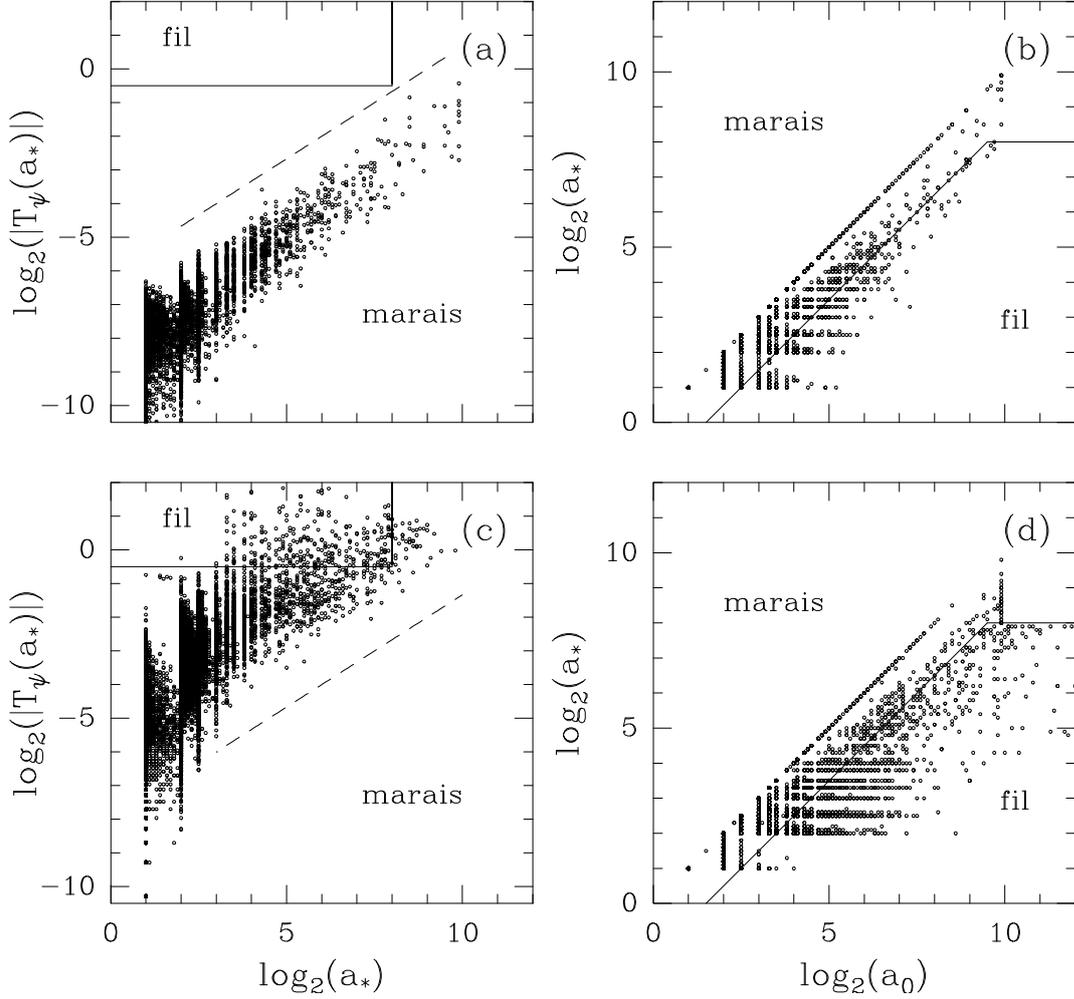


FIG. 5.11 – Etude comparative des caractéristiques des lignes de maxima de la T.O. de signaux Browniens fractionnaires de paramètre  $H = 2/3$  et de la T.O. du signal de pression. L'écart type des fluctuations de ces signaux a été fixé à 1. Signal Brownien fractionnaire : a)  $\log_2(|T_\psi(a_*)|)$  en fonction de  $\log_2(a_*)$  ; b)  $\log_2(a_*)$  en fonction de  $\log_2(a_0)$ . Signal de pression : c)  $\log_2(|T_\psi(a_*)|)$  en fonction de  $\log_2(a_*)$  ; d)  $\log_2(a_*)$  en fonction de  $\log_2(a_0)$ . Les lignes discontinues sur les figures a) et c) correspondent à une pente  $2/3$ . Les lignes continues délimitent la séparation entre la phase “filament” et “marais” selon les critères définis dans l'équation (5.19).

$a_0$ . Il est aussi important de remarquer que le nombre total de lignes de maxima comptabilisées pour le Brownien est deux fois plus important que celui obtenu sur le signal de pression. Ceci est certainement la conséquence de la présence des filaments dans le signal de pression qui gomment les fluctuations lors de leurs passages sur le capteur. Sur la base de ces observations, nous nous sommes attachés à effectuer une étude locale systématique du squelette de la T.O. du signal de pression, afin de fixer certains critères permettant d'identifier le passage des filaments jeunes et des filaments éclatés. Dans la suite de cette étude nous considérerons qu'une ligne de maxima correspond à un filament si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \log_2(a_0/a_*) > 1.5 ; \\ \bullet \log_2(|T_\psi(a_*)|) > -0.5 ; \\ \bullet \log_2 a_* < 8 . \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Cette troisième condition a été rajoutée pour ne pas prendre en compte les variations importantes du signal de pression qui s'étalent sur des temps de l'ordre du temps de retournement  $T_0$  ( $\log_2 T_0 = 9.5$ ) et qui ne correspondent pas au passage d'un filament. Lorsque ces trois conditions sont remplies, nous détectons avec précision la plupart des filaments et en particulier tous ceux que l'on aurait pu identifier par une simple technique de seuillage.

*Remarque :* La seconde condition, qui correspond en fait à un seuil sur l'amplitude de la dépression, est nécessaire pour ne pas considérer comme des filaments un nombre important de lignes de maxima qui apparaissent à petite échelle ( $a_0 < 2^5$ ), et qui correspondent à des pics de dépression (ou de surpression) de faible amplitude dont nous ne sommes pas sûrs qu'ils impliquent le passage d'un filament pour la simple raison que nous les observons aussi sur les signaux Browniens fractionnaires.

### 5.3 Méthode M.M.T.O., propagateur et analyse multifractale des fluctuations de pression

Dans cette section, nous allons étudier le comportement statistique dans les échelles des fluctuations du signal de pression à l'aide de la méthode M.M.T.O. et de la méthode du propagateur. Ces deux méthodes, qui reposent sur la détermination du squelette de la T.O., vont nous permettre d'étudier non seulement les propriétés d'auto-similarité du signal global, mais aussi celles de ce même signal où l'on aura au préalable enlevé les filaments de pression de la statistique par simple application de la stratégie définie dans

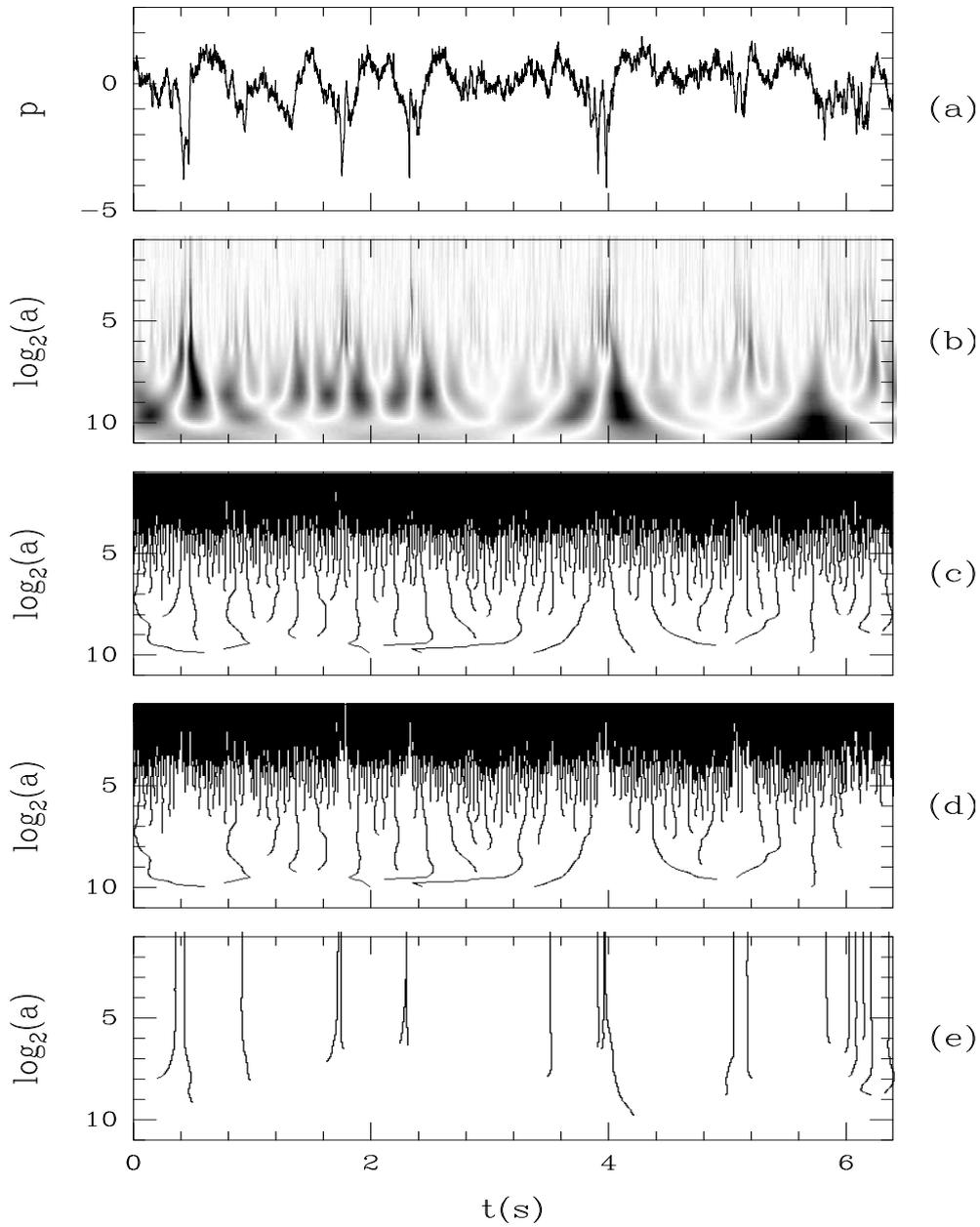


FIG. 5.12 – a) Signal de pression. b) Transformée en ondelettes codée indépendamment à chaque échelle en 32 niveaux de gris, du blanc ( $|T_\psi(t, a)| = 0$ ) au noir ( $T_\psi(t, a) = \max_t(T_\psi(t, a))$ ). c) Squelette de la T.O. d) Sous-squelette de la T.O. correspondant au marais des fluctuations symétriques. e) Sous-squelette complémentaire composé des lignes de maxima vérifiant les conditions (5.19) et correspondant à la phase filament. L'ondelette analysatrice utilisée est l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

la section précédente (c'est-à-dire où l'on aura supprimé du squelette de la T.O., les lignes de maxima correspondant au passage d'un filament sur le capteur). Par comparaison, nous pourrions ainsi discuter l'influence des filaments sur les propriétés statistiques du champ de pression.

Les différentes étapes de notre stratégie sont illustrées sur la figure 5.12 où nous avons représenté une partie du signal de pression (Fig. 5.12a) ainsi que sa transformée en ondelettes codée, indépendamment à chaque échelle, en 32 niveaux de gris. Le squelette de cette T.O. est représenté sur la figure 5.12c. Pour chacune des lignes de maxima, il nous suffit de déterminer les quantités  $a_*$ ,  $T_\psi(a_*)$  et  $a_0$  pour classer ces lignes dans deux catégories correspondant à deux "phases" de fluctuations. Sur la figure 5.12d, nous avons représenté le squelette de la T.O. du "marais" des fluctuations de pression symétriques, c'est-à-dire l'ensemble des lignes de maxima dont les caractéristiques ne vérifient pas les conditions (5.19). Le complémentaire de ce squelette représenté sur la figure 5.12e, correspond au squelette de la phase "filament". Toutes ces lignes qui pointent vers des pics de dépression caractéristiques du passage d'un filament sur la sonde, nous permettent de repérer non seulement les très fortes dépressions, mais aussi des dépressions moins importantes qui n'auraient pas pu être différenciées des autres fluctuations par une simple méthode de seuillage. Cette phase filament qui correspond à des structures localisées isolées sera étudiée plus spécifiquement dans la section 5.4. Dans la présente section, nous nous intéressons dans un premier temps à caractériser les propriétés d'invariance d'échelle du marais des fluctuations de pression. Nous utiliserons pour cela deux définitions de cette phase :

- M1 : toutes les lignes de maxima telles que  $a_* = a_0$ .
- M2 : toutes les lignes de maxima dont les caractéristiques ne vérifient pas les équations (5.19).

La première définition est beaucoup moins précise et ne correspond pas en fait à la totalité de la phase "marais". En effet, il est clair que nous enlevons de la statistique beaucoup trop de lignes qui ne correspondent pas au passage d'un filament. Toutefois, nous sommes sûrs qu'avec cette définition aucun filament n'a été pris en compte par mégarde dans la phase marais M1. La deuxième définition contient la phase marais dans sa totalité sans aucune assurance cette fois d'avoir exclu de la statistique tous les filaments, certains pouvant avoir échappé à nos critères de sélection.

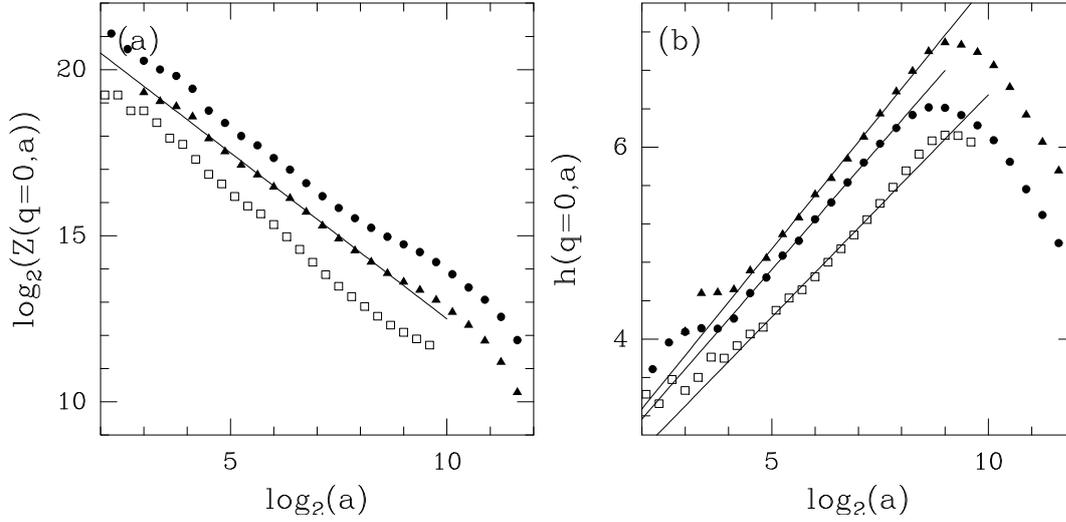


FIG. 5.13 – Fonctions de partition du signal de pression (Eqs. (5.20)). a)  $\log_2(Z(q = 0, a))$  en fonction de  $\log_2(a)$ . b)  $h(q = 0, a)$  en fonction de  $\log_2(a)$ . Les différentes courbes ont été obtenues à partir du squelette total de la T.O. calculée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\blacktriangle$ ). La même étude a été effectuée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  sur le sous-squelette correspondant à la phase marais M2 ( $\square$ ), c'est-à-dire où l'on a enlevé de la statistique les lignes de maxima vérifiant les équations (5.19).

### 5.3.1 Méthode M.M.T.O.

#### • Fonctions de partition et spectres multifractals

Nous avons estimé les fonctions de partition de différentes manières. En effet, les équations (2.96) et (2.98) ne nous permettent pas de détecter des singularités d'exposant de Hölder inférieur à 0 : la méthode qui permet de stabiliser les fonctions de partition d'ordre  $q$  négatif et qui consiste à prendre, pour chaque ligne de maxima, le maximum en descendant dans les échelles des coefficients en ondelettes, nous donne la valeur  $h = 0$  comme seuil inférieur d'exposant de Hölder détectable. Comme au dessus d'une échelle caractéristique  $a_*$  correspondant à la taille de son coeur, un filament peut être identifié à une singularité forte d'exposant de Hölder  $h = -1$ , il était nécessaire d'adapter notre méthode. Nous avons donc décidé d'utiliser comme définition des fonctions de partition, les expressions suivantes (Eq. (2.92)) :

$$\begin{cases} Z(q, a) &= \sum_{\mathcal{L}} |T_{\psi}(b, a)|^q, \\ h(q, a) &= \sum_{\mathcal{L}} \frac{|T_{\psi}(b, a)|^q}{Z(q, a)} \ln(|T_{\psi}(b, a)|), \end{cases} \quad (5.20)$$

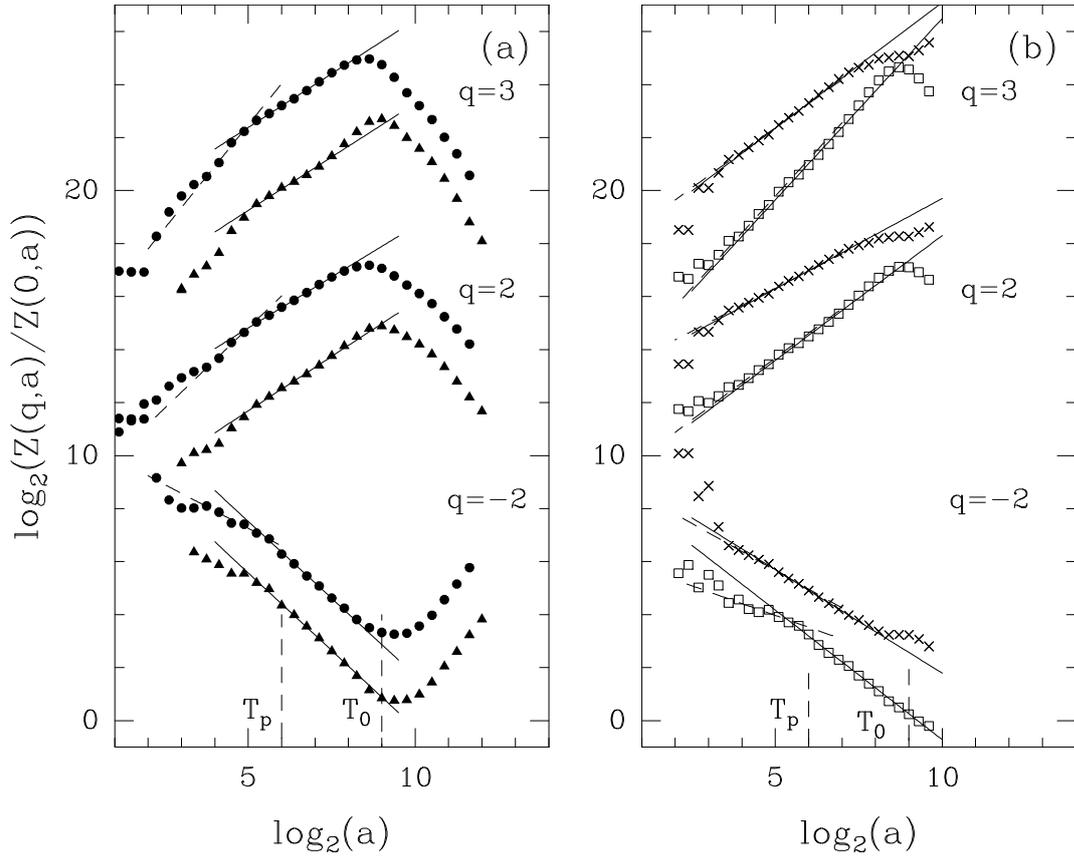


FIG. 5.14 – Fonctions de partition  $\log_2(Z(q, a)/Z(0, a))$  en fonction de  $\log_2(a)$  où  $Z(q, a)$  est définie par l'équation (5.20). a) Signal de pression global ; l'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\blacktriangle$ ). b) La même étude effectuée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , sur les sous-squelettes correspondant respectivement aux phases marais M1 ( $\times$ ) et M2 ( $\square$ ). Les lignes discontinues et continues correspondent aux régressions linéaires effectuées respectivement pour des échelles inférieures à  $T_p = 1/\Omega_p$  et pour des échelles comprises entre  $T_p$  et  $T_0$ .

où  $\mathcal{L}$  représente l'ensemble des maxima à l'échelle  $a$ . Ces définitions donnent des résultats similaires à ceux obtenus avec les équations (2.96) et (2.98) sur des signaux dont l'exposant de Hölder minimum est supérieur à 0. Toutefois, les fonctions de partition d'ordre  $q$  négatif sont beaucoup plus bruitées par l'existence possible de très faibles valeurs des maxima du module de la T.O., ce qui rend plus délicate l'estimation de la partie  $q < 0$  du spectre  $\tau(q)$ .

Sur la figure 5.13, nous avons représenté les fonctions de partition d'ordre  $q = 0$  (Eq. (5.20)), obtenues sur le squelette de la T.O. du signal de pression calculées respectivement avec les ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles  $(\bullet)$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles  $(\blacktriangle)$ ). Sur cette même figure sont aussi reportés les résultats obtenus pour le sous-squelette correspondant à la phase marais M2 (symboles  $\square$ ). La courbe  $\log_2(Z(0, a))$  se comporte linéairement en fonction de  $\log_2 a$  (Fig. 5.13a), avec tout de même quelques fluctuations assez importantes. La pente obtenue pour ces trois courbes est égale à  $-1$  et est représentée par la ligne continue. La dimension fractale du support des singularités de ces signaux est donc égale à 1; ces signaux sont donc singuliers partout.  $h(0, a)$  en fonction de  $\log_2(a)$  présente un comportement linéaire jusqu'à l'échelle correspondant au temps de retournement  $a = T_0 = 2^9$  (Fig. 5.13b). La valeur de l'exposant de Hölder obtenue pour le signal global est égale à  $0.54 + -0.02$  avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  et  $0.57 + -0.02$  avec  $\psi_{(3)}^{(2)}$ . Cette valeur est sensiblement inférieure à celle prédite ( $h = 2/3$ ) par des arguments aux dimensions en supposant l'hypothèse K41. L'exposant de Hölder obtenu pour le marais M2 est significativement inférieur aux valeurs obtenues pour le signal global :  $h(0) = 0.50 + -0.02$ . Les fluctuations visibles dans le comportement en loi de puissance de ces fonctions sont de plus en plus importantes lorsque  $|q|$  augmente, ce qui rend les régressions linéaires difficiles et ceci d'autant plus que les exposants de Hölder sont petits. Pour rendre plus précise la procédure de régression linéaire, nous supposons que  $\tau(0) = -1$  et nous déterminerons la pente de  $\log_2(Z(q, a)/Z(0, a))$  en fonction de  $\log_2(a)$  afin d'estimer  $\tau(q) - 1$ . Ces courbes, dont les fluctuations sont beaucoup moins importantes, sont représentées sur les figures 5.14a et 5.14b respectivement pour le signal global et les marais M1 et M2.

Sur la figure 5.14a, nous avons représenté ces fonctions de partition calculées sur le signal de pression en utilisant les ondelettes  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\blacktriangle$ ). On observe clairement sur le comportement de  $\log_2(Z(q, a)/Z(0, a))$  en fonction de  $\log_2(a)$ , deux régimes d'invariance d'échelle différents. Un régime assez bruité est visible aux petites échelles sur une gamme  $a < T_p$ . Un second régime beaucoup mieux défini s'étend sur la gamme d'échelles comprises entre le temps de retournement  $T_0$  et le temps de passage des pales  $T_p$ . Sur la

figure 5.14b, nous rapportons pour comparaison les résultats d'une même étude effectuée avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  sur les sous-squelettes de la T.O. correspondant respectivement aux marais M1 (symboles ( $\times$ )) et M2 (symboles ( $\square$ )). Désormais, un seul régime linéaire est visible sauf pour les valeurs de  $q$  négatives. Les lignes continues et discontinues correspondent aux régressions linéaires effectuées respectivement à grande et à petite échelle. Les valeurs obtenues sont reportées sur la figure 5.15 où nous avons représenté les spectres multifractals  $\tau(q)$ , les fonctions  $\alpha(q)$  (obtenues en dérivant les polynômes d'interpolation des spectres  $\tau(q)$ ) et les spectres  $D(h)$  des exposants de Hölder, transformées de Legendre de  $\tau(q)$ . Les figures 5.15a-c et 5.15d-f correspondent respectivement aux résultats obtenus à grande ( $T_p < a < T_0$ ) et à petite échelle ( $a < T_p$ ) sur le signal de pression original. L'utilisation des équations (5.20) pour les fonctions de partition avec soit l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\bullet$ )) soit l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(2)}$  (symboles ( $\blacktriangle$ )) donne des résultats similaires. Au-delà de  $q = 3$ , le spectre  $\tau(q)$  devient décroissant et met ainsi en évidence la présence de singularités très fortes d'exposant de Hölder négatif ( $h = \partial\tau/\partial q < 0$ ). Le spectre  $D(h)$  des exposants de Hölder est maximum en  $h \approx 0.55$  et a une partie manifeste qui couvre approximativement la gamme d'exposants de Hölder compris entre  $-0.1$  et  $0.9$ . Comme prévu, l'utilisation des équations (2.96) (avec le sup dans la définition des fonctions de partition) et de l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\circ$ )) produit un spectre  $\tau(q)$  qui ne décroît pas mais reste constant au delà de  $q \geq 3$ , masquant d'une certaine façon l'existence de valeurs de  $h < 0$ . Remarquons que les résultats obtenus à petite échelle sont quelque peu discutables pour les valeurs de  $q < 1$ . En effet, ceci est dû à la gamme d'échelles très restreinte dont on dispose pour effectuer la procédure de régression linéaire. Pour  $q < 1$ , cette procédure s'avère être sensible aux fluctuations dues aux petites valeurs prises par les maxima du module de la T.O. Ces fluctuations sont d'autant plus grandes que la valeur de  $q$  considérée est petite. Par contre, pour les valeurs de  $q$  supérieures à 1, les résultats sont qualitativement les mêmes : les spectres obtenus sont caractéristiques d'un signal multifractal mais avec des exposants de Hölder ( $0.2 < h < 0.6$ ) légèrement supérieurs à ceux obtenus à grande échelle ( $-0.1 < h < 0.55$ ).

