Gey Lucas, Rossetti Sylvio

Cinématique relativiste

Niveau

Commentaires du jury

- 2016 : Les notions d'événement et d'invariant sont incontournables dans cette leçon.
- 2015 : Le jury rappelle qu'il n'est pas forcément nécessaire de mettre en oeuvre des vitesses relativistes pour être capable de détecter et de mesurer des effets relativistes. Jusqu'en 2013, le titre était : Principes de la cinématique relativiste. Conséquences.
- 2014 : Cette leçon exige une grande rigueur dans l'exposé tant sur les notions fondamentales de relativité restreinte que sur les référentiels en jeu. Elle invite les candidats à faire preuve d'une grande pédagogie pour présenter des notions a priori non intuitives et faire ressortir les limites de l'approche classique. Un exposé clair des notions d'invariant relativiste et de composition des vitesses et de ses propriétés est incontournable dans cette leçon. La réciprocité des effets de dilatation des durées et de contraction des longueurs doit être soulignée.
- 2010 : Il n'entre pas dans le cadre de cette leçon de démontrer la transformation de Lorentz-Poincaré. La notion d'événement est un outil central. Jusqu'en 2007, le titre était : Principes de la cinématique relativiste. Durée propre. Longueur propre.
- 2007, 2008 : Les principes de la relativité restreinte doivent être énoncés de manière complète et précise. Les notions de durée ou de longueur propres ne prennent tout leur sens qu'en envisageant les phénomènes de contraction et dilatation. La description d'expériences ou d'applications mettant en jeu ces notions permet de rendre le contenu de cette leçon plus concret.
- 2006 : Il ne faut pas se contenter de présenter cette leçon de manière théorique et laisser une bonne place aux applications.
- 2002 : Les applications réalistes, pour lesquelles les observations expérimentales réelles s'interprètent grâce aux résultats de la cinématique relativiste, sont à rechercher

Bibliographie

—

pré-requis

- Mécanique newtonienne

Expériences

—

Table des matières

Introduction

En 1900 Lord Kelvin considérait devant la Royal Institution de Londre qu'il ne restait que deux petits nuages flottant dans le ciel bleu de la physique :
— Le rayonnement du corps noir et la catastrophe ultraviolette qui donnera lieu à la mécanique quantique
— La propagation de la lumière avec la théorie de l'éther, ce qui amènera la relativité restreinte. QUe nous allons introduire aujourd'hui.

1 Insuffisance de la description Galiléenne

1.1 Outils de description

Jusqu'à présent on connaît la mécanique Newtonienne. Pour repérer un objet dans l'espace, on utilise un repère, c'est à dire un système d'axe en 3 dimensions qui nous permet d'associer sans ambivalence à chaque objet une position. Cependant, c'est insuffisant : Si je considère le mouvement d'une balle il faut que j'ajoute à la description spatial de l'objet une donné de temps. Je vais dire la balle est passé au point (0,1,24) au temps 1.5s.
On définit ainsi un **référentiel** : Système d'axe associé à une horloge. Chaque chose qui se produit est alors décrit par une position et un temps : on parle d'**évènement**.

On a un outils descriptif. On peut alors observer des lois (par exemple les lois de la gravité).

On dira que le référentiel est **Galiléen** ou **inertiel** si le principe d'inertie y est respecté. C'est ce que l'on suppose ici.

Principe d'inertie : dans un référentiel galiléen, un objet dont la résultante des forces qu'il subit est nulle a un MTRU.

Maintenant, considérons un homme dans un train qui se déplace à vitesse constante. Il décidera de placer son repère dans le train et de faire les mêmes expériences que moi.

Je peux alors déduire tout ce qui se passe dans le train en considérant la transformation suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}' &= \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{v}}|_{R'/R} t \\ t' &= t \end{aligned}$$

C'est ce qu'on appel la transformation de **Galilée**. Elle est issue de la loi de composition des vitesses.

Un postulat de la description Galiléenne est qu'on observera les même lois de la physique en se plaçant dans le train ou sur Terre. C'est le **principe de relativité Galiléenne**. **Attention** Si le train ralentit, alors on va voir des effets différent (c'est intuitif, car on le ressent dans le train qui ralentit) Le principe de relativité Galiléenne stipule que la transformation de Galilée laisse les lois de la physique invariantes. on peut remarquer que dans cette transformation le temps est supposé absolu car il n'est pas modifié par la transformation. Une autre conséquence, c'est que selon la description Galiléenne il n'y a pas de mouvement absolu (*ie* un corps/référentiel de référence immobile).

