Gey Lucas, Rossetti Sylvio

Loi de conservation en Dynamique

Niveau

Commentaires du jury

- 2017 : Des exemples concrets d'utilisation des lois de conservation sont attendus.
- 2016 : Lors de l'entretien avec le jury, la discussion peut aborder d'autres domaines que celui de la mécanique classique.
- 2015 : Cette leçon peut être traitée à des niveaux très divers. L'intérêt fondamental des lois de conservation et leur origine doivent être connus et la leçon ne doit pas se limiter à une succession d'applications au cours desquelles les lois de conservation se résument à une propriété anecdotique du problème considéré.
- Jusqu'en 2014, le titre était : Lois de conservation en dynamique des systèmes.
- 2009 : Le jury attend que le candidat choisisse un nombre d'exemples limité, mais qu'il les analyse en profondeur.
- 2008 : Il existe d'autres exemples que les interactions newtoniennes. La distinction entre le mouvement d'ensemble et le mouvement barycentrique est fondamentale

Bibliographie

- Vidéo collision elastique et inelastqie

pré-requis

- Mécanique du point (PFD, TMC, TEC)
- Systèmes de coordonnées
- Gravitation : lois de Newton et de Kepler
- Mécanique lagrangienne : equation d'Euler-Lagrange et covariance

Expériences

—

Table des matières

Introduction

Aujourd'hui on va parler de Loi de Consevation. Mais c'est quoi une loi de conservation ? Trouver une loi de conservation, c'est trouver une quantité qui ne varie pas au cours du temps.

1 Lois fondamentales de conservation

On se place en réferntiel galiléen dans toute cette partie. On pourra écrire le PFD :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F_i}$$

On fait également l'hypothèse que toutes les forces dérivent d'un potentiel : on a donc :

$$\vec{F_i} = -\boldsymbol{\nabla} U_i$$

Avec, a priori, le potentiel $U_i(x, y, z, t)$. En particulier, le potentiel ne dépend pas de la vitesse, par exemple.

On va considérer des **invariances :** ce sont des transformations qui laissent inchangée la dynamique du système. On va en voir tout de suite des exemples.

1.1 Invariances spatiales

Invariance par translation selon x : on dit qu'un système est invariant par translation selon x lorsque la position du système n'a aucune influence sur sa dynamique. Cela revient à dire que $U_i = U_i(y, z, t)$.

Exemples : On lance une balle à partir d'un endroit fixé. Elle est soumise à son poids, qui dérive d'un potentiel : $E_p = mgz$. On remarque que ce potentiel est invariant par translation selon l'axe $\vec{\mathbf{e}}_x$. Par contre dans la direction $\vec{\mathbf{e}}_z$, on a pas invariance. Comment cela se traduit dans la dynamique ?

Conséquence sur la quantité de mouvement : on en déduit d'après le PFD que :

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U_i}{\partial x} = 0$$

La quantité de mouvement est conservée dans la direction de l'invariance.

Pour finir l'exemple de la balle, on a $p_x = cst$ qui correspond à la valeur donné initialement et comme la masse de la balle est constante ce la se traduit par une vitesse horizontale constante. Dans la direction de $\vec{\mathbf{e}}_z$ ce n'est pas le cas et on a un mouvement de chute libre.

Pour comprendre que ce n'est pas la vitesse l'invariant mais bien la quantité de mouvement on prend un autre exemple :

Exemple en vidéo : Cette vidéo.

La planche à roulettes roule sans frottements, les frottements avec l'air sont négligés. Le système considéré est l'ensemble {Professeur + planche + balle}. On note m_b la masse de la balle et m_p celle du prof + la planche.

A l'échelle de l'expérience (la pièce typiquement), la situation est invariante par translation. Il y a donc conservation de la quantité de mouvement du système.

A l'état initial, le système est immobile. Sa quantité de mouvement est nulle. Lorsque le prof lance la balle, la qdm globale du système doit rester nulle : le prof part en arrière.