Sur les figures 5.15g-i et 5.15j-l, nous avons représenté ces mêmes spectres estimés respectivement à grande et à petite échelle, à partir cette fois des sous-squelettes de la T.O. du signal de pression correspondant respectivement aux marais des fluctuations M1 (symboles ( $\times$ )) et M2 (symboles ( $\square$ )). Les résultats obtenus à grande et à petite échelle sont désormais très proches quantitativement. Le spectre  $\tau(q)$  obtenu en enlevant de la statistique les lignes de maxima telles que  $a_* \neq a_0$ , (lignes qui ne correspondent pas

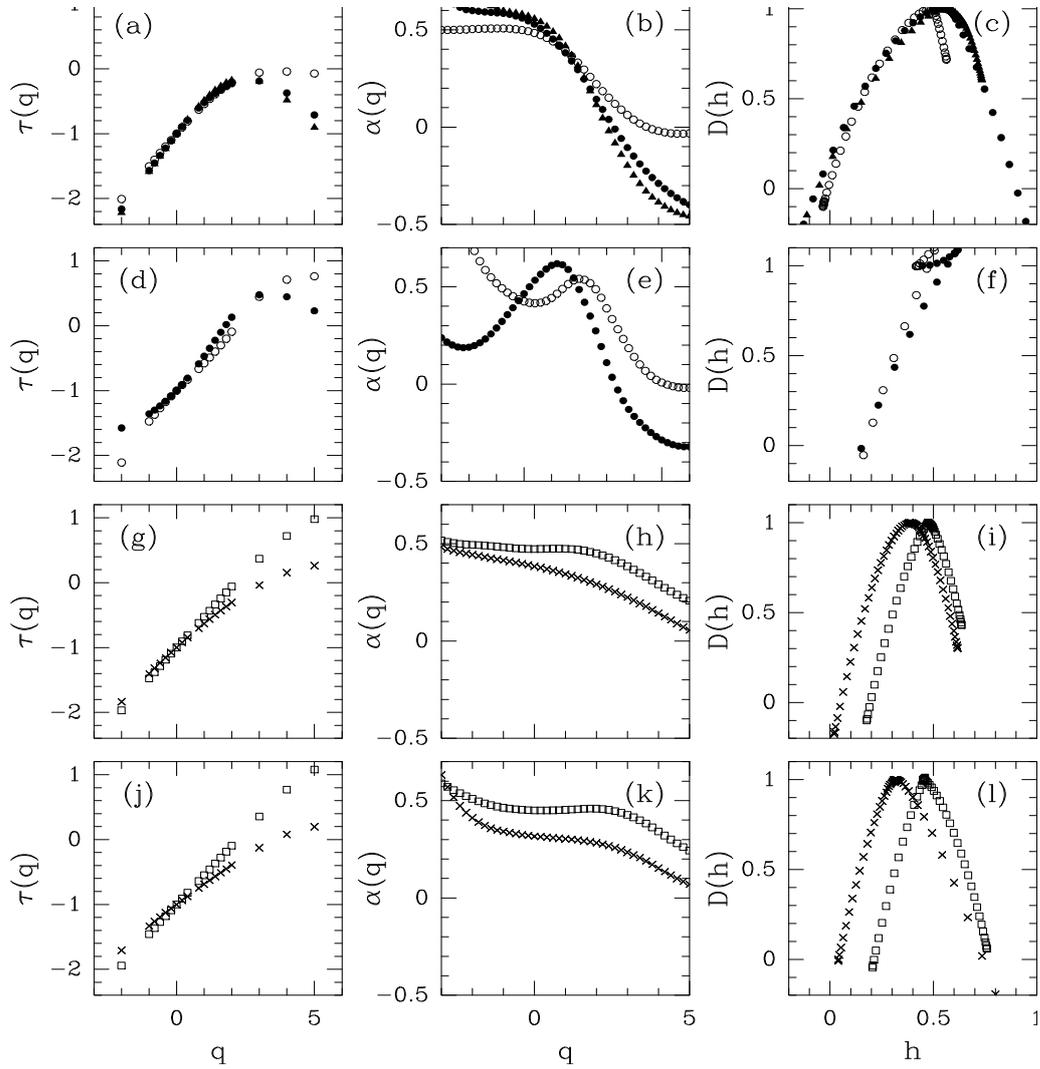


FIG. 5.15 – Spectres  $\tau(q)$  obtenus à partir du comportement de  $\log_2(Z(q, a)/Z(0, a))$  en fonction de  $\log_2(a)$  (Fig. 5.14). Fonctions  $\alpha(q) = \partial\tau/\partial q$ . Spectres  $D(h)$  obtenus par transformation de Legendre. Résultats obtenus pour le signal de pression à grande échelle  $T_p < a < T_0$  (figures a, b et c) et à petite échelle  $a < T_p$  (figures d, e et f), en utilisant (i) d'une part les définitions (5.20) des fonctions de partition avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\bullet$ ) et l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(2)}$  ( $\blacktriangle$ ) et (ii) d'autre part les définitions (2.96) et l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\circ$ ). Résultats obtenus avec les définitions (2.96) des fonctions de partition et l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  sur les sous-squelettes de la T.O. correspondant respectivement aux phases marais M1 ( $\times$ ) et M2 ( $\square$ ) : à grande échelle  $T_p < a < T_0$  (figures g, h et i) et à petite échelle  $a < T_p$  (figures j, k et l).

toujours au passage d'un filament sur le capteur), est toujours non linéaire : la phase marais M1 est donc caractérisée par toute une gamme d'exposants de Hölder. Le spectre  $D(h)$  correspondant atteint son maximum en  $h = 0.40 + -0.05$  et sa valeur minimum est  $h_{min} = 0 + -0.1$ . Par contre, si on enlève de la statistique moins de lignes de maxima, c'est-à-dire uniquement celles vérifiant les équations (5.19), le spectre  $\tau(q)$  demeure non linéaire bien que la courbure de  $\tau(q)$  soit beaucoup moins prononcée que précédemment. Cela se traduit sur le spectre  $D(h)$  des singularités par un domaine des valeurs possibles de l'exposant de Hölder plus restreint avec  $h_{min} = 0.20 + -0.05$  alors que  $D(h)$  est maximum pour  $h = 0.48 + -0.05$ . La phase marais M2 apparaît toujours comme multifractale mais elle est beaucoup moins intermittente que le signal de pression contenant la phase filament. A ce point il est important de remarquer que la phase marais M1 étant contenue dans la phase M2, il est tout à fait surprenant, pour ne pas dire inconsistant, que son spectre  $D(h)$  soit plus large que celui du marais M2 (toutes les singularités du marais M1 contribuant au marais M2). Nous verrons dans les paragraphes qui suivent, que cette observation est en fait l'illustration de la non pertinence de la description multifractale pour rendre compte des propriétés d'invariance d'échelle des fluctuations de pression.

Ces résultats sur le comportement dans les échelles du champ de pression souffrent de nombreuses limitations. En effet, les nombres de Reynolds atteints sont faibles et le domaine inertiel couvre une gamme d'échelles très limitée. De plus, par la configuration du flot et les mécanismes créateurs de la turbulence, les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie du flot sont loin d'être vérifiées : les mesures sont faites en paroi, à priori dans la couche de cisaillement. Mais la position de cette couche fluctue et passe régulièrement en dessous et au-dessus du capteur. D'un autre côté, l'absence de flot moyen ne permet pas d'appliquer l'hypothèse de Taylor pour passer de l'enregistrement temporel au champ spatial. Malgré ces limitations, le résultat important de cette analyse est que la suppression dans la statistique des filaments ne semble pas éliminer le phénomène d'intermittence. Il est vrai que cette observation ne permet pas de conclure quant au véritable rôle des filaments puisque, lors de leur formation et de leur éclatement, chacun d'entre eux a certainement affecté les fluctuations environnantes du flot turbulent que nous avons identifiées comme phase marais complémentaire de la phase filament. Pour progresser sérieusement dans la compréhension des mécanismes à l'origine du phénomène d'intermittence, il faudrait étudier un signal provenant d'un flot où l'on a réussi à inhiber physiquement la formation des filaments de vorticité. Des expériences de ce type ont déjà été entreprises par Couder et son équipe en rajoutant, par exemple, des polymères dans le flot turbulent. Les résultats

obtenus jusqu'à ce jour ne sont malheureusement pas concluants.

### • Histogrammes des coefficients en ondelettes

Nous avons représenté sur la figure 5.16, les histogrammes des incréments du signal de pression (symboles ( $\Delta$ )), et des coefficients en ondelettes obtenus en utilisant l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\blacktriangle$ )) pour les échelles  $a = 2^4$  (Fig. 5.16a) et  $2^7$  (Fig. 5.16b). Ces histogrammes semblent Gaussiens en première approximation. Par contre, le logarithme de ces histogrammes (Figs 5.16c et 5.16d) montrent clairement un comportement pour les grandes valeurs de forme exponentielle étirée. Le maximum de ces courbes est situé au voisinage de  $T_a = 0$ . Sur les figures 5.16c et 5.16d, nous avons superposé les histogrammes des maxima du module de la T.O. obtenus aux mêmes échelles avec l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles ( $\bullet$ )). Ces histogrammes sont maintenant nuls en 0 et présentent un même comportement de forme exponentielle étirée pour les grandes valeurs de  $|T_a|$ .

Sur les figures 5.17a et 5.17b, nous avons comparé l'histogramme des maxima du module de la T.O. obtenu à l'échelle  $a = 2^4 < T_p$  (symboles ( $\bullet$ )) avec les histogrammes correspondant des phases marais M1 (symboles ( $\times$ )) et M2 (symboles ( $\square$ )). Ces derniers histogrammes ont toujours des queues en forme d'exponentielle étirée mais cet effet est beaucoup moins prononcé que pour l'histogramme correspondant du signal de pression original. Sur les figures 5.17c et 5.17d, nous avons représenté ces mêmes histogrammes cette fois estimés à l'échelle  $T_p < a = 2^7 < T_0$ . A cette échelle, la suppression des lignes de maxima correspondant au passage d'un filament provoque un changement de forme des histogrammes des phases marais M1 et M2. Les lignes continues représentent une approximation de ces histogrammes par la forme log-normale :

$$P(T) = \frac{e^{-(\ln(|T_a|^{1/2})-m)^2/2\sigma^2}}{2|T_a|} . \quad (5.21)$$

Cette forme peut se comprendre si l'on combine la relation  $p \sim v^2$  (où  $p$  et  $v$  représentent respectivement la pression et la vitesse), et les résultats obtenus dans le chapitre 3 concernant la forme Gaussienne des histogrammes du logarithme des maxima du module de la T.O. du champ de vitesse turbulent. Pour les échelles comprises entre  $T_p$  et  $T_0$ , cette approximation permet donc de bien décrire les histogrammes des maxima du module de T.O. pour le signal privé de filaments et ceci pour les deux définitions utilisées pour identifier les filaments. Par contre, pour les échelles inférieures à  $T_p$ , cette approximation n'est valable que pour les faibles valeurs de ces coefficients. Ceci pourrait bien être la conséquence du fait que la procédure de détection des filaments est moins efficace aux petites

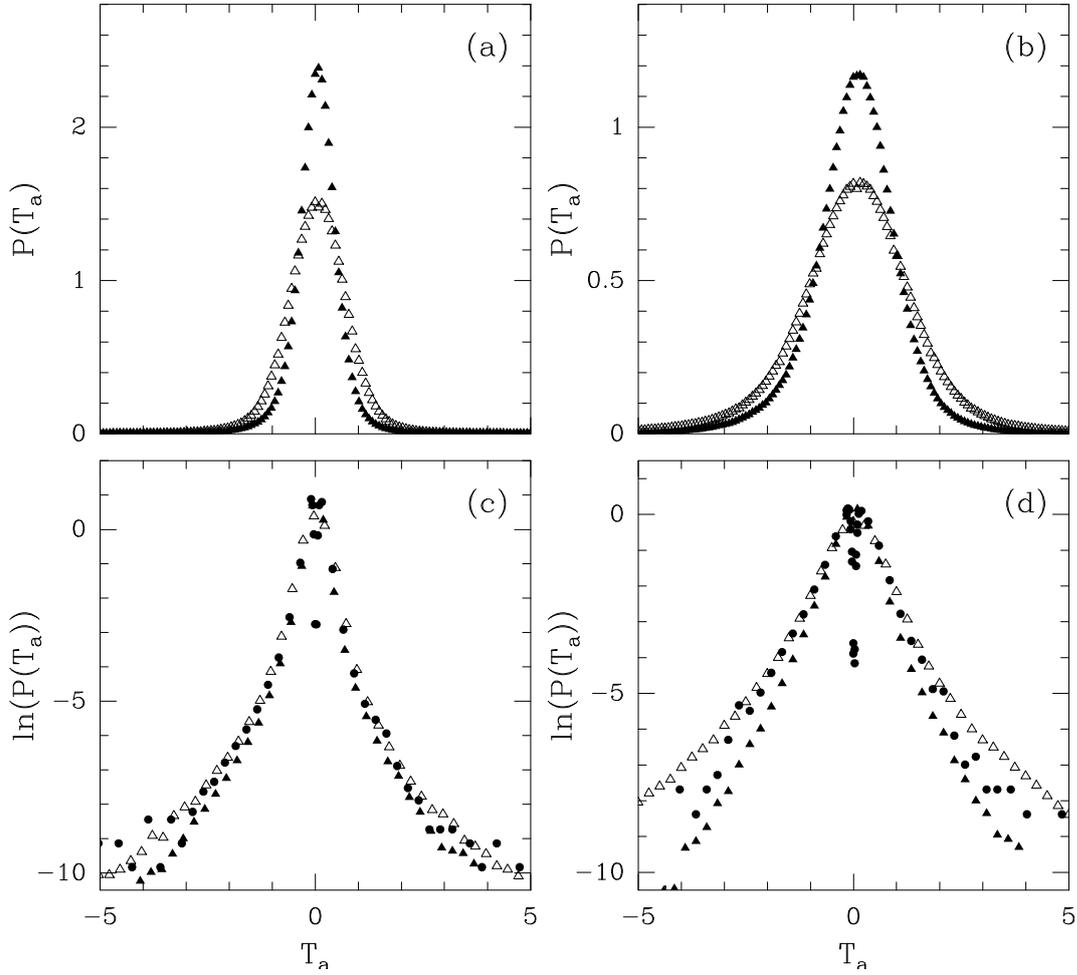


FIG. 5.16 – Comparaison des histogrammes des valeurs des incréments du signal de pression ( $\Delta$ ), avec les histogrammes des valeurs des coefficients en ondelette obtenus en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  ( $\blacktriangle$ ) pour les échelles  $a = 2^4$  (a) et  $2^7$  (b). Les figures (c) et (d) correspondent aux même histogrammes représentés cette fois en échelles semi-logarithmiques. Les symboles ( $\bullet$ ) correspondent aux histogrammes des maxima du module de la T.O. obtenus aux mêmes échelles en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ .

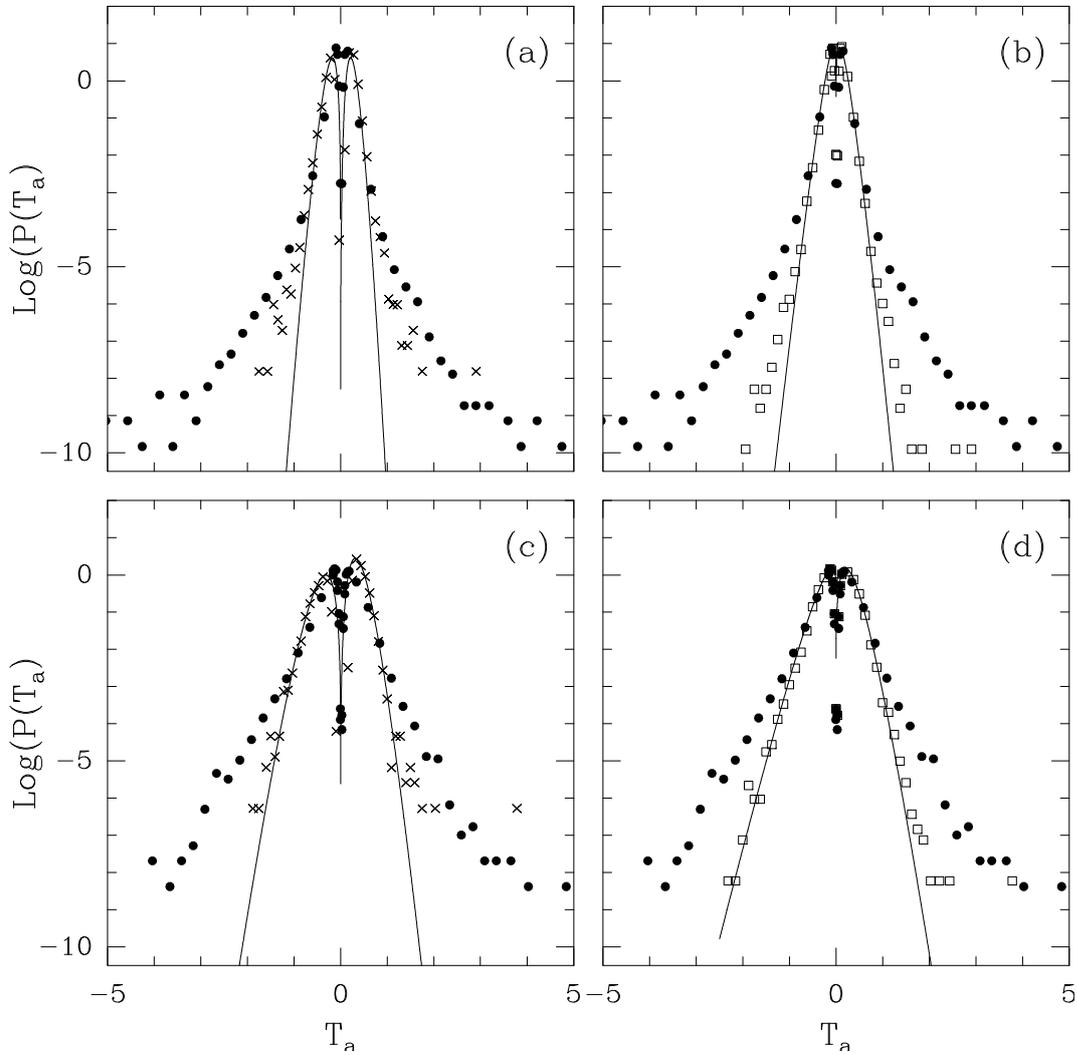


FIG. 5.17 – Comparaison des histogrammes des maxima du module de la T.O. du signal de pression ( $\bullet$ ), avec les histogrammes correspondants des phases marais M1 ( $\times$ ) et M2 ( $\square$ ). Les échelles représentées sont  $a = 2^4$  pour les figures a et b, et  $a = 2^7$  pour les figures c et d. Les lignes continues correspondent à une approximation de l’histogramme de la forme  $P(T_a) = e^{-(\ln(|T_a|^{1/2})-m)^2/2\sigma^2}/2|T_a|$ , où  $m$  et  $\sigma$  ont été estimés de façon indépendante pour les valeurs positives et négatives de  $T_a$ .

échelles et du fait que nous ne les avons pas tous enlevés. Ainsi ces résultats suggèrent que les filaments sont en grande partie responsables de la forme exponentielle étirée des histogrammes des maxima du module de la T.O. La forme Gaussienne précédemment obtenue pour le signal turbulent de vitesse enregistré à la soufflerie de Modane, pourrait être une indication que l'importance statistique des filaments de haute vorticité est moindre (pour ne pas dire négligeable) que dans l'expérience de laboratoire effectuée par Couder et ses collaborateurs.

### 5.3.2 Propagateur du champ de pression

De la même manière que dans les chapitres précédents, nous nous sommes aussi attachés à déterminer, à partir des maxima du module de la T.O., la transformée de Fourier du propagateur du champ de pression (Eq. (3.41)). En fait nous avons focalisé notre étude non seulement sur l'ensemble des maxima du module de la T.O. de la pression, mais aussi sur cet ensemble privé des lignes de maxima correspondant à la phase filament. La forme du propagateur calculé avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ , pour des échelles inférieures à  $T_p$ , est représentée sur la figure 5.18. Sur la figure 5.18a, nous avons représenté le module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu sur le signal global (symboles (●)), son approximation log-normale (Eq. (3.58)) (ligne continue), et sur la figure 5.18b, ses parties réelle (symboles (●)) et imaginaire (symboles (○)) ainsi que leurs approximations log-normales. Ce propagateur, qui est très proche de son approximation Gaussienne autour de 0, s'en écarte rapidement pour des valeurs de  $|p| \geq 2$ . Pour ces grandes valeurs de  $|p|$ , le fait que la partie réelle et la partie imaginaire (normalisées par le module) ne peuvent être approchées respectivement par un cosinus et un sinus, semble suggérer que le signal de pression n'est pas le résultat d'un processus de cascade. Par contre, le module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu pour l'ensemble des maxima correspondant à la phase marais M1 (symboles (×) sur la figure 5.18a), est beaucoup plus proche de son approximation Gaussienne (ligne discontinue). Ses parties réelle (symboles (●)) et imaginaire (symboles (○)), représentées sur la figure 5.18c, s'écartent à nouveau de leur approximation Gaussienne pour  $|p| \geq 2$ , mais gardent respectivement quand elles sont normalisées par le module, la forme caractéristique d'un cosinus et d'un sinus. L'ensemble des fluctuations correspondant à ces maxima semble donc pouvoir être décrit par la donnée d'un propagateur log-normal. Le module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu pour l'ensemble des maxima correspondant à la phase marais M2 (symboles (◻) sur figure 5.18a), s'écarte plus rapidement de son approximation Gaussienne (en ligne pointillée) et a une forme intermédiaire entre celle obtenue pour le signal de pression global et celle obtenue pour la phase

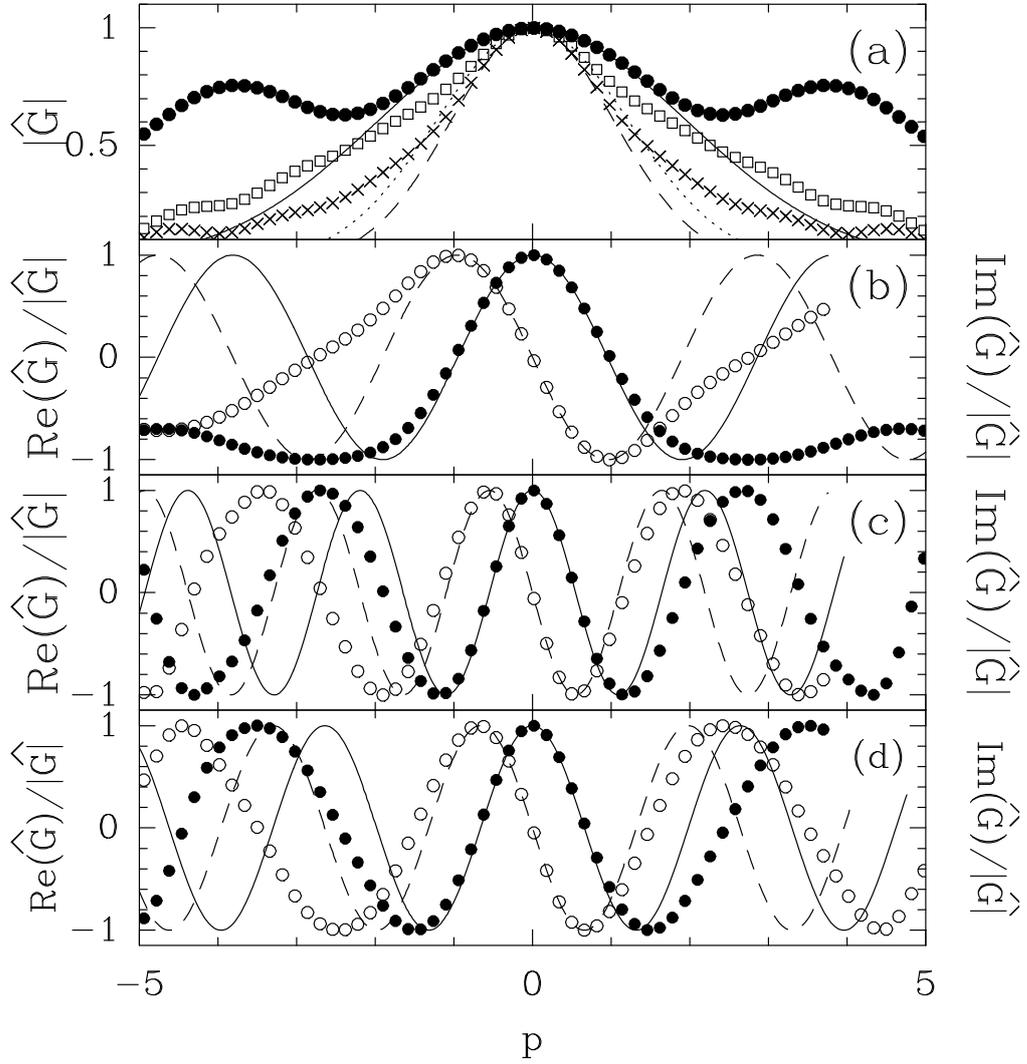


FIG. 5.18 – Calcul de la transformée de Fourier  $\hat{G}_{aa'}$  du propagateur du champ de pression à petite échelle,  $a < a' < T_p$ , en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (Eq. (3.41)). a) Module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu pour le signal global ( $\bullet$ ), pour la phase marais M1 ( $\times$ ) et pour la phase marais M2 ( $\square$ ). Les lignes continue, discontinue et en pointillés correspondent respectivement aux approximations log-normales (Eq. (3.58)) de ces propagateurs. b) Partie réelle ( $\bullet$ ) et partie imaginaire ( $\circ$ ) de  $\hat{G}_{aa'}$  pour le signal de pression global. c) Idem que dans (b) mais pour la phase marais M1. d) Idem que dans (b) mais pour la phase marais M2. Dans (b), (c) et (d), les lignes continues et discontinues représentent respectivement les approximations log-normales de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $\hat{G}_{aa'}$ . Les échelles  $a = 2^2$  et  $a' = 2^7$  sont situées en dessous de  $T_p$ .

