LP2020 : Non linéarités. Applications.

Passage le 16/02

Niveau

L3 ?

Commentaires du jury

— En 2019, il existait la leçon *Oscillateurs, portrait de phase et non linéarités.*

Bibliographie

— Strogatz P.276 et autres
— cours de T. Dauxois

Expériences

—

Pré-requis

— Mécanique
— Système d'équations différentielles linéaires
— portrait de phase de l'oscillateur harmonique

Table des matières

Introduction

La non-linéarité, on l'a déja rencontrée : elle intervient par exemple dans l'équation de Navier-Stokes, ou dans les ALI en électricité. En mécanique des fluides, elle rend les calculs impossibles : on essaye de linéariser les équations. En électricité, on utilise des modèles approchés pour faciliter le calcul.

La non-linéarité, c'est le cas général : c'est ce qu'il y a tout le temps ; à tel point qu'il est plus commode de définir la linéarité, qui est l'exception : **Un système est linéaire si les équations différentielles qui régissent son comportement sont linéaires en ses variables**. *Faire un dessin avec* e_1, e_2 *donnent* $s_1, s_2 \implies \lambda e_1 + \mu e_2$ *donne* $\lambda s_1 + \mu s_2$. C'est très commode en physique et ca permet d'appliquer le théorème de superposition.

La non linéarité se manifeste de plusieurs manières :

— Il peut y avoir un **seuil critique** : La valeur de sortie est nulle en dessous d'un certain seuil de la valeur d'entrée. C'est le cas dans l'effet photoélectrique, ou on doit envoyer un rayonnement avec une énergie (donc une longueur d'onde) minimale pour arracher des électrons au matériau. Application : faire une photopile (jonction PN qui est conductrice lorsqu'on l'éclaire assez fort).

— **Saturation** : la valeur de sortie est toujours la même au delà d'une valeur d'entrée. C'est ce qu'il se passe dans les ALI.

— **Hystérésis** : à une même valeur d'entrée correspond plusieurs valeurs de sortie, selon que l'entrée augmente ou décroit. On observe de l'hystérésis dans les angles de mouillages, ou dans l'aimantation des matériaux ferromagnétiques.

— **La quantification :** l'échantillonage est une opération non linéaire.

— et d'autres...

C'est pas pare que c'est non linéaire qu'on ne sait rien faire : on va commencer par un exemple assez simple, pour développer les outils de l'analyse de systèmes non linéaires.

1 Introduction : le pendule simple

1.1 Étude énergétique ou le plan de phase, un outil des systèmes dynamiques

Équation du pendule simple :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

Pour l'étudier, on multiplie par $\dot{\theta}$ pour dresser un bilan énergétique :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{l}(1-\cos\theta) = E \tag{2}$$

ou plutôt, pour que ce soit plus physique, on utilise l'équation dimentionné, et on compare tout à $2mgl$

$$\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta) = E \tag{3}$$

où on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

La valeur de E est dictée par les conditions initiales. Plusieurs cas de figure :

— $E \ll 2\omega_0^2$: on linéarise l'équation : on retrouve l'oscillateur harmonique.

— $E \leq 2\omega_0^2$: Le système oscille autour dela position d'équilibre.

— $E \geq 2\omega_0^2$: Le pendule tourne sans interruption.

Tracer le potentiel et le portrait de phase en correspondance, pour plusieurs conditions initiales et avec les différents comportements :

Bien entendu, ici c'est un modèle dans lequel on a négligé la dissipation........ Illustration expérimentale éventuellement ?

1.2 Période d'oscillation ou influnece de la non linéarité dans le pendule simple

On connaît la période d'oscillation d'un oscillateur harmonique : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Mais c'est uniquement le cas pour le pendule aux petits angles. On dit qu'il y a **isochronisme des oscillations.** Mais pour les angles plus grands ?

