LP"2020" : Symétries.

Niveau

Commentaires du jury

—

Bibliographie

—

pré-requis

— Electromagnétisme dans le vide.
— Gravitation

Expériences

—

Table des matières

1 Utilisation des symétries en électromagnétisme **2**
1.1 Le principe de Curie 2
1.2 Equations de Maxwell 3
1.3 Ondes planes et symétries 4

2 Symétrie et charges conservé **5**
2.1 Théorème de Noether 6
2.2 Le problème à 2 corps 7

Introduction

On observe des symétries dans beaucoup de systèmes naturels : de nombreux organismes vivants, dont le corps humain, sont symétriques en surface par rapport à un axe. Il existe des cas plus complexes de symétrie par rapport à un point pour les fleurs.

En physique, les symétries d'un système sont très utiles pour simplifier leur étude.

Exemple : lors de l'étude du mouvement d'un corps gravitant autour d'un autre, on se place en coordonnées sphériques. Néanmoins, l'étude de la distance au centre d'attraction suffit à caractériser le système : on peut se ramener à une étude d'une seule coordonnées. Cela est rendu possible par la symétrie sphérique de l'astre attracteur.

(a) *Papillon et symétrie axiale.*

(b) *Fleur et symétrie centrale.*

1 Utilisation des symétries en électromagnétisme

1.1 Le principe de Curie

Enoncé du principe de Curie (1894) : les effets ont au moins les symétries des causes.

Notion de vrai vecteur et de pseudo-vecteur : en électromagnétisme, on utilise les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Un objet chargé électriquement plongé dans ces champs subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Cette force ne dépend pas de l'orientation de l'espace. On en déduit que $\vec{E}$ ne dépend pas de l'orientation de l'espace : c'est un *vrai vecteur.*

$\vec{v}$ ne dépend pas non plus de l'orientation de l'espace. Or, le produit vectoriel, lui, en dépend. Il faut donc que $\vec{B}$ dépende de l'orientation de l'espace pour que la force n'en dépende pas. On dit que $\vec{B}$ est un **pseudo-vecteur.**

C'est lié au fait que $\vec{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}$. *$\vec{A}$ est bien un vrai vecteur car il est proportionnel à $\vec{v}$.*

Invariance et symétrie : On dit qu'un système est invariant selon une coordonnée lorsque sa géométrie et ses propriétés intrinsèques ne dépendent pas de cette coordonnée.

Par exemple, un fil infini rectiligne selon Oz est invariant selon z. Dans le cas de la gravité de tout à l'heure, l'astre attracteur est à symétrie sphérique : il est invariant selon les angles des coordonnées sphériques θ et ϕ.

La conséquence du principe de Curie est alors que les effets ne dépendent pas d'une coordonnée selon laquelle le système est invariant.

Application à l'électromagnétisme : poly de JF p.25

Plan de symétrie, d'antisymétrie. Faire un dessin dans un cas puis généraliser :

— En un point M d'un plan de symétrie d'une distribution de charge donnée, le champ électrique est contenu dans ce plan.
— En un point M d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de charge donnée, le champ électrique est orthogonal à ce plan.
— En un point M d'un plan de symétrie d'une distribution de courant donnée, le champ magnétique est orthogonal à ce plan.
— En un point M d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de courant donnée, le champ magnétique est contenu dans ce plan.

Forme du champ magnétique autour d'un fil rectiligne : ne pas faire le calcul, donner uniquement la forme du champ. On utilise aussi les invariances.

Forme du champ électrique autour d'une sphère/ou autre : idem.

Les symétries nous sont utiles pour simplifier les calculs. Mais en fait, elles ont une portée plus générale : du fait que la force est un vecteur, on a déduit que B devait être un pseudo-vecteur. On peut utiliser une approche similaire pour déduire des relations de proportionnalité...