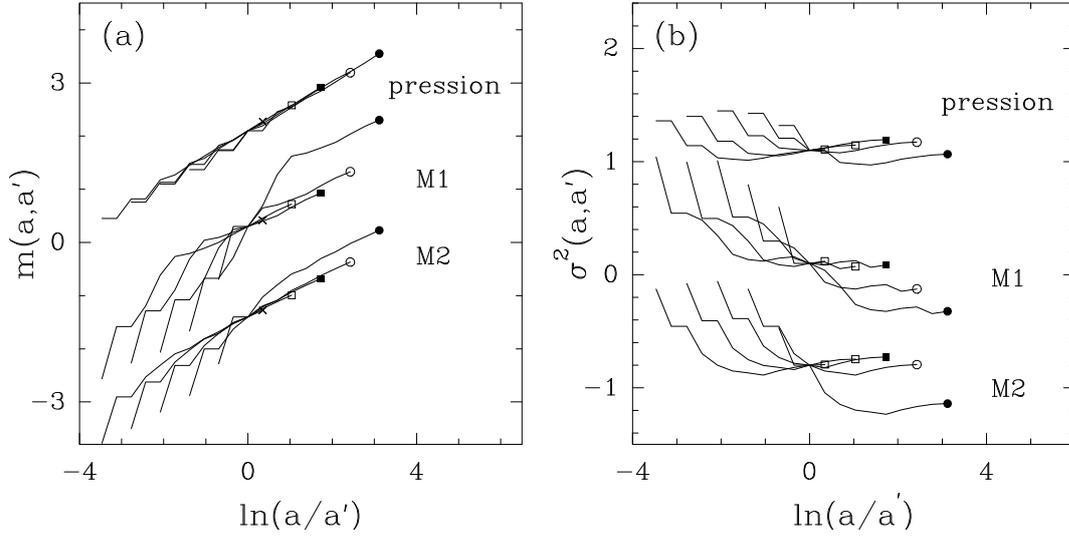


FIG. 5.19 – Comportement des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  pour le signal de pression total, le marais M1 et le marais M2 pour des échelles  $a < a' < T_p$ . Les symboles correspondent aux valeurs suivantes de l'échelle de référence :  $a' = 2^2$  (●),  $2^3$  (○),  $2^4$  (■),  $2^5$  (□) et  $2^6$  (×). L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . a)  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ .

marais M1. Sa partie réelle (symboles (●)) et sa partie imaginaire (symboles (○)), représentées sur la figure 5.18d, sont assez éloignées de leur approximation Gaussienne, mais gardent encore une forme caractéristique d'un cosinus et d'un sinus. Ainsi, la présence des filaments semble être en partie responsable de l'écart à l'approximation Gaussienne.

Sur la figure 5.19, nous avons essayé de déterminer le comportement dans les échelles des caractéristiques du propagateurs au voisinage de  $p = 0$ , c'est-à-dire  $m(a, a') = \partial \text{Im} \hat{G}_{aa'} / \partial p |_{p=0}$  et  $\sigma^2(a, a') = -\partial^2 \ln |\hat{G}_{aa'}| / \partial p^2 |_{p=0}$ . Nous avons déterminé ces quantités, pour différents couples  $a$  et  $a'$  inférieurs à  $T_p$ , pour le signal de pression (total), pour la phase marais M1 et la phase marais M2. Les échelles de référence considérées sont  $a' = 2^2$  (symboles (●)),  $2^3$  (symboles (○)),  $2^4$  (symboles (■)),  $2^5$  (symboles (□)), et  $2^6$  (symboles (×)). Pour les trois signaux considérés, les données pour  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  ne se remettent pas sur une même droite en fonction de  $\ln(a/a')$  et ce indépendamment de l'échelle de référence  $a'$  (en fait ces quantités ne se comportent pas linéairement en fonction du logarithme du rapport des échelles). Seule  $m(a, a')$  estimée pour le signal global, semble se comporter de manière linéaire avec une pente proche de 0.5. Mais ce comportement linéaire n'est pas pertinent puisque nous venons de voir que l'approximation log-normale

n'était pas du tout valable à ces petites échelles (Fig. 5.18). Insistons de plus sur le fait que ces résultats sur le comportement dans les échelles du propagateur sont à prendre avec précaution car les échelles considérées sont très petites et couvrent une gamme très restreinte.

Nous avons reproduit cette étude comparative des propagateurs du signal de pression et des phases marais M1 et M2, pour des échelles comprises entre le temps de retournement  $T_0$  et le temps de passage des pales  $T_p$ . Le module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu pour le signal global, pour un rapport d'échelle  $\log_2(a'/a) = 4$ , est représenté sur la figure 5.20a (symboles (●)) avec en ligne continue son approximation log-normale (Eq. (3.58)). Sa partie réelle (symboles (●)) et sa partie imaginaire (symboles (○)) sont représentées sur la figure 5.20b avec leur approximation log-normale respectivement en ligne continue et discontinue. Par rapport aux résultats présentés dans la figure 5.18, ce propagateur est plus proche de son approximation Gaussienne qui reste valable pour des valeurs de  $|p|$  de l'ordre de 2. De plus, les parties réelle et imaginaire de  $\hat{G}_{aa'}/|\hat{G}_{aa'}|$  sont bien définies et peuvent être approchées respectivement par un cosinus et un sinus. Le module de  $\hat{G}_{aa'}$ , estimé aux mêmes échelles, pour la phase marais M1 (symboles (×) sur la figure 5.20a) est en très bon accord avec son approximation log-normale (ligne discontinue) et ce pour toute la gamme de valeurs de  $p$  représentées :  $-5 \leq p \leq 5$ . Ses parties réelle (symboles (●)) et imaginaire (symboles (○)) qui sont représentées sur la figure 5.20c, sont elles aussi très bien modélisées par leur approximation log-normale respective. Ce résultat nous suggère donc que la statistique à grande échelle des fluctuations de pression symétriques est log-normale. En effet, pour l'estimation de ce propagateur, on est sûr qu'aucune ligne de maxima ne correspond à un filament de haute vortacité. Par contre, la condition  $a_* = a_0$  est très forte et il est clair que nous avons éliminé de la statistique des lignes de maxima ne correspondant pas à des filaments. L'estimation aux mêmes échelles du module de  $\hat{G}_{aa'}$  pour la phase marais M2 (symboles (□)) est présentée sur la figure 5.20a avec en ligne pointillée son approximation log-normale. Sa partie réelle (symboles (●)) et sa partie imaginaire (symboles (○)) sont représentées sur la figure 5.20d avec à nouveau leurs approximations log-normales respectivement en ligne continue et discontinue. A nouveau ce propagateur est beaucoup plus proche de son approximation log-normale que celui obtenu pour le signal de pression global. Des déviations par rapport à cette approximation sont toujours visibles mais sont beaucoup moins importantes pour les parties réelle et imaginaire que pour le module. Ce résultats confirment donc le fait que la présence des filaments dans le flot, nous éloigne d'un processus de cascade abstraite log-normale.

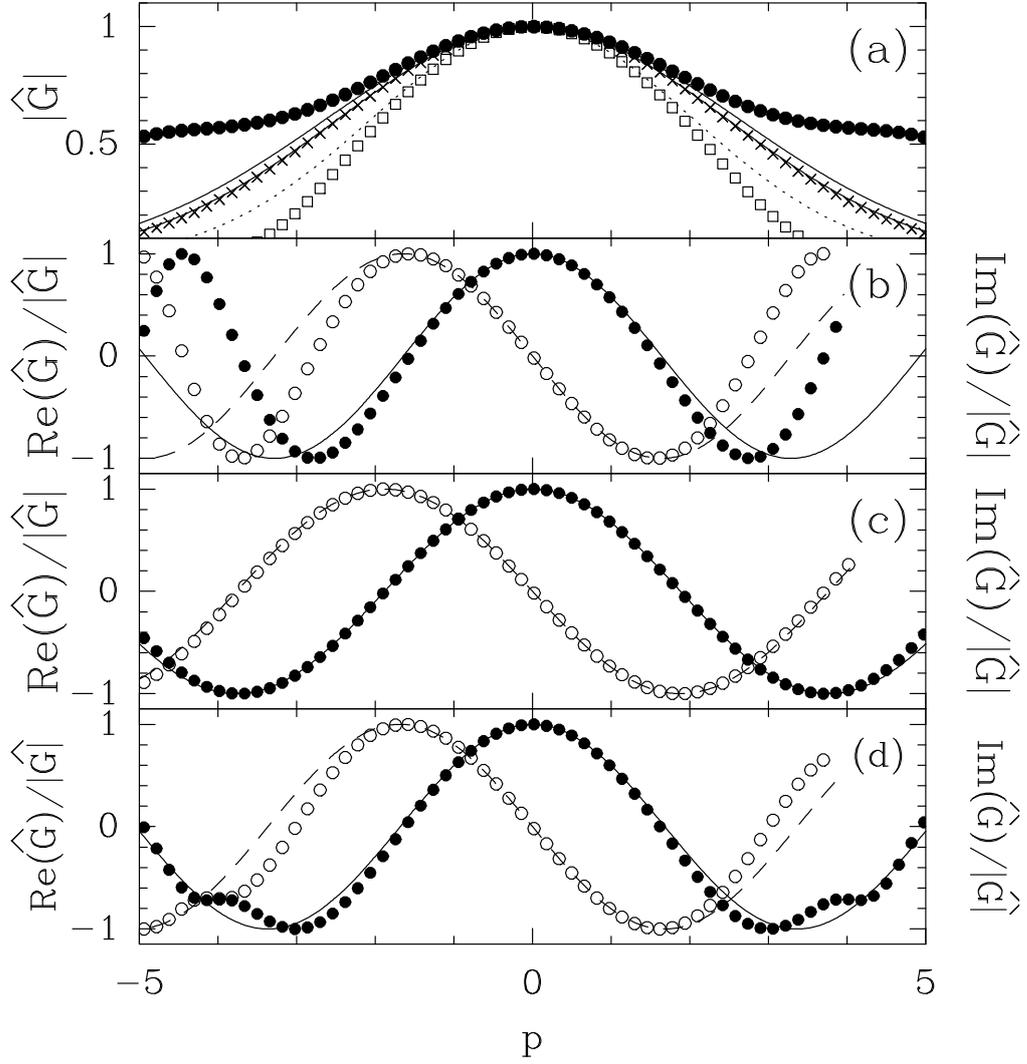


FIG. 5.20 – Calcul de la transformée de Fourier  $\hat{G}_{aa'}$  du propagateur du champ de pression à grande échelle  $T_p < a < a' < T_0$ , en utilisant l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (Eq. (3.41)). a) Module de  $\hat{G}_{aa'}$  obtenu pour le signal global ( $\bullet$ ), pour la phase marais M1 ( $\times$ ) et pour la phase marais M2 ( $\square$ ). Les lignes continue, discontinue et en pointillés correspondent respectivement aux approximations log-normales (Eq. (3.58)) de ces propagateurs. b) Partie réelle ( $\bullet$ ) et partie imaginaire ( $\circ$ ) de  $\hat{G}_{aa'}$  pour le signal de pression global. c) Idem que dans (b) mais pour la phase marais M1. d) Idem que dans (b) mais pour la phase marais M2. Dans (b), (c) et (d), les lignes continues et discontinues représentent respectivement les approximations log-normales de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $\hat{G}_{aa'}$ . Les échelles  $a = 2^6$  et  $a' = 2^{10}$  sont comprises dans la gamme délimitée par  $T_p$  et  $T_0$ .

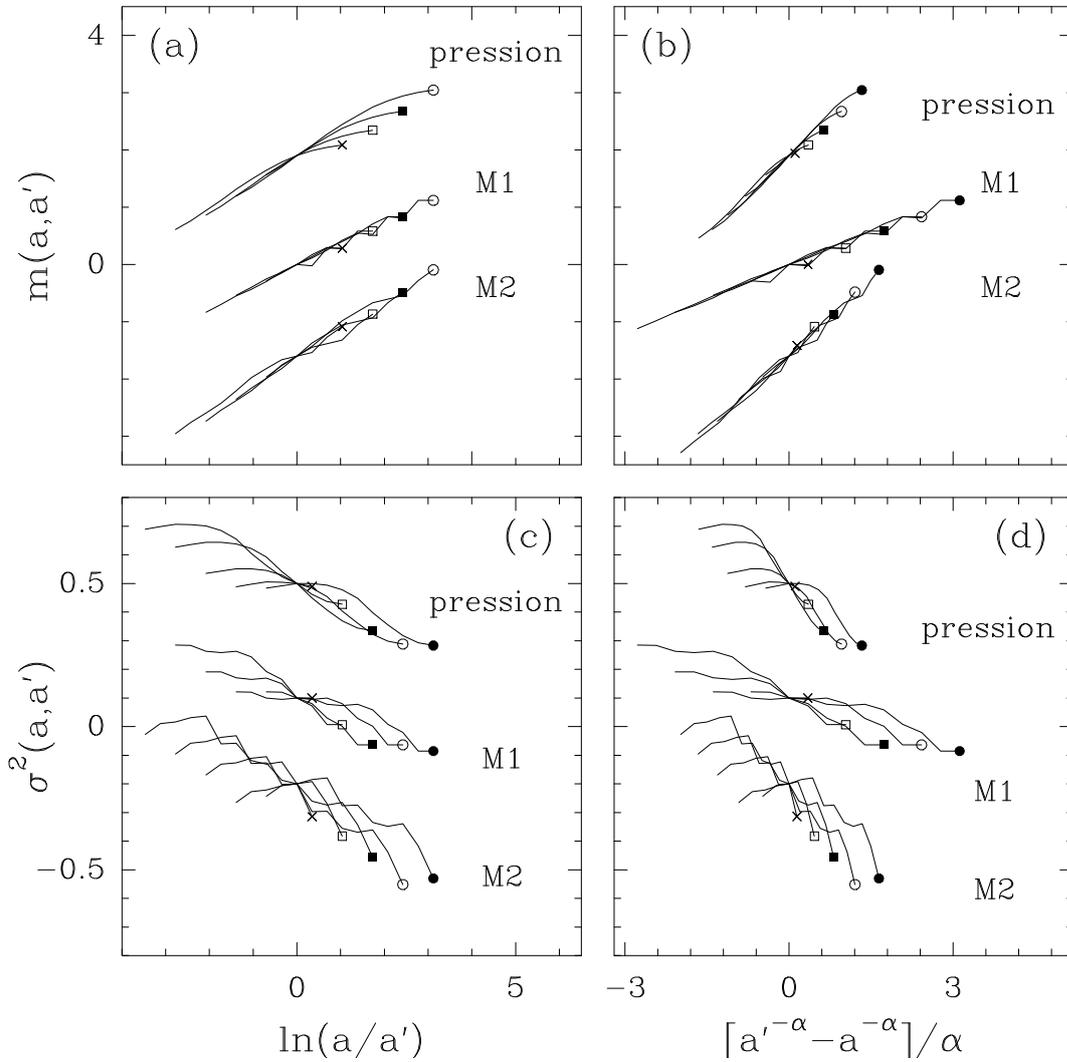


FIG. 5.21 – Comportement des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  pour le signal de pression total, le marais M1 et le marais M2 à des échelles comprises entre  $T_p$  et  $T_0$ . Les symboles correspondent aux valeurs suivantes de l'échelle de référence :  $a' = 2^7$  ( $\bullet$ ),  $2^8$  ( $\circ$ ),  $2^9$  ( $\blacksquare$ ),  $2^{10}$  ( $\square$ ) et  $2^{11}$  ( $\times$ ). L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . a)  $m(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . b)  $m(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$  (pression totale), 0 (M1) et 0.15 (M2). c)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a/a')$ . d)  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $[a'^{-\alpha} - a^{-\alpha}]/\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$  (pression totale), 0 (M1) et 0.15 (M2).

Sur la figure 5.21, nous avons représenté respectivement le comportement dans les échelles des quantités  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  pour des échelles  $a$  et  $a'$  comprises entre  $T_p$  et  $T_0$ . Les échelles de référence considérées sont  $a' = 2^7$  (symboles (●)),  $2^8$  (symboles (○)),  $2^9$  (symboles (■)),  $2^{10}$  (symboles (□)) et  $2^{11}$  (symboles (×)). Sur les figures 5.21a et 5.21c, nous avons représenté les courbes  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  en fonction de  $\ln(a'/a)$ . Les courbes obtenues pour le signal de pression global ne se confondent pas en une courbe unique. Qui plus est,  $m(a, a')$  présente une courbure nette qui ne s'estompe que si l'on suppose pertinente la dépendance dans les échelles donnée par l'équation (3.61). Comme l'indique la figure 5.21b,  $m(a, a')$  se comporte linéairement en fonction de  $(a'^{-\alpha} - a^{-\alpha})/\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$ . Par contre  $\sigma^2(a, a')$  ne se comporte pas linéairement en fonction de  $\ln(a'/a)$  et contrairement à  $m(a, a')$ , il n'existe pas de valeur de  $\alpha$  pour laquelle  $\sigma^2(a, a')$  soit linéaire en fonction de  $(a'^{-\alpha} - a^{-\alpha})/\alpha$  comme cela est illustré sur la figure 5.21d. Remarquons que le calcul de  $m(a, a')$  pour les phases marais M1 et M2 révèle désormais un comportement linéaire en fonction de  $\ln(a'/a)$  (Fig. 5.21a). Pour la phase M1, c'est-à-dire quand on considère seulement les lignes de maxima telles que  $a_* = a_0$ , aucune valeur de  $\alpha \neq 0$  ne permet pas d'obtenir un comportement linéaire aussi bien défini que celui observé en fonction de  $\ln(a'/a)$ . Nous avons donc reporté cette quantité en fonction de  $\ln(a'/a)$  sur la figure 5.21b. Pour la phase M2, c'est-à-dire pour les lignes de maxima ne vérifiant pas les équations (5.19), nous avons représenté sur la figure 5.21b,  $m(a, a')$  en fonction de  $(a'^{-\alpha} - a^{-\alpha})/\alpha$  avec  $\alpha = 0.15$ , valeur de  $\alpha$  pour laquelle un comportement linéaire est le plus clair. Par contre, pour ces deux définitions M1 et M2 du marais des fluctuations de pression,  $\sigma^2(a, a')$  ne se comporte pas linéairement et ceci ni en fonction de  $\ln(a'/a)$  (Fig. 5.21c), ni en fonction de  $(a'^{-\alpha} - a^{-\alpha})/\alpha$  en prenant pour  $\alpha$  la même valeur que celle utilisée pour la quantité  $m(a, a')$  correspondante (Fig. 5.21d), ceci simplement pour mettre en valeur la différence de comportement dans les échelles de ces deux quantités. Pour espérer regrouper sur une même droite les données obtenues pour  $\sigma^2(a, a')$ , il faudrait envisager des valeurs de  $\alpha$  anormalement grandes. Malgré toutes les limitations inhérentes à cette étude du comportement dans les échelles du propagateur, il ressort que pour des échelles comprises entre  $T_p$  et  $T_0$ , les filaments semblent être responsables de la non linéarité de  $m(a, a')$ . Par contre, la suppression des filaments de la statistique ne permet pas d'obtenir un même comportement dans les échelles pour  $m(a, a')$  et  $\sigma^2(a, a')$  et ceci même lorsqu'on admet la possibilité d'une brisure de l'invariance d'échelle du type de celle décrite par l'équation (3.61).

En conclusion de cette étude du propagateur du signal de pression, il ressort clairement

que même lorsqu'on prend le soin d'éliminer de la statistique les événements correspondant au passage d'un filament (jeune ou éclaté) sur le capteur, la statistique des fluctuations de pression enregistrées dans l'expérience de Couder et ses collaborateurs n'est pas compatible avec un processus de cascade abstraite auto-similaire et invariante d'échelle. Rappelons que nous avons abouti à une conclusion tout à fait identique lors de l'étude de la dissipation d'énergie dans le chapitre 4.

## 5.4 Etude statistique des filaments à l'aide de la transformation en ondelettes

### 5.4.1 Vitesse d'advection des filaments

Comme nous l'avons vu dans la section 5.2.3, l'échelle caractéristique  $a_*$ , estimée sur les lignes de maxima de la T.O. correspondant au passage d'un filament, est reliée à la largeur du coeur de celui-ci. Toutefois, cette largeur est une largeur temporelle qui ne correspond pas à la taille spatiale du coeur du filament mais plutôt au temps que le filament a mis pour passer de part et d'autre du capteur. On a simplement :

$$r_0 = r_0(a_*)|U_{adv}^f|, \quad (5.22)$$

où  $r_0(a_*) = a_*/1.58$  représente la taille caractéristique du filament de Burgers statique associé à l'échelle  $a_*$  (Fig. 5.6).  $U_{adv}^f$  représente la vitesse d'advection de ce filament. Pour déterminer cette vitesse, il nous faut donc avoir accès au champ de vitesse parallèle à la paroi. Couder et son équipe<sup>[121],[125]</sup> ont spécialement conçu une expérience pour pouvoir mesurer cette vitesse. Le montage expérimental est esquissé sur la figure 5.22 ; il est essentiellement constitué de deux capteurs de pression séparés d'une distance  $d$  et d'un fil chaud pour enregistrer la vitesse. Ce fil est placé perpendiculairement à la paroi entre les deux capteurs de pression, sur l'axe qui relie leur centre. Après étalonnage, ce fil mesure la quantité  $|U| = \sqrt{U_x^2 + U_z^2}$  avec  $|U_z| \ll |U_x|$ . Nous avons représenté sur les figures 5.23a et 5.23b, un échantillon respectif des signaux de pression et de vitesse enregistrés simultanément. Le signal de vitesse présente des décrochements brusques vers les valeurs nulles. Ces incidents s'expliquent par le fait que la sonde mesure le module de  $U$ . Or la mesure est effectuée dans la couche de cisaillement turbulente, c'est-à-dire dans une région où la vitesse d'advection change fréquemment de signe puisque la vitesse moyenne  $y$  est nulle. Ainsi à chaque fois que la vitesse change de signe, son module présente un décrochement vers la valeur  $|U| = 0$ . On peut remarquer sur les figures

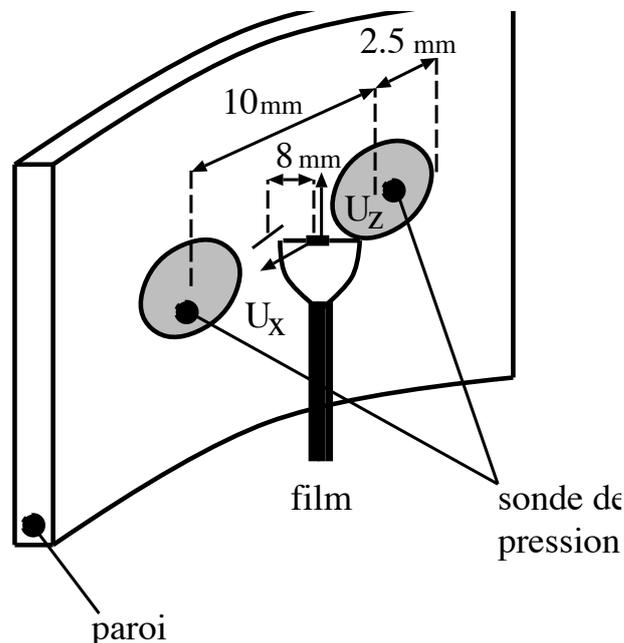


FIG. 5.22 – Montage expérimental utilisé par Couder et son équipe<sup>[121],[125]</sup> pour mesurer la vitesse d’advection des filaments et par là déterminer l’extension spatiale de leur coeur.

5.23 que contrairement au signal de pression, il est difficile d’identifier directement sur le signal de vitesse la signature d’évènements privilégiés pouvant être associés aux passages de filaments sur le fil.

Nous avons vu dans la section 5.2.3, qu’un filament est repéré par deux lignes de maxima lorsqu’on utilise la classe des ondelettes analytiques  $\psi_{(n)}^{(1)}$  possédant un seul moment nul. Sur l’une de ces lignes les coefficients en ondelettes sont positifs alors qu’ils sont négatifs sur l’autre. Nous nous limiterons dans la suite de cette section, à l’étude des lignes de maxima telles que  $T_\psi(a_*) < 0$ . Précisons que les résultats que nous allons ainsi présenter sont équivalents à ceux que l’on aurait obtenus en ne gardant que les lignes telles que  $T_\psi(a_*) > 0$ .

