
EFFET DOPPLER ET APPLICATION

Niveau

Commentaires du jury

—

Bibliographie

— ref fempto

pré-requis

Expériences

—

Table des matières

1 Effet doppler non relativiste	2
1.1 Effet Doppler non relativiste : cas simple unidimensionnel	2
1.2 Effet Doppler non relativiste : cas général et application	2
2 Cas relativiste	4
2.1 Rappels de relativité et effet Doppler relativiste longitudinal	4
2.2 Correction des effet Doppler pour le GPS	5
3 Refroidissement par effet Doppler	6
4 Bonus :Elargissement spcetral	8

Introduction

L'effet Doppler est le nom donné au décalage fréquentiel observé par un observateur en mouvement relatif à un émetteur. Nous avons des démonstrations intuitives de ce phénomène : l'ambulance qui passe, ou encore le fait que si je nage face aux vagues, j'en rencontre plus souvent que si je nages dos aux vagues.

Plus qu'un phénomène anecdotique, l'effet Doppler a un bon nombre d'application. Il permet à la fois d'obtenir des informations sur une source ou un récepteur (red shift et radar sur l'autoroute) mais il constitue également une limitation qu'il faut prendre en compte dans les GPS et qui limite la finesse spectrale des sources. La bonne compréhension de ce phénomène permet de le mettre à profit. C'est ce qui est fait dans le refroidissement par effet Doppler.

1 Effet doppler non relativiste

Billy Capes page 400

L'effet Doppler se manifeste quand une source S de vitesse $\vec{v}_s$ émet une onde de fréquence ν_0 à un récepteur R se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_r$.

1.1 Effet Doppler non relativiste : cas simple unidimensionnel

Pour commencer on considère que les émetteurs et récepteurs sont sur un plan.

— A $t = 0$: $x_S = 0$ et $x_R = d$

— A t : $x_S = v_s t$ et $x_R = d + v_r t$

Un signal émis à $t = t_0$ par la source est reçu en t'_0 :

$$c(t'_0 - t_0) = x_R(t'_0) - x_S(t_0) = d + v_r t'_0 - v_s t_0$$

On a l'équation maîtresse. Maintenant pour déterminer la fréquence reçu par le récepteur, on considère les deux cas $t_0 = 0$ et $t_0 = T_0$, pour en déduire T la période du signal reçu :

— $t_0 = 0$, $t'_0 = t_1$: on a alors : $t_1 = \frac{d}{c - v_r}$

— $t_0 = T_0$, $t'_0 = t_2$: on a alors : $t_2 = \frac{d}{c - v_r} + T_0 \frac{c - v_s}{c - v_r}$

On en déduit :

$$T = t_2 - t_1 = T_0 \left(\frac{c - v_s}{c - v_r} \right) \implies \nu = \nu_0 \left(\frac{c - v_r}{c - v_s} \right)$$

Si l'onde se propage dans le sens des x décroissant on remplace c par $-c$

L'écart relatif en fréquence s'écrit :

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{v_s - v_r}{c - v_s} \simeq \frac{v_s - v_r}{c}$$

Application Une ambulance $\nu_0 = 420\text{Hz}$ se rapproche de moi à une vitesse de $v_s = 60\text{km/h} = 16.7\text{m/s}$. Le son se propage dans l'air à une vitesse de $c = 340\text{m/s}$

La fréquence que j'entends est donc : $\nu = 440.6\text{Hz}$. Une fois qu'elle m'a dépassé, j'entends une fréquence : $\nu = 399.4\text{Hz}$. C'est la raison pour laquelle on entend le son qui change de tonalité quand une ambulance nous dépasse.

Banc à effet Doppler : On montre les battement et on remonte à la vitesse.

1.2 Effet Doppler non relativiste : cas général et application

L'ambulance n'est pas toujours face à nous pourtant on entend toujours un changement de fréquence : Ce qui nous intéresse c'est la vitesse relative : On a la même relation qu'avant mais avec :

— $v'_r = |\vec{v}_r| \cos(\alpha_r)$

— $v'_s = |\vec{v}_s| \cos(\alpha_s)$

Cas d'une réflexion sur un objet mobile : Le raisonnement est le même. On suppose qu'un émetteur envoie une onde qui se réfléchit sur un objet et qui revient à l'émetteur (qui est alors aussi récepteur). La propagation se fait alors tanto dans un sens et tanto dans l'autre, de plus le rôle de récepteur et d'émetteur est inversé :

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{c - v_r}{c - v_s} \right) \left(\frac{c + v_s}{c + v_r} \right)$$

Application : Velocimètre sanguin

Un transducteur fixe émet une onde acoustique ultrasonore, monochromatique de fréquence ν_0 , qui se réfléchit sur un objet mobile dont la vitesse est $\vec{v}$.