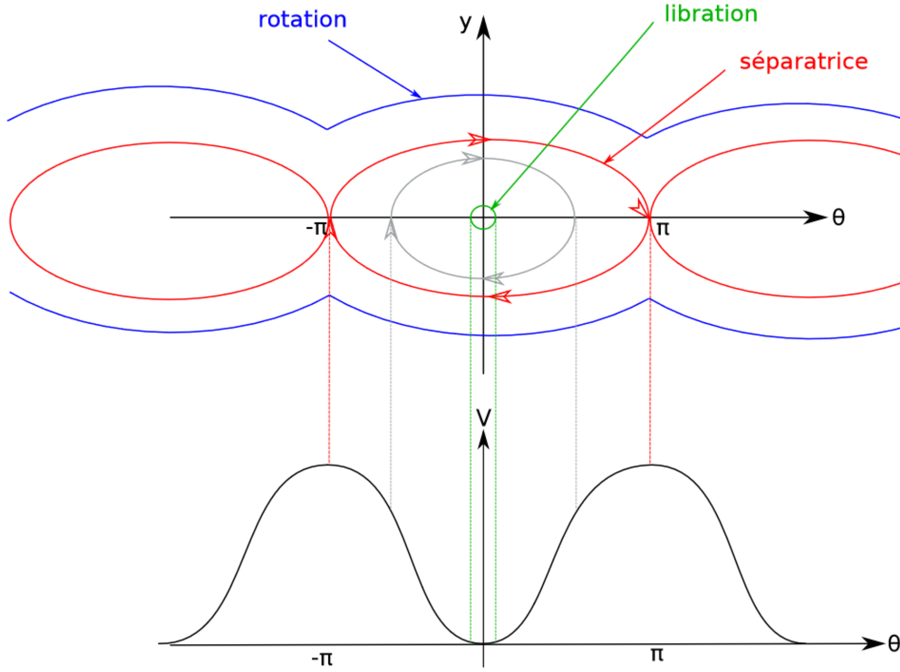

FIGURE 1 – *Dessin de Benjamin Monnet.*

On développe le sinus à l'ordre 3 (4) en θ :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(\theta - \frac{\theta^3}{6}) = 0 \tag{4}$$

On cherche une solution pertubative, avec un terme en sin et un terme en $\sin^3$:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t + \epsilon\theta_0 \sin 3\omega t \tag{5}$$

avec $\epsilon \ll 1$. L'équation du pendule devient :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\theta_0 \sin \omega t - 9\omega^2 \epsilon \sin 3\omega t + \omega_0^2 \epsilon\theta_0 \sin 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{6}\theta_0^3 \sin 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{2}\epsilon\theta_0 \sin 3\omega t \sin^2 \omega t = 0 \tag{6}$$

Plutot (si j'ai bien corrigé)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\theta_0 \sin \omega t - \frac{\theta_0^3}{8}\omega_0 \sin(\omega t) + \frac{\omega^2}{24}\sin(3\omega t) + \epsilon\theta_0\left(\omega_0^2 \sin(3\omega t) - 9\omega^2 \sin(3\omega t) - \frac{\theta_0\omega_0}{2}(1 - \cos(2\omega t))\sin(3\omega t)\right) = 0 \tag{7}$$

On identifie les termes d'ordre 0 : il vient :

$$\omega^2 \approx \omega_0^2(1 - \frac{\theta_0^2}{8}) \implies T \approx T_0(1 + \frac{\theta_0^2}{16}) \tag{8}$$

formule connue sous le nom de formule de de Bordas. Elle est valable pour des angles assez grands (3% d'erreur à 45°), mais reste une approximation. La période dépend de la position initiale : on a perdu l'isochronisme des oscillations. Dans le spectre θ, on observe l'apparition de nouvelles fréquences : c'est **l'enrichissement spectral**.

Transition :

Nous venons de voir que les non-linéarités provoquent un enrichissement spectral, et donc que nos méthodes usuelles basées sur le théorème de superposition ne s'appliquent plus... Et il est rarement possible de trouver les solutions analytique. A part le portrait de phase, quels sont les outils à notre disposition ?

