LP19 : Bilan thermique : flux conductif, convectif et radiatif

Niveau

Commentaires du jury

— 2017 : Il ne faut pas oublier de faire des bilanes thermiques dans cette leçon qui ne consiste pas en un catalogue des divers flux.
— 2016 : Le jury attend un bilan mettant en œuvre les divers types de flux. Jusqu'en 2015, le titre était : *Flux conductifs, convectifs, radiatifs, bilans thermiques.*
— 2015 : Le traitement d'au moins un exemple mettant en jeu plusieurs mécanismes de transferts thermiques est l'un des objectifs de cette leçon.

Bibliographie

—

pré-requis

—

Expériences

—

Table des matières

1 Bilan thermique **2**

2 Conduction thermique **3**
2.1 Loi phénoménologique : Loi de Fourier 3
2.2 Equation de diffusion 4
2.3 Résolution en régime stationnaire et résistance thermique 4

3 Convection **4**
3.1 Loi de Newton 5

4 Rayonnement thermique **5**
4.1 Loi de Stefan 6
4.2 Estimation du flux de rayonnement solaire sur Terre 6
4.3 Bilan des bilans :P 6

5 Conclusion **7**

Introduction

On s'est intéressé à l'équilibre thermodynamique de corps macroscopiques, et on a modélisé des transferts thermiques entre ces corps. Mais tout était caché sous la forme d'un Q ou d'un δQ : on n'a pas décrit les modes de transferts thermiques. C'est ce qu'on va essayer de modéliser ici : dans la vie courante, on rencontre de nombreux types de transferts thermiques :

— On dit que le soleil nous chauffe la peau,
— On différencie les courants d'eau froide et d'eau chaude dans l'eau,
— On se brûle sur la poignée de la fourchette qu'on a laissée dans la poële
— ...

Tous ces modes de transferts ont un cadre et une définition physique précise, et ne se font pas selon des mécanismes identiques. C'est ce que nous allons développer aujourd'hui.

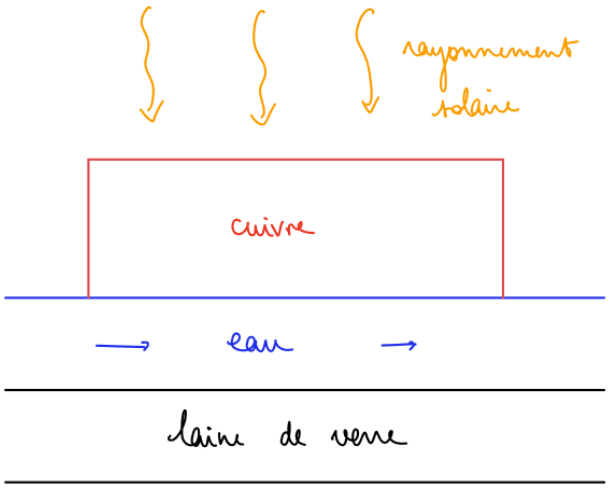

FIGURE 1 – *Chauffe eau*

1 Bilan thermique

On considère que l'on peut définir toutes les grandeurs localement (à l'échelle mésoscopique), c'est à dire que l'on considère que l'on puisse définir l'**Équilibre thermique local** (cela revient à dire que si l'on isole un sous système brutalement, il est à l'équilibre).

On veux effectuer un bilan pour déterminer l'équation d'évolution de la tempérture dans un milieu. Pour ce faire on commence par considérer un cas unidimentionnel. On utilise la conservation de l'énergie.

Elle sécrit : $\mathrm{d}U = P\mathrm{d}t + \delta Q$

— U est l'énergie interne que l'on peut relier à la température par $\mathrm{d}U = C_V \mathrm{d}t$, avec C_V la capacité calorifique.
— P est la production volumique d'énergie. Elle peut venir d'un chauffage, de réactions chimiques, ect...
— δQ correspond au transfert thermique entre le système et l'extérieur

Pour se mettre dans un cadre le plus général possible, on considère que le système a une vitesse v.