Cette mesure de la vitesse orthoradiale, nous permet de calculer la vitesse d’advection des filaments de différentes manières :

- On repère sur les deux signaux de pression issus des deux capteurs, les positions  $t_1$  et  $t_2$  où pointent les lignes de maxima correspondant au passage d’un même filament. La vitesse d’advection de ce filament peut être estimée soit trivialement par la relation  $|U_{adv}^f| = d/|t_2 - t_1|$ , soit en moyennant la vitesse enregistrée  $|U_{adv}^f| \approx$

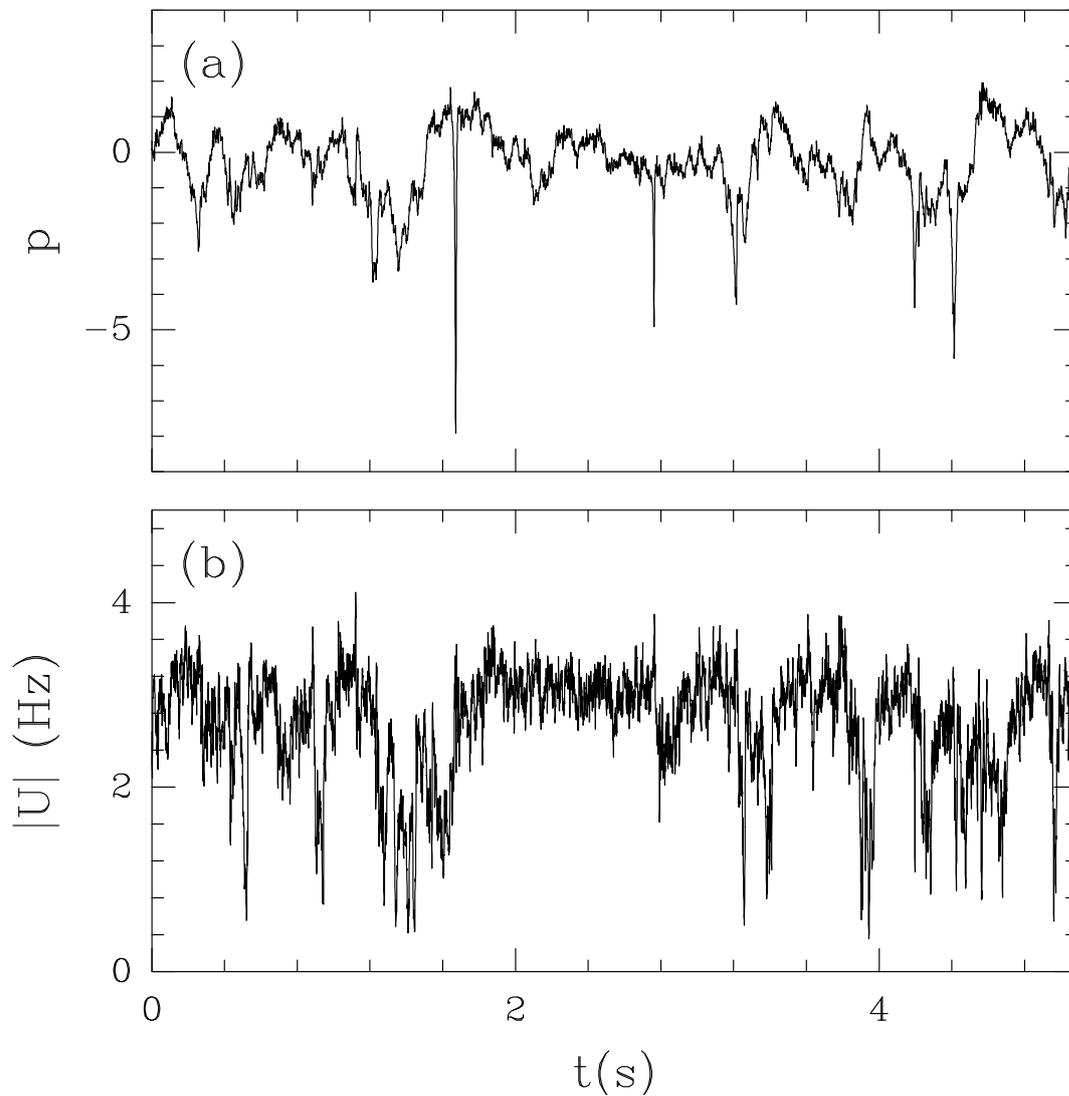


FIG. 5.23 – Signal de pression (a) et signal de vitesse (b) enregistrés simultanément par le second capteur de pression et le fil chaud illustrés dans le montage décrit dans la figure 5.22. Les décrochements vers les valeurs nulles du signal de vitesse  $|U|$  correspondent aux changements de signe de cette vitesse.

$\frac{1}{|t_2-t_1|} \int_{t_1}^{t_2} |U_{adv}(t)| dt$ , où  $|U_{adv}|$  correspond à la vitesse enregistrée par le fil chaud. Cette méthode qui repose sur la reconnaissance d'un même évènement sur deux signaux enregistrés par deux capteurs différents, est difficile à mettre en oeuvre. En effet, un filament peut évoluer dans le temps de manière importante et ce aussi bien structurellement que dynamiquement, entre son passage sur le premier capteur et son passage sur le deuxième capteur. De plus, ces filaments ne passent pas toujours le long de l'axe reliant les deux capteurs et peuvent ainsi être détectés par un seul des capteurs de pression et ne pas se manifester sur le deuxième comme sur le fil chaud. Dans ce cas là, la vitesse estimée ne correspond pas à la vitesse d'advection du filament et la taille de son coeur peut ainsi être arbitrairement sous-estimée.

- On peut aussi déterminer la vitesse d'advection en utilisant les renseignements obtenus par l'analyse en ondelettes d'un seul des deux signaux de pression. En effet, l'échelle  $a_*$  déterminée pour chaque filament est liée à la largeur temporelle des pics de dépression. La vitesse d'advection peut alors être estimée en moyennant le signal de vitesse sur un intervalle de taille  $a_*$  centré en  $t_1$ , position où pointe la ligne de maxima identifiant le filament. Les histogrammes des valeurs obtenues, à partir des lignes de maxima vérifiant  $a_* \neq a_0$  (symboles (o)) et à partir de celles vérifiant les équations (5.19) (symboles (•)) sont représentés sur la figure 5.24a. L'histogramme obtenu à partir des lignes telles que  $a_* \neq a_0$  est légèrement décalé vers les grandes valeurs de  $|U_{adv}^f|$  par rapport à l'histogramme des valeurs de la vitesse  $|U|$  représenté en ligne continue. Ceci est dû au fait que chacune des lignes de maxima considérées ne correspond pas forcément au passage d'un filament. Par contre, l'histogramme obtenu en gardant seulement les lignes vérifiant les équations (5.19), présente son maximum pour une valeur très proche de la vitesse de rotation des disques  $\Omega_0$  et a la même allure que l'histogramme du signal de vitesse. La représentation semi-logarithmique utilisée dans la figure 5.24b, permet néanmoins de différencier ces différents histogrammes. En effet, la distribution des vitesses d'advection des filaments, identifiés d'après la définition (5.19), décroît beaucoup plus rapidement aux faibles valeurs de  $|U_{adv}^f|$ , contrairement aux deux autres distributions qui admettent des valeurs de  $|U|$  très proches de 0. Ce résultat est assez intuitif car la probabilité de repérer un filament avec une vitesse d'advection petite est très faible.

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons comme définition de la vitesse d'advection d'un filament la relation suivante :

$$U_{adv}^f = \frac{1}{a_*} \int_{t_1-a_*/2}^{t_1+a_*/2} |U(t)| dt, \quad (5.23)$$

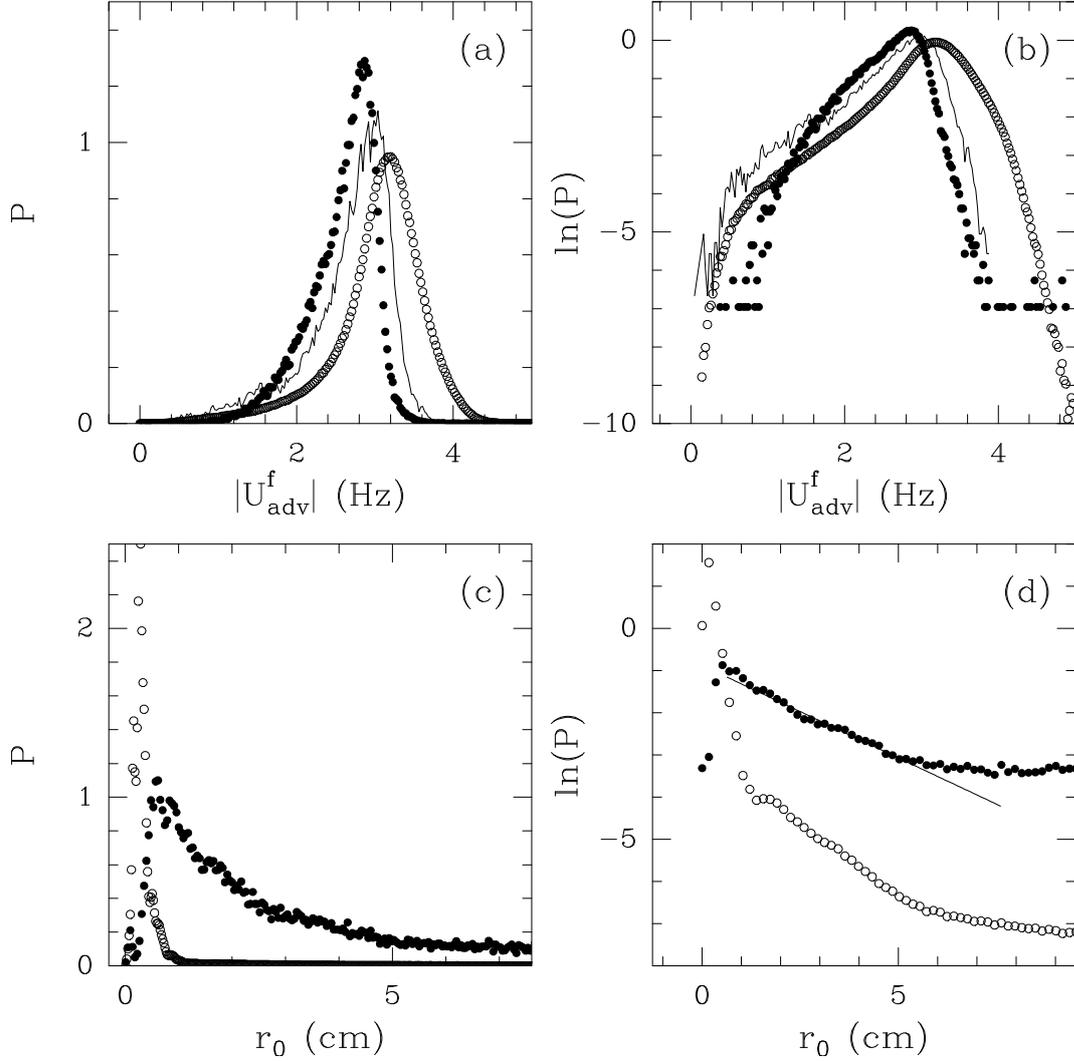


FIG. 5.24 – a) Histogrammes des valeurs de la vitesse d’advection des filaments estimée soit à partir des lignes de maxima de la T.O. vérifiant  $a_* \neq a_0$  ( $\circ$ ), soit à partir de celles vérifiant les équations (5.19) ( $\bullet$ ). La ligne continue représente l’histogramme des valeurs prises par le signal de vitesse. b) Représentation semi-logarithmique des histogrammes précédents. c) Histogrammes de la taille caractéristique  $r_0$  du coeur des filaments définie à partir des lignes de maxima vérifiant  $a_* \neq a_0$  ( $\circ$ ) et à partir de la définition (5.19) ( $\bullet$ ). d) Représentation semi-logarithmique des histogrammes rapportés en (c). La ligne continue représente la pente obtenue par régression linéaire sur la gamme  $1\text{ cm} < r_0 < 5\text{ cm}$ .

où  $t_1$  est la position où pointe la ligne de maxima identifiant le filament dans la représentation espace-échelles fournit par la T.O.

### 5.4.2 Taille spatiale du coeur des filaments

La donnée de la vitesse d'advection permet d'accéder à la taille spatiale  $r_0$  caractéristique du coeur du filament (Eq. (5.22)). Sur les figures 5.24c et 5.24d, nous avons représenté les histogrammes obtenus à partir des lignes de maxima vérifiant  $a_* \neq a_0$  (symboles (o)) et celles vérifiant les équations (5.19) (symboles (●)). L'histogramme obtenu avec les lignes de maxima telles que  $a_* \neq a_0$ , atteint son maximum pour une taille  $r_0 = 0.26$  cm, valeur deux fois plus petite que le rayon du capteur de pression. Cette courbe montre à nouveau qu'un grand nombre de lignes de maxima prises en compte ne correspondent pas à des filaments mais à des fluctuations symétriques pour lesquelles  $a_*$  est très faible. La deuxième définition beaucoup plus réaliste des filaments nous donne un histogramme très différent. Le maximum est atteint pour la valeur  $r_0 = 0.7$  cm, qui correspond à peu près au rayon du capteur de pression. Cet histogramme décroît alors très rapidement vers 0 pour les valeurs de  $r_0$  inférieures à cette taille de coupure. La représentation semi-logarithmique de ces histogrammes dans la figure 5.24d, met clairement en évidence un comportement exponentiel pour les valeurs de  $r_0$  comprises entre les valeurs 1 et 5 centimètres. Pour l'ensemble des lignes de maxima vérifiant les équations (5.19), la droite obtenue par régression linéaire (en ligne continue) a une pente égale à  $0.5 \text{ cm}^{-1}$ , qui correspond à une taille caractéristique  $r_0 = 2.00 + -0.02$  cm. Cette valeur est relativement importante puisqu'elle correspond à environ 80 fois l'échelle de Taylor  $\lambda \approx 0.025$  cm. Elle est aussi supérieure à l'estimation  $r_0 = 10\lambda$  obtenue par Couder et ses collaborateurs en utilisant la méthode de seuillage. Cette observation résulte de notre technique plus sophistiquée de détection des filaments qui permet de mieux identifier les filaments éclatés dont la taille caractéristique du coeur  $r_0$  (si sensé que l'on puisse encore parler de coeur) est beaucoup plus importante que celle du coeur des filaments jeunes. Remarquons que pour les valeurs  $r_0 > 8$  cm, ces histogrammes présentent des queues très allongées de pente quasiment nulle. Or l'existence de structures de taille aussi grande est impossible. L'étude locale de ces événements montre qu'il s'agit le plus souvent de lignes de maxima dont la valeur de  $a_*$  ne correspond pas à la taille caractéristique du coeur d'un filament mais plutôt à la distance qui sépare deux variations importantes de l'amplitude du signal de pression s'étalant sur des temps de l'ordre du temps de retournement.

### 5.4.3 Temps d'attente entre deux filaments

Parallèlement nous avons étudié la statistique des temps d'attente entre deux filaments successifs. Le logarithme de l'histogramme obtenu est représenté sur les figures 5.25a et 5.25b pour respectivement les filaments de taille de coeur  $r_0 < 6$  cm et pour ceux dont la taille  $1\text{cm} < r_0 < 6\text{cm}$ . Ces histogrammes présentent tous les deux un comportement exponentiel dans la gamme de temps comprise entre  $0.5\text{s} < \delta t < 5\text{s}$ . Le temps d'attente moyen,  $\langle \delta t \rangle \approx 0.7$  et  $1.45$  secondes respectivement, est très supérieur au temps de retournement de l'expérience  $T_0 = 0.34$  secondes. Il passe donc en moyenne sur les capteurs, un filament toutes les 2 à 4 périodes de rotation des disques. Cette fréquence de passage est nettement plus importante que celle enregistrée par Couder et son équipe par simple méthode de seuillage, à savoir environ un passage toutes les 50 périodes de rotation des disques. Cette observation est une évidence supplémentaire que notre méthode d'identification des filaments basée sur l'analyse en ondelettes permet de détecter beaucoup plus de filaments que la méthode de seuillage. En particulier, il est incontestable que nous repérons de façon beaucoup plus efficace les filaments éclatés qui ne correspondent pas forcément à des dépressions très importantes. Ce comportement exponentiel de l'histogramme des temps d'attente, condition nécessaire pour avoir une distribution de Poisson caractéristique d'évènements indépendants, suggère que la statistique des filaments pourrait être Poissonnienne. Pour nous en convaincre, nous avons effectué une étude détaillée de ces temps d'attente. Le principe de cette étude consiste à déterminer la probabilité d'obtenir  $n$  évènements dans une fenêtre temporelle de largeur  $\tau$ . Nous avons donc déplacé une fenêtre de largeur  $\tau$ , pas à pas sur tous le fichier de signal de pression, le pas de déplacement étant imposé par l'échantillonnage. A chaque pas, nous avons comptabilisé le nombre d'évènements  $n$  identifiés comme des filaments dans la fenêtre. Une fois le fichier parcouru, qui correspond à  $9 \cdot 10^6$  points, nous avons estimé la densité de probabilité d'obtenir  $n$  évènements dans la fenêtre de taille  $\tau$ . Nous avons répété cette opération pour différentes largeurs de fenêtre de manière à obtenir un ensemble de densités de probabilités  $P_\tau(n, \mu)$ . Chaque densité est comparée à la distribution de Poisson possédant la même moyenne  $\mu(\tau)$ , c'est-à-dire :

$$P_\tau^{Poisson}(n, \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} . \quad (5.24)$$

La comparaison avec les distributions de Poisson pour quatre densités expérimentales correspondant à des fenêtres temporelles  $\tau = 20T_0$  (symboles (●)),  $10T_0$  (symboles (○)),  $5T_0$  (symboles (■)) et  $2.5T_0$  (symboles (□)), est illustrée sur les figures 5.25c et 5.25d, respectivement pour les filaments tels que  $r_0 < 6$  cm et ceux tels que  $1\text{cm} < r_0 < 6\text{cm}$ . Dans les deux

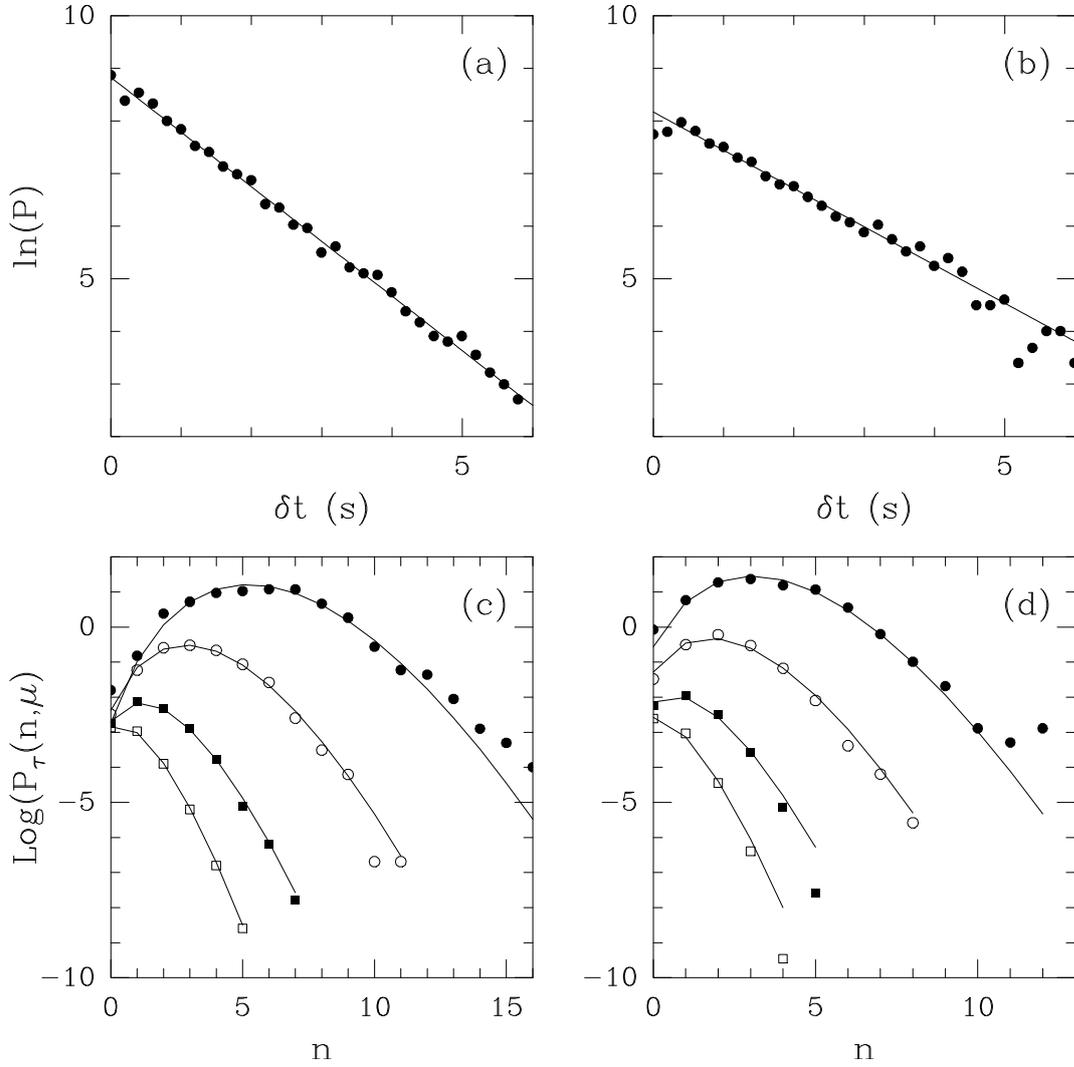


FIG. 5.25 – Logarithme de l’histogramme des temps d’attente entre (a) les filaments de taille caractéristique  $r_0 < 6\text{cm}$  et (b) les filaments de taille  $1\text{cm} < r_0 < 6\text{cm}$ . Ces courbes présentent un comportement linéaire très clair. La pente des droites obtenues par régression linéaire vaut respectivement  $-1.04$  et  $-0.73$ . Logarithme des histogrammes du nombre de filaments présents dans une fenêtre de taille  $\tau$  pour (c) les filaments de taille caractéristique  $r_0 < 6\text{cm}$  et (d) les filaments de taille  $1\text{cm} < r_0 < 6\text{cm}$ . Les différents symboles correspondent à  $\tau = 20T_0$  ( $\bullet$ ),  $10T_0$  ( $\circ$ ),  $5T_0$  ( $\blacksquare$ ) et  $2.5T_0$  ( $\square$ ). Les lignes continues représentent le logarithme de la distribution de Poisson de même moyenne que celle obtenue pour les différentes tailles de fenêtre.

cas, les histogrammes obtenus sont remarquablement modélisés par une distribution de Poisson de même moyenne et ceci quelle que soit la taille de la fenêtre considérée. Remarquons que l'accord est encore meilleur lorsque l'on supprime de la statistique les filaments très fins tels que  $r_0 < 2\text{cm}$ . Ceci n'est pas étonnant car, pour les brins de filament issus d'un même filament éclaté, on obtient toujours  $r_0 < 2\text{ cm}$ . Or, on peut raisonnablement supposer que ces brins sont corrélés. En fait, la contribution statistique de ces brins de filament est relativement faible. Cela provient essentiellement du fait que notre méthode de détection des filaments n'identifie généralement pas les fluctuations observées à l'intérieur d'un filament éclaté à des brins de filaments. Ainsi nous ne sommes pas confrontés au problème de l'existence de corrélations aux temps courts rencontré par Couder et ses collaborateurs<sup>[121],[125]</sup> (la statistique Poisson n'étant observée que pour des événements séparés par un temps  $\delta t > T_0$ ). Ce problème résulte du fait que la méthode de seuillage donne souvent plusieurs événements très rapprochés qui correspondent soit à des brins de filament qui appartiennent à la même structure et qui sont donc corrélés, soit à un même filament qui est passé plusieurs fois (va et vient) sur le même capteur de façon non indépendante.

Ainsi notre méthode d'identification des filaments à l'aide de l'analyse en ondelettes permet de détecter les filaments jeunes comme les filaments éclatés, sans distinction particulière si ce n'est que ces derniers correspondent généralement aux grandes tailles du coeur. Les fluctuations observées à l'intérieur des filaments éclatés ne sont généralement pas identifiées comme des (brins de) filaments. La statistique des temps de passage de ces filaments sur le capteur est Poissonnienne, confirmant l'indépendance de ces événements.

