LP2020 : Ondes dans les plasmas

Niveau

L2

Commentaires du jury

—

Bibliographie

—

Expériences

— Plutôt des simulations et des animations

Pré-requis

— Ondes électromagnétiques dans le vide
— Oscillateur harmonique
— Analyse de Fourier

Table des matières

Introduction

Les plasma sont réellement présents dans la nature. En effet il y a en a dans les étoile, comme la couche extérieur du soleil. Plus proche de nous, la ionosphère est un plasma et sa compréhension est nécessaire pour le passage d'information entre la terre et l'espace notamment pour les GPS. Enfin pour des techniques expérimentale récente, pour réalisé de la fusion nucléaire on doit confiné un plasma (image tokamac).

Tout ceci justifie leur étude. De plus, cela nous permettra d'illustré des caractéristiques importantes des ondes en générale.

1 Cadre et hypothèses

1.1 Définition, hypothèses

Plasma : gaz ionisé contenant 2 types de porteurs :
- ions de masse m, de densité n, de charge q, de vitesse $\vec{v}_i$
- électrons de masse m_e, de densité n_e, $-q$, $\vec{v}_e$

Hypothèses :
- Milieu dilué : pas d'interaction entre particules
- Plasma non relativiste : $|\vec{v}_i, e| \ll c$
- mouvement des ions négligé (on reviendra dessus)
- Milieu non perturbé localement neutre

1.2 Oscillation des plasmas

`figures/petites perturbations-eps-converted-to.pdf`

On considère des petites perturbations à 1D.
On considère des ions de charge $q = +e$. Avant la perturbation : $\rho = 0 = n_i e - n_e^0 e \implies n_e^0 = n_i = n$.
Nombre d'électrons dans le volume élémentaire : $dN_e = n_e dz = ndz$

Pendant la perturbation :

$$\begin{aligned}dN_e &= n_e(z + dz + \xi(z + dz) - z - \xi(z)\\ &= n_e dz(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z})\end{aligned}$$

Par conservation du nombre d'électrons :

$$n_e(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}) = n \implies n_e \approx n(1 - \frac{\partial \xi}{\partial z})$$

D'où la charge :

$$\rho = ne - n_e e = ne\frac{\partial \xi}{\partial z}$$

L'équation de Maxwell-Gauss permet de remonter au champ électrique lié à la perturbation :

$$\vec{E} = \frac{ne}{\epsilon_0}\xi\vec{u}_z$$

On applique le PFD à l'électron :

$$\begin{aligned}m_e\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -e\frac{ne}{\epsilon_0}\xi\\ \implies \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &+ \frac{ne^2}{m_e\epsilon_0}\xi = 0\end{aligned}$$

On identifie un oscillateur harmonique à la pulsation plasma $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e\epsilon_0}$.

2 Equation d'onde

2.1 Conductivité du plasma

On considère une onde incidente plane progressive harmonique $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\{i(wt - \vec{k}\cdot\vec{r}\}$.

Son existence est couplée à celle d'un champ magnétique $\vec{B}$ donc une particule de charge q subit la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

.

On calcule en ordre de grandeur le rapport de la partie magnétique par la partie électrique pour une particule de charge $\pm q$:

$$\frac{F_m}{F_e} \approx \frac{vb}{e}$$

Qui se simplife avec la relation de structure des ondes planes en : $\frac{v}{c} \ll 1$ d'après l'hypothèse non relativiste. La partie magnétique est négligeable.

Mouvement des ions :

Les ions et les électrons subissent la même force électrique en norme :

$$\begin{aligned}m_i\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} &\approx \vec{F}\\ m_e\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} &\approx \vec{F}\end{aligned}$$

D'où $\frac{v_i}{v_e} \approx \frac{m_e}{m_i} \ll 1$ (la masse d'un électron est 1836 fois plus petite que celle d'un proton) : le mouvement des ions est négligeable.

On applique le PFD à un électron : $m_e\frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t} = -e\vec{E}$. On passe en complexe et on identifie la conductivité par analogie avec la loi d'Ohm locale : $\sigma = -i\frac{ne^2}{m_e\omega} = -i\epsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}$

2.2 Equation locale

Equations de Maxwell + conservation de la charge + loi d'Ohm locale

$$\Longrightarrow \rho(\omega_p^2 - \omega^2) = 0 \Longrightarrow \rho = 0 \text{ et } \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

(sauf si $\omega = \omega_p$...)

Il y a donc neutralité du plasma.

Equation d'onde : $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\nabla} \wedge = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot - \Delta$...

$$\Longrightarrow \frac{\partial E}{\partial t} - i\frac{\omega_p^2}{\omega}\frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \Delta E = \vec{0}$$

. Le terme en plus de l'équation de d'Alembert est lié au fait que $\vec{j}$ est non nul dans le plasma : les électrons bougent.