Pour quantifier, on doit avoir : $m_b\vec{v_b} + m_p\vec{v_p} = \vec{0}$. La vitesse du prof (dans la direction opposée à celle de la balle) est de :

$$v_p = -\frac{m_b}{m_p}\vec{v_b}$$

Le signe - traduit le fait que le prof part vers l'arrière.

Plus généralement, si le système est invariant par toute translation dans toutes les directions, on retrouve le principe d'inertie : la dérivée de la qdm est nulle, donc sa vitesse est constante, et le système n'est soumis à aucune force. Cependant on se rends compte qu'il nous manque une équation pour résoudre tout. **Invariance par rotation :** on décrit cette fois le système en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ, t). L'invariance par rotation implique : $U(r, \theta, \phi, t) = U(r, t)$.

C'est l'approximation que l'on fait lorsqu'on suppose la Terre sphérique et homogène !

En conséquence, la force s'appliquant sur le système est de la forme :

$$\vec{F} = F_r \vec{e_r}$$

On écrit le TMC :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = r\vec{e_r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Le moment cinétique du système est conservé.

Expérience de la chaise avec une roue de vélo

Application : Patineur.euse artistique : $L = I\omega$ En bougeant les bras le.a patineur.euse fait un varier I mais L reste constant, ceal modifie la vitesse de rotation.

1.2 Invariance temporelle

On se place dans le cas où le potentiel ne dépend que de l'espace : $U = U(x, y, z)$. On repart de l'écriture du PFD :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= -\boldsymbol{\nabla} U \\ \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}m\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} &= -\boldsymbol{\nabla} U \cdot \vec{v} \\ \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} \cdot \vec{v} = \mathcal{P} \end{aligned}$$

On aurait pu partir du théorème de la puissance cinétique...

On intègre entre les instants t_1 et t_2 :

$$\begin{aligned} E_c(t_2) - E_c(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t \\ &= \int_{r_1}^{r_2} -\boldsymbol{\nabla} U \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ &= -\int_{U_1}^{U_2} \mathrm{d}U \\ &= U_1 - U_2 \end{aligned}$$

U est l'énergie potentielle du système : U_1 désigne l'énergie potentielle au point initial, à t_1, et U_2 l'énergie potentielle à la fin, à t_2. L'invariance temporelle du système implique donc la conservation de l'énergie mécanique !

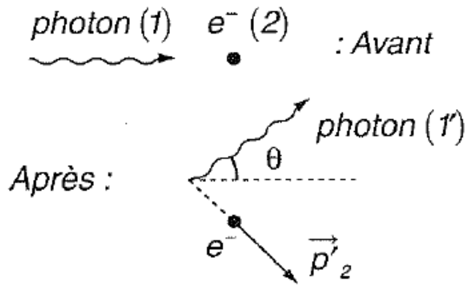
Application : diffusion Compton :

On a donc vu la conservation de l'impulsion, du moment cinétique et de l'énergie comme des conséquences des caractéristiques de l'espace et du temps (homogénéité et isotropie de l'espace, homogénéité du temps). Il est clair que l'introduction de frottements brise la plupart de ces symétries... Peut-on donner un cadre plus général à ces concepts ?

$$\overrightarrow{p_1} + \vec{0} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2} \qquad (1)$$

et : $$p_1 c + mc^2 = E'_2 + p'_1 c \qquad (2)$$

avec : $$E'^2_2 = p'^2_2 c^2 + m^2 c^4$$



$$(1) \quad \Rightarrow \quad p'^2_2 = p_1^2 + p'^2_1 - 2\, p_1\, p'_1 \cos\theta$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad p'^2_2 = \frac{E'^2_2}{c^2} - m^2 c^2 = \left((p_1 - p'_1) + mc\right)^2 - m^2 c^2$$

d'où : $$\cos\theta = mc\left(p_1^{-1} - p_2^{-1}\right) + 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta\lambda = \lambda' - \lambda = \Lambda \cdot (1 - \cos\theta)}$$

FIGURE 1 – *Correction agreg 2001 diffusion Compton BUP849(2)*

2 Théorème de Noether

2.1 Symétries d'un système lagrangien

On considère un système de lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, dont la dynamique est donnée par l'équation d'Euler-Lagrange.