Soit on fait l'étude détaillée : (Hprepa onde MP PC PSI page 120) Soit on utilise les formules précédentes : $\nu = \nu_0 \left(\frac{c - v'_r}{c - v'_s} \right) \left(\frac{c + v'_s}{c + v'_r} \right)$ Avec dans le référentiel du laboratoire, $v'_s = 0$ et $v'_r = -|\vec{v}_g| \cos(\alpha)$ Donc on a :

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{c + |\vec{v}_g| \cos(\alpha)}{c} \right) \left(\frac{c}{c - |\vec{v}_g| \cos(\alpha)} \right) = \nu_0 \left(\frac{c + |\vec{v}_g| \cos(\alpha)}{c - |\vec{v}_g| \cos(\alpha)} \right) \simeq \nu_0 \left(1 + \frac{|\vec{v}_g| \cos(\alpha)}{c} \right)^2 \simeq \nu_0 \left(1 + 2 \frac{|\vec{v}_g| \cos(\alpha)}{c} \right)$$

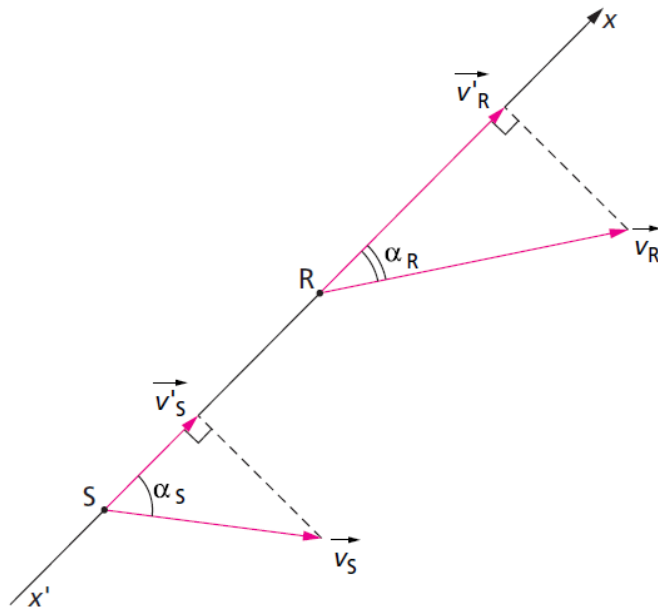


FIGURE 1 – *Effet Doppler cas général (Billy Capes)*

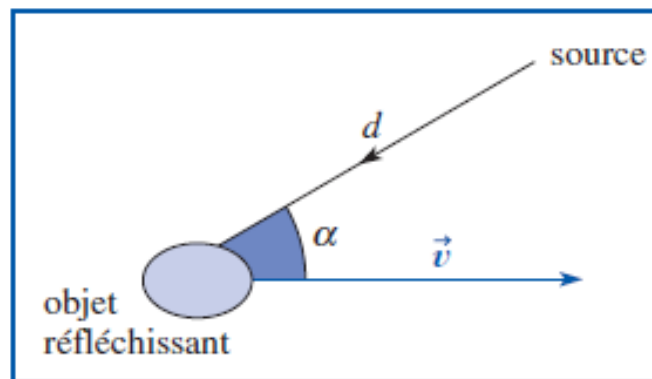


FIGURE 2 – *Schéma du problème*

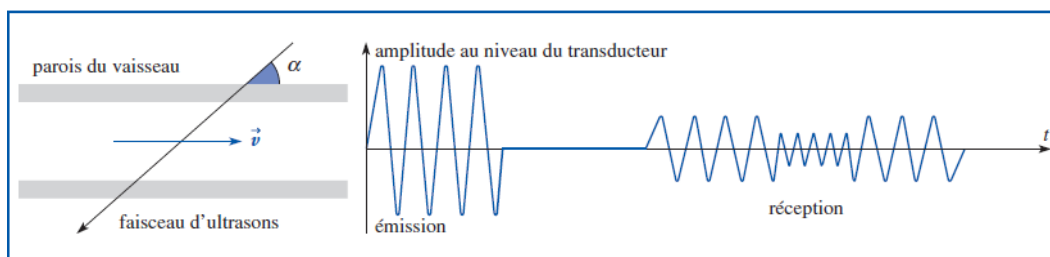


FIGURE 3 – *Forme des signaux*

Seul le signal de petit amplitude nous intéresse (le reste correspond aux réflexions sur les parois)
On s'intéresse à la variation relative de fréquence :

$$\frac{\nu_r - \nu_0}{\nu_0} = 2 \frac{v}{c} \cos(\alpha)$$

On peut de plus avoir le diamètre de l'artère avec les signaux de grandes amplitudes : $\Delta t = \frac{D}{2c \sin(\alpha)}$ Dans l'Aorte, $v = 30 \text{ cm/s}$ et on choisit $\alpha = 10^\circ$. On trouve alors :

$$\frac{\nu_r - \nu_0}{\nu_0} = 6.9 \times 10^{-5}$$

2 Cas relativiste

2.1 Rappels de relativité et effet Doppler relativiste longitudinal

Dans le cadre de la relativité restreinte, nous savons il y a invariance de l'intervalle d'espace temps :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2$$

La transformation spatiale de Lorentz permet de rendre compte de la conservation de cette quantité :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'une vitesse selon l'axe $\vec{e}_x$ avec :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Ceci permet de rendre compte de la dilatation du temps. Aussi si on considère notre cas simple unidirectionnel, on se place dans le référentiel de la source. Aussi dans ce référentiel, ce la équivaut à avoir une source fixe et un récepteur mobile qui s'écarte.

