LP08 : Notion de viscosité d'un fluide. Ecoulements visqueux.

Niveau

Commentaires du jury

- 2017 : Il peut être judicieux de présenter le fonctionnement d'un viscosimètre dans cette leçon.
- 2016 : Le jury invite les candidats à réfléchir d'avantage à l'origine des actions de contact mises en jeu entre un fluide et un solide.
- 2015 : Afficher un tableau d'ordres de grandeur de viscosité ne suffit pas en soi pour illustrer la leçon. Tout exemple donné d'écoulement visqueux doit être maîtrisé par le/la candidat(e).Jusqu'en 2013, le titre était : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux. Nombre de Reynolds.Exemples simples.
- 2011, 2012, 2013, 2014 : L'exemple de l'écoulement de Poiseuille cylindrique n'est pas celui dont les conclusions sont les plus riches. Les candidats doivent avoir réfléchi aux différents mécanismes de dissipation qui peuvent avoir lieu dans un fluide. L'essentiel de l'exposé doit porter sur les fluides newtoniens : le cas des fluides non newtoniens, s'il peut être brièvement mentionné ou présenté, ne doit pas prendre trop de temps et faire perdre de vue le message principal.
- 2009, 2010 : Il importe de mettre clairement en évidence le caractère diffusif des forces de viscosité. Dans l'illustration expérimentale de l'écoulement de Couette plan, il faut s'assurer que l'on a bien atteint un régime permanent.
- 2008 : La signification physique du nombre de Reynolds est ici centrale.
- 2006 : Les notions d'écoulement tourbillonnaire et d'écoulement turbulent sont souvent mal assimilées. Les conditions d'applications de l'équation de Navier-Stokes sont ignorées.
- 2005 : La relation entre la valeur du nombre de Reynolds et la nature de l'écoulement sont mal dégagées. Il y a souvent confusion entre tourbillon et turbulence. Les conditions d'application de l'équation de Navier-Stokes sont ignorées.
- 2001 : Il est souhaitable de présenter un modèle microscopique simple de la viscosité. Il est utile de noter que le nombre de Reynolds s'interprète comme le rapport de deux temps caractéristiques de transport par diffusion et convection. La notion de couche limite peut être évoquée. On peut également présenter des écoulements autour d'obstacles.
- 2000 : L'interprétation microscopique des forces de viscosité est souvent sacrifiée.
- 1999 : La leçon doit permettre de montrer la compétition entre transfert convectif et transfert diffusif de quantité de mouvemen

Bibliographie

- Guyon page 95

pré-requis

- Mécanique newtonienne
- Ecoulement incompressible
- Accélération convective
- Diffusion

Expériences

— Vidéo écoulement de Poiseuille, l'écoulement commence vers 2min30s.

Table des matières

1 Notion de Viscosité **2**
1.1 Observation macroscopique . . . 2
1.2 Origines microscopique . . . 4
1.2.1 Cas des gaz . . . 4
1.2.2 Cas des liquides . . . 5

2 Mise en équation : dynamique d'un fluide visqueux **5**
2.1 Equation de Navier-Stokes . . . 5
2.2 Nombre de Reynolds . . . 5
2.3 Diffusion de quantité de mouvement . . . 7
2.4 Notion de couche limite . . . 7
2.5 Puissance dissipée . . . 7

3 Application **8**
3.1 Ecoulement de Couette cylindrique . . . 8
3.2 Le viscosimètre de Couette . . . 10
3.3 Ecoulement de Poiseuille . . . 10

Introduction

On fait couler de l'eau et du miel/de l'eau sucrée : le miel colle et coule doucement, l'eau parait plus "fluide".

On a une certaine intuition des fluides visqueux ou non : le miel, c'est visqueux. L'huile, c'est visqueux. L'eau, c'est pas visqueux. Est-ce que l'air est visqueux ? On a envie de dire que non aussi, puisqu'il ne "colle" pas, mais on est déja moins à l'aise. Aujourd'hui, on va appréhender la notion de viscosité et voir sa définition physique dans le cas de fluides particuliers : les fluides newtonniens.