On considère une transformation inversible des coordonnées $q \to q' = f(q, t)$, telle que

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

Il y a alors **covariance**, c'est à dire que l'es équations d'Euler-Lagrange dans les 2 systèmes de coordonnées et pour les 2 lagrangiens sont équivalentes. C'est une propriété des équations d'Euler-Lagrange

On définit une **symétrie** d'un système lagrangien comme une transformation telle que les équations d'Euler-Lagrange pour $\mathcal{L}'$ sur q' sont les mêmes que celles pour $\mathcal{L}$ sur q. Une manière de l'écrire est :

$$\begin{aligned} EuLa(\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) &\implies \mathcal{D}(q, \dot{q}, t) = 0 && (1) \\ EuLa(\mathcal{L}(q', \dot{q}', t)) &\implies \mathcal{D}'(q', \dot{q}', t) = 0 && (2) \\ & && (3) \end{aligned}$$

Une simmétrie correspond à

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour cela est :

$$\boxed{\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}\mathcal{G}}{\mathrm{d}t}} \qquad (4)$$

ou, en "français", les lagrangiens doivent être égaux à une dérivée totale par rapport au temps près.

Méthode :

Le calcul de $\mathcal{L}'$ se fait comme suit :

$$\mathcal{L}'(q,' \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}\left(g(q', t), \sum_i \frac{\partial g}{\partial q'_i} \dot{q}_i{}' + \frac{\partial g}{\partial t}, t\right)$$

où $g = f^{-1}$. *C'est pas forcément à évoquer mais je préfère l'avoir sous la main.*

2.2 Notion de symétrie infinitésimale

Une transformation infinitésimale du lagrangien est une transformation de la forme :

$$q' \to q + \delta q$$

avec $\delta q = \epsilon g(q,t)$ petit d'ordre 1.

On suppose que cette transformation est une symétrie du lagrangien. La fonction $\mathcal{G}$ peut alors être écrite sous la forme :

$$\mathcal{G}(q,\dot{q},t) = \epsilon \mathcal{F}(q,t)$$

Une transformation infinitésimale des coordonnées implique que les 2 lagrangiens sont différents à l'ordre 1.

La condition de symétrie infinitésimale est alors :

$$\boxed{\mathcal{L}(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - \mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \epsilon \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t}} \tag{5}$$

Exemples :

— OH à 2D : $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + \frac{k}{2}\left(x^2+y^2\right)$. La transformation infinitésimale $\delta x = \epsilon y, \delta y = -\epsilon x$ est une symétrie infinitésimale.

— Chute libre : $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$. La translation infinitésimale selon z $\delta z = \epsilon$ est une symétrie infinitésimale. En effet,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(z',\dot{z}',t) &= m\frac{\dot{z}^2}{2} - mg(z+\epsilon)\\ &= \mathcal{L}(z,\dot{z},t) - \frac{\mathrm{d}mg\epsilon t}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

2.3 Transformation des coordonnées et charge conservée

On va regarder la conséquence du fait que les équations du mouvement sont vérifiées, malgré l'application d'une symétrie infinitésimale.

La condition de symétrie infinitésimale s'écrit comme :

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t}$$

Cela se réécrit comme :

$$\sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right) = \epsilon\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t}$$

On utilise le fait que :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

Pour aboutir à :

$$\sum_i \left[\delta q_i \underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\right)}_{=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)\right] = \epsilon\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t}$$

On en déduit alors que la quantité

$$\boxed{Q = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} g_i(q,t) - \mathcal{F}} \tag{6}$$

est conservée au cours du temps. *En n'oubliant pas que $q_i = \epsilon g_i(q,t)$.* Q est appelée **charge de Noether**.