1.2 Equations de Maxwell

A partir d'un raisonnement similaire à celui de tout à l'heure, on va retrouver la forme des équations de Maxwell. On se place dans le cadre suivant :

— On cherche des équations linéaires,
— on se limite aux dérivées premières (opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$, $\boldsymbol{\nabla}$),
— on postule l'expression de la force de Lorentz,
— on considère que les équations que l'on cherche doivent respecter certaines symétries.

Notion d'invariance CPT : *le fait de prononcer "invariance CPT" est un peu risqué ?* On considère les trois transformations suivantes :

1. conjugaison de la charge C : on change la charge de toutes les particules en leur opposée.
2. parité P : inversion de la position des particules par rapport à une origine arbitraire : $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$.
3. temporelle T : inversion de la flèche du temps : $t \to -t$.

On cherche des équations dont chaque terme vérifie les mêmes symétries CPT : on parle d'invariance CPT. Par exemple, $\vec{E} \to -\vec{E}$ par P, alors que $\vec{B} \to \vec{B}$. Il est impossible d'avoir $\vec{E} \propto \vec{B}$.

Pour se familiariser avec les invariances CPT

	C	P	T
$\vec{\mathbf{r}}$	+	-	+
$\vec{\mathbf{v}}$	+	-	-
$\vec{\mathbf{a}}$	+	-	+
m	+	+	+
$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$	+	-	+

Table 1 – *Explication : pour $\vec{\mathbf{r}}$ on se convainc que c'est uniquement géométrique, c'est un vrai vecteur, donc il y a uniquement avec la symétrie P que c'est une valeur propre négative. On déduit les autres : en dérivant, ça change T, On fait ça deux fois on arrive à l'accélération. La masse on sent que c'est invariant. On trouve $\vec{\mathbf{F}}$ en faisant le produit. Bon on a l'idée maintenant on donne le tableau total !*

	C	P	T
$\vec{\mathbf{F}}$	+	-	+
q	-	+	+
$\vec{\mathbf{E}}$	-	-	+
$\vec{\mathbf{v}}$	+	-	+
$\vec{\mathbf{B}}$	-	+	-
ρ	-	+	+
$\frac{\partial \rho}{\partial t}$	-	+	-
$\vec{\mathbf{j}}$	-	-	-
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}$	-	+	+
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}}$	-	-	-
$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}$	-	+	+
$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}$	-	-	-
$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$	-	-	-
$\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	-	+	+
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}$	-	+	-
$\boldsymbol{\nabla} \rho$	-	-	+
$\frac{\partial \vec{\mathbf{j}}}{\partial t}$	-	-	+
$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{j}}$	-	+	-

Table 2 – *On repère les même symétries*

Il faut séparer en vecteurs et scalaires :

	C	P	T
$\vec{\mathbf{F}}$	+	-	+
$\vec{\mathbf{E}}$	-	-	+
$\vec{\mathbf{v}}$	+	-	+
$\vec{\mathbf{B}}$	-	+	-
$\vec{\mathbf{j}}$	-	-	-
$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}$	-	+	+
$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}$	-	-	-
$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$	-	-	-
$\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	-	+	+
$\boldsymbol{\nabla}\rho$	-	-	+
$\frac{\partial \vec{\mathbf{j}}}{\partial t}$	-	-	+
$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{j}}$	-	+	-

TABLE 3 – *Vecteurs*

	C	P	T
ρ	-	+	+
$\frac{\partial \rho}{\partial t}$	-	+	-
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}$	-	+	+
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}}$	-	-	-
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}$	-	+	-

TABLE 4 – *Scalaires*

On associes les termes qui ont mes même symétries :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \alpha\rho \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = \chi \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \kappa \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \beta \vec{\mathbf{j}} \tag{4}$$

On peut remarquer qu'il y a d'autres équations, mais on peut les déduire de ces équations là, elles sont redondantes, c'est par exemple la conservation de la charge, Biot et Savart, ou encore un équation équivalente à $\vec{\mathbf{E}} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$ mais avec les charges et les courants.