1 Notion de Viscosité

1.1 Observation macroscopique

On veux décrire phénoménologiquement ceci : Vidéo viscosité

Observations

— On observe que le fluide ne se déplace pas en bloque mais que la vitesse sur les bords semble nulle
— Le fluide se déplace dans la direction du mouvement extérieur
— On observe que l'on agit sur l'extérieur et que cela transmet un mouvement vers le milieu : il y a donc une force

Pour rendre le problème plus simple, on s'intéresse à un écoulement plan : L'écoulement de Couette plan (c'est la même chose que la vidéo mais ne faisant tendre le rayon de courbure vers l'infini) : On dispose d'un fluide contenu entre deux plaques horizontales. On tire sur la plaque du haut avec une force surfacique F_x/S de sorte à imposer une vitesse V à la plaque supérieur

Expérimentalement, on observe :

$$v_x(z) = \frac{V}{h} z$$

Expérimentalement également on observe que pour certain fluides, la vitesse V augmente linéairement avec la contrainte :

$$\frac{F_x}{S} = \eta \frac{V}{h} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

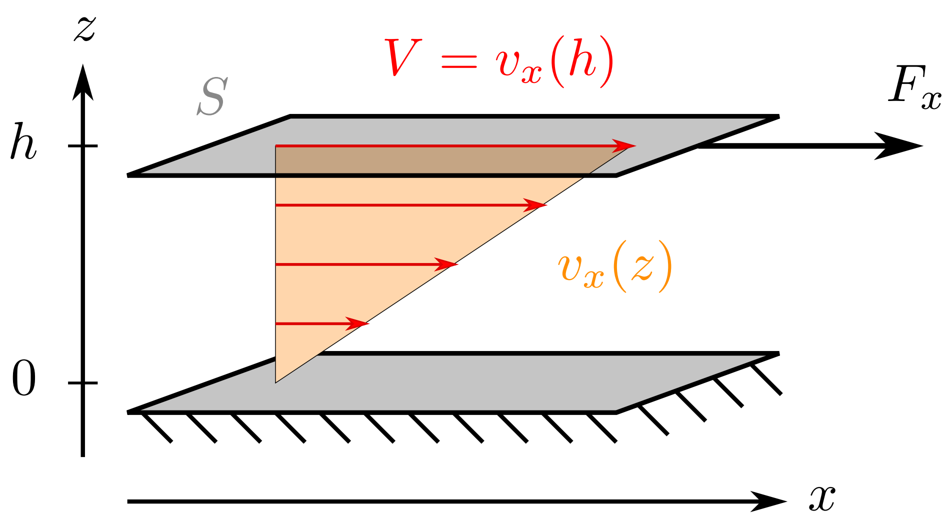

FIGURE 1 – *Ecoulement de Couette plan*

C'est la définition d'un fluide **Newtonien**. η est ici le coefficient de proportionnalité de la loi, on l'appelle le **coefficient de viscosité dynamique**

Remarque

- C'est une définition assez intuitive, plus le gradient de vitesse est élevé et plus les couches se freinent entre elles.
- La force surfacique est appelé **Contrainte de cisaillement** elles est homogène à une pression mais s'applique tangentiellement.
- Plus la viscosité dynamique est grande et plus il faut exercer une force importante pour déplacer des couches de fluide.
- La viscosité dynamique d'exprime en Pa.s = Pl (poiseuille si on aime se faire du mal et apprendre plein d'unités *en même temps la honte si tu connais pas le poiseuille.*)
- On peut faire une analogie avec la Loi de Fick : F/S est le vecteur densité de courant de quantité de mouvement relié aux inhomogénéité de v.

ODG :

Composé	η (en Pa.s ou Pl)
Air	$1,8.10^{-5}$
Eau	$1,0.10^{-3}$
Glycérol	$1,49$
Miel	$\sim 10^1 - 10^2$
Poix	2.10^8

FIGURE 2 – *ODG wikipedia*

Essayons de comprendre microscopiquement les origines de la viscosité

1.2 Origines microscopique

Guyon page 95

1.2.1 Cas des gaz

Attention tout ce qui suit dans cette sous partie ne s'applique qu'au cas des gaz.