Remarque : c'est une version simplifiée du théorème, car la transformation n'est donnée que par un seul paramètre. De manière générale, il y a autant de quantités conservées que de paramètre de la transformation.

Exemples :

— Translation spatiale : on considère deux particules à 1D, en interaction selon le potentiel $V(|q_1 - q_2|)$. On considère la transformation infinitésimale $\delta q_i = \epsilon$. C'est une symétrie infinitésimale : on a $\dot{q}_i' = \dot{q}_i$ et $'_1 - q_2' = q_1 - q_2$, donc

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - V(|q_1 - q_2|)$$

est invariant. La charge conservée est alors :

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \times \underbrace{1}_{g_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \times \underbrace{1}_{g_2} = m_1\dot{q}_1 + m_2\dot{q}_2$$

On retrouve que la quantité de mouvement totale du système est conservée !

— OH à 2D :

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m(\dot{x}y - \dot{y}x) = m\vec{L} \cdot \vec{e_z}$$

La composante du moment cinétique selon l'axe de rotation est conservée.

— Chute libre : on avait $\delta\mathcal{L} = -\epsilon\frac{\mathrm{d}mgt}{\mathrm{d}t}$ donc al charge conservée est :

$$Q = mz - (-mgt) = m\dot{z} + mgt$$

2.4 Cas de la translation temporelle

On considère cette fois ci une tranlsation infinitésimale dans le temps : $t \to t' = t + \delta t$.

La condition de symétrie dans ce cas s'écrit : $\delta\mathcal{L} = 0$ (on peut toujours se ramener à $\mathcal{F} = 0$ dans ce cas). Cela implique que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\delta t = 0$$

ce qui revient à dire que le lagrangien n'est pas explicitement dépendant du temps. La quantité conservée est alors :

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}$$

que l'on identifie au hamiltonien, la transformée de Legendre du lagrangien pour la variable $\dot{q}_i$.

Exemple : Pour une particule dans un potentiel $V(q)$, le hamiltonien s'identifie à l'énergie totale du système.
L'énergie est la quantité conservée lors d'une invariance par translation temporelle.
On a retrouvé les résultats du I !

3 Problème de Keppler

3.1 Le problème à deux corps

On considère des points matériels de masses m_1 et m_2 tel que le système est isolé (ou pseudo-isolé ?). On peut par exemple prendre le cas de la Terre et de la Lune en négligeant les non-sphéricités (pour la Terre aplatissement $e = 1/300$) et en négligeant les interactions avec autres astres. On considère que la seule force qui s'applique est la force gravitationnelle :

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = \frac{-\mathcal{G}m_1m_2}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r \quad \text{qui dérive de} \quad U = \frac{-\mathcal{G}m_1m_2}{r}$$

avec $\mathcal{G} = 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m\,kg^{-3}\,s^{-2}}$ la constante universelle de gravitation.

On a donc 6 variables (12 plutôt ?). En identifiant les invariances, cela va nous donner des quantités conservé et donc, cela diminuer notre nombre d'inconnues.

Tout d'abord avec l'approche Lagrangienne on se ramène on simplifie notre problème :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{\mathbf{r_1}}}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{\mathbf{r_2}}}^2 + U(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1) = \frac{1}{2}M\dot{\vec{\mathbf{R}}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{\mathbf{r}}}^2 + U(\vec{\mathbf{r}})$$

Avec $M = m_1 + m_2$ et $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

Cela revient au changement de variable :

$$\left(\vec{\mathbf{OM_1}} = \vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{OM_2}} = \vec{\mathbf{r}}_2\right) \longrightarrow \left(\vec{\mathbf{R}} = \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\delta_2}{m_1 + m_2}, \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1\right)$$