Ensuite pour aller plus loin et trouver les constantes ils faut utiliser la conservation de la charge l'invariance sous transformation de Lorentz et l'équation d'onde. Ceci nous permet d'avoir des lien entre les constantes.(photos cours dans les images)

1.3 Ondes planes et symétries

Pour Lucas : on place cette partie juste avant les équations de Maxwell, ce la permet de faire le lien entre la notion de symétrie intuitive que l'on se fait en faisant des dessins et le formalisme des opérateurs.

On a commencé par évoquer l'invariance par translation ou rotation au début, et on en a déduit des simplifications sur la dépendance des grandeurs en les coordonnées. Mais ça pose un problème.

Position du problème : on considère une onde électromagnétique dans le vide : on sait qu'elle se propage. Le vide est invariant par translation dans toutes les directions. Dans ce cas, le champ est invariant par translation dans toutes les directions, et alors $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(0, 0, 0)$? Il n'y a pas d'oscillations ?

Approche plus fine (version Sylvio) : en fait, on a simplifié les choses un peu rapidement. On va préciser en formalisant. On considère l'opérateur translation T_a qui translate le système de a selon z :

$$T_a : E(z) \to E(z - a)$$

Le système considéré est invariant par translation, ainsi par définition les solutions recherchées sont vecteurs propres de l'opérateur translation. On en déduit que $T_a(E(z)) = \lambda E(z) = E(z-a)$. λ peut être vu comme un paramètre qui dépend de a. De manière générale, on écrit :

$$E(z-a) = f(a)E(z)$$

On développe en série entière :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n E}{\mathrm{d}z^n} = f(a)E(z) \\
\implies &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \mathcal{TF}\left[\frac{\mathrm{d}^n E}{\mathrm{d}z^n}\right](k) = f(a)\hat{E}(k) \\
\implies &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iak)^n}{n!} \hat{E}(k) = f(a)\hat{E}(k)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$f(a) = e^{-ika} \quad \text{et} \quad E(z-a) = e^{-ika}E(z) \qquad \forall a$$

En particulier,

$$E(a) = e^{ika}E(0)$$

En raisonnant de même sur les autres coordonnées et le temps, on obtient les ondes planes. Les ondes planes sont donc les vecteurs propres de l'opérateur de translation. Le lien entre k et ω est fixé par l'équation de propagation.

De manière générale, si un problème est invariant selon une opération de symétrie S, les solutions sont vecteurs propres de l'opérateur S.

Lien avec les simplifications précédentes : on a simplifié allègrement tout à l'heure. Pourquoi ? On s'est placé en régime stationnaire : la propagation n'a pas lieu. Plus formellement, si on prend le cas du plan infini uniformément chargé :

- le régime stationnaire équivaut à $\omega = 0$ car les grandeurs ne dépendent pas du temps,
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(z)/\epsilon_0$ donc en dérivant par rapport à x ou y, on trouve $k_x = k_y = 0$. En dérivant par rapport à z, on trouve k_z constant quasi partout.

Approche plus fine (version Lucas) :

On observe une invariance par translation du champ E c'est à dire que $E(z)$ est aussi une solution du problème esprimer dans le repère translaté de a ($Z = z - a$). Donc $E(Z) = E(z-a)$ est solution de la même équation différentiel que $E(z)$.

Mathématiquement une invariance par translation signifie que la solution est vecteur propre de l'opérateur translation : T_a :

$$T_a(E(z)) = E(z-a) = \alpha_a E(z)$$

Dans le vide il y a invariance par translation pour tout a aussi on peut écrire :

$$E(z-z') = \alpha(z')E(z)$$

Or si $f(z+z') = f(z)g(z')$ on prend arbitrairement $f(0) = 1$ On a donc $f(0+z') = f(0)g(z') = g(z')$ On a donc $f(z+z') = f(z)f(z')$ On en déduit que $f(z) = \exp(\alpha x)$

2 Symétrie et charges conservé

Le but de cette partie est de montrer que les symétries sont essentiel car les identifier nous permet de simplifier nos problème car elle nous permettent de remonter à des quantités conservé. Par exmple si on lance une balle dans le camp de pesanteur, le système est invariant par translation dans toute les directions du plan (mais pas verticalement). Ceci se traduit dans les équations du mouvement par $\dot{p_x} = 0$. On en déduit ainsi que la quantité de mouvement dans la direction est x est conservé. En fait on peut généralisé cette correspondance entre symétrie quantité conservé.