2.3 Relation de dispersion

... $\Longrightarrow k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \rightarrow$ pas comme dans le vide. On distingue 2 régimes :

2.3.1 $\omega \geq \omega_p$:

Alors $k \in \mathbb{R}$: Il y a donc propagation.

Mais ça n'est pas une propagation dans le vide : comment le quantifier ? avec v_ϕ, v_g.

Tracé de la relation de dispersion dans le plasma VS dans le vide.

A haute fréquence, les électrons ne sont plus mis ne mouvement à cause de leur inertie : ils ne suivent plus : on se rapproche du comportement du vide (l'onde ne voit pas les électrons).

vitesse de phase : $v_\phi = \frac{\omega}{\mathbf{Re}(k)} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \geq c \rightarrow$ problème ? ? (on va revenir dessus)

vitesse de groupe : $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c \times \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \leq c$

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'information. Tracé de v_ϕ et v_g qui tendent vers c à haute fréquence.

2.3.2 $\omega \geq \omega_p$:

$k^2 \geq 0 \Longrightarrow k \in i\mathbb{R} \Longrightarrow \vec{k} = i\vec{k'}$ avec $\vec{k'} \in \mathbb{R}$. On parle d'onde évanescente : il n'y a pas de propagation.

Attention : l'onde n'est PAS absorbée par le plasma : $\vec{j} = \sigma\vec{E}, \sigma \in i\mathbb{R}$ donc $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature de phase. Il y a réflexion totale et non absorption.

3 Paquet d'onde et information

3.1 Propagation d'information et paquet d'onde

Onde plane :extension spatiale et temporelle infinie : non physique, n'existe pas.

Signal réel : paquet d'onde d'extension spatiale et temporelle limitée (dessin). A l'aide de l'analyse de Fourier, on décompose le paquet d'onde sur la base des ondes planes :

Paquet d'onde à $t = 0$:

$$u(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{1}$$

Et à t quelconque :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k)e^{i(kx-\omega t)}\mathrm{d}k \tag{2}$$

On formules les hypothèses suivantes :

— Paquet d'onde piqué autour de k_0 : pour $k \notin [k_0 - \delta k, k_0 + \delta k]$, $\hat{u}(k) = 0$ et $\delta k \ll k_0$.

— On effectue un développement de la relation de dispersion autour de k_0 :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k_0) \times (\omega - \omega_0) + o((\omega - \omega_0)^2) \tag{3}$$

Alors :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{e^{i(k_0 x - \omega t)}}_{\text{Porteuse}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k) e^{i(k-k_0)(x-v_g t)} \mathrm{d}k}_{\text{Enveloppe}} \tag{4}$$

L'enveloppe correspond au déplacement du signal : le signal se déplace à $v_g \equiv$ la vitesse de propagation de l'information (qui est bien inférieure à la vitesse de la lumière).

Animations pour des approximations à l'ordre 1 (pas de dispersion) et à l'ordre 2 (on voit l'effet de la dispersion).

Milieu dispersif : Un milieu est dispersif si la propagation des ondes EM dans ce milieu est dispersive, c'est-à-dire si les composantes d'une onde à différentes longueurs d'ondes ne se propagent pas toutes à la même vitesse. Il y a alors étalement du paquet d'onde.

3.2 Application numérique et GPS

ω_p dans la ionosphère : $n_e \approx 1 \times 10^{12}\,\mathrm{m}^{-3}$ (très grand nombre mais pas si grand que ça : cuivre : $1 \times 10^{29}\,\mathrm{m}^{-3}$). D'où $\omega_p \approx 6 \times 10^7\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ qui correspond à $f_p \approx 9\,\mathrm{MHz}$.

Conséquence : les ondes radio AM, de fréquences inférieures à 330 kHz, se réfléchissent sur la ionosphère : permet de capter la AM au milieu de l'océan.

Pour le GPS, ça pose problème : il faut travailler à des fréquences supérieures à la pulsation plasma (typiquemennt 1GHz). Il faut aussi prendre en comte l'influence de l'ionosphère sur la vitesse de propagation, sinon le GPS se trompe de 15m.

4 Conclusion

?

Questions et remarques

4.1 Questions :

- On parle d'écran plasma : c'est comme un plasma ?
- Comment vous définissez la densité ?
- Est-ce que tous les gaz vérifient la même hypothèse de négliger les interactions entre particules ?
- Est-ce qu'on peut dire qu'un plasma est un gaz parfait ? *dans le cadre du plasma dilué, oui*
- Si on tient compte de B, ça change quoi ? Notamment dans le cadre d'un champ B stationnaire en plus du champ de l'onde ?
- Refaire la neutralité du milieu en grandeurs réelles.
- Détailler pourquoi il n'y a pas d'absorption dans le plasma.
- Comparer réflexion sur un plasma et sur un métal
- D'où provient l'absorption ?
- Pourquoi on a toujours $\omega \in \mathbb{R}$?

4.2 Remarques

Bien de relier l'intro et la conclusion à la réalité pour ne pas faire que des calculs.