## 5.5 Corrélations entre les signaux de vitesse et de pression

En utilisant le même montage que précédemment mais en plaçant le fil chaud, non plus perpendiculairement à la paroi, mais parallèlement, on peut aussi mesurer la vitesse  $|u| = \sqrt{U_y^2 + U_z^2}$ . Comme la mesure est faite très proche de la paroi, on a  $U_y \sim 0$ . Si on suppose que les filaments sont perpendiculaires à la paroi, ce qui semble visuellement être le cas, alors la vitesse mesurée correspond à la vitesse orthoradiale du filament  $|u| = |u_\phi|$ . Sur la figure 5.26a, nous avons représenté une partie du signal de vitesse obtenu. Ce signal qui est très chahuté, a une moyenne plus faible et ne présente pas de décrochement vers les valeurs nulles du type de ceux observés dans le signal de vitesse mesurée avec le fil

chaud positionné perpendiculairement à la paroi (Fig. (5.23b)). Sur la figure 5.26b, nous avons représenté le spectre d'énergie du signal, calculé à partir de 540 signaux de 32768 points ( $\sim 40T_0$ ), en indiquant les positions respectives de la fréquence d'entraînement ( $\Omega_0$ ) et de la fréquence de passage des pales ( $\Omega_p$ ). Ce spectre d'énergie présente deux comportements en loi de puissance bien distincts. Dans la gamme de fréquences  $\Omega_0 < f < \Omega_p$ , l'exposant spectral (Eq. (2.47)) est estimé égal à  $\beta = 1.06$ . Par contre à haute fréquence  $f > \Omega_p$ , l'exposant spectral mesuré est plus important  $\beta = 1.41$ . Cette dernière valeur est néanmoins très éloignée de la valeur  $5/3$  prédite par Kolmogorov (K41). Cette différence peut s'expliquer de différentes façons.

- Par un manque d'isotropie et d'homogénéité du flot : en effet la mesure est faite très proche de la paroi, dans la couche de cisaillement qui est très fine. Il est important de mentionner qu'à l'extérieur de cette couche, le mouvement est peu turbulent comparativement à la nature du flot à l'intérieur de la couche.
- Par l'absence de flot moyen. Dans cette configuration expérimentale, il n'existe pas de flot moyen. L'hypothèse de Taylor ne peut donc être appliquée et l'enregistrement temporel ne peut pas être identifié au champ spatial dont le spectre d'énergie est supposé se comporter en  $k^{-5/3}$ , d'après l'hypothèse de Kolmogorov. Pour pouvoir extraire le champ spatial des données expérimentales dans ce genre de configuration, Pinton *et al*[273] ont proposé une technique de rééchantillonnage qui permet de retrouver des résultats en accord avec ceux prévus par l'hypothèse K41.
- Par la présence d'un très grand nombre de filaments qui, comme nous allons le voir, sont responsables de la présence de fortes singularités dans le signal de vitesse.

Toutes ces considérations montrent qu'il n'est pas utile d'étudier de manière statistique le comportement dans les échelles de ce champ de vitesse, puisque aucune information pertinente ne pourra être obtenue sur les fluctuations du champ spatial. Nous nous proposons donc de nous limiter à l'étude locale des singularités induites par le passage d'un filament sur le fil.

### 5.5.1 Vitesse orthoradiale du vortex de Burgers

Pour un vortex de Burgers, la vitesse orthoradiale s'écrit sous la forme (Eq. (5.14)) :

$$u_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - e^{-(r/2r_0)^2}), \quad (5.25)$$

où  $\Gamma = 2\pi u_0 r_0$  correspond à la circulation du vortex. Sur la figure 5.27a, nous avons représenté cette vitesse en ligne discontinue ainsi que son module (ligne continue). Le

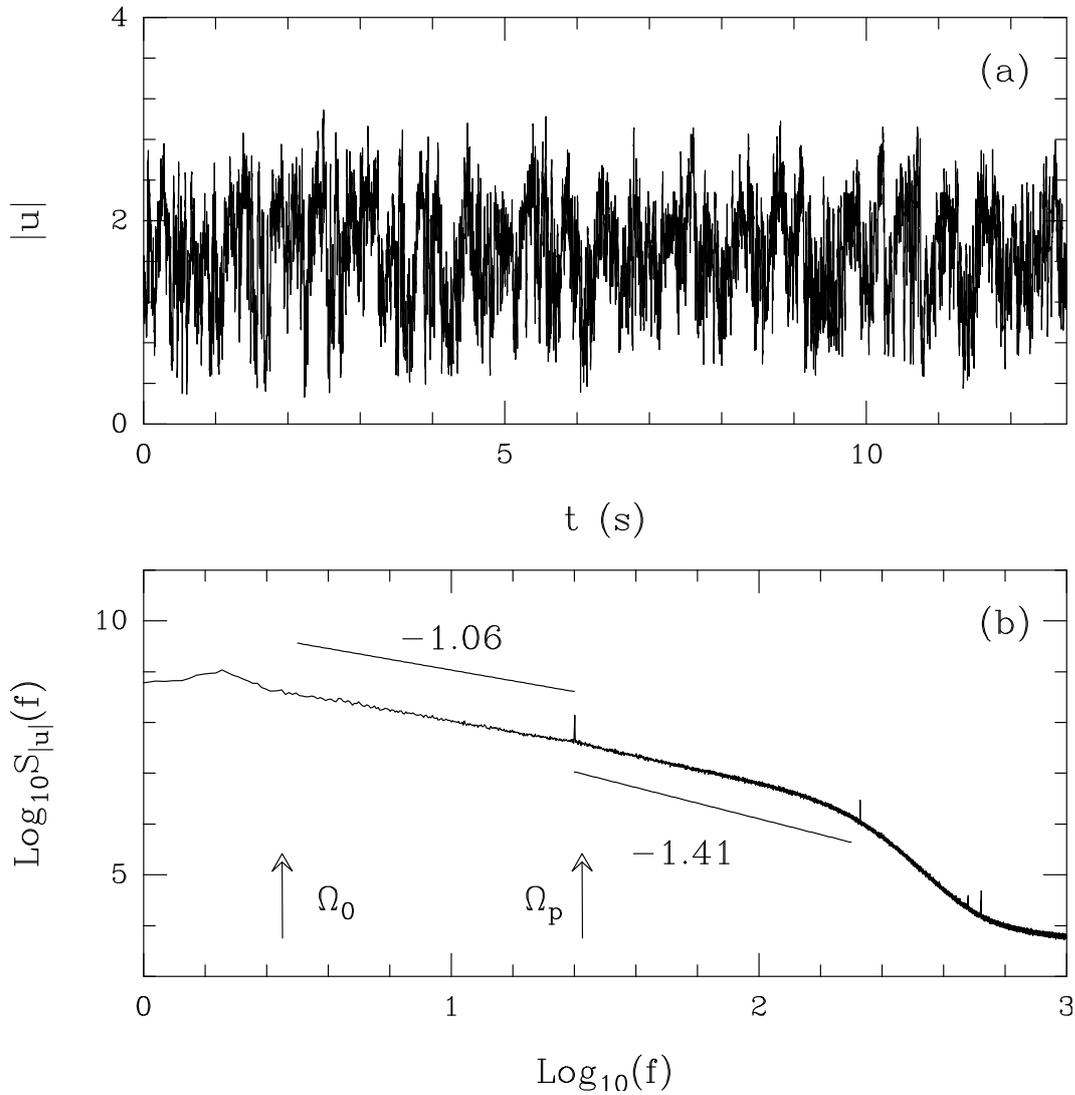


FIG. 5.26 – a) Signal de vitesse orthoradiale. b) Spectre de densité d'énergie correspondant. Deux comportements en loi de puissance différents sont clairement visibles : l'exposant spectral  $\beta = 1.06$  est obtenu pour les fréquences comprises entre la fréquence d'entraînement ( $\Omega_0$ ) et la fréquence de passage des pales ( $\Omega_p$ ) ; pour les fréquences supérieures à  $\Omega_p$ , on obtient par contre une valeur plus importante  $\beta = 1.41$ .

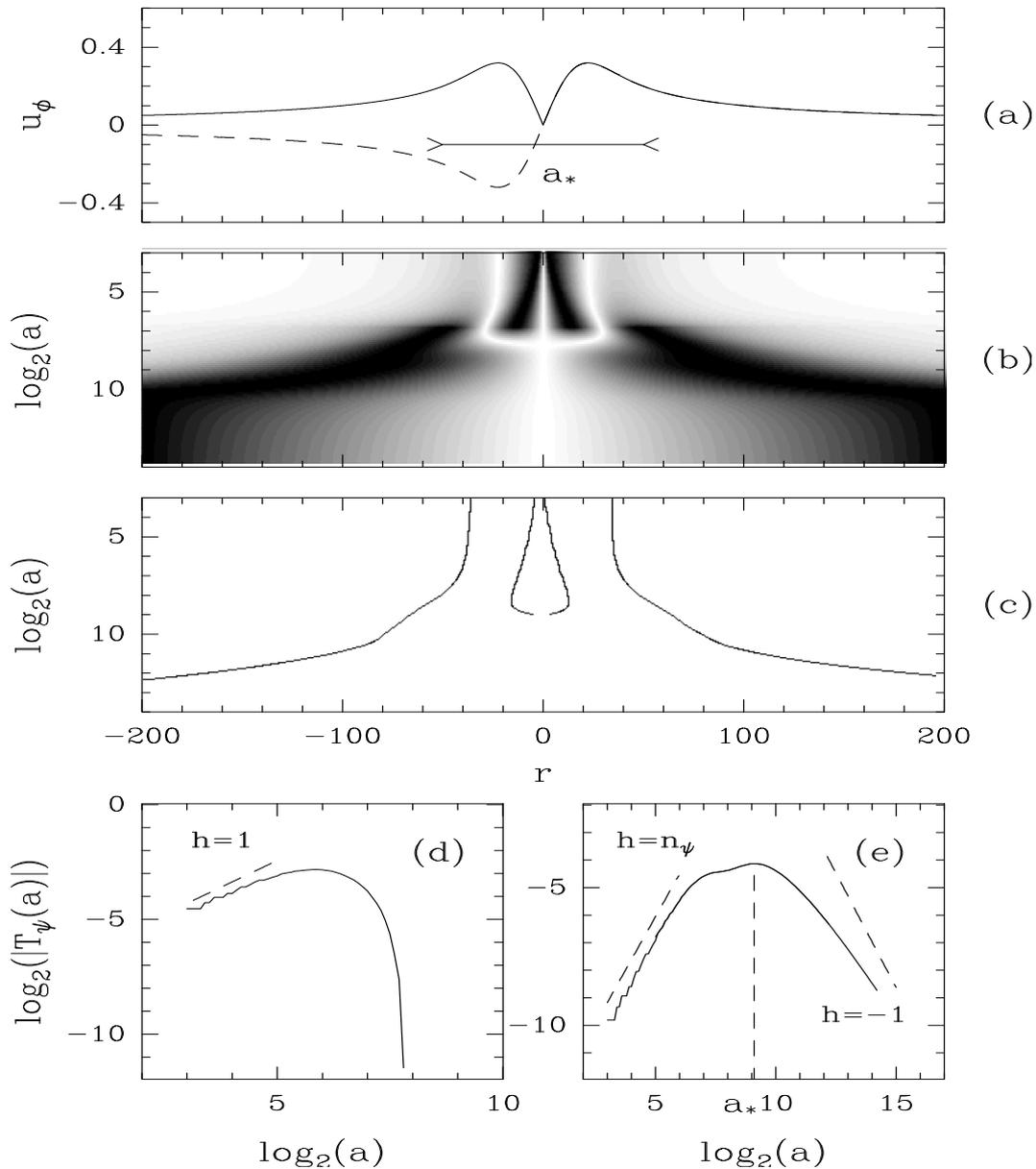


FIG. 5.27 – a) Vitesse orthoradiale du filament de Burgers (ligne en pointillés) et sa valeur absolue (ligne continue). b) Transformée en ondelettes codée en 32 niveaux de gris, du blanc ( $|T_\psi(r,a)| = 0$ ) au noir ( $|T_\psi(r,a)| = \max_r(|T_\psi(r,a)|)$ ). L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . c) Squelette de la T.O. défini par les lignes de maxima correspondantes. d) Comportement des coefficients en ondelettes le long des lignes de maxima pointant vers 0. e) Comportement de ces coefficients le long des deux autres lignes de maxima. Les paramètres utilisés sont  $u_0 = 1$  et  $r_0 = 10$ .

module admet une singularité d'exposant de Hölder  $h = 1$  en  $r = 0$ , qui n'est pas présente dans  $u_\phi$  et qui est artificiellement introduite par le fait que l'on prend la valeur absolue de  $u_\phi$ . Sur les figures 5.27b et 5.27c, sont représentés respectivement la transformée en ondelettes de  $|u_\phi|$  et l'ensemble des lignes de maxima définissant son squelette. L'ondelette analysatrice utilisée est  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Le long des deux lignes centrales qui pointent vers la singularité artificielle localisée en 0, les coefficients en ondelettes ont un comportement dans les échelles identique. Ce comportement est présenté en représentation logarithmique sur la figure 5.27d. A petite échelle, la pente obtenue est proche de la valeur  $h = 1$ . Mais dès que l'échelle  $a$  devient supérieure à  $2^6$ , ces coefficients diminuent très rapidement vers  $-\infty$ , conséquence de l'annulation des coefficients en ondelettes due à la symétrie de la fonction étudiée par rapport à  $r = 0$ . Les deux lignes de maxima extérieures, délimitant le coeur du filament, correspondent aussi à un même comportement des coefficients en ondelettes en fonction des échelles. Ce comportement est illustré dans la figure 5.27e. Aux petites échelles, on obtient un comportement en loi de puissance d'exposant  $n_\psi$  où  $n_\psi$  est le nombre de moments nuls de l'ondelette analysatrice. Par contre, pour des échelles supérieures à une certaine taille caractéristique  $a_* \approx 10r_0$ , les coefficients en ondelettes cessent de croître lorsqu'on monte dans les échelles pour finalement décroître à grande échelle avec un exposant  $h \approx -1$ . Ainsi, sur le module de la vitesse orthoradiale, comme sur la pression (Fig. 5.5), un vortex de Burgers se comporte à grande échelle comme une distribution de Dirac caractérisée par un exposant de Hölder  $h = -1$ . Toutefois, il est important de remarquer que la taille  $r_0$  du coeur du filament est quantitativement mieux approchée par l'échelle caractéristique  $a_*$  sur le signal de pression ( $a_* = 1.58r_0$ ) que sur le module de la vitesse orthoradiale ( $a_* \approx 10r_0$ ). Le fait qu'il faille aller à beaucoup plus grande échelle pour pouvoir mesurer un exposant de Hölder négatif sur le signal de vitesse orthoradiale et donc identifier les filaments, est incontestablement un handicap important pour notre méthode de détection.

*Remarque :* Le fait de mesurer expérimentalement la valeur absolue de la vitesse orthoradiale engendre la présence de singularités artificielles d'exposant  $h = 1$  qui vont perturber le comportement dans les échelles du spectre de Fourier et des fonctions de partition mises en jeu dans la description multifractale.

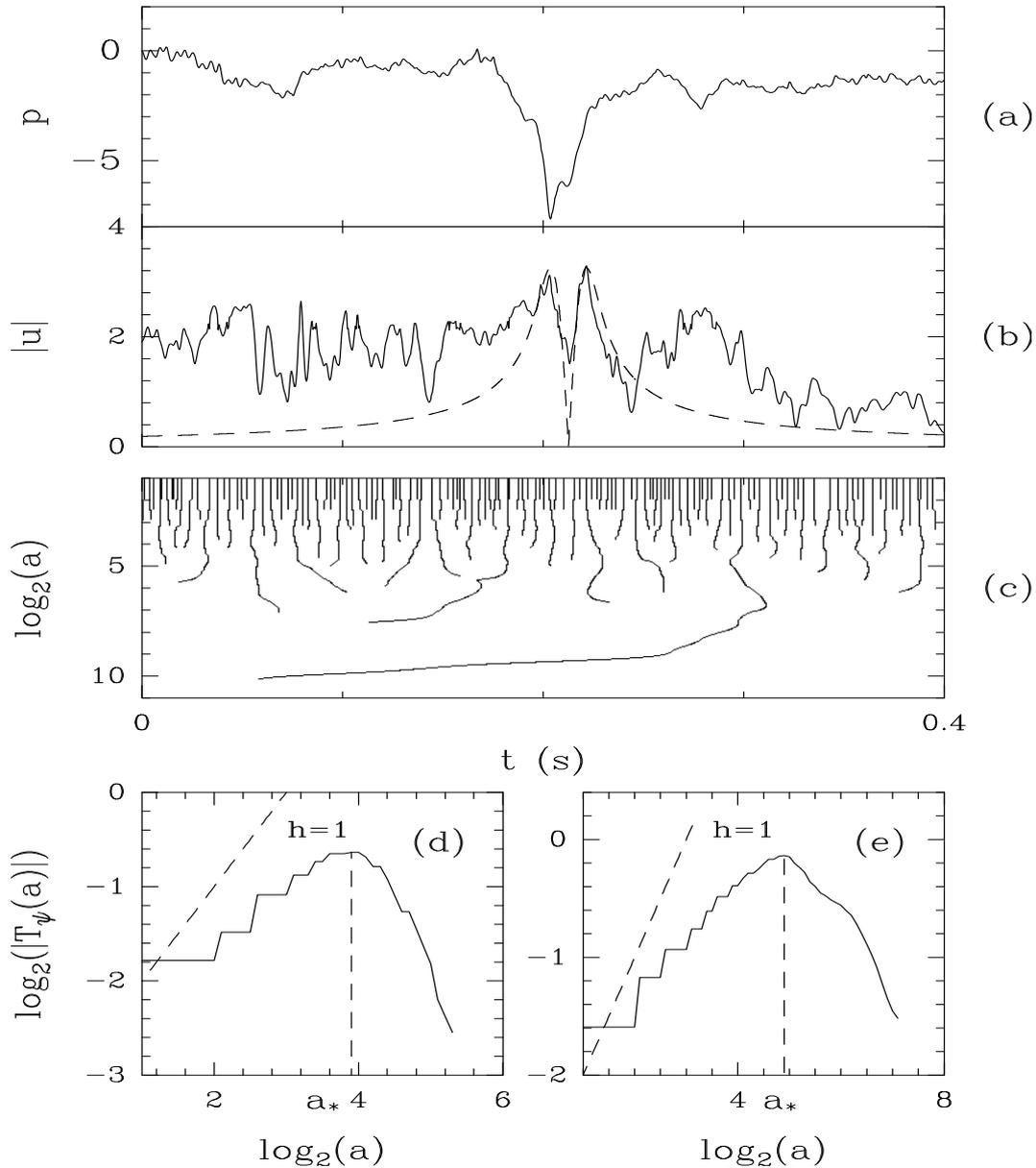


FIG. 5.28 – Comparaison du signal de vitesse avec le profil théorique du vortex de Burgers. a) Signal de pression présentant un pic de dépression caractéristique du passage d'un filament sur le capteur. b) Signal de vitesse correspondant (ligne continue) comparé au profil de vitesse  $|u_\phi|$  du vortex de Burgers (ligne discontinue). c) Squelette de la T.O. du signal de vitesse. L'ondelette analysatrice utilisée est l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . d) et e) représentent le comportement des coefficients en ondelettes le long des deux lignes de maxima correspondant au filament.

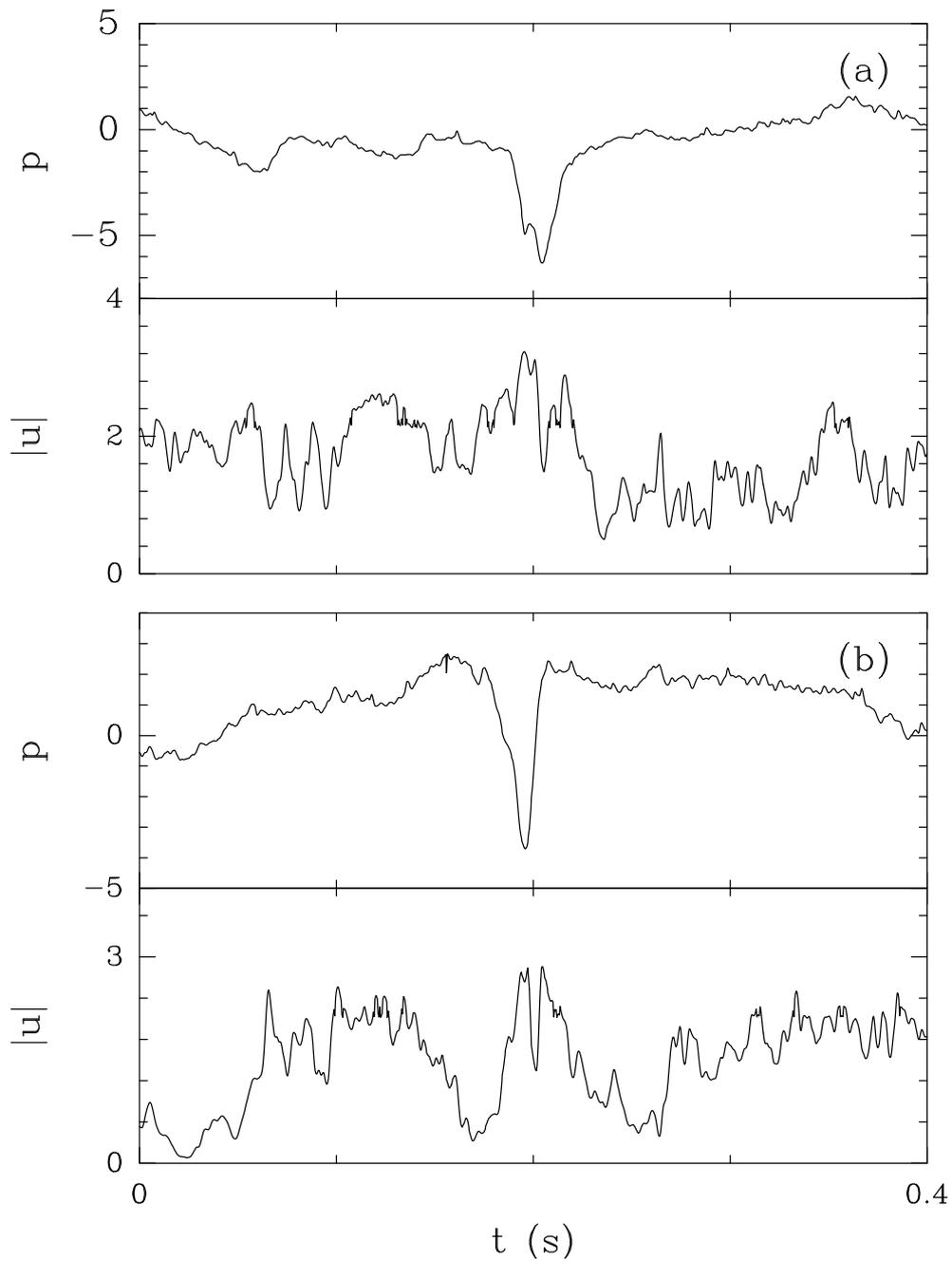


FIG. 5.29 – Deux enregistrements simultanés de pression et de vitesse correspondant aux passages de deux filaments. Les deux signaux de vitesse présentent un profil similaire (bien que bruité) au profil de vitesse théorique du vortex de Burgers (Fig. 5.27a).

## 5.5.2 Profil expérimental de la vitesse orthoradiale d'un filament

Le montage expérimental qui offre la possibilité d'enregistrer simultanément la pression et la vitesse orthoradiale, permet, à partir du diagnostic sur le signal de pression, d'identifier sur le signal de vitesse le passage d'un filament sur le fil chaud. Sur la figure 5.28a, nous avons représenté une partie du signal de pression comportant un pic de dépression caractéristique du passage d'un filament sur le capteur. Sur la figure 5.28b, nous avons comparé le signal de vitesse correspondant (ligne continue) avec le profil du module de la vitesse orthoradiale du vortex de Burgers (ligne discontinue). Pour ajuster le profil théorique au relevé expérimental, nous avons fixé les valeurs des paramètres que sont la taille et la vitesse maximale périphérique, aux valeurs mesurées dans le signal expérimental de vitesse. La forme théorique du module de la vitesse orthoradiale du vortex de Burgers et le profil expérimental sont similaires. Toutefois, au coeur du tourbillon,  $|u_\phi|$  devrait être nulle ce qui apparemment est un effet qui échappe à la résolution expérimentale. Le centre du profil théorique présente donc une singularité qui n'est pas détectée à cause de la taille finie de la sonde. Cependant, ceci n'est pas trop grave puisque nous avons vu dans la section précédente que cette singularité était artificiellement introduite par le fait que l'on mesure le module de  $u_\phi$  et non pas la vitesse orthoradiale elle-même. D'autre part, il faut remarquer que la sonde prend aussi en compte la composante radiale de la vitesse qui, même proche de la paroi où elle est négligeable, n'est pas exactement nulle. L'existence de cette composante peut être associée à l'écoulement secondaire de couche limite créé par la rotation du filament sur la paroi du cylindre. Cet écoulement correspond à une aspiration du fluide dans l'axe du filament.

L'accord entre le profil théorique et le signal de vitesse montre que la signature des filaments est clairement identifiable comme un profil de tourbillon visqueux. La question qui se pose est donc de savoir si l'analyse locale espace-échelle fournie par la transformation en ondelettes permet d'identifier le passage d'un filament sur le fil chaud. Nous avons représenté sur la figure 5.28c, l'ensemble des lignes de maxima de la T.O. du signal de vitesse calculée avec l'ondelette analysatrice  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Le comportement dans les échelles des coefficients en ondelettes le long des deux lignes de maxima permettant d'identifier le passage d'un filament est illustré sur les figures 5.28d et 5.28e. Ces courbes révèlent un comportement en loi de puissance aux petites échelles avec un exposant  $h \approx 0.4-0.5$ , caractéristique des valeurs enregistrées pour l'exposant de Hölder du marais des fluctuations de vitesse. Au dessus d'une certaine échelle caractéristique  $a_*$ , la T.O. décroît, signature d'un

changement de signe de l'exposant  $h$  ( $h < -1$  pour la figure 5.28d et  $-1 < h < -0.6$  pour la figure 5.28e). L'échelle caractéristique  $a_*$  est respectivement égale à  $2^4$  et  $2^5$ , valeurs légèrement inférieures à la période de passage des pales. Une étude locale systématique du comportement des coefficients en ondelettes le long des lignes de maxima confirme que ce comportement est assez répandu mais que malheureusement il ne correspond pas toujours clairement au passage d'un filament. Cependant, pour tous les filaments jeunes parfaitement identifiés sur le signal de pression, le profil de la vitesse est le même et correspond au profil théorique du vortex de Burgers. Par contre, que ce soit pour les filaments jeunes ou éclatés, la taille temporelle caractéristique  $a_*$  obtenue à partir du profil expérimental de vitesse est toujours de l'ordre du temps de passage des pales. Dans l'analyse multifractale du signal de vitesse, on peut donc raisonnablement s'attendre à ce que les filaments n'affectent le comportement dans les échelles des fonctions de partition (et donc l'estimation des spectres multifractals) qu'à des échelles suffisamment grandes.