2 Analyse de stabilité linéaire

2.1 Présentation du problème

On se propose d'étudier ici un modèle de compétition animale pour une même ressource. Cet exemple nous permettra de mettre au jour une méthode systématique pour étudier un système dynamique non linéaire.

On considère donc des moutons y et des lapins x qui se partagent la même herbe. Dans le modèle de Lotka-Voltera, on fait les hypothèse suivante :

— En l'absence de l'autre espèce chaque espèce connaît une croissance du type $x(\mu - x)$: si la population est seule, on voit que la croissance est favorisée lorsqu'il y a peu d'individus (abondance de ressources), mais que la population est toutefois limitée (manque de ressource par rapport à la population).

— L'autre espèce entraîne des conflits d'autant plus important que les espèces sont nombreuses.

On peut alors modéliser l'évolution du système par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(3 - x - 2y) = f(x, y)\\ \dot{y} &= y(2 - x - y) = g(x, y)\end{aligned}$$

On voit tout de suite que lorsqu'une des 2 populations est seule, la population d'équilibre des moutons est 2 et que celle des lapins est 3 : les moutons ont besoins de plus de ressource. De plus on suppose que les moutons sont plus gênants pour les lapins que ne le sont les lapins pour les moutons.

Le système est non linéaire, on ne sais pas en trouver une équation exacte...

2.2 Détermination de points particuliers

2.2.1 Les points fixes

On commence par déterminer les points fixes. Un point fixe est un point qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient les points fixes suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Les nullclines

Ce sont les lignes du plan où une seule des dérivées est nulle.

On a ici

— $x' = 0$ implique $x = 0$ ou $y = (3 - x)/2$. Sur ces droites les trajectoires seront uniquement dirigé selon la verticale (selon y)

— $y' = 0$ implique $y = 0$ ou $y = 2 - x$. Sur ces lignes les trajectoires sont uniquement horizontales.

2.3 Etude linéaire autour des points fixes

On veux maintenant savoir comment évolue le système si on s'écarte légèrement de ce point d'équilibre. Pour cela on introduit la jacobienne qui se définit comme :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2x^* - 2y^* & -2x^* \\ -y^* & 2 - x^* - 2y^* \end{pmatrix} \text{évaluée au point fixe.}$$

Ici l'idée est la même que lorsque l'on fait un développement limité usuel : $f(x) = f(x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0} (x - x_0) + o((x - x_0))$. Le signe de la dérivée nous donne l'évolution de f. Ici, nous l'appliquons à des matrices.

Il faut donc écrire les matrices Jacobiennes à chaque point fixe. En fonction des propriétés de la matrice, on a des renseignements sur la dynamique du système.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

— Pour $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a un noeud instable. Les courbes partent tangentiellement au vecteur propre le moins instable (direction lente), ici y

— Pour $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ on a un noeud stable de direction lente $V = (1, -2)$ associé à la valeur propre -1

— Pour $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a un noeud stable de direction lente $V = (3, -1)$ associé à la valeur propre -1

— Pour $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$ on a donc un col. Le vecteur propre associé à la variété stable est $V_- = (\sqrt{2}, 1)$ et celui instable $V_+ = (\sqrt{2}, -1)$