On considère donc un gaz dans un écoulement horizontal (selon e_x) : $\vec{\mathbf{v}} = v(z)\vec{\mathbf{e}}_x$. Cette vitesse correspond à une vitesse d'ensemble. Cependant à l'échelle microscopique on considère un chaos microscopique et des particules qui bougent dans tous les sens. Elles ont donc une vitesse u thermique très grande devant v : $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_bT$ (à température ambiante, $u = 500\,\mathrm{m/s}$). On suppose cette distribution des vitesse isotrope de sorte qu'1/6 des atomes vont dans chaque direction. On note l le libre parcours moyen. On suppose de plus une densité d'atome n tous de masse m.

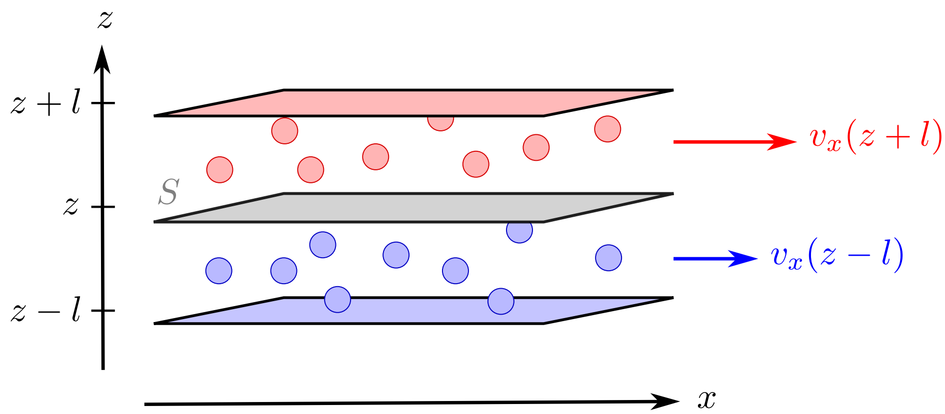

FIGURE 3 – *Viscosité microscopique*

On réalise un bilan de quantité de mouvement selon la direction verticale :

Les atomes rouges ont une quantité de mouvement selon x :

$$p_x(z+l) = \frac{1}{6}nuS\mathrm{d}tmv_x(z+l)$$

— $\frac{1}{6}nuS\mathrm{d}t$ nombre d'atomes rouges.
— $mv_x(z+l)$ quantité de mouvement (on ne compte pas la quantité de mouvement du à u car elle est en moyenne nulle)

On fait de même pour les atomes bleus. Les atomes rouges exercent sur sur les bleus une force :

$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x(z+l)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}p_x(z-l)}{\mathrm{d}t}$$

En développant avec les termes trouvés, on a :

$$F_x \underbrace{=}_{\text{Micro}} \frac{1}{3}nuSlm\frac{\partial v_x}{\partial z} \underbrace{=}_{\text{Macro}} \eta\frac{\partial v_x}{\partial z}S$$

Par identification on a :

$$\eta = \frac{1}{3}nulm$$

Or $l = \frac{1}{\sigma n}$ et $u \propto \sqrt{k_bT}$. on en déduit que $\eta \propto \sqrt{k_bT}$ La viscosité de gaz augmente avec la température. **ODG :** Pour l'air : $u \simeq 700m/s$ et $l \simeq 100nm$. On trouve $\nu = \eta\rho = \frac{1}{3}ul \simeq 2.3 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}$. La valeur expérimentale est de $1.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}$ (CNTP), l'ordre de grandeur est donc bon ! Par ailleurs, la dépendance en $\sqrt{T}$ est à peu près vérifiée pour les gaz.

1.2.2 Cas des liquides

Les liquides sont une phase condensée, il y a moins d'espace entre les particules. On modélise alors un liquide par une poudre. Chaque grain représente une particule et est emprisonné dans la cage faite par les autres. Si on considère un grain dans une cage, son agitation thermique pourra le faire passer à la cage suivante avec une probabilité de type Boltzmann. Aussi la fréquence de saut est donné par :

$$f = \frac{k_b T}{h} \exp\left\{\frac{-\Delta g}{k_b T}\right\}$$

On peut imaginer le potentiel des cages comme une suite de puits. L'application d'une contrainte de cisaillement va favoriser une direction et baisser une des parois de puits. On a finalement une loi pour la viscosité de type

$$\eta = \eta_0 \exp\left\{\frac{-\Delta g}{k_b T}\right\}$$

La viscosité diminue alors avec la température, ce que l'on vérifie expérimentalement.