Il y a la composition des vitesse. La vitesse d'un objet sur le train correspond dans mon référentiel fixe

$$V|_{R_0} = v|_{R_{\text{Train}}} + V(\text{Train})|_{R_0}$$

Il faut comprendre que cela permet d'expliquer la plupart des expériences sur Terre, et c'est vraiment des transformations qui nous semblent intuitives et qui fonctionnent tout le temps. Cependant, au XIXème siècle l'électromagnétisme remet en question ceci.

1.2 Insuffisance de la représentation galiléenne

L'électromagnétisme (XIXeme) avec les équations de Maxwell prédisent une vitesse de la lumière dans le vide fixe :

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$$

sauf que aucun référentiel n'est précisé !

Ceci ne semble pas coller avec la description précédente, car si je suis dans une fusée, qui avance à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans le sens de la lumière je m'attend à mesurer la lumière plus rapide !

Deux points de vu sont possible pour résoudre ce problème :

— Il existe un repère privilégié, absolu, dans lequel les lois de l'électromag sont valides : L'**Ether**. La lumière se déplacerait à c dans ce référentiel.

— Les équation de Maxwell sont valables dans tous les référentiels inertiels, le principe de relativité est préservé, mais c'est la mécanique Newtonienne qu'il faut revoir.

Pour trancher il faut faire des expériences ! ! Les scientifiques ont alors essayer de prouver l'existence de l'Ether. C'est par exemple le cas de l'expérience de Michelson et Morley en 1887 puis qui fut répétée plusieurs fois ensuite. Elle ne permettent pas de montrer l'existence de L'Ether, leurs mesures vont même dans le sens contraire. Nous allons ici nous intéresser à l'expérience de Fizeau, en 1851.

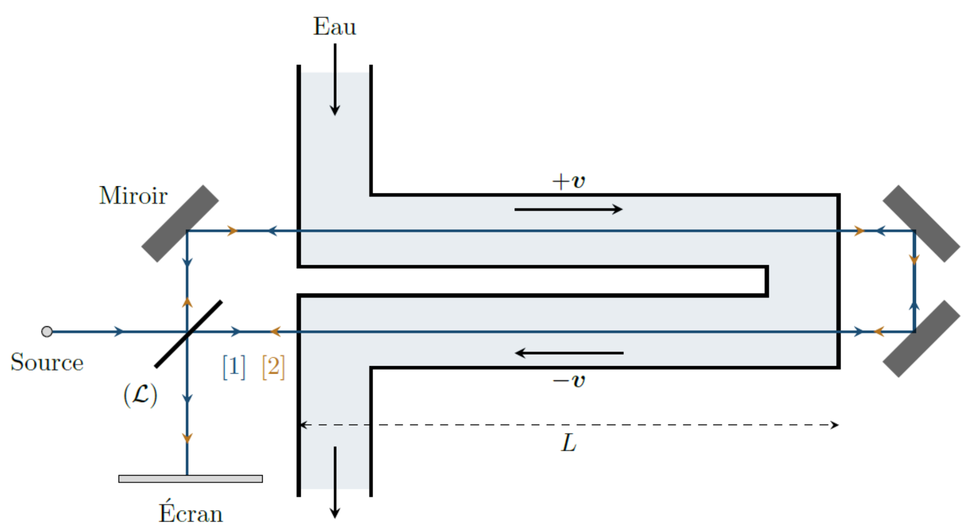

Figure 1 – *Expérience de Fizeau.*

Le principe repose sur l'interférence entre deux rayons :

— Le rayon 1 en bleu parcourt l'interféromètre dans le sens inverse du fluide

— Le rayon 2 en orange parcourt l'interféromètre dans le sens du fluide.

Si on suit la loi de composition des vitesse de la description Galiléenne, on trouve que le retard entre les deux rayon est :

$$\Delta t = 2L\left(\frac{1}{\frac{c}{n} - v} - \frac{1}{\frac{c}{n} + v}\right) = \frac{4Lv}{\left(\frac{c}{n} - v\right)\left(\frac{c}{n} + v\right)} \simeq \frac{4LVn^2}{c^2}$$

On compare le décalage des frange avec $v = 0$:

$$\Delta p = \frac{c\Delta t}{\lambda} \simeq \frac{4LVn^2}{\lambda c}$$

Pour arriver au résultat, il faut voir que les rayons parcourent $2L$ à la vitesse $c/n \pm v$.