2.4 Dynamique du système

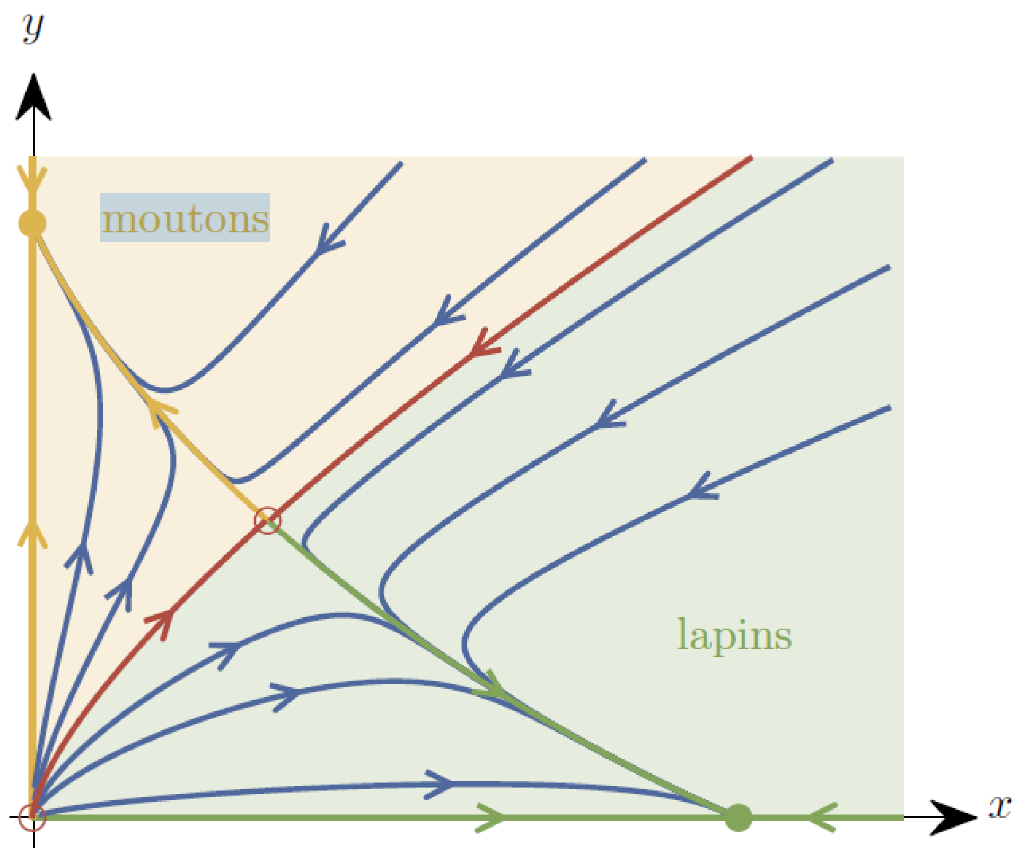

FIGURE 2 – *Cours de T.Dauxois.*

Une fois le tracé des trajectoires obtenu, il est assez simple de prévoir l'évolution du système à partir de n'importe quelle condition initiale. Ce modèle prévoit la dominance d'une espèce à long terme : il n'y a pas d'équilibre possible avec les 2 espèces survivantes.

Nous pouvons conclure de cette partie que nous avons mis en place des méthode pour l'analyse de systèmes non-linéaires. Les non linéarité sont la source de la richesse du portrait de phase. Par ailleurs, cela a permit de mettre en évidence une certaine diversité de comportement, que l'on va retrouver dans des systèmes un peu différents : les oscillateurs non linéaires.

2.5 Théorème de Poincaré-Bendixson *facultatif... mais à connaître*

On considère le système dynamique de l'ouvert R $\subset \mathbb{R}^2$:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) \tag{9}$$

avec f continument différentiable sur R. Alors si R ne contient aucun point fixe, mais contient une trajectoire C, alors soit C est une orbite fermée, soit elle converge vers une orbite fermée.

Conséquence : il ne se passe rien de compliqué à 2D : en particulier, pas de chaos.

3 Oscillations non linéaires : Oscillateur auto-entretenu

Intérêt des oscillateurs non linéaires : modéliser des systèmes qui socillent non linéairement.

3.1 Présentation et mise en équation

Lord Rayleigh propose une modélisation d'une clarinette. Le bec d'une clarinette est constitué d'une anche (morceau de bois) fixée sur le bec. En soufflant le clarinettiste fait "vibrer" l'anche, c'est ce que l'on se propose de modéliser.