Nous avons représenté sur les figures 5.29a et 5.29b, deux échantillons du signal de pression où l'on voit clairement une dépression caractéristique du passage d'un filament. Les signaux de vitesse correspondants présentent tous les deux un profil qui ressemble au profil théorique (Fig. 5.27a) légèrement bruité. Comme précédemment, l'étude du comportement dans les échelles des coefficients en ondelettes le long des lignes de maxima correspondant à ces profils, nous donne des échelles caractéristiques  $a_*$  de l'ordre de  $T_p$ . Nous nous devons toutefois de mentionner que la plupart des filaments jeunes et très fins que l'on peut détecter sur le signal de pression ont en fait un profil de vitesse qui est souvent "noyé" parmi les autres fluctuations et donc difficile à distinguer par une étude locale espace-échelles.

### 5.5.3 Corrélations entre les exposants de Holder des signaux de vitesse et de pression : application du formalisme multifractal grand-canonique

Dans cette section, nous allons appliquer le formalisme multifractal grand-canonique présenté dans la section 2.6, aux signaux de pression et de vitesse. La stratégie consiste à calculer les fonctions de partition définies par les équations (2.123), c'est-à-dire :

$$h_v(p, q, a) = \int \hat{T}_{\psi_1\psi_2}(t, a, p, q) \log(|T_{\psi_1}[v](t, a)|) dt , \quad (5.26)$$

et

$$h_p(p, q, a) = \int \hat{T}_{\psi_1\psi_2}(t, a, p, q) \log(|T_{\psi_2}[p](t, a)|) dt , \quad (5.27)$$

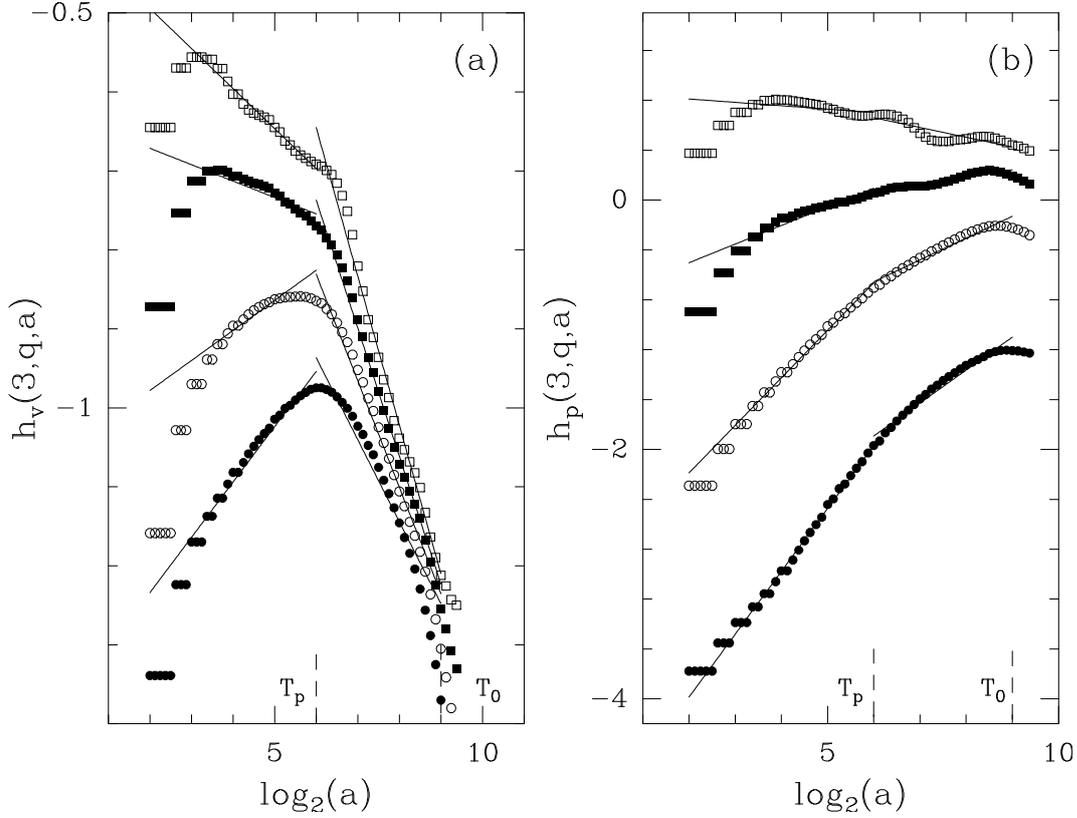


FIG. 5.30 – a) Fonctions de partition grand-canonique  $h_v(3, q, a)$  (Eq. (5.26)). b) Fonctions de partition grand-canonique  $h_p(3, q, a)$  (Eq. (5.27)). Les différents symboles correspondent aux valeurs suivantes de  $q$  :  $q = 0$  ( $\bullet$ ),  $q = 1$  ( $\circ$ ),  $q = 2$  ( $\blacksquare$ ),  $q = 3$  ( $\square$ ). Les lignes continues correspondent aux droites obtenues par régression linéaire à grande échelle ( $T_p < a < T_0$ ) et à petite échelle ( $a < T_p$ ).

où  $\hat{T}_{\psi_1\psi_2}(t, a, p, q) = (|T_{\psi_1}[v](t, a)|^p |T_{\psi_2}[p](t, a)|^q) / Z(p, q, a)$  est l'équivalent d'un poids de Boltzmann ( $Z(p, q, a)$  est définie dans l'équation (2.118)). Les résultats du calcul des fonctions de partition  $h_v(p, q, a)$  et  $h_p(p, q, a)$  sont respectivement représentés en fonction de  $\log_2(a)$  sur les figures 5.30a et 5.30b. Sur ces figures nous avons fixé la valeur de  $p = 3$  et les différents symboles correspondent aux valeurs de  $q$  suivantes :  $q = 0$  (symboles ( $\bullet$ )), 1 (symboles ( $\circ$ )), 2 (symboles ( $\blacksquare$ )) et 3 (symboles ( $\square$ )). Les ondelettes analysatrices utilisées sont  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_{(3)}^{(1)}$ . Ces figures montrent clairement que la pente de ces courbes diminue pour devenir négative quand la valeur de  $q$  augmente (où  $q$  est le paramètre associé aux coefficients en ondelettes de la pression), et ceci quelle que soit la gamme d'échelles considérée. Ainsi, les singularités fortes du signal de vitesse (qui contribuent d'autant plus

dans les fonctions de partition que la valeur de  $p > 0$  est importante) semblent donc être fortement corrélées avec les singularités fortes du signal de pression (qui se manifestent pour les valeurs de  $q > 0$  importantes). Remarquons que pour  $q = 0$ , les fonctions obtenues sont en fait équivalentes aux fonctions de partition canoniques de la vitesse (Eq. (2.98)). Nous avons estimé par régression linéaire la pente de ces courbes, dont la valeur correspond aux exposants de Hölder  $h_v(p, q)$  et  $h_p(p, q)$  (respectivement pour  $h_v(p, q, a)$  et  $h_p(p, q, a)$ ), en prenant successivement en considération les échelles inférieures à la période de passage des pales ( $T_p = 1/\Omega_p$ ), puis celles comprises entre  $T_p$  et le temps de retournement ( $T_0$ ). Les estimations obtenues sont représentées sur les figures 5.30a et 5.30b en lignes continues. Nous avons reporté les résultats obtenus pour  $h_v(p, q)$  à petite échelle et à grande échelle respectivement sur les figures 5.31a et 5.31c. Les symboles correspondent aux différentes valeurs de  $p$  considérées, c'est-à-dire  $p = 1$  (symboles (●)), 2 (symboles (○)), 3 (symboles (■)) et 4 (symboles (□)). Quelle que soit la valeur de  $p$  considérée, l'exposant de Hölder  $h_v(p, q)$  associé à la vitesse diminue clairement en fonction de  $q$  pour atteindre des valeurs proches de zéro voire négatives. De même pour une valeur de  $q$  donnée,  $h_v(p, q)$  diminue en fonction de  $p$ . De la même manière, nous avons représenté sur les figures 5.31b et 5.31d, les valeurs de l'exposant  $h_p(p, q)$  associé à la pression obtenues respectivement à petite et à grande échelles en gardant les mêmes symboles. A nouveau, quelle que soit la valeur de  $p$  considérée, l'exposant  $h(p, q)$  est une fonction décroissante de  $q$ . De même pour une valeur de  $q$  fixée,  $h_p(p, q)$  décroît en fonction de  $p$ . Aux petites échelles ces résultats semblent suggérer que les singularités les plus fortes du marais des fluctuations de la pression sont fortement corrélées aux singularités les plus fortes du marais des fluctuations de la vitesse. A grande échelle, où les exposants  $h_v(p, q)$  et  $h_p(p, q)$  peuvent atteindre des valeurs significativement négatives ( $h < -0.2$ ) lorsque pour  $p$  et  $q (> 0)$  sont suffisamment grands, ces résultats semblent indiquer que les filaments sont également responsables des comportements les plus singuliers observés dans le signal de vitesse comme dans le signal de pression.

### Remarques

- Les exposants de Hölder de la vitesse  $h_v(p)$  obtenus en fixant  $q = 0$  dans  $h_v(p, q, a)$  (Eq. (5.26)) sont très inférieurs à ceux obtenus sur les signaux de Modane et de turbulence de jet, ce qui pourrait être une indication que nous n'avons pas affaire dans cette expérience à la même turbulence que dans les systèmes ouverts. L'hypothèse d'isotropie semble tout particulièrement être sujette à caution.
- La présence de filaments qui admettent une échelle caractéristique  $a_*$  finie, af-

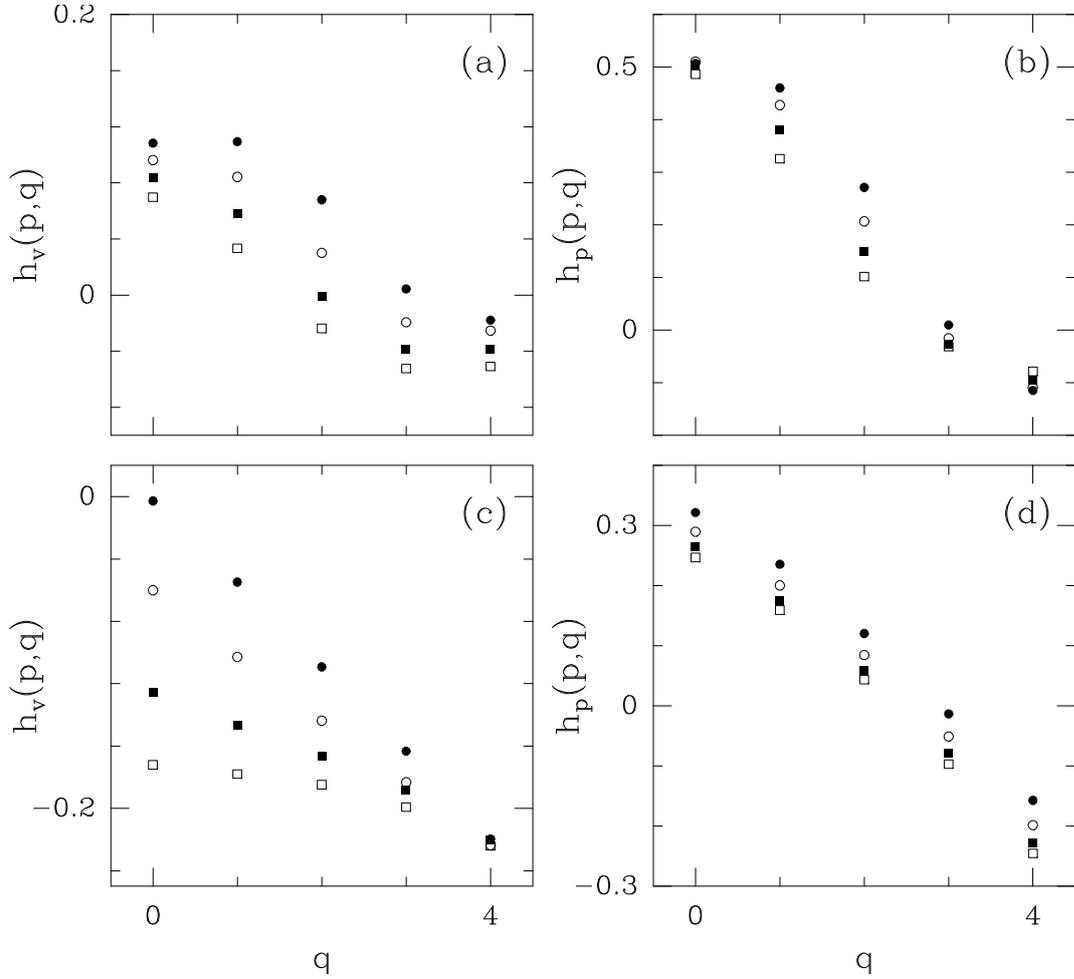


FIG. 5.31 – a) et c) Fonctions  $h_v(p, q) = \partial \log_2 h_v(p, q, a) / \partial \log_2 a$  en fonction de  $q$ . b) et d) Fonctions  $h_p(p, q) = \partial \log_2 h_p(p, q, a) / \partial \log_2 a$  en fonction de  $q$ . Les figures (a) et (b) correspondent aux valeurs obtenues par régression linéaire à petite échelle ( $a < T_p$ ). Les figures (c) et (d) correspondent aux valeurs obtenues à grande échelle ( $T_p < a < T_0$ ). Les différents symboles correspondent aux valeurs suivantes de  $p$  :  $p = 0$  ( $\bullet$ ),  $1$  ( $\circ$ ),  $2$  ( $\blacksquare$ ) et  $3$  ( $\square$ ).

fecte dramatiquement le comportement théorique en loi de puissance des fonctions  $h(p, q, a)$ . La détermination des exposants de Hölder  $h(p, q)$  sur les deux gammes d'échelles précédemment définies pour prendre en compte cet effet de taille finie des filaments, est donc sujette à caution et n'est présentée que pour montrer les corrélations existant dans le comportement des fonctions de partitions  $h_v(p, q, a)$  et  $h_p(p, q, a)$ .

En conclusion, cette étude des corrélations existant entre les exposants de Hölder du signal de vitesse et du signal de pression montre de façon très nette que les filaments de pression sont pour une grande part responsables des plus fortes singularités du signal de vitesse. Par contre, l'absence de flot moyen ainsi que le manque d'isotropie de ce flot ne nous permettent pas d'étendre ces conclusions au champ spatial de la vitesse.

## 5.6 Discussion

L'étude de la signature des filaments de pression sur la représentation en ondelettes, nous a permis de distinguer les filaments des fluctuations ambiantes du signal. Cette identification résulte de la définition de deux sous-squelettes de la T.O. correspondant respectivement aux filaments et au "marais" des fluctuations de pression. L'étude respective de ces sous-squelettes nous a permis de révéler un certain nombre de propriétés intéressantes et importantes.

- L'étude des propriétés d'invariance d'échelle du squelette de la T.O. du signal de pression et de son sous-squelette correspondant au marais des fluctuations, montre que les filaments ne sont pas les seuls responsables du phénomène d'intermittence (tout au moins leur contribution statistique ne suffit pas à rendre compte totalement de ce phénomène).
- Le propagateur extrait du signal de pression révèle que ce signal n'est ni auto-similaire, ni invariant d'échelle et qu'il ne semble pas découler d'un processus de cascade.
- Le propagateur obtenu à partir du sous-squelette correspondant au marais des fluctuations de pression, est quant à lui très proche d'une forme Gaussienne dont les paramètres, à savoir la moyenne et la variance, se comportent différemment et anormalement en fonction des échelles. Le marais des fluctuations de pression n'est donc pas invariant d'échelle. Les filaments apparaissent toutefois être responsables de l'écart à une statistique log-normale des maxima du module de la T.O. du signal de

pression.

- L'étude du sous-squelette correspondant aux filaments, nous a permis de montrer que les évènements détectés ne sont pas corrélés et suivent une loi de Poisson. D'autre part, la taille spatiale caractéristique du coeur des filaments (jeunes comme éclatés) est très supérieure à l'échelle de Taylor.
- L'étude simultanée des champs de vitesse et de pression à l'aide du formalisme multifractal grand-canonique révèle clairement la présence de fortes corrélations entre les singularités les plus fortes de ces champs. La présence des filaments dans le flot turbulent est incontestablement l'une des causes sous-jacentes à ces corrélations.

Il est à noter que les propriétés espace-échelles mises en évidence dans ce chapitre concernent seulement les champs temporels. Il serait d'ailleurs très intéressant de reproduire cette étude sur des signaux de pression et de vitesse enregistrés simultanément dans d'autres configurations expérimentales pour lesquelles l'existence d'un flot moyen permettrait d'utiliser l'hypothèse de Taylor afin de déduire des informations de nature spatiale.

D'autre part, pour confirmer la non-homogénéité du marais des fluctuations de pression, il apparaît indispensable de reproduire cette étude sur des signaux provenant de flots où l'on a réussi à inhiber physiquement la formation des filaments de vorticité. En effet, la présence de filaments influence certainement la statistique des fluctuations environnantes du champ de pression et la seule suppression dans la statistique de ces évènements ne permet pas de conclure quant au véritable rôle que jouent ces derniers dans le phénomène d'intermittence.

# Annexe A

## Cascade abstraite : méthode de construction de processus auto-similaires sur des bases d'ondelettes orthogonales

Dans cette annexe, nous exposons brièvement une méthode de construction de signaux auto-similaires sur des bases d'ondelettes orthogonales<sup>[69],[72],[283]–[287]</sup>. Cette méthode permet de générer non seulement des mesures mais aussi des fonctions à partir d'un processus de cascade déterministe ou probabiliste donné.

*Définition* : Soit une suite croissante  $V_j$ ,  $j \in \mathbf{Z}$ , de sous-espaces vectoriels fermés de  $L^2(\mathbf{R})$  avec les propriétés suivantes :

- $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = 0$ ,  $\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbf{R})$ .
- $\forall f \in L^2(\mathbf{R})$ ,  $\forall j \in \mathbf{Z}$ , on a  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$ .
- $\forall f \in L^2(\mathbf{R})$ ,  $\forall k \in \mathbf{Z}$ , on a  $f(x) \in V_0 \iff f(x+k) \in V_0$ .
- Il existe une fonction  $\phi \in L^2(\mathbf{R})$  telle que  $\forall j \in \mathbf{Z}$ ,  $\{\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  soit une base orthogonale de  $V_j$ .  $\phi$  est appelée fonction d'échelle.

Cette suite de sous-ensembles de  $L^2(\mathbf{R})$  forme une analyse multirésolution<sup>[69],[286]</sup> de  $L^2(\mathbf{R})$ . Ainsi,  $\forall j \in \mathbf{Z}$  et  $\forall f \in V_j$  :

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle \phi_{j,k} | f \rangle \phi_{j,k} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k} , \quad (\text{A.1})$$

où  $\langle | \rangle$  dénote le produit scalaire de  $L^2(\mathbf{R})$ . Si l'on note  $W_j$  le sous-espace complémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $L^2(\mathbf{R})$ , on a les propriétés suivantes :

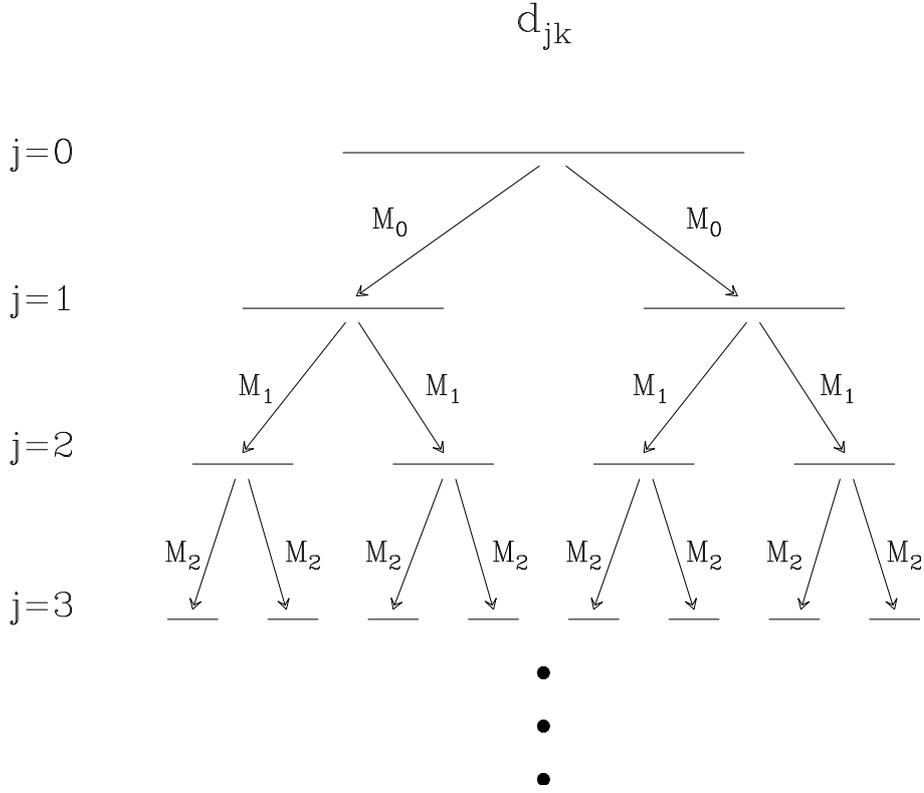


FIG. A.1 – Illustration de la règle de construction des coefficients en ondelettes  $d_{j,k}$ , à partir du coefficient  $d_{0,1}$  suivant la procédure hiérarchique définie dans l'équation (A.4). Le coefficient  $c_{0,1}$  est choisi arbitrairement, par exemple égal à 0.

- $\forall j, j' \in \mathbf{Z}, W_j \perp W_{j'}$  et  $L^2(\mathbf{R}) = \oplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j$ .
- $\forall j_0 \in \mathbf{Z}, L^2(\mathbf{R}) = V_{j_0} \oplus_{j=j_0}^{\infty} W_j$ .
- Il existe une ondelette  $\psi \in L^2(\mathbf{R})$  telle que  $\forall j \in \mathbf{Z}, \{\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^{j/2}x - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  soit une base orthogonale de  $W_j$ .

Ainsi,  $\forall f \in L^2(\mathbf{R})$ ,  $f$  peut s'écrire sous la forme :

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle \psi_{j,k} | f \rangle \psi_{j,k} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \quad (\text{A.2})$$

mais aussi

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k} + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k} \quad \forall j_0 \in \mathbf{Z}, \quad (\text{A.3})$$

La donnée d'une fonction d'échelle  $\phi$  et d'une ondelette conjuguée  $\psi$ , ainsi que la donnée des ensembles  $\{d_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbf{Z}}$  et  $\{c_{j_0,k}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  pour un  $j_0$  fixé, permet donc de caractériser de

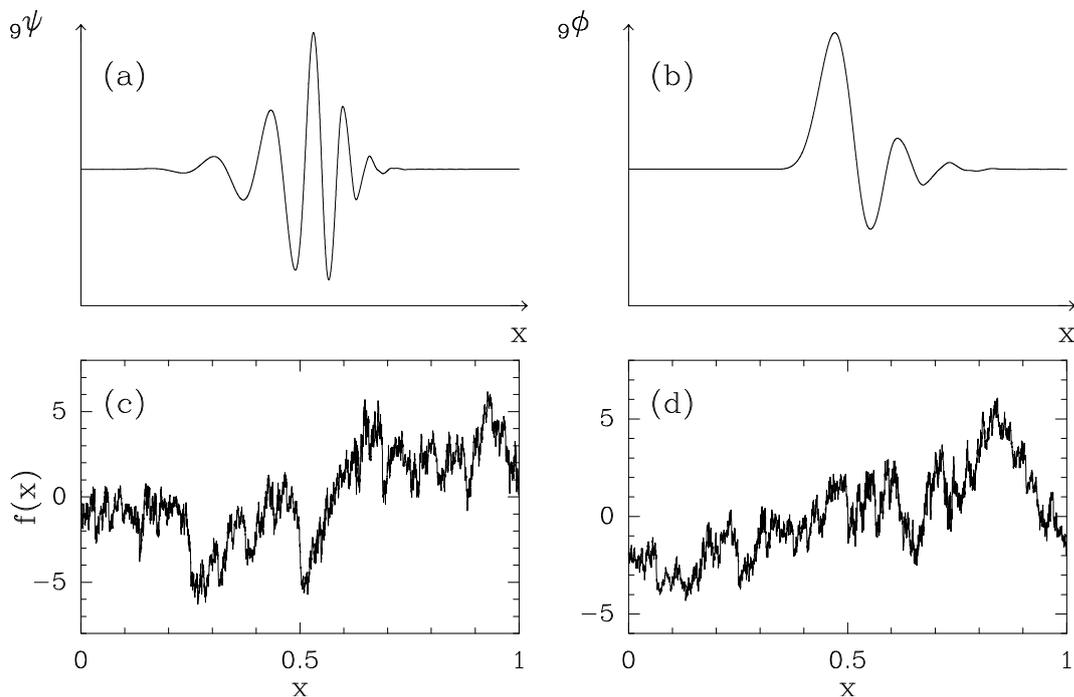


FIG. A.2 – Signaux aléatoires obtenus en utilisant comme base orthonormale d’ondelettes la base “Daubechie 9” constituée de a) l’ondelette mère  ${}_9\psi$  et b) de la fonction d’échelle mère  ${}_9\phi$ . c) Processus de loi log-Poisson de paramètres  $\lambda = 2$ ,  $\beta = (2/3)^{1/3}$  et  $\gamma = -1/9$ . d) Processus de loi log-normale de paramètres  $m = -1.37$  et  $\sigma^2 = 0.026$ .

manière univoque toute fonction de  $L^2(\mathbb{R})$ . Pour la reconstruction du signal, le problème du choix de la base orthogonale d’ondelettes  $(\phi, \psi)$  se pose. Il existe aujourd’hui dans la littérature un nombre important de couples  $(\phi, \psi)$  possibles en tant que bases et le choix se fait en général en fonction de la régularité du signal que l’on veut synthétiser. Nous utilisons généralement les bases d’ondelettes proposées par Daubechies<sup>[72]</sup>, et plus particulièrement la base “Daubechies 9” générée à partir des fonctions  $({}_9\phi, {}_9\psi)$  représentées sur les figures A.2a et A.2b, et dont le degré de régularité est le plus élevé.