Si un front d'onde arrive au récepteur, le suivant est à une distance $\lambda_s = c/\nu_s$ du récepteur. Cependant ce même récepteur s'écarte et on a donc :

$$\lambda_s + vT_r = cT_{r,s} \quad \Rightarrow \quad T_{r,s} = \frac{1}{\nu_s(1 - \beta)}$$

Avec $T_{r,s}$ la période du signal qui arrive sur le récepteur mesuré avec l'horloge de la source. Jusque là c'est pareil qu'avant. Cependant on doit prendre en compte la dilatation du temps entre l'horloge du récepteur et de la source :

$$T_r = \frac{T_{r,s}}{\gamma}$$

On a donc :

$$\nu_r = \nu_s \gamma (1 - \beta) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Il est à noter que l'on obtient le même résultat en se plaçant dans le référentiel du récepteur. Le résultat est donc indépendant du choix de quel objet est considéré immobile, ce qui est en accord avec le principe de relativité. Ce n'était pas le cas dans le cas non relativiste. (je suis pas sûr, parce que c'est bizarre on réutilise quand même la formule de base...)

Cas général On peut remarquer que dans un cas quelconque, en se plaçant dans le référentiel de la source, on ne considère que la vitesse relative du récepteur et on trouve dans le cas classique :

$$Trs = T_s \frac{1}{1 - \beta \cos(\theta)} \simeq T_s (1 + \beta \cos(\theta))$$

Que l'on corrige par la dilatation du temps :

$$Tr = T_s \frac{1 + \beta \cos(\theta)}{\gamma} \implies \nu_r = \nu_s \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos(\theta)}$$

cas particuliers :

— Effet Doppler longitudinal : $\theta = 0$, c'est le cas simple :

$$\nu_r = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

— Effet Doppler transvers : $\theta = \pi/2$:

$$\nu_r = \nu_s \sqrt{1 - \beta^2}$$

C'est ce dernier cas que l'on va utiliser pour l'application qui suit :

2.2 Correction des effet Doppler pour le GPS

Dans un GPS, la localisation s'opère en comparant les horloges au sol et dans le satellite. Pour cela on suppose que ces horloges sont identiques et utilisent la même fréquence de référence. On veut savoir ce que modifie l'effet Doppler. On considère un satellite GPS au dessus d'un récepteur.