On considère une lamelle de bois fixe à une extrémité et à laquelle on attache une masse. En soufflant sur l'anche, le clarinettiste donne de l'énergie au système. Quand on ne souffle pas, si la lamelle est déplacée elle revient à sa position d'équilibre comme un oscillateur harmonique amorti. On a un point fixe stable :

$$x' = v \tag{10}$$
$$mv' = -kx - \lambda v \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

Quand on souffle, Rayleigh modélise cela comme une friction négative, pour apporter de l'énergie au système. Les oscillations augmentent alors indéfiniment. Ceci n'est pas physique, et on peut modélisé ça par un terme d'ordre supérieur en vitesse qui s'oppose à l'augmentation des oscillations. Nous pouvons expiciter cela en disant : "quand la vitesse de la anche est faible souffler dessus lui permet de bouger plus vite, mais si elle va vite alors les frottement de l'air reprennent le dessus". On veux donc un terme de frottement qui a une pente négative autour de $v = 0$ est qui à une pente positive pour de grandes valeurs de v (en valeur absolue). La manière la plus simple de faire cela est de prendre une force de friction en N :

$$F = -\lambda\left(v^3 - v\right) \tag{13}$$

On a alors le système :

$$x' = v \tag{14}$$
$$mv' = -kx - \lambda\left(v^3 - v\right) \tag{15}$$

On peut avoir l'intuition du cycle limite en traçant à la mains deux trajectoires une loins qui se rapproche mais pas vers 0 et une proche de 0 qui s'écarte.

Pour étudier plus précisément ce qu'il se passe on fait un changement de variable, et on montre que le système d'équation précédente se ramène à l'équation de Van Der Pol :

$$x'' + \mu\left(x^2 - 1\right)x' + x = 0 \tag{16}$$

Si on applique l'étude précédente on ne trouve qu'un point fixe, $(0, 0)$ qui est instable. Mais ici on peut aller plus loin.

L'équation de Van der Pol est un exemple canonique d'oscillateur non linéaire. Il est souvent utilisé pour modéliser approximativement des oscillateurs réels : battements du coeur, potentiels d'action neuronaux, comportement des plaques au niveau d'une faille sismique, cordes vocales... Il présente l'avantage d'avoir une assez grande variété de comportements en fonction de μ, et l'OH en est un cas particulier. Il est aussi relativement simple à câbler en électricité.

3.2 Cycle limite

on va encore réécrire notre système en posant : $y = x'/\mu + (x^3/3 - x) = x'/\mu + F(x)$
On a alors :

$$x' = \mu(y - F(x)) \tag{17}$$
$$y' = -x/\mu \tag{18}$$

On se place dans le cas ou μ est grand, on trace F(x). on choisit une condition initiale et on fait le cycle d'hystérésis