On considère une tranche de fluide :

$$\mathrm{d}U = S\mathrm{d}x(u(x + v\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t) - u(x,t)) = S\mathrm{d}x\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\mathrm{d}t\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

De plus on a $\delta Q = S(j_q(x,t) - j_q(x + \mathrm{d}x, t))\mathrm{d}t$. et la puissance : $P\mathrm{d}t = pS\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ On a donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial j_q}{\partial x} = p$$

Soit

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_V v\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial j_q}{\partial x} = p$$

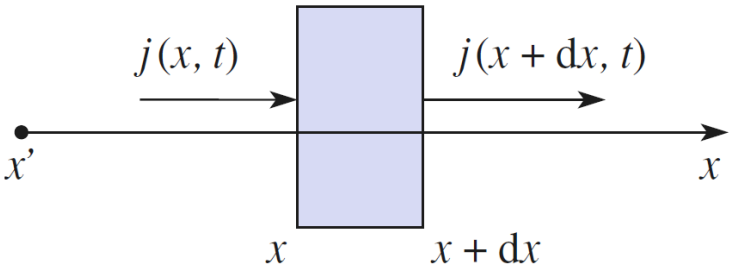

FIGURE 2 – *Bilan*

matériau	λ à 300 K en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
cuivre	$4,0.10^2$
acier	$\simeq 50$
verre	$\simeq 1$
eau	$6,0.10^{-1}$
air (sous $P = 10^5$ Pa)	$2,6.10^{-2}$

FIGURE 3 – *Tableau de valeur de conductivités.*

On peut généraliser à 3D.

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_V (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) T + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}_Q = p$$

A vitesse fixé l'équation est linéaire et on va pouvoir la résoudre.

— Les deux premiers termes correspondent à une dérivé convective. Le second correspond notamment à un terme d'advection. Il permet de caractériser le transfert thermique quand il y a mouvement du fluide (c'est le cas quand on mélange son café)

— Le troisième terme est un terme de diffusion (pas besoin de mouvement du milieu)

On vas ici se demander quelles sont les termes j_q et p pour caractériser complètement T.

2 Conduction thermique

2.1 Loi phénoménologique : Loi de Fourier

La conduction thermique est un phénomène se produisant dans un milieu donné. Elle caractérise l'homogénéisation de la température sans transfert global de matière, via les chocs entre particules. C'est ce qui explique pourquoi la poignée d'une casserole est chaude alors qu'on ne chauffe que le dessous de la casserole.

En 1822, Joseph Fourier propose une loi phénoménologique pour la diffusion de chaleur : elle relie le vecteur densité de flux de chaleur j_Q au gradient de température par

$$\vec{j_Q} = -\lambda \boldsymbol{\nabla} T$$

Où λ, la conductivité thermique, s'exprime en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, ou dans le système d'unité MKSA : $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}}$. Elle est spécifique au milieu considéré.

Remarques :

— La loi de Fourier montre bien un transfert du chaud vers le froid (signe "-"). Le transfert thermique nécessite un gradient de température.

— On considère généralement que λ est indépendante de la température. C'est faux en général, mais assez bien vérifié sur des plages de températures raisonnables.

— La loi de Fourier a ses limites : le gradient thermique ne doit pas être trop fort. Le milieu est considéré homogène et isotrope.

2.2 Equation de diffusion

Pour comprendre plus profondément de quoi il s'agit, on va reprendre l'équation du bilan et y réinjecter cette expression de j_Q, en considérant un fluide au repos. On aboutit à :

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\lambda \boldsymbol{\nabla} T)$$

D'où :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$$

avec le coefficient de diffusion $D = \frac{\lambda}{\rho c_V}$, qui est l'analogue du coefficient de diffusion de particules, mais pour la chaleur. Cette équation est appelée équation de la chaleur.

— Elle caractérise l'irréversibilité du phénomène de diffusion : si T(x,t) est solution, T(x,-t) ne l'est pas.