2.1 Théorème de Noether

On va montrer dans cette sous partie que l'existence de symétries infinitésimales implique l'existence de quantités conservées. On définit une **symétrie** d'un système lagrangien comme une transformation telle que les équations d'Euler-Lagrange pour $'$ sur q' sont les mêmes que celles pour sur q. Une manière de l'écrire est :

$$EuLa((q,\dot{q},t)) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}(q,\dot{q},t)=0 \tag{5}$$
$$EuLa('(q',\dot{q}',t)) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}'(q',\dot{q}',t)=0 \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

Une symmétrie correspond à

$$\mathcal{D}'=\mathcal{D}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour cela est :

$$\boxed{(q',\dot{q}',t)=(q,\dot{q},t)+\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}}{\mathrm{d}t}} \tag{8}$$

ou, en "français", les lagrangiens doivent être égaux à une dérivée totale par rapport au temps près.
Méthode :
Le calcul de $'$ se fait comme suit :

$$'(q,'\dot{q}',t)=(q,\dot{q},t)=\left(g(q',t),\sum_i \frac{\partial g}{\partial q_i'}\dot{q_i}'+\frac{\partial g}{\partial t},t\right)$$

où $g=f^{-1}$. *C'est pas forcément à évoquer mais je préfère l'avoir sous la main.*

On va regarder la conséquence du fait que les équations du mouvement sont vérifiées, malgré l'application d'une symétrie infinitésimale.

La condition de symétrie infinitésimale s'écrit comme :

$$\delta=\epsilon\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t}$$

Cela se réécrit comme :

$$\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)=\epsilon\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t}$$

On utilise le fait que :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

Pour aboutir à :

$$\sum_i\left[\delta q_i\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)}_{=0}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\right]=\epsilon\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t}$$

On en déduit alors que la quantité

$$\boxed{Q=\sum_i\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}g_i(q,t)-\mathcal{F}} \tag{9}$$

est conservée au cours du temps. *En n'oubliant pas que* $q_i=\epsilon g_i(q,t)$. Q est appelée **charge de Noether**.

Remarque : c'est une version simplifiée du théorème, car la transformation n'est donnée que par un seul paramètre. De manière générale, il y a autant de quantités conservées que de paramètre de la transformation.
Translation spatiale : on considère deux particules à 1D, en interaction selon le potentiel $V(|q_1-q_2|)$. On considère la transformation infinitésimale $\delta q_i=\epsilon$. C'est une symétrie infinitésimale : on a $\dot{q}_i'=\dot{q}_i$ et $'_1-q_2'=q_1-q_2$, donc

$$=\frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2-V(|q_1-q_2|)$$

est invariant. La charge conservée est alors :

$$Q = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \times \underbrace{1}_{g_1} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \times \underbrace{1}_{g_2} = m_1 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_2$$

On retrouve que la quantité de mouvement totale du système est conservée !

2.2 Le problème à 2 corps

On va montrer que c'est essentiel et a quelle point cela simplifie nos problèmes : On considère des points matériels de masses m_1 et m_2 tel que le système est isolé (ou pseudo-isolé ?). On peut par exemple prendre le cas de la Terre et de la Lune en négligeant les non-sphéricités (pour la Terre aplatissement $e = 1/300$) et en négligeant les interactions avec autres astres. On considère que la seule force qui s'applique est la force gravitationnelle :

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = \frac{-\mathcal{G} m_1 m_2}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r \quad \text{qui dérive de} \quad U = \frac{-\mathcal{G} m_1 m_2}{r}$$

avec $\mathcal{G} = 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m\,kg^{-3}\,s^{-2}}$ la constante universelle de gravitation.