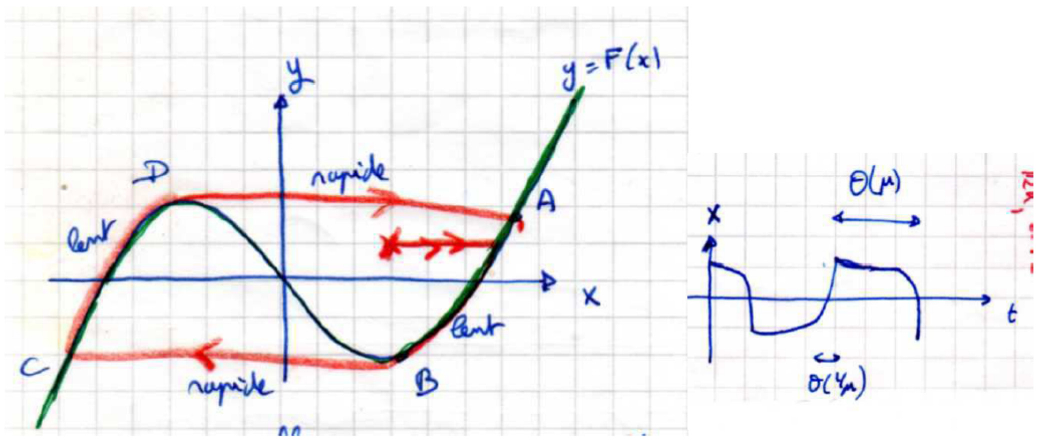

FIGURE 3 – *Cours de T.Dauxois.*

Un cycle limite est une trajectoires fermée et isolée. "Les cycles limites sont des caractéristiques intrinsèquement non linéaire. Dans un système linéaire, il peut exister des orbites fermées, mais elles ne sont pas isolées. En effet, si $x(t)$ est une orbite fermée, $cx(t)$ où $c \in R$ est aussi une trajectoire du système, et est aussi fermée. En faisant tendre c vers 1, il apparaît que la trajectoire $x(t)$ n'est pas isolée. L'amplitude de l'oscillation par exemple est donc entièrement déterminée par les conditions initiales, et toute perturbation restera présente à temps long. Ce n'est pas le cas pour un système non-linéaire, qui retrouvera son cycle limite après une perturbation." (cours de Dauxois)
Si on peut écrire un problème de la forme :

$$x' = f(x, t) \tag{19}$$
$$x(0) = x_0 \tag{20}$$

Avec f continues ainsi que toutes ses dérivées sur un ouvert connexe, alors le problème à une solution unique.

Conclusion

Nous avons vu plusieurs aspects des non-linéarités, et notamment que l'on pouvait étudier ces systèmes et donner une idée précise de leurs dynamique, sans trouver de solution analytique : portrait de phase, points fixes et analyse de stabilité linéaire sont à la base de l'étude de ces systèmes.

Nous avons aussi discuté plusieurs aspects des non linéarités : perte d'isochronisme : permet de synchroniser des oscillateurs (pour faire des montres par exemple). Enrichissement spectral : des fréquences multiples aparaissent dans le système. Les pointeurs laser verts fonctionnent grâce à cela (on passe d'une longueur d'onde de 1064 nm à 532 nm). Enfin, nous avons étudié un modèle classique d'oscillateur non linéaire. Il présente une grande diversité de comportements, et sert à modéliser bon nombre de systèmes.

4 Question

— Peut tu donner des exemples de systèmes linéaires ? En introduction, tu as cité beaucoup d'exemple non linéaires, pourquoi ne pas avoir citer ces exemples linéaires ?