ODG : La mesure donne $\Delta p = 0.17$ franges.$\lambda = 590nm$, v = 5m/s, L = 2m et n = 1,33.

Ici, en faisant l'application numérique, on obtient 0.40 franges.

C'est en désaccord avec l'expérience... Il nous faut donc remettre en cause les hypothèses de la mécanique Newtonienne, chose très difficile à l'époque car elle a déja permis de rendre compte d'un très grand nombre de phénomènes : la mécanique newtionienne a été éprouvée dans de très nombreux cas...

2 Principes de la relativités restreinte

2.1 Transformée de Lorentz

On doit avoir un nouveau jeu de postulat pour construire notre théorie :

— Les lois le la physique sont invariante par changement de référentiel inertiel

— Les équations de Maxwell sont des lois de la physique

Remarque :

— Le deuxième postulat à pour conséquence que la vitesse de la lumière est constante dans le vide dans tout référentiel inertiel.

— Ce que l'on peut souligner ici c'est que le principe de relativité était déjà présent dans le mécanique Newtonienne. Ce qu'on vient remettre en cause ici c'est la transformation qui nous permet de passer d'un référentiel inertielle à l'autre.

Mais alors quelle transformation prendre ? ?

Pour se familiariser avec ce postulat on peut essayer d'en voir une conséquence : On considère un train qui avance à vitesse constante. On considère 2 expérimentateurs, l'un à la gare, associé au référentiel $R(x, y, z, t)$ l'autre dans le train associé au référentiel $R(x', y', z', t')$.

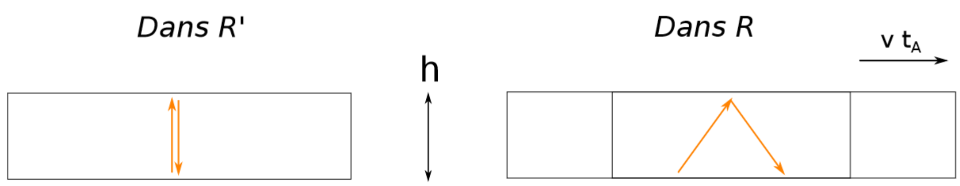

FIGURE 2 – *Dillatation du temps*

Un photon est émis au sol du train, se réfléchit sur le plafond du train et revient au départ. La question est la suivante. Quelle est le temps de parcourt par le photon, dans chaque référentiel ? Le plus simple est dans R' Le photon fait un aller-retour, il parcourt donc

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

Dans R, en utilisant les propriétés des triangles on a :

$$(c\Delta t)^2 = (v\Delta t)^2 + (2h)^2$$

On en déduit que

$$\Delta t = \frac{2h}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Finalement en combinant les deux résultats, on a

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad \text{Avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

γ est appelé le facteur de Lorentz. Notons qu'à basse vitesse, la correction est négligeable.

Ici on comprends, que mesurer un temps dans un référentiel est différent de le mesurer dans un autre, le temps n'est plus absolu ! Comme $\gamma \leq 1$, vu de R l'horloge a l'air ralentie.

De la même manière que l'on avait la transformation de Galilé, on peut montrer que la transformation de Lorentz va nous permettre de passer d'un référentiel à un autre. Aussi dans un cas général (et pas que dans le cas du train précédent) on a le **Boost de Lorentz** (ou transformation spéciale de Lorentz) : On considère R' en translation

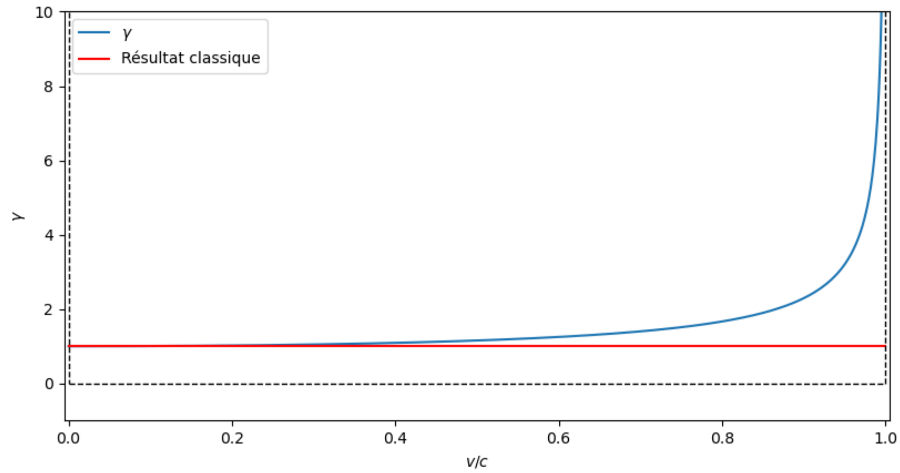

FIGURE 3 – *Représentation de γ en fonction du rapport v/c.*

vitesse en m/s	γ
0	1
TGV : 83 m/s	1.0000000000000384
10% de c	1.005
125000000	1.1