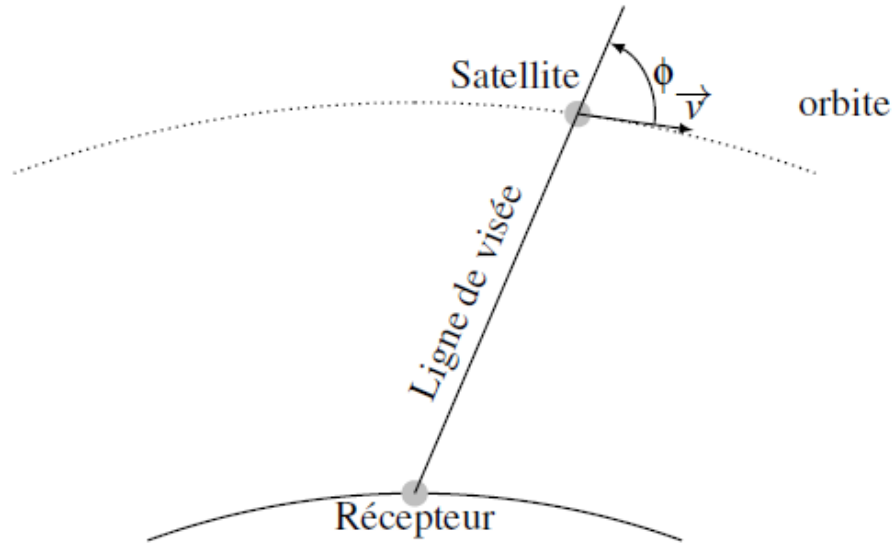


FIGURE 4 – Schéma de principe

On commence par le cas non relativiste : La variation de fréquence par effet Doppler classique est :

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c} \cos(\phi) \right)$$

Si on considère un temps de mesure de 1s pour le GPS, l'erreur induite par effet Doppler sur la mesure de temps de propagation s'écrit :

$$\delta t_{er} = \frac{\Delta \nu}{\nu} t_{mes}$$

$$\delta t_{er} = \frac{v}{c} \cos(\phi) t_{mes} = 3.1 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$\phi_H = \arccos \frac{R_0}{R_0 + h_c} = 1,3285 \text{ rad}$$

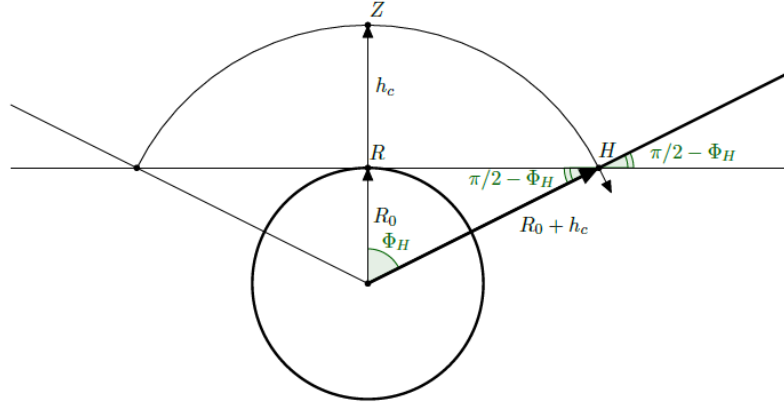


FIGURE 5 – Angle induisant l'erreur maximale

avec : $v = 3874.6 \text{ m/s}$ et $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ et $\cos(\phi) = \frac{R_0}{R_0 + h_c} = 0.24$.
Cela est énorme, en effet une erreur δt sur le temps entraîne une erreur $\delta l = c\delta t = 929 \text{ m}$ ce qui est énorme.

On peut comparer à ce qu'on obtient en prenant en compte les effets relativiste :

$$\frac{\Delta\nu_{RR}}{\nu} = \sqrt{1 - \beta^2} - 1$$

On en déduit

$$\delta t_{er} = (\sqrt{1 - \beta^2} - 1)t_{mes} = 8.35 \times 10^{-11} \text{ s}$$

C'est beaucoup plus petit et sa prise en compte permet de réduire une erreur de l'ordre de $\delta l = c\delta t = 2.5 \text{ cm}$.

Enfin on peut évoquer le fait qu'on pourrait également corriger les effet de la relativité générale (la gravité agit comme une accélération à prendre en compte dans les calculs) qui donne une erreur de l'ordre de 15 cm .