Et

$$(\vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{p}}_2) \longrightarrow \left(\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2, \vec{\mathbf{p}} = \mu\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}\right)$$

Le premier terme de ce changement de variable correspond à la dynamique du centre de masse et le second à la dynamiques du déplacement relatif des masses. Le système est isolé, donc la dynamique du centre de masse est invariante par translation selon toutes les direction. Donc le centre de masse est en translation uniforme : l'application de la conservation de la quantité de mouvement totale permet de restreindre 3 degrés de liberté.

Bilan

- 1+2 est isolé $\implies$ Le centre de masse est en translation uniforme
- On se ramène à une particule fictive de masse μ et qui subit la force F_{12}
- On sait ce ramener au cas des $r_1$et r_2 une fois que l'on aura résolu r

3.2 Utilisation des invariants

Conservation du moment cinétique

La force F_{12} dérive de $U = \frac{-\mathcal{G}m_1m_2}{r}$ qui est invariante par rotation, on a donc conservation du moment cinétique. On remarque que l'on gagne du temps ici ! En effet on pourrait utiliser le TMC et montrer la conservation de $\vec{\mathbf{L}}$, ici la simple analyse des symétrie nous permet de le savoir. Ma conservation du moment cinétique implique la planéité de la trajectoire ($\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{cst}}$) et la loi des aires $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2}$

Conservation de l'énergie Comme U ne dépends pas explicitement du temps, on a conservation de l'énergie pour la particules fictive.

$$E_m = E_c + U = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{-\mathcal{G}m_1m_2}{r}$$

En utilisant $C = cst$ on peut écrire :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - \frac{-\mathcal{G}m_1m_2}{r}}_{\text{Potentiel effectif}}$$

On peut tracer le profil et on distingue plusieurs cas : Code Energie eff :

- $E < 0$ La trajectoire est liée. La trajectoire est une ellipse. La planète se déplace entre r_{min} et r_{max}. De plus pour de E de l'ordre de E_{min} alors on peut approximer le potentiel par une parabole et la trajectoire est circulaire (on parle de librations).
- $E = 0$, r_{max} est rejeté à l'infini. On a une parabole.
- $E > 0$ Ce sont des états libres. La trajectoire est une hyperbole.

Théorème de Bertrand, les seules forces centrales qui admettent une trajectoire fermée sont les forces en $\vec{\mathbf{r}}$ *ou* $\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3}$ *ouf!!!* **ODG** :

Pour la Lune autour de la Terre :$r \simeq 384 \times 10^6$ m, $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{29.5\times86400} = 2.46 \times 10^{-6}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $m_1 = 7.3 \times 10^{22}$ kg et $m_2 = 6.0 \times 10^{24}$ kg. On obtient une énergie mécanique de -4.4×10^{28} J : c'est bien un état lié !

Pour envoyer une sonde hors de l'influence de la Terre, il faut que son énergie mécanique soit positive, alors qu'elle part du sol (donc du rayon terrestre). Pour cela, il faut que sa vitesse soit supérieure à

$$\sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = 11\,\mathrm{km\,s} - 1$$

On appelle cette valeur la vitesse de libération terrestre. On peut voir qu'elle est indépendante de la masse de l'objet étudié.

Bilan

On a utiliser la **conservation de la quantité de mouvement** pour ce centre de masse On passe de 6 variables à 3 variables.

L'invariance par rotation nous donne la **conservation du moment cinétique** on passe de 3 à 1 variable

La **conservation de l'énergie** nous permet d'avoir la dernière équation sur r

Mais on a pas vraiment les trajectoires car l'équation sur l'énergie n'est pas facile à résoudre.