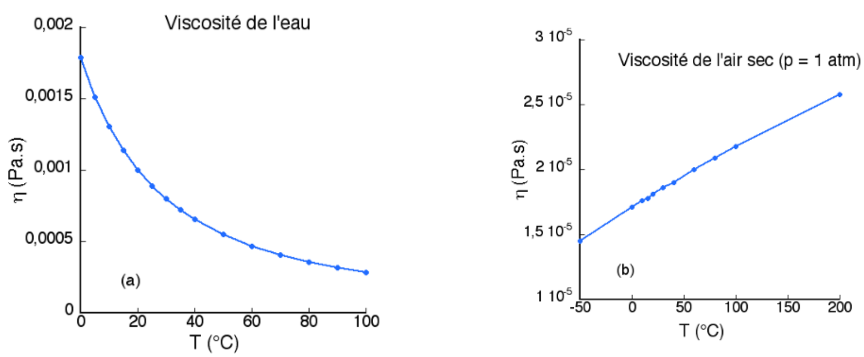

FIGURE 4 – *Viscosité gaz/liquide*

2 Mise en équation : dynamique d'un fluide visqueux

2.1 Equation de Navier-Stokes

Voir fiche.

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{v}\right) = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$

Cette équation est l'équtaion de Navie-Stokes. Elle comporte 4 inconnues : P et $\vec{v}$. Afin de fermer le système, on lui adjoint l'équation d'incompressibilité des fluides :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

Il ne reste plus qu'à appliquer les conditions aux limites : pour un écoulement contre un solide (le fond du récipient typiquement), on suppose que le fluide ne pénètre pas la paroi, ni ne s'en décolle. Ainsi, $\vec{v}_{bord} = \vec{v}_{paroi}$.

Cette condition aux limites assure par ailleurs que la force ne diverge pas à l'interface avec la paroi.

Le système est à présent fermé, on peut le résoudre ? En fait, on ne sait pas faire... L'équation de navier-Stokes est trop compliquée !

2.2 Nombre de Reynolds

On cherche à simplifier léquation de Navier-Stokes : le terme non linéaire nous embête, on aimerait le négliger. Comme on s'intéresse à des fluides visqueux et qu'on aimerait conserver cet aspect, on compare les termes visqueux et convectifs : en ordre de grandeur, pour un écoulement de vitesse caractéristique U, de dimension caractéristique L :

$$\frac{\text{convection}}{\text{viscosité}} = \frac{|\rho(\vec{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{v}|}{|\eta\Delta\vec{v}|}\ approx \frac{\rho U/LU}{\eta U/L^2} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