On a donc 12 variables. En identifiant les invariances, cela va nous donner des quantités conservé et donc, cela diminuer notre nombre d'inconnues.

Tout d'abord avec l'approche Lagrangienne on se ramène on simplifie notre problème :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{\mathbf{r_1}}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{\mathbf{r_2}}}^2 + U(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{\mathbf{R}}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{\mathbf{r}}}^2 + U(\vec{\mathbf{r}})$$

Avec $M = m_1 + m_2$ et $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Cela revient au changement de variable :

$$\left(\vec{\mathbf{OM_1}} = \vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{OM_2}} = \vec{\mathbf{r}}_2\right) \longrightarrow \left(\vec{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + m_2 \delta_2}{m_1 + m_2}, \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1\right)$$

Et

$$(\vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{p}}_2) \longrightarrow \left(\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2, \vec{\mathbf{p}} = \mu \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}\right)$$

Le premier terme de ce changement de variable correspond à la dynamique du centre de masse et le second à la dynamiques du déplacement relatif des masses. Le système est isolé, donc la dynamique du centre de masse est invariante par translation selon toutes les direction. Donc le centre de masse est en translation uniforme : l'application de la conservation de la quantité de mouvement totale permet de restreindre 3 degrés de liberté. De plus Les 3 autres degrés de liberté du à la position du centre de masse seront entièrement déterminé par la position au temps initiale. Donc on ne les prends pas en compte et on se rammène donc à une problème pour une particule effective à 6 degrés de liberté **Conservation du moment cinétique**

La force F_{12} dérive de $U = \frac{-\mathcal{G} m_1 m_2}{r}$ qui est invariante par rotation, on a donc conservation du moment cinétique. On remarque que l'on gagne du temps ici ! En effet on pourrait utiliser le TMC et montrer la conservation de $\vec{\mathbf{L}}$, ici la simple analyse des symétrie nous permet de le savoir. Ma conservation du moment cinétique implique la planéité de la trajectoire ($\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{cst}}$) et la loi des aires $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2}$

Conservation de l'énergie Comme U ne dépends pas explicitement du temps, on a conservation de l'énergie pour la particules fictive.

$$E_m = E_c + U = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) - \frac{-\mathcal{G} m_1 m_2}{r}$$

En utilisant $C = cst$ on peut écrire :

$$E_m = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \frac{C^2}{r^2} - \frac{-\mathcal{G} m_1 m_2}{r}}_{\text{Potentiel effectif}}$$

On peut tracer le profil et on distingue plusieurs cas : Code Energie eff :

— $E < 0$ La trajectoire est liée. La trajectoire est une ellipse. La planète se déplace entre r_{min} et r_{max}. De plus pour de E de l'ordre de E_{min} alors on peut approximer le potentiel par une parabole et la trajectoire est circulaire (on parle de librations).

— $E=0$, r_{max} est rejeté à l'infini. On a une parabole.
— $E>0$ Ce sont des états libres. La trajectoire est une hyperbole.

Théorème de Bertrand, les seules forces centrales qui admettent une trajectoire fermée sont les forces en $\vec{\mathbf{r}}$ *ou* $\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3}$ *ouf!!!* Ici résoudre l'équation est possible car on a assez d'équation, mais ce sont des équations différentielles, on n'a pas encore utiliser toutes les quantité conservés. Pour avoir les trajectoire de manière plus efficaces on utilise une autre quantité conservé (redondante avec les autres) qui nous permet de faciliter les calculs : Le vecteur de Runge-Lenz :

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{L}} - \mathcal{G}m_1m_2\vec{\mathbf{e}}_r$$

On put le trouver en réarrangeant le PFD. Nous on va se contenter de vérifier qu'il est bien conservé :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \times \vec{\mathbf{L}} - \mathcal{G}m_1m_2\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\theta$$

Car $\vec{\mathbf{L}} = \mu r^2\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_z$ est conservé. Or avec le PFD, on a :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu r^2}\vec{\mathbf{e}}_r$$