TABLE 1 – *Tableau d'ordres de grandeurs*

uniforme selon $\vec{\mathbf{e}}_x$ à la vitesse v par rapport à R supposé inertiel avec des horloges initialement synchronisé. Un évènement de R est décrit dans R' par : (en notant $\beta = \frac{v}{c}$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On remarque déjà que cette transformation est cohérente avec le cas précédent : Pour $x = 0$, la première ligne donne$ct' = \gamma ct$

2.2 Les invariants dans le formalisme de la transformée de Lorentz

Cette définition semble un peu compliquée et on peut se demander d'où elle vient. En effet on a montrer qu'elle était cohérente dans un cas particulier mais c'est pas suffisant. En réalité on peut montrer que les postulats (couplés à l'homogénéité de l'espace temps) impliquent l'invariance de l'intervalle d'espace temps entre deux événements $(ct_i, \vec{r_i})$:

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r_2} - \vec{r_1})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \vec{\mathbf{r}})^2$$

Démonstration :

On considère 2 événements $(ct_1, \vec{r_1})$ et $(ct_2, \vec{r_2})$. On a d'un côté : $\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r_2} - \vec{r_1})^2$.

D'autre part, on considère un boost de Lorentz selon l'axe Ox. Les coordonnées après transformation sont données par :

$$ct'_i = \gamma ct_i - \beta\gamma x_i \text{ et } x'_i = -\beta\gamma ct_i + \gamma x_i$$

On calcule les nouveaux intervalles d'espace-temps :

$$c(t_2 - t_1) = \gamma c(t_2 - t_1) - \beta\gamma(x_2 - x_1) \text{ et } x_2 - x_1 = -\beta\gamma c(t_2 - t_1) + \gamma(x_2 - x_1)$$

On met au carré et on calcule la différence pour trouver $\Delta s' = \Delta s$.

C'est de cette invariance que l'on déduit les transformations de Lorentz, ce sont les transformations tels que $\Delta s' = \Delta s$

En plus des transformées de Lorentz, les rotations et les translations d'espace et de temps préservent Δs.

2.3 causalité et simultanéité

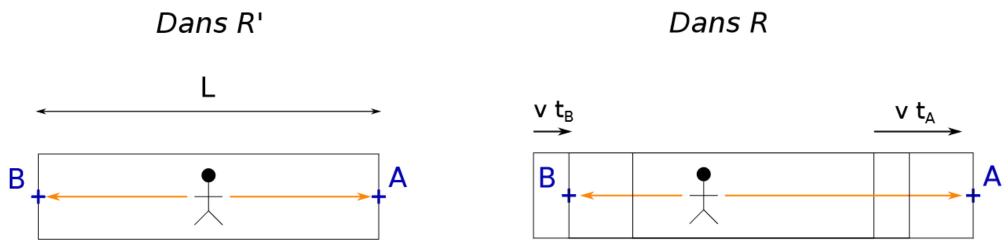

FIGURE 4 – *Perte de simultaneité*

2.3.1 Perte de simultanéité

On va voir la perte de simultanéité sur un exemple. Un observateur situé au milieu du train envoie en même temps des signaux lumineux vers A et B.

Dans $\mathcal{R}'$: $ct'_A = ct'_B = L'/2$: les arrivées des rayons sont simultanées.

Dans $\mathcal{R}$:

Réception en A à t_A tel que : $ct_A = \frac{L}{2} - vt_A$

Réception en B à t_B tel que : $ct_B = \frac{L}{2} + vt_B$

Ainsi,

$$\frac{L}{2(c+v)} = t_A \neq t_B = \frac{L}{2(c-v)}$$

Les 2 événements ne sont pas simultanés.

2.3.2 Intervalles

On distingue 3 catégories de couples d'événements :

— Si $\Delta s^2 > 0$, alors $c^2\Delta t^2 > \Delta\vec{r}^2$ donc on peut relier les 2 événements par un signal physique. L'intervalle est dit de genre "temps".

— Si $\Delta s^2 < 0$, on ne peut pas relier physiquement les événements. On parle d'intervalle genre "espace".