3.3 Les trajectoires

Ici résoudre l'équation est possible car on a assez d'équation. Cependant pour avoir les trajectoire de manière plus efficaces on utilise une autre quantité conservé (redondante avec les autres) qui nous permet de faciliter les calculs : Le vecteur de Runge-Lenz :

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{L}} - \mathcal{G}m_1m_2\vec{\mathbf{e}}_r$$

On put le trouver en réarrangeant le PFD. Nous on va se contenter de vérifier qu'il est bien conservé :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \times \vec{\mathbf{L}} - \mathcal{G}m_1m_2\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\theta$$

Car $\vec{\mathbf{L}} = \mu r^2\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_z$ est conservé. Or avec le PFD, on a :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu r^2}\vec{\mathbf{e}}_r$$

On a donc bien

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{0}}$$

On remarque que $\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{0}}$ ceci signifie que $\vec{\mathbf{A}}$ est dans le plan du mouvement. Ainsi son produit scalaire avec le vecteur position nous permet de déterminer ce vecteur position :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{r}} =& \left(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{L}}\right)\vec{\mathbf{r}} - \mathcal{G}m_1m_2\vec{\mathbf{e}}_r\vec{\mathbf{r}} \\ =& r\dot{\theta}Lr - \mathcal{G}m_1m_2r \\ =& \mu C^2\mathcal{G}m_1m_2r\end{aligned}$$

Donc

$$Ar\cos(\theta) = \mu C^2\mathcal{G}m_1m_2r$$

On a alors une équation implicite $r(\theta)$:

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\mu C^2}{\mathcal{G}m_1m_2} \quad \text{et} \quad e = \frac{A}{\mathcal{G}m_1m_2}$$

C'est l'équation d'une conique. On retrouve les différents cas en fonction de e. On peut montrer le lien entre E_m et

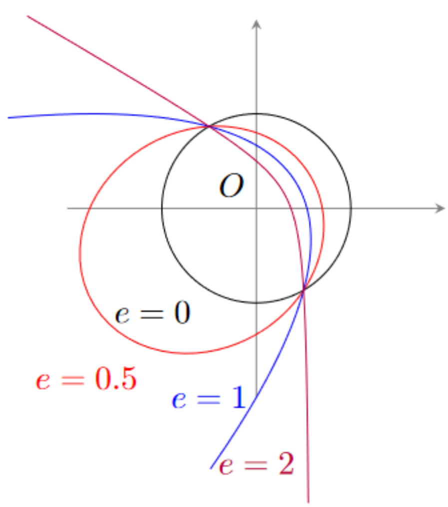


FIGURE 2 – *Connique*

e

$$E_m = \frac{\mathcal{G} m_1 m2}{2p}\left(e^2 - 1\right)$$

On a résolu l'ensemble du mouvement sans utiliser la moindre équation différentielle !

Le vecteur de Runge Lenz est aussi associé à une symétrie. Tout d'abord il n'est conservé que pour les potentiel en $1/r$ et l'invariance associé est le groupe SO(4) (rotation en 4 D)

Le vecteur de Runge-Lenz est dans le plan, pointe vers le périhélie et sa norme augmente avec l'ellipticité

Application Sur diapo Sagitarrius A. En réalité les défaut de sphéricité font qu'on a pas vraiment des ellipses mais des fleurs.

Conclusion

Nous avons vu qu'il exister un lien intime entre invariance et quantité conservé. Les lois de conservation découlent ainsi d'une invariance propre du système. Tout ceci est formalisé dans le formalisme Lagrangien et est explicité par le fabuleux théorème de Noether.

Nous soulignons que l'utilisation de quantités conservées est essentielle en physique puisqu'elle permet de restreindre le nombre de degrés de liberté à prendre en compte. Nous avons effectivement pu résoudre les trajectoires du problème à 2 corps soumis à des forces Newtoniennes sans résoudre d'équation différentielle. Ouverture :Aie Aie aie ca sent les question de symétries en quantique.... *Avez-vous déja entendu parler de seconde quantification ?*