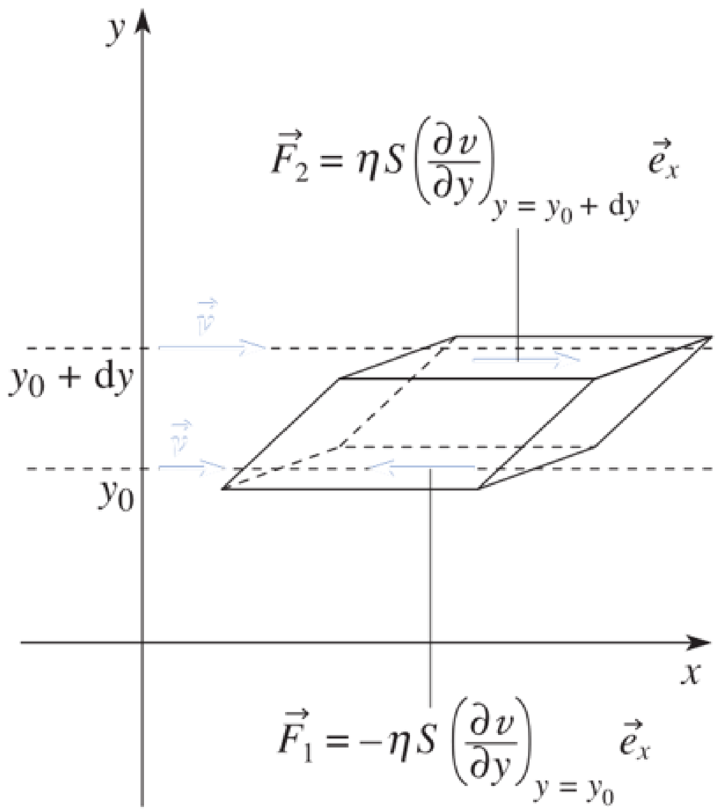

Figure 5 – *Schéma pour diapo*

— Si ce nombre est élevé, la convection domine la dynamique du fluide. On parle d'écoulement turbulent, mais on ne va pas s'intéresser à ce cadre.
— S'il est faible, c'est l'inverse. On parle d'écoulement de Stokes.

Ce nombre est appelé le nombre de Reynolds : il est central en mécanique des fluides, puisque sa valeur dicte le régime d'écoulement dans lequel on se situe. On l'exprime aussi avec la viscosité cinématique :

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$$

Quelques exemples avec des ordres de grandeur :
— Eau à la sortie du robinet : $U \approx 0.1m/s, L \approx 0.1m, \eta/\rho \approx 10^{-6}m^2/s \implies Re = 10^4 \gg 1$
— Du miel assez visqueux coule le long de la cuiller : $\rho = 1400kg/m^{-3}, \eta \approx 10^2 Pl, U \approx 1cm/s, L = 1cm \implies Re \approx 1.4 \times 10^{-2} \ll 1$

2.3 Diffusion de quantité de mouvement

Lorsque le nombre de Reynolds est bas, l'équation de Navier-Stokes se simplifie en :

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$

Cette équation est linéaire ! Elle est irréversible.

Dans certaines situations où la hauteur de fluide est assez petite, on peut négliger le poids et le gradient vertical de pression. Dans ce cadre, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu\Delta\vec{v}$$

C'est une équation de diffusion ! La viscosité cinématique peut être interprétée comme un coefficient de diffusion. La quantité diffusée est alors la quantité de mouvement.

Attention, en régime stationnaire, l'équation de vient réversible. Cela se voit sur cette vidéo.

2.4 Notion de couche limite

Les effets visqueux semblent se faire ressentir dans des espaces confinés : la dimension caractéristique de l'écoulement doit être assez petite. C'est en lien avec le fait que la quantité de mouvement suit une équation de diffusion : la diffusion est un phénomène qui a lieu sur des distances relativement faibles.

Ainsi, en se plaçant très proche d'une paroi dans un écoulement, on sentira les effets de la viscosité : contre la paroi, la vitesse du fluide est la même que celle de la paroi. Qu'est-ce que ca veut dire "très proche" ? Pour répondre à cette question, on suppose que la diffusion de quantité de mouvement a lieu sur une échelle δ. A cette échelle, le terme convectif et le terme diffusif sont comparables.

Terme diffusif : $\approx \eta\frac{U}{\delta^2}$.

Terme convectif : $\approx \rho\frac{U^2}{L}$

On en tire : $\delta \approx \frac{L}{\sqrt{Re}}$

Plus le nombre de Reynolds est bas, plus la couche limit eest grande. Lorsque $Re < 1$, la couche limit eest plus grande que la dimension de l'écoulement : la couche limite occupe tout l'espace. c'est cohérent avec le fait de supposer que l'écoulement est dominé par les effets de viscosité.

Plus généralement, il existe toujours une zone où les effets de la viscosité ne sont pas négligeables ! Seuls les fluides de viscosité nulle n'ont pas de couche limite. C'est le cas de l'helium superfluide : helium 4 à une température inférieure à 2.17K (c'est pas vraiment commun).

2.5 Puissance dissipée

Un aspect de la viscosité d'un fluide est le fait que le mouvement de fluide en un point entraine le fluide en d'autres points : en frottant les unes contre les autres, les couches de fluides se transmettent de la quantité de mouvement.

Mais cela a un coût énergétique : le mouvement d'un fluide visqueux est nécessairement dissipatif. On va exprimer la puissance dissipée dans les cas de l'écoulement de Couette plan, en régime stationnaire.