— Si $\Delta s^2 = 0$, seul un signal lumineux se propageant dans le vide peut relier les événements : c'est un intervalle genre "lumière".

On représente graphiquement cela dans un diagramme d'espace temps. Y situer les différentes intervalles, le futur, le passé, l'ailleurs et le cône de lumière.

2.3.3 Perte de simultanéité absolue

On considère $(ct, \vec{r_1})$ et $(ct, \vec{r_2})$ simultanés dans le référentiel $\mathcal{R}$ inertiel.

Dans $\mathcal{R}'$,

$$ct'_i = \gamma ct - \beta\gamma x_i \text{ et } x'_i = -\beta\gamma ct + \gamma x_i$$

Alors $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\beta\gamma(x_2 - x_1) \neq 0$! La simultanéité est relative au référentiel inertiel d'observation. En particulier, il existe des référentiels inertiels où les événements M_1 et M_2 sont tels que M_1 antérieur à M_2, et d'autres où M_2 est antérieur à M_1 (car β est algébrique).

Il se pose alors la question de la causalité : on comprend qu'un événement antérieur peut avoir une influence sur un événement ultérieur, mais si cette notion dépend du référentiel dans lequel on se situe, on a un problème.

Ici, il faut calculer l'invariant : $\Delta s^2 = -\Delta\vec{r}^2$: c'est un intervalle de genre espace. Les événements ne sont pas reliés causalement.

Par ailleurs, pour les intervalles de genre temps, on montre que le signe de Δt est préservé par la transformée de Lorentz.

3 Applications de la transformée de Lorentz

3.1 Dilatation et contraction du temps

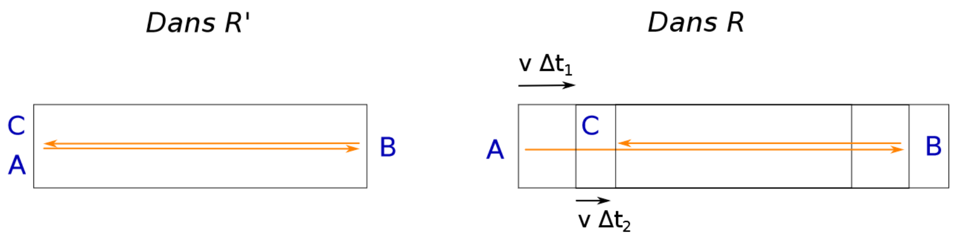

FIGURE 5 – *Contraction des distances*

On considère 2 événements dans $\mathcal{R}'$, au même endroit mais à des instants différents (un "tic" et un "tac"). On a $\Delta t \neq 0$ et $\Delta \vec{r'} = \vec{0}$.

Dans $\mathcal{R}$, $\Delta t = \gamma \Delta t'$: la période dans $\mathcal{R}$ paraît plus longue que dans $\mathcal{R}'$, où l'horloge est au repos.

La confirmation expérimentale de ce fait est l'expérience de Frisch et Smith en 1963.

Frisch et Smith ont mesuré le nombre de muons arrivant sur Terre, à 2 altitudes. On connait le temps caractéristique de désintégration des muons dans leur référentiel propre et leur vitesse ($\approx 0.995c$). On peut remonter au nombre de muons que l'on devrait mesurer à une altitude en fonction de la mesure à l'autre altitude. La théorie classique n'explique pas la mesure effectuée. La prise en comtpe de la dilatation du temps pour les muons, si.

3.2 Effet Doppler relativiste

On considère pour commencer le cas longitudinal, dans le référentiel de la source. La source est fixe, et le récepteur s'éloigne à la vitesse v. On envoie des ondes lumineuses se déplaçant à la vitesse c, avec une période d'émission dans le référentiel de la source de $T = \frac{c}{\nu_s}$.

Le récepteur reçoit un premier front d'onde. Le front d'onde suivant doit parcourir λ pour parvenir à la position du récepteur. Cependant, ce dernier s'est également déplacé, d'une distance $T_r v$: au total, la longueur d'onde perçue par le récepteur est $\lambda_r = \lambda + vT_r$. Or, par définition, $\lambda_r = cT_r$ d'où :

$$T_r = \frac{1}{\nu_s}\frac{1}{1-\beta}$$

On notera que dans le raisonnement, on a dit "le récepteur s'éloigne", mais le raisonnement s'applique dans les deux cas, et la formule reste valable.