— La forme de l'équation nous permet de donner une loi d'échelle :$\delta = \sqrt{Dt}$. Si on impose une variation de température à un endroit elle se propage comme $\sqrt{t}$

2.3 Résolution en régime stationnaire et résistance thermique

On considère une tige à une dimension x, homogène, de section S, soumise à ses extrémités à des températures différentes T_1 en $x = 0$ et T_2 en $x = L$. En régime stationnaire, la dérivée seconde de la température $T(x)$ est nulle et ainsi le profil de température est linéaire :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

Avec l'expression du vecteur densité de flux $j_Q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$, le flux thermique s'écrit : $\phi_Q = j_Q S$, d'où :

$$T(x) = -\frac{\phi_Q}{\lambda S} x + T_1$$

.

Et notamment :

$$T_1 - T_2 = \frac{\phi_Q}{\lambda S} L$$

Par analogie avec la conduction électrique et la loi d'Ohm :

	Électricité	Diffusion thermique
Flux	I	ϕ_Q
"force motrice"	ΔV	ΔT
Loi d'Ohm	$R = \frac{\Delta_V}{I}$	$R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi_Q}$
Résistance	$R = \frac{1}{\rho}\frac{L}{S}$	$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

3 Convection

La convection est un transport thermique qui se fait par déplacement d'un fluide. L'idée est qu'un élément de fluide à température T propage sa température à mesure qu'il se déplace.

Nous avons déjà indentifier le terme convectif dans l'équation de la chaleur.

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_V (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) T + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}_Q = p$$

On remarque que c'est un terme non linéaire. En effet dans des cas complexes, il faudra également utiliser l'équation de Navier Stockes pour déterminer de manière conjointe v et T.

— Convection forcé : c'est le cas avec un ventilateur par exemple.

— Convection naturelle. C'est un couplage avec $\rho(T)$ via navier stockes. (complexe, mais en gros c'est Rayleigh Benard)

Ici on va se contenter d'un cas simple

3.1 Loi de Newton

Le modèle de Newton permet de caractériser le flux convectif à l'interface entre un solide et un fluide. Ce modèle à l'avantage d'être linéaire. Cependant c'est pas vraiment de la convection, car on considère que le fluide dans la couche limite ne se déplace pas avec le fluide.

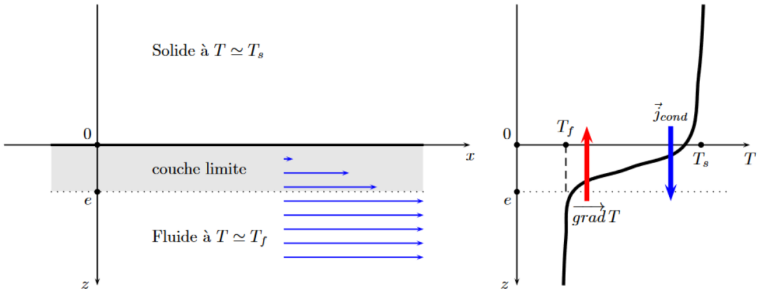

FIGURE 4 – *Source les cléments*

On a ainsi une épaisseur e de fluide soumise à une différence de température. Dans ce modèle on écrit le gradient de température dans le couche limite comme :

$$\frac{\partial T}{\partial z}|_{Couche} = \frac{\Delta T}{e}$$

Comme on suppose que le transfert est convectif dans la couche limite on a :

$$\vec{\mathbf{j}_Q} = -\lambda_f \frac{\Delta T}{e}\vec{\mathbf{e}}_z$$

On déduit donc la loi de Newton :

$$\vec{\mathbf{j}}_{conv} = h(T_s - T_f)\vec{\mathbf{n}}$$

h est le coefficient de conducto convection de Newton en $Wm^{-2}K^{-1}$ et $\vec{\mathbf{n}}$ normale à l'interface.

fluide	type de transfert	h en W.m^{-2}.K^{-1}
gaz	convection naturelle	5 – 30
	convection forcée	10 – 300
eau	convection naturelle	100 – 1000
	convection forcée	300 – 12000
métal liquide	convection forcée	6000 – 110000

FIGURE 5 – *Valeurs numériques*

Bonus :Nous pouvons alors déduire la résistance thermique associé à un transfert thermique à l'interface entre un solide et un liquide :

$$R_{conv} = \frac{1}{hS}$$

4 Rayonnement thermique

Dans le chauffe-eau solaire, la source d'énergie de chauffage est le rayonnement du soleil. L'énergie est transportée par le rayonnement électromagnétique. On peut se demander quelle énergie le soleil apporte au chauffe-eau ?