Les invariances du problème mènent à simplifier l'équation en :

$$\eta\Delta\vec{v} = \vec{0}$$

En effet, on est en régime stationnaire, on suppose que l'écoulement est unidirectionnel. Les effets de pesanteur et le gradient de pression vertical se compensent, et on suppose la pression uniforme dans les directions x et y. Enfin, $\vec{v} = v(z)\vec{e_x}$.

Les conditions aux limites sont les suivantes : $v(0) = 0; v(h) = V$.

Ainsi,

$$\vec{v}(z) = \frac{z}{h} V \vec{e_x}$$

A partir de ce profil de vitesse, on peut établir l'expression de la contrainte à l'altitude z. La couche de fluide située au dessus exerce une force $\mathrm{d}\vec{F} = \eta \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, et la différence de vitesse entre les 2 est $\vec{v}(z+\mathrm{d}z) - \vec{v}(z)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P = \mathrm{d}\vec{F}_{visc} \cdot \vec{v} &= \mathrm{d}\vec{F} \cdot (\vec{v}(z+\mathrm{d}z) - \vec{v}(z)) \\ &= \eta \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

D'où une perte par unité de volume : $p = \eta \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right)^2$

3 Application

3.1 Ecoulement de Couette cylindrique

On considère le système suivant : Deux cylindres concentriques entre lesquels on dispose un fluide visqueux. Le cylindre extérieur est en mouvement de rotation autour de son axe à la vitesse ω. La symétrie de révolution implique :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

. De plus on suppose le système invariant selon la verticale (il y a compensation de la gravité et des effets hydrostatiques). On regarde l'écoulement stationnaire à bas nombre de Reynolds. L'équation de Navier Stokes devient l'équation de Stokes :

$$0 = -\boldsymbol{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v}$$

Avec en plus l'incompressibilité :

$$\boldsymbol{\nabla} \vec{\mathbf{v}} = 0$$

Les symétries du problème permettent de chercher $\vec{\mathbf{v}} = v_r(r)\vec{\mathbf{e}}_r + v_\theta(r)\vec{\mathbf{e}}\theta$.

L'incompresibilité permet d'écrire :

$$\frac{\partial r v_r}{\partial r} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_r = \frac{A}{r}$$

Or les conditions aux limites avec les solides imposent une vitesse nulle en deux points donc $v_r = 0$

On a alors les deux équations :

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ 0 =& \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Donc $P = cst$ et $\Delta v_\theta = 0$ On pose $u = v_\theta / r$, on a alors l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Donc $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{A}{r^3}$ et finalement :

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r}$$

Les conditions aux limites sont :

$$v_\theta(R_1) = 0 \quad \text{ et } \quad v_\theta(R_2) = R_2 \omega$$

$$v_\theta = \frac{R_2^2 \omega}{R_2^2 - R_1^2} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r \omega \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right)$$

Ce profil présente un maximum atteint au niveau de la paroi du cylindre extérieur.