La notion de cascade abstraite est alors simple à définir : la règle de construction est la même que celle utilisée pour générer des mesures auto-similaires (Fig. 2.6), si ce n’est qu’au lieu de redistribuer la mesure sur des sous-intervalles avec des poids algébriques  $W$ , on redistribue les coefficients en ondelettes  $d_{j,k}$ . Ainsi pour construire un signal à la résolution  $\Delta x = 2^{-n}$ , on va engendrer tous les coefficients  $c_{j,k}$  et  $d_{j,k}$ , où l’indice  $j$  varie de 0 à  $n$  et  $k = 0, 1, 2 \dots 2^j - 1$  ( $\in \mathbb{N}$ ), à partir des deux coefficients  $c_{0,1}$  et  $d_{0,1}$  que l’on

choisit arbitrairement avec nécessairement  $d_{0,1} \neq 0$ . On génère alors successivement les coefficients  $d_{j,k}$  aux différentes échelles en itérant les relations :

$$\begin{cases} d_{j+1,2k} &= M_j^{(2)} d_{j,k} , \\ d_{j+1,2k+1} &= M_j^{(1)} d_{j,k} . \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

où les  $M_j^{(k)}$  sont les réalisations (données par tirages successifs) d'une variable aléatoire  $M_j$  de loi prédéfinie qui peut dépendre éventuellement de  $j$  et dont le signe est choisie aléatoirement. Cette règle de construction est illustrée sur la figure A.1. Quand l'ensemble des  $d_{j,k}$  est ainsi généré, il suffit de reconstruire le signal d'après la relation (A.2) en choisissant une base orthogonale  $(\phi, \psi)$  appropriée. Le signal ainsi reconstruit sera par définition auto-similaire dans le sens où ses coefficients en ondelettes  $T_\psi$  résultent d'un processus de cascade.

Nous avons généré à partir de cet algorithme, en utilisant la base orthonormale ‘‘Daubechie 9’’, deux processus de cascade proposés dans la littérature pour décrire le phénomène d’intermittence en turbulence pleinement développée, c’est-à-dire un processus log-Poisson et un processus log-normal (section 2.1.4). Sur la figure A.2c est représentée une réalisation du modèle log-Poisson en utilisant les paramètres  $\lambda = 2$ ,  $\beta = (2/3)^{1/3}$  et  $\gamma = -1/9$  et où la relation (2.36) n’est plus valable. Plus précisément,  $M = e^{k \ln \beta + \gamma}$  où la variable aléatoire  $k$  suit une loi Poisson de moyenne  $\lambda \ln 2$ . Le signal présenté sur la figure A.2d, a été généré de la même manière mais en considérant cette fois  $M$  comme une variable aléatoire de loi log-normale de moyenne  $m = -1.37 \ln 2$  et de variance  $\sigma = 0.026 \ln 2$ . Le calcul analytique des spectres multifractals de ces deux processus est équivalent à celui mené dans la section 2.1.4 pour les mesures aléatoires de même loi. En utilisant l’équation (2.107), on obtient respectivement  $\tau(q) = (1 - \gamma)q + \lambda(\beta^q - 1) - q - 1$  pour le processus log-Poisson et  $\tau(q) = -mq - \sigma^2 q^2 / 2 - q - 1$  pour le processus log-normal. Les fonctions  $h(q)$  et les spectres  $D(h)$  des exposants de Hölder théoriques correspondants s’obtiennent alors facilement par dérivation et transformation de Legendre des spectres  $\tau(q)$ .

### Remarques

- Les paramètres utilisés pour ces deux processus permettent d’obtenir des spectres multifractals théoriques équivalents à ceux obtenus pour la vitesse turbulente à partir des modèles log-normal<sup>[177],[178]</sup> et log-Poisson<sup>[126],[233]</sup> proposés pour la cascade d’énergie, en supposant bien sûr valide l’hypothèse de Kolmogorov-Obukhov<sup>[177],[178]</sup> KO62 (Eq. (3.16)). Cette méthode nous permet donc de générer des signaux qui ont les mêmes caractéristiques espace-échelles que la vitesse turbu-

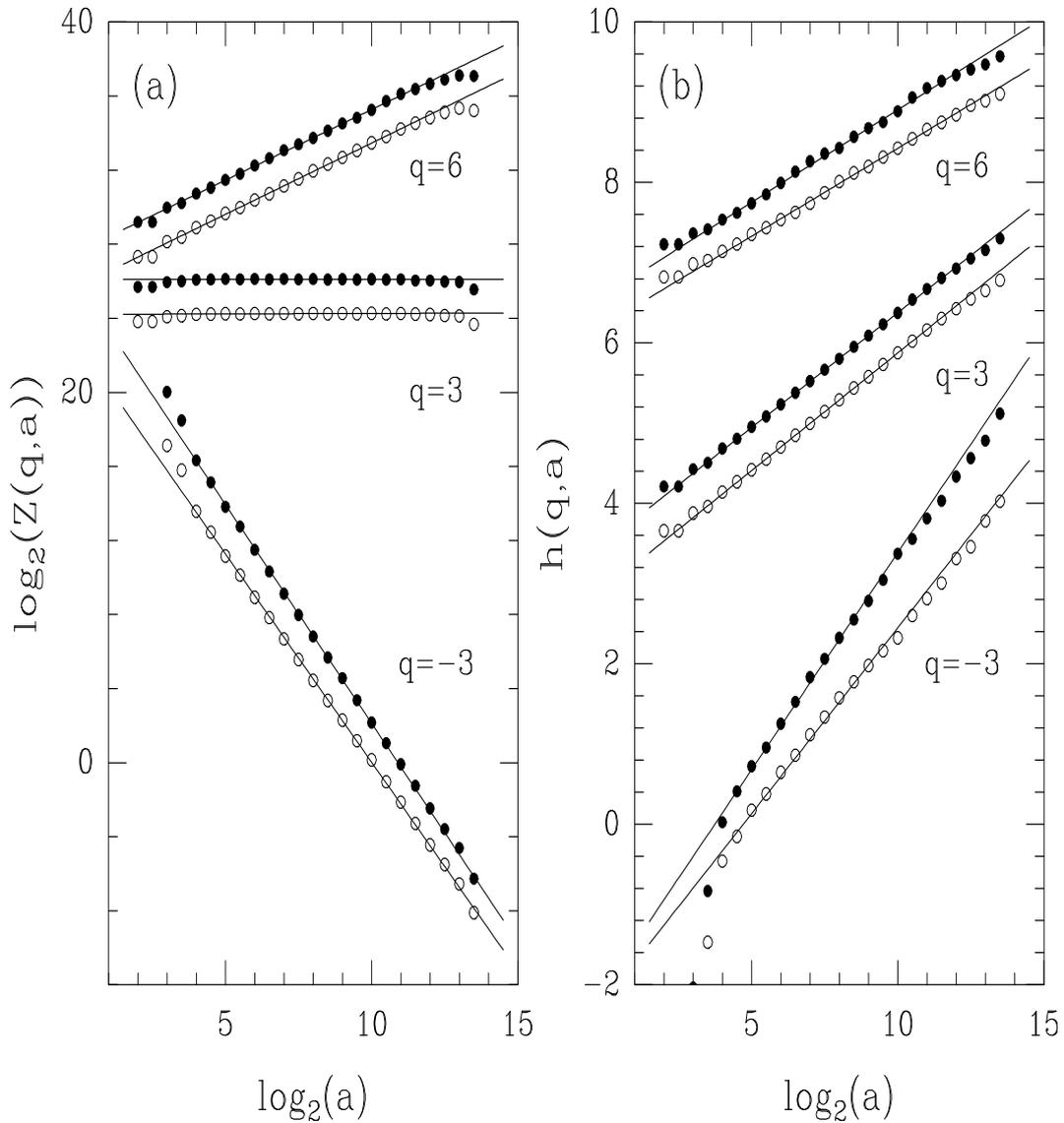


FIG. A.3 – Fonctions de partitions (Eqs. (2.96) et (2.98)) obtenues pour le processus de loi log-Poisson :  $\lambda = 2$ ,  $\beta = (2/3)^{1/3}$  et  $\gamma = -1/9$  (symboles (●)), et pour le processus de loi log-normale :  $m = -1.37$  et  $\sigma^2 = 0.026$  (symboles (○)). a)  $\log_2(Z(q,a))$  en fonction de  $\log_2 a$ . b)  $h(q,a)$  en fonction de  $\log_2 a$ . La pente de ces courbes détermine les quantités  $\tau(q)$  et  $h(q)$ . Les lignes continues représentent les droites obtenues par régression linéaire de ces courbes entre les échelles  $a = 2^7$  et  $a = 2^{13}$ .

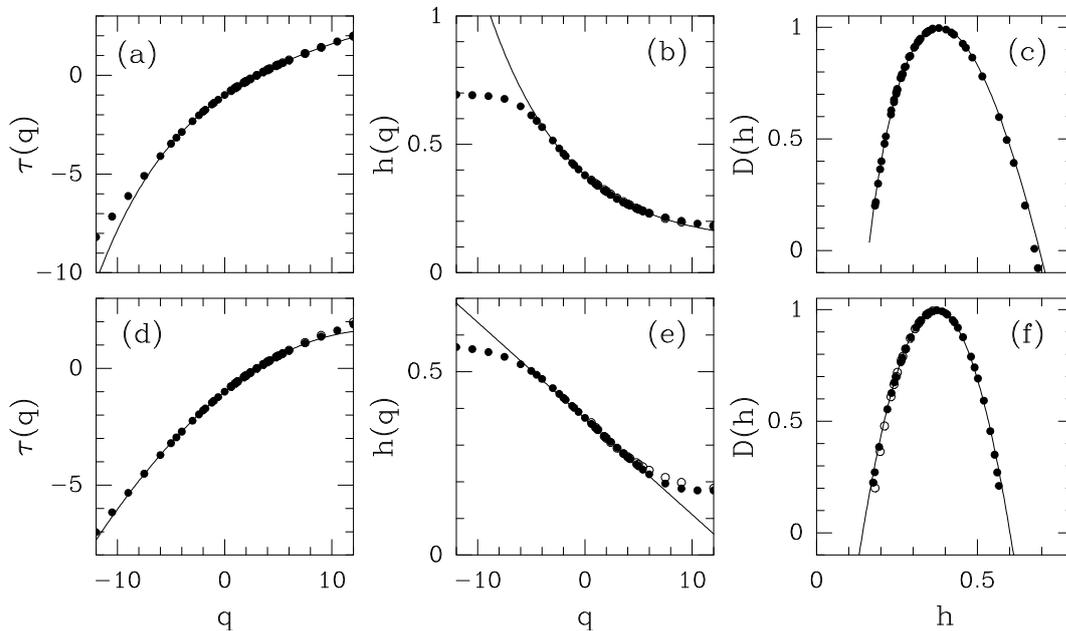


FIG. A.4 – Spectres multifractals obtenus pour le processus log-Poisson ( $\lambda = 2$ ,  $\beta = (2/3)^{1/3}$ ,  $\gamma = -1/9$ ) et le processus log-normal ( $m = -1.37$ ,  $\sigma^2 = 0.026$ ) en utilisant respectivement les ondelettes analysatrices  $\psi_{(3)}^{(1)}$  (symboles  $\bullet$ ) et  $\psi_{(0)}^{(1)}$  (symboles  $\circ$ ). Processus log-Poisson : a) spectre  $\tau(q)$  en fonction de  $q$ ; b)  $h(q)$  en fonction de  $q$ ; c) Spectre  $D(h)$  des exposants de Hölder. Processus log-normal : d) spectre  $\tau(q)$  en fonction de  $q$ ; e)  $h(q)$  en fonction de  $q$ ; f) spectre  $D(h)$  des exposants de Hölder. Les lignes continues représentent les prédictions théoriques (voir texte).

lente. Cette modélisation est impossible à partir du concept de cascade d'énergie qui ne permet de générer que des mesures.

- Le signe de  $M$  est pris égal à  $+ - 1$  avec une probabilité égale à  $1/2$ .
- Si l'on fait varier les caractéristiques de la variable aléatoire  $M_j$  en fonction de l'échelle, non pas comme  $-j$ , mais comme  $[2^{j\alpha} - 2^{(j+1)\alpha}]/\alpha$ , on peut ainsi synthétiser des signaux auto-similaires mais non invariant d'échelle, permettant de modéliser les résultats obtenus sur la vitesse turbulente dans le chapitre 3.

D'après les travaux originaux de Mallat et ses collaborateurs<sup>[92],[248]</sup>, la restriction aux maxima du module de la transformée en ondelette continue, peut aussi être utilisée pour synthétiser des signaux. Il est donc raisonnable de penser que les propriétés d'invariance d'échelle des processus générés par cascade abstraite ne dépendent pas de la forme spécifique de l'ondelette analysatrice utilisée dans la mesure où celle-ci est suffisamment

régulière et oscillante. Pour tenter de vérifier cette assertion, nous avons appliqué la méthode M.M.T.O. sur les deux types de processus précédemment évoqués, en utilisant une statistique de 230 signaux de  $2^{16}$  points. Sur les figures A.3a et A.3b, nous avons représenté respectivement les fonctions de partition  $\log_2(Z(q, a))$  (Eq. (2.96)) et  $h(q, a)$  (Eq. (2.98)) en fonction de  $\log_2 a$ , pour le processus log-Poisson (symboles (●)) et le processus log-normal (symboles (○)). L'ondelette analysatrice utilisée est l'ondelette  $\psi_{(3)}^{(1)}$ . Ces courbes ont un comportement linéaire très clair qui couvre une gamme d'échelles très importante. Les lignes continues représentent les droites obtenues par régression linéaire des données numériques entre les échelles  $a = 2^5$  et  $a^{13}$ . Les valeurs des pentes ainsi obtenues sont reportées sur la figure A.4, où nous avons représenté le spectre  $\tau(q)$ , la fonction  $h(q)$  et le spectre  $D(h)$  des exposants de Hölder obtenus respectivement pour le processus log-Poisson (Figs A.4a, A.4b et A.4c) et le processus log-normal (Figs A.4d, A.4e et A.4f). Pour comparaison nous avons aussi rapporté les résultats obtenus avec la méthode des fonctions de structure, c'est-à-dire avec  $\psi_{(0)}^{(1)}$  (symboles (○)). Les spectres obtenus avec ces deux ondelettes sont indiscernables pour les valeurs de  $q$  positives et sont en excellent accord avec les prédictions théoriques représentées en ligne continue. Ainsi les propriétés d'invariance d'échelle de ces processus générés par cascade abstraite semblent indépendantes de l'ondelette analysatrice utilisée. Les déviations observées aux grandes valeurs de  $|q|$  entre les données et les prédictions théoriques sont la conséquence d'effets de statistique finie.

La méthode des propagateurs, illustrée dans la section 3.4 sur ces mêmes processus, permet elle aussi d'identifier et d'étudier les caractéristiques du processus utilisé pour générer ces signaux. Ainsi, la généralisation de la notion de cascade abstraite sur les bases d'ondelettes orthogonales permet d'étendre la notion de cascade d'énergie, dont le rôle historique en turbulence pleinement développée est incontestable, à la synthèse de signaux auto-similaires, éventuellement invariants d'échelle, pouvant modéliser les caractéristiques principales d'autres champs physiques accessibles à l'expérience comme par exemple la vitesse, la pression, la température, etc...

# Bibliographie

- [1] G.K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1960).
- [2] H. Tennekes et J.L. Lumley, *A First Course in Turbulence* (MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1972).
- [3] R.H. Kraichnan, dans *Statistical Mechanics. New Concepts, New Problems, New Applications*, édité par J.A. Rice, K.F. Freed et J.C. Light (Univ. of Chicago Press, Chicago, 1972).
- [4] L.D. Landau, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **44**, 339 (1944).
- [5] L.D. Landau et L.M. Lifshitz, *Fluids Mechanics* (Pergamon Press, 1987).
- [6] E.N. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
- [7] D. Ruelle et F. Takens, Comm. Math. Phys. **20**, 167 (1971).
- [8] S. Newhouse, D. Ruelle et F. Takens, Comm. Math. Phys. **64**, 35 (1978).
- [9] D. Ruelle, Comm. Math. Phys. **82**, 137 (1981).
- [10] J.P. Eckmann, Rev. Mod. Phys. **53**, 643 (1981).
- [11] E. Ott, Rev. Mod. Phys. **53**, 655 (1983).
- [12] J.P. Eckmann et D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. **57**, 617 (1985).
- [13] P. Cvitanovic, éd., *Universality in Chaos* (Hilger, Bristol, 1984).
- [14] J. Guckenheimer et P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, Berlin, 1984).
- [15] B.L. Hao, éd., *Chaos* (World Scientific, Singapour, 1984).
- [16] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos* (Physik-Verlag, Weimheim, 1984).
- [17] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal, *Order Within Chaos* (Wiley, New York, 1986).
- [18] A.V. Holden, éd., *Chaos* (Manchester Univ. Press, Manchester, 1986).

- [19] H.B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Wiley, New York, 1986).
- [20] P. Bergé, éd., *Le Chaos* (Collection du CEA, Eyrolles, Paris, 1988).
- [21] C. Vidal and A. Pacault, édés, *Non-Equilibrium Dynamics in Chemical Systems* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [22] H.L. Swinney and J.P. Gollub, édés, *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence, Topics in Applied Physics, Vol 45* (Springer-Verlag, Berlin, 1981-1985).
- [23] N.B. Abraham, A.M. Albano, A. Passamante et P.E. Rapp, édés, *Measures of Complexity and Chaos* (Plenum, New York, 1989).
- [24] P. Manneville, *Structures Dissipatives, Chaos et Turbulence* (Collection Aléa, Saclay, 1991).
- [25] P. Gaspard, A. Arneodo, R. Kapral et C. Sparrow, édés, *Homoclinic Chaos*, Physica D **62** (North-Holland, Amsterdam, 1993).
- [26] A.S. Monin et A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, vol II (MIT Press, 1971).
- [27] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids* (Martinus Nijhoff, 1987).
- [28] U. Frisch, Physica Scripta, vol. **T9**, 137 (1985).
- [29] U. Frisch et S.A. Orszag, *Turbulence : Challenges for Theory and Experiment*, Physics Today (1990), p.24.
- [30] U. Frisch, *Turbulence : A legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, 1995).
- [31] A.N. Kolmogorov, C.R. Acad. Sci. USSR **30**, 301 (1941).
- [32] G.K. Batchelor et A.A. Townsend, Proc. Roy. Soc. A **199**, 238 (1949).
- [33] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984).
- [34] J.E. Weisfreid et S. Zaleski, édés, *Cellular Structure in Instabilities*, Lect. Notes in Phys. **210** (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [35] A.R. Bishop, G. Gruner et B. Nicolaenko, édés, *Spatio-Temporal Coherence and Chaos in Physical Systems*, Physica D **23** (North-Holland, Amsterdam, 1986).
- [36] P. Couillet et P. Huerre, édés, *New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern Forming Phenomena : The Geometry of Non-equilibrium* (Plenum, New-York, 1991).
- [37] A.C. Newell, "The dynamics of patterns : a survey", dans *Propagations in Systems Far From Equilibrium*, édité par J.E. Weisfreid et al (Springer Verlag, Berlin, 1988).

- [38] M.C. Cross et P.C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [39] A.C. Newell, “Chaos and Turbulence; is there a connection?”, dans *Perspectives in Nonlinear Dynamics*, édité par M. Shlesinger *et al* (World Scientific, Singapour, 1986).
- [40] U. Frisch, “Fully developed turbulence : where do we stand ?” dans *Dynamical Systems : A Renewal of Mechanism*, édité par S. Diner, D. Fargue et G. Lochak (World Scientific, Singapour, 1986).
- [41] R.H. Kraichnan, *Phys. Rev.* **109**, 1407 (1958); *J.Fluid Mech.* **5**, 497 (1959); *J. Math. Phys.* **2**, 1244 (1961) (erratum).
- [42] P.C. Martin, E.D. Siggia and A.H. Rose, *Phys. Rev. A* **8**, 423 (1973).
- [43] D. Foster, D. Nelson et M. Stephen, *Phys. Rev. A* **16**, 732 (1977).
- [44] C. de Dominicis et P.C. Martin, *Phys. Rev. A* **19**, 419 (1979).
- [45] V. Yakhot et S.A. Orszag, *J. Sci. Comp.* **1**, 3 (1986); *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1722 (1986).
- [46] U. Frisch et R. Morf, *Phys. Rev. A* **23**, 2673 (1981).
- [47] D. Farmer, T. Toffoli et S. Wolfram, *Cellular Automata*, *Physica D* **10** (North-Holland, Amsterdam, 1984).
- [48] S. Wolfram, éd., *Theory and Application of Cellular Automata* (World Scientific, Singapour, 1986).
- [49] U. Frisch, B. Hasslacher et Y. Pomeau, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1505 (1986).
- [50] U. Frisch, D. d’Humières, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau et J.P. Rivet, *Complex Systems* **1**, 649 (1987).
- [51] S. Wolfram, *J. Stat. Phys.* **45**, 471 (1986).
- [52] G.D. Doolen, éd., *Lattice Gas Methods for PDE’s* (Addison-Wesley, New York, 1990).
- [53] B.B. Mandelbrot, *Fractals : Form, Chance and Dimension* (Freeman, San Francisco, 1977); *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco, 1982).
- [54] K.J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985).
- [55] B.B. Mandelbrot, dans *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, édité par D. Avnir (John Wiley & Sons, New York, 1989).

- [56] C.J. Evertsz et B.B. Mandelbrot, dans *Chaos and Fractals*, édité par H.O. Peitgen, H. Jürgens et D. Saupe (Springer Verlag, Berlin, 1992).
- [57] B.B. Mandelbrot, *J. Fluid Mech.* **62**, 331 (1974).
- [58] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia et B.I. Shraiman, *Phys. Rev. A* **33**, 1141 (1986).
- [59] P. Collet, J. Lebowitz et A. Porzio, *J. Stat. Phys.* **47**, 609 (1987).
- [60] T. Bohr et T. Tél, dans *Direction in Chaos*, vol. 2, édité par B.L. Hao (World Scientific, Singapour, 1988).
- [61] R. Badii, Thèse, Université de Zurich (1987).
- [62] J.D. Farmer, E. Ott et J.A. Yorke, *Physica D* **7**, 153 (1983).
- [63] P. Grassberger, *Phys. Lett. A* **97**, 227 (1983).
- [64] H.G.E. Hentschel et I. Procaccia, *Physica D* **8**, 435 (1983).
- [65] P. Grassberger et I. Procaccia, *Physica D* **13**, 34 (1984).
- [66] P. Grassberger, R. Badii et A. Politi, *J. Stat. Phys.* **51**, 135 (1988).
- [67] U. Frisch et G. Parisi, “Fully developed turbulence and intermittency”, dans *Proc. of Int. School on “Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics”*, édité par M. Ghil, R. Benzi et G. Parisi (North-Holland, Amsterdam, 1985), p. 84.
- [68] J.M. Combes, A. Grossmann et P. Tchamitchian, édés, *Wavelets* (Springer, Berlin, 1989).
- [69] Y. Meyer, *Ondelettes* (Herman, Paris, 1990).
- [70] P.G. Lemarié, éd., *Les Ondelettes en 1989* (Springer, Berlin, 1990).
- [71] Y. Meyer, éd., *Wavelets and Applications* (Springer, Berlin, 1992).
- [72] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets* (S.I.A.M., Philadelphie, 1992).
- [73] M. B. Ruskai, G. Beyklin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer et L. Raphael, édés, *Wavelets and Their Applications* (Jones and Bartlett, Boston, 1992).
- [74] Y. Meyer et S. Roques, édés, *Progress in Wavelet Analysis and Applications* (Editions Frontières, Gif sur Yvette, 1993).
- [75] J. Morlet, NATO ASI series, vol. **FI** (Springer, Berlin, 1983).
- [76] A. Grossmann et J. Morlet, *S.I.A.M. J. Math. Anal.* **15**, 723 (1984).