- — L'oscillateur harmonique, les systèmes électroniques classique de base (résistance, condensateur, bobine), l'équation de Schrodïnger linéaire, l'optique de L1/L2...
  - — Nous avons choisit d'insister sur les exemples non linéaires (titre de la leçon) car les systèmes linéaires sont les seuls systèmes que les élèves ont vu en physique. Nous voulions insister sur le fait que les systèmes non linéaires sont en réalité bien plus courant.
- — En optique, peut tu donner un exemple où on traites les non linéarités comme des perturbation ?
  - — Lors du traitement des aberrations. Les variables non linéaires du systèmes sont l'angle et la distance à l'axe.
- — Est ce que parler de système temporellement invariant ça te dit quelque chose ?
  - — Pas sûr de ce qui était attendu... Systèmes symétrique par retournement du temps ?
- — Tu as parler d'hystérésis, peux-tu définir ce terme et en donner un exemple.
  - — On dit qu'un système à de l'hystérésis s'il est multivalué, et que la valeur prise par le système à un instant donné dépend de l'historique du système (s'il y est arrivé par valeurs montante ou descendante)
  - — On peut parler de l'hystérésis de l'angle de mouillage. Attention, ce n'est pas un exemple facile. En effet, bien qu'il soit souvent évoqué la dynamique de la ligne triple n'est vraiment pas facile. Une partie de cette hystérésis est du au défaut de la surface mais pas tout... Il faut être bien clair dessus.
  - — On aussi citer les montages avec AO en bouclage positif, ou le cycle d'hystérésis des matériaux ferromagnétique...
- — Que peut tu nous dire sur les effets non linéaires dans les cristaux ?
  - — C'est quand la susceptibilité électrique est un tenseur du champ (est pas juste un scalaire ou une matrice constante)
- — Comment marche une montre à quartz ?
  - — Alors pas facile, facile... Donc l'idée est d'utiliser un oscilateur à quartz comme base de temps. On utilise les propriétés piezoéléctrique du quartz. En effet on peut exciter la résonance mécanique du quartz par un signal électrique, puis on utilise l'effet piezoéléctrique inverse, pour avoir un signal électrique de fréquence fixé par la résonance du Quartz. La faible dépendance en température du quartz (dans les condition d'utilisation, je suppose) en font un bon candidat pour les montres. L'oscillateur est constituer d'un AO, du quartz et de deux capacités permettant de fixer avec précision la fréquence de résonance du système. réf en plus de wikipédia
- — Dans l'effet photoélectrique, comment se manifeste la non linéarité ? Connais-tu d'autres phénomènes à seuil ?
  - — La non linéarité se manifeste dans l'effet de seuil. Il faut une énergie suffisante pour arracher un électron. L'effet photoélectrique est mis en oeuvre dans les cellules photovoltaïque.
  - — On peut parler de l'échantillonnage, des diodes ?
- — A quoi ca sert un AO de manière général ? Comment on peut faire saturer un AO ?
  - — A amplifier ou à faire des adaptation d'impédances.
  - — On peut faire saturer un AO en faisant un rétroaction positive (sur la borne +)
- — Dans l'équation du pendule pour la formule de De Bordas, il sort d'où le terme en θ^3 ? Ca serait quoi le terme suivant ?
  - — Il viens du développement limité du sinus
  - — Le terme suivant serait en θ^5
- — En TP, comment je fais pour savoir si j'ai besoin où non de prendre en compte la correction de la période du pendule ?
  - — Je compare les deux termes de la période. et je vois si le terme en θ_0^3 modifie beaucoup la période.
- — Pourquoi tu as tout comparer à $2mgl$ pour l'analyse du pendule
  - — Car c'est l'énergie limite des trajectoires liées
- — Quand est-ce qu'on favorise une étude énergétique ?
  - — Pour les systèmes conservatifs à un degré de liberté
- — C'est quoi un portrait de phase ? (on l'avait un peu considéré comme acquis et on l'a pas défini...)
  - — Le portrait de phase est une représentation graphique des trajectoires du système en fonction des variables dynamique du système (et pas directement t). Par exemple c'est θ et $\dot{\theta}$ pour le pendule, ou c'est y et x pour les moutons.
- — Comment appelle-t-on les trajectoires à l'intérieur de la séparatrice et celles à l'extérieur ?
  - — Intérieur : les trajectoires liées.
  - — Extérieur : les trajectoires libres.
- — C'est quoi l'autre non en système dynamique de la séparatrice ? En quoi elle est particulière ?
- — C'est une hétérocline : elle relie deux points fixes."Pour l'historien, le prolongement donné à la question

des solutions doublement asymptotiques, soulevée en 1890, constitue un point d'intérêt majeur du troisième tome. Dressons quelques rapides constats. Tout d'abord, Poincaré distingue désormais deux classes de solutions : les solutions baptisées homoclines, qui correspondent aux solutions doublement asymptotiques de son mémoire de 1890, et les solutions appelées hétéroclines, ayant la particularité d'être asymptotiques à une solution périodique instable dans le passé et à une autre dans le futur"http ://theses.univ-lyon2.fr/documents/getpart.php ?id=lyon2.2004.petitgirard$_lpart = 194128rf$