4.1 Loi de Stefan

Rappel : Un corps noir est un modèle théorique de source qui absorbe la totalité du rayonnement incident (dans la totalité du spectre).

la loi de Stefan stipule que, pour un corps noir à l'équilibre thermique, la puissance surfacique émise par rayonnement est liée à sa température T via : $P = \sigma T^4$, ou σ est la constante de Stefan, qui vaut environ $5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$.

On peut également généraliser le corps noir en supposant que seul les couches superficielles sont isotherme. Il n'y a pas forcément équilibre thermodynamique sur l'échelle de tout le corps, l'équilibre thermodynamique local (sur une couche suffit). C'est le cas pour le soleil.

4.2 Estimation du flux de rayonnement solaire sur Terre

On suppose que le soleil est un corps noir sphérique de rayon R_S, de température T_S (du coup, on se place dans le cas où on ne regarde que les couches externes !) et on va essayer de déterminer la température de la Terre avec une approche simple. Comme le soleil est un corps noir, nous avons $P_s = \sigma T_s^4$ Par conservation du flux nous avons $4\pi R_S^2 P_s = 4\pi d_{TS}^2 P_{S\to T}$, où d_{TS} est la distance Terre-Soleil (faire un schéma !).

Donc la puissance surfacique reçue par la Terre est donnée par :

$$P_{S\to T} = (1-A)\left(\frac{R_S}{d_{TS}}\right)^2 \sigma T_S^4$$

Cela nous donne, avec :
— $R_S = 6.97 \times 10^5\,\mathrm{km}$
— $d_{TS} = 1.49 \times 10^6\,\mathrm{km}$
— $T_S = 5600\,\mathrm{K}$ en surface
$P_{S\to T} \approx 1\,\mathrm{kW \cdot m^{-2}}$.
On a négligé le rôle de l'atmosphère. La valeur du flux obtenue est ok donc on s'en passe...

4.3 Bilan des bilans :P

On revient au chauffe-eau solaire. Noter T_{haut}, T_{bas} sur le schéma, la vitesse d'écoulement v, les températures T_1 et T_2 d'entrée et de sortie d'eau, la longueur L de la conduite, la dimension b de la conduite selon $O\vec{y}$. On note Q le débit massique d'écoulement, S la section de la conduite, ρ la masse volumique du fluide, Σ la surface du chauffe-eau (faire une diapo pour ça ça ira plus vite).

On résume la situation en régime stationnaire par :

On écrit d'un côté l'égalité des flux en haut de la plaque de cuivre :

$$(1-R)P_{S\to T}\Sigma + h_1(T_{ext} - T_{haut})\Sigma = \frac{T_{haut} - T_{bas}}{R_{Cu}}$$

Et de l'autre l'égalité des flux au bas de la plaque :

$$\frac{T_{haut} - T_{bas}}{R_{Cu}} = \int_0^L h_2 b(T_{bas} - T(x))\mathrm{d}x = h_2 L(T_{bas} - \bar{T})$$

En bas, tout se passe comme si la température de l'eau était uniforme et égale à $\bar{T}$.

Calcul de $\bar{T}$: On effectue un bilan sur une tranche $\mathrm{d}x$ de la conduite : prendre en compte les flux entrants et sortants selon Ox, et le flux entrant par le haut. On néglige les pertes vers le bas. En régime stationnaire,

$$0 = Q\rho c_V T(x)\mathrm{d}t - Q\rho c_V T(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}t + h(T_{bas} - T(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}t b$$

donc

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{T}{\delta} = \frac{T_{bas}}{\delta}$$

avec $\delta = \frac{Q\rho c_V}{hb}$. Cette équation donne accès à $T(x)$ puis à $\bar{T}$ moyennée sur L :

$$\bar{T} = T_{bas} - \frac{\delta}{L}(T_1 - T_{bas})\left[e^{\frac{L}{\delta}} - 1\right]$$