- [77] A. Grossmann et J. Morlet, dans *Mathematics and Physics, Lectures on Recent Results*, édité par L. Streit (World Scientific, Singapour, 1985).
- [78] P. Goupillaud, A. Grossmann et J. Morlet, *Geoexploration* **23**, 85 (1984).
- [79] A. Grossmann, J. Morlet et T. Paul, *J. Math. Phys.* **26**, 2473 (1985); *Ann. Inst. Henri Poincaré* **45**, 293 (1986).
- [80] I. Daubechies, A. Grossmann et Y. Meyer, *J. Math. Phys.* **27**, 1271 (1986).
- [81] M. Holschneider, *J. Stat. Phys.* **50**, 963 (1988); Thèse, Université d'Aix-Marseille II (1988).
- [82] A. Arneodo, G. Grasseau et M. Holschneider, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2281 (1988), et dans le réf. [[68]], p. 182.
- [83] G. Grasseau, "Des techniques mathématiques aux outils numériques pour l'étude d'objets fractals", Thèse, Université de Bordeaux (1989).
- [84] A. Arneodo, F. Argoul, J. Elezgaray et G. Grasseau, dans *Nonlinear Dynamics* (World Scientific, Singapour, 1989), p. 130.
- [85] A. Arneodo, F. Argoul et G. Grasseau, dans la réf. [[70]], p. 125.
- [86] F. Argoul, A. Arneodo, J. Elezgaray, G. Grasseau et R. Murenzi, *Phys. Lett. A* **135**, 327 (1989); *Phys. Rev. A* **41**, 5537 (1990).
- [87] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, E. Freysz, G. Grasseau, J.F. Muzy et B. Pouligny, dans la réf. [[71]], p. 286.
- [88] A. Arneodo, "Zoom sur les fractales : sous l'objectif du microscope "ondelettes", les fractales dévoilent leurs secrets les plus intimes", *Le Courrier du CNRS*, n° **182**, 7 (1989).
- [89] A. Arneodo, "Un microscope "ondelette" adapté à l'étude des objets fractals", *la Recherche* **20**, 919 (1989).
- [90] S. Jaffard, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 308, serie I, 79 (1989).
- [91] M. Holschneider et P. Tchamitchian, dans la réf [[70]], p. 102.
- [92] S. Mallat et W.L. Hwang, *IEEE Trans. on Information Theory* **38**, 617 (1992).
- [93] J.F. Muzy, E. Bacry et A. Arneodo, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3515 (1991).
- [94] A. Arneodo, E. Bacry et J.F. Muzy, "Wavelet analysis of fractal signals : direct determination of the singularity spectrum of fully developed turbulence data" (Springer Verlag, Berlin, 1991) à paraître.

- [95] E. Bacry, “Utilisation de la transformation en ondelettes pour l’analyse de signaux fractals et pour la résolution d’équations aux dérivées partielles”, Thèse, Université de Paris VII (1992).
- [96] J.F. Muzy, E. Bacry et A. Arneodo, dans la référence [[74]], p. 323.
- [97] J.F. Muzy, “Analyse de distributions fractales à partir de leur transformée en ondelettes : des concepts mathématiques aux applications physiques”, Thèse, Université de Nice (1993).
- [98] J.F. Muzy, E. Bacry et A. Arneodo, Phys. Rev. E **47**, 875 (1993).
- [99] E. Bacry, J.F. Muzy et A. Arneodo, J. Stat. Phys. **70**, 635 (1993).
- [100] J.F. Muzy, E. Bacry et A. Arneodo, Int. J. of Bifurcation and Chaos **4**, 245 (1994).
- [101] A. Arneodo, E. Bacry et J.F. Muzy, Physica A **213**, 232 (1995).
- [102] A. Arneodo, E. Bacry et J.F. Muzy, Europhys. Lett. **25**, 479 (1993).
- [103] A. Arneodo, F. Argoul, J.F. Muzy, M. Tabard et E. Bacry, *Fractals* **1**, 629 (1993).
- [104] A. Arneodo, F. Argoul, E. Freysz, J.F. Muzy et B. Pouligny, dans la réf. [[73]], p. 241.
- [105] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, J.F. Muzy et M. Tabard, dans la référence [[74]], p. 21.
- [106] E. Siggia, J. Fluid Mech **107**, 375 (1981).
- [107] K. Yamamoto et I. Hosokawa, J. Phys. Soc. Japan **57**, 1532 (1988).
- [108] Z.S. She, E. Jackson et S.A Orszag, Nature **344**, 226 (1990) ; Proc. Roy. Soc. London **434**, 101 (1991).
- [109] A. Vincent et M. Meneguzzi, J. Fluid Mech. **255**, 1 (1991).
- [110] M.E. Brachet, D.I. Meiron, S.A. Orszag, B.G. Nickel, R.H. Morf et U. Frisch, J. Fluid Mech. **130**, 411 (1983).
- [111] M.E. Brachet, C. R. Acad. Sci. Paris **311**, 775 (1990) ; Fluid. Dyn. Research **8**, 1 (1991).
- [112] S. Kida et K. Okhitani, Phys. Fluids **A 4**, 1018 (1992).
- [113] O. Métais et M. Lesieur, J. Fluid Mech. **239**, 157 (1992).
- [114] J. Jimenez, A.A. Wray, P. Saffman et R. Rogallo, J. Fluid. Mech. **255**, 65 (1992).
- [115] M. Tanaka et S. Kida, Phys. Fluids A **5**, 2079 (1993).

- [116] A. Pumir, Phys. Fluids **6**, 2071 (1993).
- [117] M. E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano et P. L. Sulem, Phys. Fluids **A 4**, 2845 (1992).
- [118] A. Tsinober, E. Kit, T. Dracos, J. Fluids Mech, **242**, 169 (1992).
- [119] S. Douady, Y. Couder et M. Brachet, Phys. Rev. Lett. **67**, 983 (1991).
- [120] S. Douady, Y. Couder, dans *Turbulence in Extended Systems*, édité par R. Benzi, C. Basdevant et S. Ciliberto (Nova Science, Commack, New York, 1993), p. 3.
- [121] O. Cadot, S. Douady et Y. Couder, Phys. Fluids A **7**, 630 (1995).
- [122] S. Fauve, C. Laroche et B. Castaing, J. Physique II (Paris) **3**, 271 (1993).
- [123] P. Abry, S. Fauve, P. Flandrin et C. Laroche, J. Physique II France **4**, 725 (1994).
- [124] P. Abry, “Transformées en ondelettes. Analyse multirésolution et signaux de pression en turbulence”, Thèse, Université Lyon I (1994).
- [125] O. Cadot, “Etude des structures de basse pression dans la turbulence développée”, Thèse, Université Paris VII (1995).
- [126] Z.S. She et E. Leveque, Phys. Rev. Lett. **72**, 336 (1994).
- [127] B. Castaing, Y. Gagne et E.J. Hopfinger, Physica D **46**, 177 (1990).
- [128] B. Castaing, Y. Gagne et M. Marchand, Physica D **68**, 387 (1993).
- [129] A. Naert, L. Puech, B. Chabaud, J. Peinke, B. Castaing et B. Hébral, J. Phys. II France **4**, 215 (1994).
- [130] B. Chabaud, A. Naert, J. Peinke, F. Chillà, B. Castaing et B. Hébral, Phys. Rev. Lett. **73**, 3227 (1994).
- [131] B. Castaing et B. Dubrulle, J. Phys. II France **5**, 895 (1995).
- [132] B. Castaing, J. Phys. II France **6**, 105 (1996).
- [133] F. Chillà, J. Peinke et B. Castaing, J. Phys II France **6**, 455 (1996).
- [134] C.W. Van Atta et W.Y. Chen, J. Fluid Mech. **44**, 145 (1970).
- [135] C.W. Van Atta et J. Park, in *Statistical Models and Turbulence*, Lect. Notes in Phys. Vol. 12, 402 (Springer, Berlin, 1972).
- [136] F. Anselmet, Y. Gagne, E.J. Hopfinger et R.A. Antonia, J. Fluid. Mech. **140**, 63 (1984).
- [137] Y. Gagne, “Etude expérimentale de l’intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence développée”, Thèse, Université de Grenoble (1987).

- [138] Y. Gagne, E.J. Hopfinger et U. Frisch, dans *New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern Forming Phenomena : The Geometry of Nonequilibrium*, édité par P. Huerre et P. Couillet (Plenum, New York, 1988).
- [139] C. Baudet, S. Ciliberto et Phan Nhan Tien, *J. Phys II France* **3**, 293 (1993).
- [140] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripicciono, C. Baudet, F. Massaioli et S. Succi, *Phys. Rev. E* **48**, R29 (1993).
- [141] R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet, G. R. Chavarria et R. Tripicciono, *Europhys. Lett.* **24**, 275 (1993).
- [142] G. Stolovitzky et K. R. Sreenivasan, *Phys. Rev. E* **48**, R33 (1993).
- [143] S. I. Vainshtein et K.R. Sreenivasan, *Phys. Rev. Lett* **73**, 3085 (1994).
- [144] J. Maurer, P. Tabeling et G. Zocchi, *Europhys. Lett.* **26**, 31 (1994).
- [145] J. Herweijer et W. Van De Water, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4651 (1995).
- [146] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripicciono, C. Baudet, F. Massaioli et S. Succi, *Phys. Rev. E* **51**, 2672 (1995).
- [147] R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet et G. R. Chavarria, *Physica D* **80**, 385 (1995).
- [148] R. Benzi, L. Biferale, S. Ciliberto, M. V. Struglia et R. Tripicciono, *Physica D* **96**, 162 (1996).
- [149] A. Noullez, G. Wallace, W. Lempert, R.B. Miles et U. Frisch, “Transverse velocity increments in turbulent flow using RELIEF technique”, soumis à *J. Fluid Mech.* (1996).
- [150] K.R. Sreenivasan, S. I. Vainshtein, R. Bhiladvala, I. San Gil, S. Chen et N. Cao, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1488 (1996).
- [151] A. Arneodo, C. Baudet, F. Belin, R. Benzi, B. Castaing, B. Chabaud, R. Chavarria, S. Ciliberto, R. Camussi, F. Chillà, B. Dubrulle, Y. Gagne, B. Hebral, J. Herweijer, M. Marchand, J. Maurer, J.F. Muzy, A. Naert, A. Noullez, J. Peinke, S.G. Roux, P. Tabeling, W Van De Water et H. Willaime, *Europhys. Lett.* **34**, 411 (1996).
- [152] C. Meneveau et K.R. Sreenivasan, *Nucl. Phys.* **B2** (Suppl.), 49 (1987); *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1424 (1987); *Phys. Lett. A* **137**, 103 (1989).
- [153] A. B. Chhabra et R.V. Jensen, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1327 (1989).
- [154] A.B. Chhabra, R.V. Jensen et K.R. Sreenivasan, *Phys. Rev. A* **40**, 4593 (1989).
- [155] C. Meneveau et K.R. Sreenivasan, *J. Fluid Mech.* **224**, 429 (1991).

- [156] R. Benzi, L. Biferale, G. Paladin, A. Vulpiani et M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **67**, 2299 (1991).
- [157] P. Kailasnath, K. R. Sreenivasan et G. Stolovitzky, Phys. Rev. Lett. **68**, 2766 (1992).
- [158] A. Praskovsky et S. Oncley, Phys. Rev. Lett. **7**, 3999 (1994).
- [159] P. Tabeling, G. Zocchi, F. Belin, J. Maurer et H. Willaime, Phys. Rev. E **53**, 1613 (1996).
- [160] F. Belin, P. Tabeling et H. Willaime, Physica D **93**, 52 (1996).
- [161] U. Frisch, P.L. Sulem et M. Nelkin, J. Fluid. Mech. **87**, 719 (1978).
- [162] E.A. Novikov et R.W. Stewart, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Geofiz. **3**, 408 (1964).
- [163] R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi et A. Vulpiani, J. Phys. A **17**, 3521 (1984).
- [164] G. Paladin et A. Vulpiani, Phys. Rep. **156**, 148 (1987).
- [165] T. Nakano, Phys. Lett. A **140**, 395 (1989).
- [166] A.B. Chhabra, C. Meneveau, R.V. Jensen et K.R. Sreenivasan, Phys. Rev. A **40**, 5284 (1989).
- [167] B. B. Mandelbrot, *Fractals and Multifractals : Noise, Turbulence and Galaxies*, Selecta, Vol. 1 (Springer, New-York, 1989).
- [168] A.B. Chhabra et K.R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **68**, 2762 (1992).
- [169] R. Benzi, L. Biferale et G. Parisi, Physica D **65**, 163 (1993).
- [170] P. Frick, B. Dubrulle et A. Babiano, Phys. Rev. E **51**, 5582 (1995).
- [171] G. R. Chavarria, C. Baudet et S. Ciliberto, Phys. Rev. Lett. **74**, 1986 (1995).
- [172] M. Nelkin, Phys. Rev. E **52**, R4610 (1995).
- [173] D. Schertzer, S. Lovejoy et F. Schmitt, dans *Small Scale Structures in 3D Hydro and MHD Turbulence*, édité par A. Pouquet et P. L. Sulem (Springer, Berlin, 1995).
- [174] G. Pedrizzetti, E. Novikov et A. A. Praskovsky, Phys. Rev. E **53**, 475 (1996).
- [175] R. Benzi, L. Biferale, R. M. Kerr et A. Trovatore, Phys. Rev. E **53**, 3541 (1996).
- [176] R. Benzi, L. Biferale et E. Trovatore, Phys. Rev. Lett **77**, 3114 (1996).
- [177] A.N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. **13**, 82 (1962).
- [178] A.M. Obukhov, J. Fluid Mech. **13**, 77 (1962).
- [179] I. Hosokawa et K. Yamamoto, Phys. Fluids A **4**, 457 (1992).

- [180] A. A. Praskovsky, Phys. Fluids A **4**, 2589 (1992).
- [181] S. T. Thoroddsen et C. W. Van Atta, Phys. Fluids A **4**, 2592 (1992).
- [182] S. Chen, G.D. Doolen, R.H. Kraichnan et Z.S. She, Phys. Fluids A **5**, 458 (1992).
- [183] G. Stolovitzky, P. Kailasnath et K.R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **69**, 1178 (1992).
- [184] T.O. Neil et C. Meneveau, Phys. Fluids A **5**, 158 (1993).
- [185] G. Stolovitzky et K.R. Sreenivasan, Rev. Mod. Phys. **66**, 229 (1994).
- [186] A. A. Praskovsky et S. Oncley, Europhys. Lett. **28**, 635 (1994).
- [187] Y. Gagne, M. Marchand et B. Castaing, J. de Physique II (Paris) **4**, 1 (1994).
- [188] S. T. Thoroddsen, Phys. Fluids **7**, 691 (1995).
- [189] S. Chen, G. D. Doolen, R. H. Kraichnan et L. P. Wang, Phys. Rev. Lett. **74**, 1755 (1995).
- [190] V. Borue et S. A. Orszag, Phys. Rev. E **53**, R21 (1996).
- [191] L. P. Wang, S. Chen, J. G. Brasseur et J. C. Wyngaard, J. Fluid Mech. **309**, 113 (1996).
- [192] C. Meneveau, K. R. Sreenivasan, P. Kailasnath et M. S. Fan, Phys. Rev. A **41**, 894 (1990).
- [193] G. Peano, *Selected Works*, édité par H.C. Kennedy (Toronto Univ. Press, Toronto, 1973).
- [194] F. Hausdorff, Mathematische Annalen **79**, 157 (1919).
- [195] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauka SSSR **119**, 861 (1958).
- [196] H.E. Stanley et N. Ostrowski, édés, *On Growth and Form : Fractal and Non-Fractal Patterns in Physics* (Martinus Nijhof, Dordrecht, 1986).
- [197] L. Pietronero et E. Tosatti, édés, *Fractals in Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1986).
- [198] W. Güttinger et D. Dangelmayr, édés, *The Physics of Structure Formation* (Springer, Berlin, 1987).
- [199] H.E. Stanley et N. Ostrowski, édés, *Random Fluctuations and Pattern Growth* (Kluwer Academic, Dordrecht, 1988).
- [200] J. Feder, *Fractals* (Pergamon, New York, 1988).
- [201] T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapour, 1989).

- [202] Essays in honour of B.B. Mandelbrot, *Fractals in Physics*, édité par A. Aharony et J. Feder, Physica D **38** (North-Holland, Amsterdam, 1989).
- [203] F. Family et T. Vicsek, *Dynamics of Fractal Surfaces* (World Scientific, Singapour, 1991).
- [204] H.O. Peitgen et D. Saupe, édés, *The Science of Fractals Images* (Springer, New York, 1987).
- [205] R.F. Voss, Physica D **38**, 363 (1989) ; dans la réf. [[143]], p.38.
- [206] D.A. Russel, J.D. Hanson et E. Ott, Phys. Rev. Lett. **45**, 1175 (1980).
- [207] H. Froehling, J.P. Crutchfield, D. Farmer, N.H. Packard et R. Shaw, Physica D **3**, 605 (1981).
- [208] H.S. Greenside, A. Wolf, J. Swift et T. Pignaro, Phys. Rev. A **25**, 3453 (1982).
- [209] P. Grassberger, Phys. Lett. A **97**, 224 (1983).
- [210] R. Badii et A. Politi, Phys. Lett. A **101**, 182 (1984).
- [211] P. Grassberger, Phys. Lett. A **107**, 101 (1985).
- [212] A. Giorgilli, D. Casati, L. Sironi et L. Galgani, Phys. Lett. A **115**, 202 (1986).
- [213] A. Arneodo, G. Grasseau et E.J. Kostelich, Phys. Lett. A **124**, 426 (1987).
- [214] A.S. Besicovitch, Mathematische Annalen **110**, 321 (1935).
- [215] J. P. Kahane, dans *Recent Progress in Fourier Analysis*, édité par I. Peral et J. L. Rubio di Francia (North-Holland, Amsterdam, 1985), p. 65.
- [216] T. Tel, Z. Naturforsch **43a**, 1154 (1988).
- [217] A. Renyi, *Probability Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- [218] P. Grassberger et I. Procaccia, Physica D **9**, 189 (1983).
- [219] M. Holschneider, "Fractal dimensions : a new definition", pré tirage (1988).
- [220] R. Balian, *Du Microscopique au Macroscopique* (Ecole Polytechnique, Ellipses, Palaiseau, 1982).
- [221] F.J. Dyson, Comm. Math. Phys. **21**, 269 (1971).
- [222] E.B. Vul, Ya.G. Sinai et K.M. Khanin, Usp. Mat. Nauk. **39**, 3 (1984) [J. Russ. Math. Surv. **39**, 1 (1984)].
- [223] M.J. Feigenbaum, M.H. Jensen et I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **57**, 1503 (1986).
- [224] M.H. Jensen, L.P. Kadanoff et I. Procaccia, Phys. Rev. A **36**, 1409 (1987).

- [225] M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **46**, 919 et 925 (1987).
- [226] T. Bohr et D. Rand, *Physica D* **25**, 387 (1987).
- [227] D. Rand, *Ergod. Th. & Dyn. Sys.* **9**, 527 (1989).
- [228] B.B. Mandelbrot, *Physica A* **163**, 306 (1990).
- [229] B.B. Mandelbrot, dans *Fractals : Physical Origin and Properties*, édité par L. Pietronero (Plenum, New York, 1989), p. 3.
- [230] B.B. Mandelbrot, *Pure Appl. Geophys.* **131**, 5 (1989).
- [231] A. Chhabra et K.R. Sreenivasan, dans *New Perspective in Turbulence*, édité par L. Sirovich (Springer, Berlin, 1989).
- [232] R. S. Ellis, *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics* (Springer, New York, 1985).
- [233] Z. S. She et E. C. Waymire, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 262 (1995).
- [234] L.F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1922).
- [235] U. Frisch et M. Vergassola, *Europhys. Lett.* **14**, 439 (1991).
- [236] B.B. Mandelbrot et J.W. Van Ness, *S.I.A.M. Rev.* **10**, 422 (1968).
- [237] M. Kardar, G. Parisi et N. Y. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986).
- [238] B. Dubuc, J. F. Quiniou, C. Roques-Carmes, C. Tricot et S. W. Zucker, *Phys. Rev. A* **39**, 1500 (1989).
- [239] G. A. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry* (Springer, Berlin, 1990).
- [240] T. Higuchi, *Physica D* **46**, 254 (1990).
- [241] N. P. Greis et H. P. Greenside, *Phys. Rev A* **44**, 2324 (1991).
- [242] Wentian Li, *Int. J. of Bifurcations and Chaos* **1**, 583 (1991).
- [243] P. Lévy, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien* (Gauthiers-Villars, 1965).
- [244] A. L. Barabasi et T. Vicsek, *Phys. Rev. A* **44**, 2730 (1991).
- [245] D. Gabor, *Journal of I.E.E. (Londres)* **93**, 429 (1946).
- [246] A. Arneodo, E. Bacry et J.F. Muzy, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4823 (1995).
- [247] A. Grossmann, M. Holschneider, R. Kronland-Martinet et J. Morlet, dans *Inverse Problem*, édité par P.C. Sabatier, *Advances in Electronics and Electron Physics*, Supplément 19 (Acad. Press, Orlando, 1987).

- [248] S. Mallat et S. Zhong, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence **14**, 710 (1992).
- [249] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray et J. F. Muzy, *Ondelettes, multifractales et turbulences* (Diderot éditeur, Arts et Sciences, Paris, 1995).
- [250] J. M. Ghez et S. Vaienti, Nonlinearity **5**, 772 et 791 (1992).
- [251] M. Vergassola et U. Frisch, Physica D **54**, 58 (1991).
- [252] M. Vergassola, R. Benzi, L. Biferale et D. Pisarenko, J. Phys. A **26**, 6493 (1993).
- [253] A. Arneodo, J.F. Muzy et S. G. Roux, "Phenomenological analysis of self-similarity and random processes : application to fully developed turbulence data", soumis à Phys. Rev. Lett. (1996).
- [254] R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **7**, 1723 (1964).
- [255] R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **8**, 575 (1965) ; erratum ibid., 1884 (1966).
- [256] R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 266 (1968).
- [257] L. Onsager, Nuovo Cimento **6**, 279, suppl. Ser. IX (1949).
- [258] U. Frisch, in *Kolmogorov's ideas 50 years on*, édité par J.C.R. Hunt, O.M. Phillips et D. Williams, Proc. Roy. Soc. London A **434**, 89 (1991).
- [259] M. Nelkin, J. Stat. Phys. **54**, 1 (1989).
- [260] T. Von Kármán et L. Howarth, Proc. Roy. Soc. London A **164**, 192 (1938).
- [261] M. Briscolini, P. Santangelo, S. Succi et R. Benzi, Phys. Rev. E **50**, R1745 (1994).
- [262] R. Benzi, M. V. Struglia et R. Tripicciono, Phys. Rev. E **53**, R5565 (1996).
- [263] B. B. Mandelbrot, J. Stat. Phys **34**, 895 (1984).
- [264] F. H. Champagne, J. Fluid Mech. **86**, 67 (1978).
- [265] G. R. Chavarria, C. Baudet et S. Ciliberto, Europhys. Lett. **32**, 319 (1995).
- [266] A. Arneodo, E. Bacry et J.F. Muzy, "Analyse en ondelettes de signaux fractals. Application à l'étude de la turbulence pleinement développée", Comptes Rendus du 29<sup>ème</sup> Colloque d'Aérodynamique Appliquée, C.E.L. Biscarosse (Septembre 1992).
- [267] A. Arneodo, J.F. Muzy et E. Bacry, dans *Eddy Structure Identification in Free Turbulent Shear Flows*, édité par J.P. Bonnet et M.N. Glauser (Kluwer, Dordrecht, 1993), p. 153.
- [268] S. C. Crow et F. H. Champagne, J. Fluid Mech. **48**, 547 (1971).

- [269] G. L. Brown et A. Roshko, J. Fluid Mech. **64**, 775 (1974).
- [270] G. K. Batchelor, Q. J. Mech. Appl. Math. **4**, 29 (1951).
- [271] G. K. Batchelor, Proc. Camb. Phil. Soc. **47**, 359 (1951).
- [272] E. Villermaux, B. Sixou et Y. Gagne, Phys. of Fluids **7**, 2008 (1995).
- [273] J.F. Pinton et R. Labbé, J. Phys. II France **4**, 1461 (1994).
- [274] B. Dubrulle, Phys. Rev. Lett. **73**, 959 (1994).
- [275] B. Dubrulle et F. Graner, J. Phys. II France **6**, 797 (1996).
- [276] B. Dubrulle et F. Graner, J. Phys. II France **6**, 817 (1995).
- [277] B. Dubrulle, “Anomalous scaling and generic structure function in turbulence”, soumis a J. Phys II (1996).
- [278] A. Pocheau, Europhys. Lett. **35**, 183 (1996).
- [279] P. Flandrin, IEEE Trans. on Info. Theory **35**, 197 (1989).
- [280] P. Flandrin, IEEE Trans. on Info. Theory **38**, 910 (1992).
- [281] P. Flandrin, *Temps-fréquence* (Hermes, Paris, (1993).
- [282] F. Sellan, C. R. Acad. Sci **321**, 351 (1995).
- [283] Y. Meyer, “Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées”, Cahier du CEREMADE N° 8703 (Paris, 1987).
- [284] P.G. Lemarié et Y. Meyer, Rev. Math. Iberoamericana **2**, 1 (1986).
- [285] S. Jaffard et Y. Meyer, J. de Math. Pures. et Appl. **68**, 95 (1989), et dans la réf [[68]], p. 21 et 247.
- [286] S. Mallat, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence **11**, 674 (1989); Trans. of the Am. Math. Soc. **315**, 69 (1989).
- [287] I. Daubechies, Comm. Pure Appl. Math. **49**, 909 (1988).