On a donc bien

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{0}}$$

On remarque que $\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{0}}$ ceci signifie que $\vec{\mathbf{A}}$ est dans le plan du mouvement. Ceci nous dit que cela diminue de 2 notre quantité Ainsi son produit scalaire avec le vecteur position nous permet de déterminer ce vecteur position :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{r}} =& \left(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{L}}\right)\vec{\mathbf{r}} - \mathcal{G}m_1m_2\vec{\mathbf{e}}_r\vec{\mathbf{r}}\\ =& r\dot{\theta}Lr - \mathcal{G}m_1m_2r\\ =& \mu C^2\mathcal{G}m_1m_2r\end{aligned}$$

Donc

$$Ar\cos(\theta) = \mu C^2\mathcal{G}m_1m_2r$$

On a alors une équation implicite $r(\theta)$:

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\mu C^2}{\mathcal{G}m_1m_2} \quad \text{et} \quad e = \frac{A}{\mathcal{G}m_1m_2}$$

C'est l'équation d'une conique. On retrouve les différents cas en fonction de e. On peut montrer le lien entre E_m et e

$$E_m = \frac{\mathcal{G}m_1m2}{2p}\left(e^2-1\right)$$

On a résolu l'ensemble du mouvement sans utiliser la moindre équation différentielle!
On refait le Bilan pour être sûr : On par avec 12 degrés de libertés.
- **Changement de référentiel et conservation de la quantité de mouvement totale : on passe de 12 à 9 degrés de liberté (le centre de masse est en mouvement rectiligne uniforme), mais en plus on se rend compte que les 3 autres degrès de liberté sur centre de masse sont entièrement donnés par les condition initiales. Aussi on les ignore (peu intéressante) et on se rammène à l'étude d'une particule fictive à 6 degrés de libertés**
- **Conservation du moment cinétique : On passe de 6 à 3**
- **Conservation de l'énergie : on passe de 3 à 2**
- **Runge Lenz : on passe de 2 à 0 (on a que deux informations en plus car $\vec{\mathbf{L}}$ et $\vec{\mathbf{A}}$ sont orthogonaux).**

Le système possède autant de contraintes (quantités conservées) indépendantes que de degrés de liberté. Il possède donc des solutions exactes, qui sont uniquement déterminées par les conditions initiales. C'est ce qu'on appelle un système "intégrable".

Le vecteur de Runge Lenz est aussi associé à une symétrie. Tout d'abord il n'est conservé que pour les potentiel en $1/r$ et l'invariance associé est le groupe SO(4) (rotation en 4 D)

Le vecteur de Runge-Lenz est dans le plan, pointe vers le périhélie et sa norme augmente avec l'ellipticité

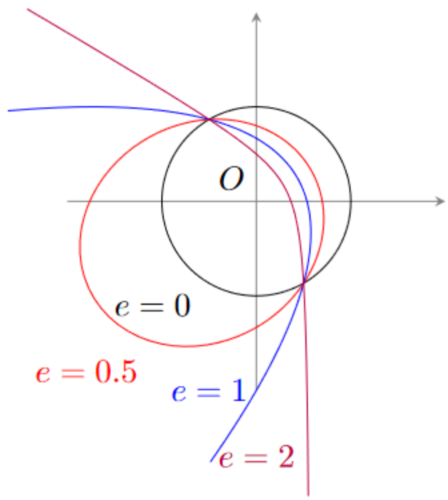

FIGURE 2 – *Connique*

Conclusion

Nous avons montré que les symétries en physique était essentielles, elle nous permettent de complètement déterminer un problème sans résoudre une seule équation différentielle (pour les systèmes intégrables). Nous avons également vu comment on pouvait formaliser notre notion de symétrie avec des opérateurs : être symétrique par rapport à quelque chose c'est être une fonction propre de l'opérateur représentant cette chose. C'est très utile pour codiagonaliser des opérateurs en mécanique quantique.