3 Refroidissement par effet Doppler

Dangoisse Hennequin Zennel les laser

Fox page 219

Cagnac page 291

Intérêts du refroidissement : L'intérêt de refroidir des atomes est d'observer des effets quantiques à basse température dans un cadre quasi-idéal où les interactions sont faibles : condensats de Bose-Einstein (1924). L'intérêt technologique se trouve aussi dans les horloges atomiques. Le refroidissement d'atomes a notamment permis de fabriquer des horloges atomiques. Dans un tel dispositif, la précision est limitée par le temps disponible pour la mesure. Ce temps étant directement proportionnel à la vitesse avec laquelle les atomes traversent le dispositif, un gain d'un facteur 100 sur la vitesse des atomes permet de gagner un facteur 100 sur la précision des horloges. Ce gain se répercute directement sur les systèmes utilisant les horloges atomiques, comme les systèmes de positionnement au sol par satellite (GPS). ODG : précision : 1 seconde en 100 millions d'années. Ces dernières utilisent des jets atomiques de Césium et un système d'asservissement qui ajuste la fréquence du laser. La transition de l'atome de Césium définit la seconde.

Comment refroidir des atomes ? En les ralentissant. En effet d'après le théorème d'équipartition on a :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

Aussi en ralentissant l'ensemble des atomes de sorte que leurs vitesse quadratique moyenne diminue on diminue leurs température.

On utilise des Laser pour cela. " mesure de vitesse : Le principe de la mesure de la vitesse consiste à envoyer un faisceau laser sur ces atomes et à enregistrer l'intensité de la lumière de fluorescence lorsqu'on balaye la fréquence

de ce laser. En effet, lorsque le laser est résonant, les photons du laser sont diffusés (cycles absorption de photon laser, émission spontanée de photon de fluorescence) et on peut donc récupérer, dans toutes les directions, une lumière de fluorescence. Si les atomes sont immobiles, on produit alors un maximum dans l'intensité de la lumière de fluorescence lorsqu'on vérifie la relation fondamentale $h\nu_{\text{laser}} = \Delta E$. En revanche, si les atomes ont une vitesse non nulle en projection selon la direction du faisceau laser, alors un effet Doppler décale la fréquence perçue par les atomes, et la résonance (donc le pic de fluorescence) sera obtenue pour une fréquence différente. On comprend ainsi que l'on accède à la distribution des vitesses en portant l'intensité de la lumière de fluorescence en fonction de la fréquence du laser, si l'on connaît par ailleurs la valeur de la fréquence de résonance pour des atomes immobiles. On aurait pu a priori penser à réaliser une mesure d'absorption, comme celle que nous avons décrite pour présenter le principe de la spectroscopie laser. Cependant, mesurer l'intensité de la lumière de fluorescence permet une mesure sur fond noir, alors que la mesure de l'absorption du laser nécessiterait de détecter une (toute) petite variation sur un signal important. C'est essentiellement pour cette raison qu'on préfère mesurer l'intensité de la lumière de fluorescence."

On utilise des laser. Cela peut paraître surprenant, on s'attendrait à les chauffer ... En réalité cette technique ne marche que sur une petite bande de fréquence de résonance de transition des atomes. Le principe repose sur l'échange d'impulsion entre les photons et les atomes : **Absorption** : Considérons le cas d'un atome se déplaçant à vitesse v_0 dans une onde laser de fréquence ν résonante avec une de ses transitions et se propageant en sens inverse. L'impulsion de l'atome est alors $m\vec{v}_0$ et celle d'un photon $\hbar\vec{k}$, où m est la masse de l'atome et $\vec{k}$ le vecteur d'onde du champ laser. Lors de l'absorption d'un photon par l'atome, la conservation de l'impulsion implique que la vitesse de l'atome excité après absorption soit :

$$\vec{v}_{\text{exit}} = \vec{v}_0 + \frac{\hbar}{m}\vec{k} \implies v_{\text{exit}} = v_0 - \frac{\hbar k}{m} = v_0 - v_r$$

v_r est appelée vitesse de recul. Après l'absorption, l'atome est dans un état excité mais avec une vitesse moindre.