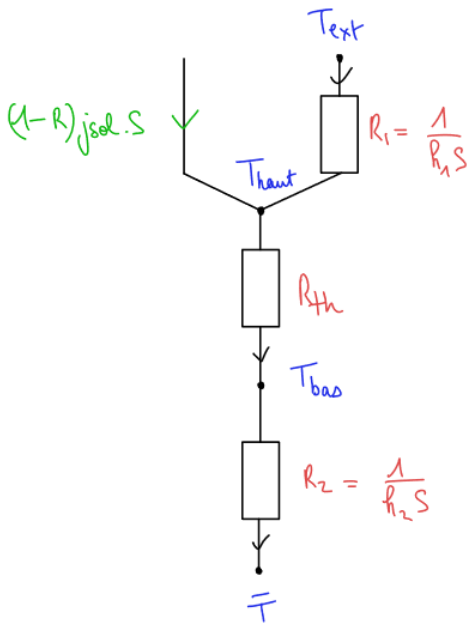

FIGURE 6 – *1er schéma. On a remplacé S par Σ.*

D'où en réinjectant :

$$h_2 \Sigma \frac{\delta}{L}\left[1 - e^{\frac{L}{\delta}}\right](T_{bas} - T_1) \equiv \frac{T_{bas} - T_1}{R_{equiv}}$$

Du point de vue des échanges thermiques, tout se passe comme si l'eau avait une température T_1 et que la résistance thermique équivalente était donnée par R_{equiv}. On retrace un nouveau schéma équivalent en remplaçant $\bar{T}$ par T_1 et la résistance du bas par R_{equiv}. On connaît tous les flux, on n'a plus qu'à faire de l'élec. Le rendement s'écrit :

$$\eta = \frac{P_{Cuivre \to eau}}{P_{S \to T}} = \frac{h_2\left(T_{bas} - \bar{T}\right)}{P_{S \to T}}$$

Diviseur de tension entre T_{bas} et T_1, et on calcule T_{haut} en écrivant la conservation du flux. On en déduit l'expression de T_{bas} en fonction des données du problème.

On donne vraiment la valeur 0.7 ? Vu tous les paramètres c'est long...

5 Conclusion

On a identifié aujourd'hui plusieurs paramètres importants du phénomène de transfert thermique, et montré comment les modéliser à travers l'exemple du chauffe-eau solaire. L'étude est facilitée en régime stationnaire : on peut alors calculer des flux et des résistances, et dresser une analogie électrique assez poussée. Lorsque l'on conserve l'aspect dynamique du problème, et que l'on modélise la variation de masse volumique des fluides avec la température, on aboutit à la modélisation du phénomène de convection naturelle : l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

SOLUTION

1) $T_T = T_S\sqrt{\frac{R}{2d}} \approx 275$ K (*cf. application* 4).

2) a) Effectuons des bilans thermiques séparément pour l'atmosphère et pour la Terre (que nous supposerons chacune en équilibre thermodynamique).

• **Atmosphère**

$$\underbrace{\alpha\sigma T_S^4(4\pi R^2)\frac{\pi r^2}{4\pi d^2}}_{\text{(1) absorption du rayonnement solaire}} + \underbrace{\beta(\sigma T'^4_T)\,4\pi r^2}_{\text{(2) absorption du rayonnement terrestre}} = \underbrace{2\beta\sigma T_a^4\,4\pi r^2}_{\text{(3) + (4) puissance rayonnée par l'atmosphère}}$$

• **Terre**

$$\underbrace{(1-\alpha)\sigma T_S^4(4\pi R^2)\frac{\pi r^2}{4\pi d^2}}_{\text{(1) absorption du rayonnement solaire}} + \underbrace{\beta\sigma T_a^4\,4\pi r^2}_{\text{(4) puissance rayonnée par l'atmosphère vers la Terre}} = \underbrace{\sigma T'^4_T\,4\pi r^2}_{\text{(2) puissance rayonnée par la Terre}}$$

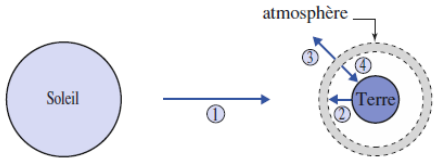

FIGURE 7 – *Schéma (Hprépa thermodynamique MP page 98)*