On a donc calculé la période perçue par le récepteur... mais dans le référentiel de la source ! Il reste à corriger la dilatation temporelle : ainsi, la période perçue par le récepteur dans son référentiel est :

$$T_r^{\text{propre}} = \frac{T_r}{\gamma}$$

Ou bien, en termes de fréquences :

$$\nu_r^{\text{propre}} = \nu_s \gamma (1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Voir la LP effet Doppler pour les formules dans le cas transverse. L'effet Doppler est également transverse !

Cet effet doit *absolument* être pris en compte dans le cas des GPS, cf lecon effet Doppler encore.

3.3 Transformation des vitesses

On considère une particule de vitesse $\vec{w} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ dans $\mathcal{R}$.

Dans $\mathcal{R}'$ boosté selon $\vec{v_e} = v_e \vec{e_x}$ dans $\mathcal{R}$:

$$
\begin{aligned}
w'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\gamma(\mathrm{d}x - \beta c\mathrm{d}t)}{\gamma(\mathrm{d}t - \frac{\beta}{c}\mathrm{d}x)} \\
&= \frac{w_x - v_e}{1 - \frac{v_e w_x}{c^2}} \\
w'_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\gamma(\mathrm{d}t - \frac{\beta}{c}\mathrm{d}x)} \\
&= \frac{1}{\gamma}\frac{w_y}{1 - \frac{v_e w_x}{c^2}} \\
w'_z &= \frac{1}{\gamma}\frac{w_z}{1 - \frac{v_e w_x}{c^2}}
\end{aligned}
$$

Il est important de noter ici que même la partie orthogonale au mouvement est modifiée !

Dans la limite classique, on retrouve la composition classique des vitesses.

Formules dans le cas général :

Pour un boost $\vec{v_e}$ dans la direction $||$:

$$
\vec{w_{||}}' = \frac{\vec{w_{||}} - \vec{v_e}}{1 - \frac{\vec{v_e} \cdot \vec{w}}{c^2}} \quad ; \quad \vec{w}'_\perp = \frac{\vec{w}_\perp}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{v_e} \cdot \vec{w}}{c2}\right)}
$$

Ici, on peut faire le calcul de la norme de $\vec{w}'$ au carré, et montrer 1) qu'elle ne dépasse jamais c, 2) que si w=c, la norme de c est indépendante du référentiel. Mais c'est une page de calcul pour un résultat bof.

Retour sur l'expérience de Fizeau :

On a développé tout un nouveau formalisme, on va le mettre un peu à l'épreuve : est-ce qu'il permet d'expliquer l'expérience de Fizeau ?

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'$, en translation à $\pm v$ dans $\mathcal{R}$: la formmule de composition des vitesses donne :

$$
c' = \frac{c/n \pm v}{1 \pm \frac{cv}{nc^2}} = \frac{c/n \pm v}{1 \pm \frac{v}{nc}}
$$

pour la vitesse de la lumière dans les tuyaux.

On en déduit un retard

$$
\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{2L}{c'_-} - \frac{2L}{c'_+} \\
&= 2L\left(\frac{1 - \frac{v}{nc}}{\frac{c}{n} - v} - \frac{1 + \frac{v}{nc}}{\frac{c}{n} + v}\right)
\end{aligned}
$$

On peut s'arrêter là pour l'application numérique : $\frac{c}{\lambda}\Delta t = 0.174$ franges : le résultat expérimental était de 0.17.

A l'ordre 1, on a

$$
\Delta t = \frac{4Lv}{c^2/n^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)
$$

Ce résultat, proposé en 1818 par Fresnel, a d'abord été perçu comme une confirmation du fait que, lorsqu'un corps d'indice n se déplace à la vitesse v par rapport à l'éther immobile, l'éther contenu dans ce corps est partiellement entrainé dans la proportion $1 - \frac{1}{n^2}$. On considère que c'est l'expérience de Michelson et Morlet qui signera la fin de l'existence de l'éther comme milieu fixe de propagation de la lumière *askip il existe un truc comme l'ether en relat gé mais jsp ce que c'est....*

Conclusion

En conclusion, nous avons posé les bases de la relativité générale, et vu qu'elle pouvait avoir des applications. La relativité restreinte met en jeu des effets de dilatation temporelle et spatiale, qui sont extrêmement contre-intuitifs. Et pour cause : ceux-ci ne se manifestent que pour des vitesses vertigineusement grandes !

Cette première approche, purement cinématique, redéfinit le cadre d'étude du mouvement en mécanique. Afin de mener l'étude à son terme, il convient à présent de réaliser l'étude dynamique en relativité restreinte.