Émission spontanée Il y a ensuite émission. Si l'émission est stimulée, l'atome retrouve sa vitesse initiale, si l'émission est spontanée, alors elle est isotrope. et la vitesse finale est :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \frac{\hbar}{m}\vec{k} + \frac{\hbar}{m}\vec{k}_s$$

Avec $\vec{k}_s$ de direction aléatoire. et de module $|\vec{k}_s| = |\vec{k}|$.

Si on répète le processus N fois on a :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + N\frac{\hbar}{m}\vec{k} + \sum_N \frac{\hbar}{m}\vec{k}_s$$

Comme les $\vec{k}_s$ sont aléatoires, on a en moyenne :

$$v_a = v_0 - \frac{N\hbar}{m}k$$

"Ce processus peut-il être efficace pour ralentir des atomes ? Pour répondre à cette question, prenons l'exemple de l'atome de césium. La vitesse des atomes de césium dans une vapeur diluée à température ambiante est typiquement de 300m/s. Pour la raie du césium située à 852nm, la vitesse de recul est $v_r =$, ce qui semble ridiculement faible pour ralentir un atome se déplaçant à 300m/s. Cependant, la durée de vie du niveau excité du césium est de , ce qui fait que le processus peut se répéter jusqu'à 3 millions de fois par seconde ! L'atome peut donc être complètement arrêté en quelques dixièmes de seconde. On peut d'ailleurs calculer que la force qu'exerce la lumière sur l'atome est équivalente à 1800g, où g est l'accélération de la pesanteur. Réduire la vitesse des atomes par cette méthode est donc parfaitement réalisable. **Mais c'est quoi le lien avec Doppler ?** L'équation n'aboutit pas à un ralentissement de l'atome : une fois le sens de la vitesse inversé ($n\hbar k/m > v_0$), l'atome est accéléré. Pour éviter cela, on plonge l'atome dans deux ondes contra-propageantes de fréquence inférieure à la fréquence de résonance atomique ν_a .

Pour retrouver le signe, on se souvient si on est sur la plage et que des petites vagues arrivent, alors il est très intuitif que si l'on nage vers le large, on rencontre alors des vagues plus souvent que si l'on revient vers le bord en nageant avec la même vitesse par rapport au fond. Un déplacement par rapport aux ondes que constituent les vagues engendre donc une modification de la fréquence apparente de cette onde.

Par effet Doppler, l'atome voit toujours l'onde se propageant dans le sens opposé au sien avec une fréquence plus proche de ν_a que l'onde se propageant dans le même sens que lui. L'onde de sens opposé (plus résonante) le freine donc toujours davantage que l'onde de même sens (moins résonante) ne l'accélère. Si l'on fait appel à trois paires de faisceaux lumineux contra-propageants décalés vers le rouge en longueur d'onde, les atomes subissent une force de frottement dès qu'ils se déplacent ; ils sont ainsi repoussés vers le point de convergence des faisceaux à cause de l'effet Doppler, et ils conservent leur très faible vitesse. Ils se retrouvent comme englués dans le réseau des faisceaux lumineux comme dans un pot de miel : on parle de mélasse optique. ou refroidissement Doppler.

prix Nobel 1997 : Chu, Cohen-Tannoudji et Phillips reçurent le PN pour leurs travaux sur le développement de "méthodes de refroidissement et de piégeage d'atomes par de la lumière laser"

Limite On peut refroidir ainsi jusqu'à des vitesses de l'ordre de 10cm/s ce qui correspond au μK . Mais on comprend que ça ne marche plus quand la variation de fréquence par effet Doppler due aux vitesses relatives aux laser est comparable à la largeur de la bande spectrale d'absorption de l'atome.

$$k_B T_{min} \simeq h \Delta \nu \implies T_{min} \simeq \frac{\hbar}{k_B \tau}$$

avec τ le temps de désexcitation. Avec le calcul complet de FOX on trouve : $T_{min} = \frac{\hbar}{2k_B \tau}$

4 Bonus : Elargissement spectral

Conclusion

Nous avons décrit l'effet Doppler en comprenant intuitivement d'où il provenait et en le formalisant. Nous avons également observé que ce n'était pas un procédé anecdotique. En effet, il est essentiel de le prendre en compte pour les GPS par exemple. Il permet également de refroidir des atomes. Nous pouvons citer d'autres applications de l'effet Doppler, l'observation de l'éloignement des galaxies par le RED shift, ou encore l'élargissement spectral des sources due à la vitesse des particules de gaz les constituants.