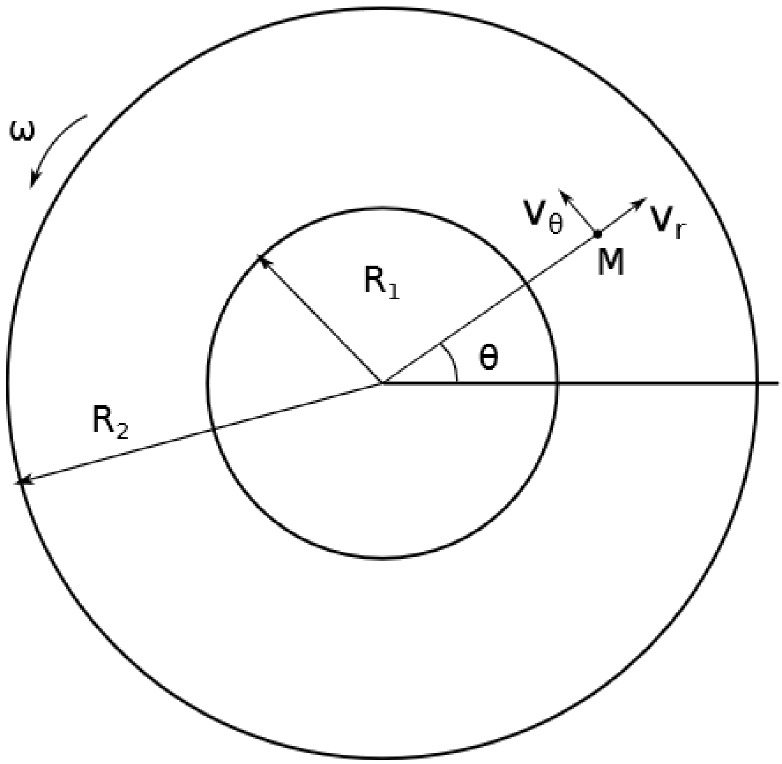

FIGURE 6 – *Ecoulement de Couette cylindrique*

3.2 Le viscosimètre de Couette

Le profil de vitesse que l'on a trouvé précédemment est indépendant du fluide considéré est ne permet pas à lui seul de remonter à la viscosité d'un fluide. Néanmoins, on sait que le liquide exerce une force sur la paroi et donc un couple. La force tangentielle exercé sur la paroi intérieur est :

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}} = \eta \mathrm{d}S \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \eta \mathrm{d}S \frac{2R_2^2\omega}{R_2^2 - R_1^2}$$

On en déduit que le moment est :

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{M}} = -\eta \mathrm{d}S R_1 \frac{2R_2^2\omega}{R_2^2 - R_1^2}\vec{\mathbf{u}}_z$$

Donc le couple :

$$\Gamma = -\eta 2\pi R_1^2 h \frac{2R_2^2\omega}{R_2^2 - R_1^2}\vec{\mathbf{u}}_z$$

En pratique, cette mesure peut se réaliser avec un fil de torsion : le cylindre central est relié à un fil de torsion. Lorsque l'on met en rotation le cylindre extérieur, le cylindre interne est mis en rotation, puis lorsque le couple de rappel du fil et le couple appliqué par le fluide se compensent, le cylindre interne ne tourne plus. On note θ_{int} l'angle duquel il a tourné durant l'expérience. Il vérifie l'égalité :

$$\Gamma = C\theta_{int}$$

où C est la constante de torsion du fil.

3.3 Ecoulement de Poiseuille

Hypothèses :

— Permanent
— Incompressible
— bas nombre de Reynolds
— $\vec{\mathbf{v}} = v(r,z)\vec{\mathbf{e}}_z$
— On néglige le poids

L'incompressibilité donne :$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$

On en déduit avec l'équation de Stokes : $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, $\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ et

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

Dans cette équation , le terme de gauche ne dépend que de z et l'autre que de r donc :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = K = \frac{-\Delta P}{L} = \eta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

Finalement

$$v(r) = \frac{-\Delta P}{4\eta L}r^2 + C_1\ln(r) + C_2$$

La vitesse étant définit en 0 on en déduit $C_1 = 0$ les conditions au limites permettent d'écrire :

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)$$

Le débit volumique :

$$Q_v = \int\int \vec{\mathbf{v}}\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$$

On en déduit le lien entre débit et pression. On observe que le rayon du tuyau joue comme R^4.

On veut perfuser un patient en 1 H avec un flacon de 0,5 L de plasma de viscosité $\eta = 1.4 \times 10^{-3}$ Pa s et de densité proche de l'eau. Si l'aiguille utilisée a une longueur de 3 cm et un diamètre de 0,4 mm, à quelle hauteur minimale faut-il installer le flacon ? 95cm Femtophysique

Conclusion

Ouverture : Nous avons discuter d'un viscosimètre, nous pouvons également mettre à profit la force ressentie par un objet dans un écoulement visqueux pour remonter à la viscosité : Comme un viscosimètre à bille :

$$F = 6\pi\eta R v$$

Les fluides que nous avons évoqué sont newtoniens : ils sont communs, mais il existe d'autres fluides avec des comportements différents (on parle de rhéologie différente). Entre autres : les fluides rhéofluidifiants, dont la viscosité diminue avec la contrainte ; les fluides rhéoépaississants, qui font l'inverse ; les fluides à seuil, qui nécessitent une certaine contrainte pour se mettre en mouvement. Leur étude est assez variée et complexe, alors même que l'on ne sait pas résoudre l'équation de Navier Stokes dans le cas général !