- Pourquoi les trajectoires ne se croisent pas ?
  - Parce que l'on a un système déterministe, entièrement déterminé par les conditions initiales. On a un système avec autant de contraintes que de variables.
- Que se passe-t-il s'il y a dissipation ?
  - Les trajectoires viennent s'écraser sur un point fixe.
- D'où viens de 3ω dans le développement de De Bordas ?
  - Il vient du développement du sinus au cube.
- Attention a penser à mettre la phase dans toutes les solutions que l'on met, ca mange pas de pain et ca permet qu'en $t = 0$ on soit pas en 0 ... ça donne pas très bien pour les grands angles.
- C'est quoi l'isochronisme ? En quelle année d'études le voit on ?
  - L'isochronisme c'est quand la période d'oscillation est indépendante des condition initiales (de l(amplitude du mouvement).
  - C'est vu en terminal ?
- Tu peux nous expliquer le laser vert ?
  - Le laser vert utilise les propriétés d'enrichissement spectrales dues aux non linéarités. On envoie dans un cristal non linéaire un faisceau de $\lambda = 1064\,\text{nm}$ et il ressort un faisceau de $\lambda = 532\,\text{nm}$, donc doublement de la fréquence.
- C'est quoi la synchronisation d'oscillateurs ? Il y a besoin de non linéarité
  - La synchronisation d'oscillateur est le phénomène qui tends à ajuster les fréquences de deux oscillateurs non linéaire différents couplé, de sorte qu'ils oscillent à la même fréquence (avec un déphasage possible). Il y a besoin de non linéarité. Les deux oscillateurs oscillent à une fréquence de compromis
- Comment décrire l'évolution d'une population seule dans le cadre du modèle de Locka Voltera ?
  - On trace la courbe $f(x) = (\mu - x)\,x$. Les points fixes sont les intersections avec l'axe des abscisses. La dynamique est à 1D le long de la ligne des abscisses.
- Tu peux détaillé la linéarisation que tu fais ? Quelle est le lien avec la Jacobienne et les direction stables et instables ?
  - $\dot{(x)} = f(x^*, y^*) + (x - x^*)\frac{\partial f}{\partial x} + (y - y^*)\frac{\partial f}{\partial y}$
  - Ceci marche autour des points fixes. La généralisation du comportement linéaire au comportement non linéaire proche des points fixe ne marchent pas dans tous les cas (les centres et les noeuds dégénérées ne peuvent êtres généralisés)
  - Ceci est résumé dans la Jacobienne. Les valeurs propre de cette Jacobienne nous permettent de déterminer la stabilité d'un point fixe et les vecteurs propres associées, les direction dans lesquelles le systèmes converge ou diverge.
- Qu'est ce qu'une bifurcation ?
  - Une bifurcation correspond à la modification des points fixes du à la modification d'un paramètre du modèle. Les solutions à temps long vers lequel le système converge sont ainsi modifier.
- Tu connais une méthode analytique pour étudier les systèmes non linéaires ?
  - La méthode des échelles multiples. Ou les méthodes perturbatives.
- Dans le modèle de Rayleigh, c'est quoi cette force de frottement ? C'est vraiment une force de frottement ?
  - C'est bien une force de frottement du fluide sur la anche. Elle tends à écarter la anche parce que l'on souffle dessus.
- Physiquement, il vient d'où le terme correctif non linéaire ?
  - Possiblement d'un rappel non linéaire de la anche
  - Si la vitesse de la anche devient trop grande, le terme de friction négatif redeviens dominant mais avec un retard à cause du souffle.(explication du livre Modeling Life)
- Peut tu citer des grandes équations de la Physique non linéaire ?
  - Navies Stockes
  - Schrodinger non linéaire
  - Réponses non linéaire des milieux
- Pourquoi tu sépares perte d'isochronisme et enrichissement spectrale ?

— C'est pas la même chose, la perte d'isochronisme fait que la fréquence va être modifier en fonction de l'amplitude du système mais on peut imaginer un signal quasi sinusoïdale (comme avec un Van der Vol avec ν petit). L'enrichissement spectrale il se traduit par exemple par un doublement de la fréquence. Mais de la même manière on peut imaginer un système qui oscille toujours de la même manière (peut importe la condition initiale) mais dont la trajectoire n'est pas sinusoïdale et donc avec plein de fréquences dedans.

— C'est quoi les variables qui jouent marchent comme un Van der Pol pour le système nerveux, le failles sismiques etc sur tous les exemples ?

5 Commentaires

— Attention, si vous citer plein d'exemple, les jury vont prendre les perches que vous lui donner. Il faut donc les connaître un minimum. Il faut peut être parfois donner moins d'exemple mais bien les connaître.

— Il faut que les près-requis soient plus précis notamment au niveau de la notion de portrait de phase qui était supposé comme acquise.

— Les non linéarités sont dans tous les domaines donc comme dans le titre il y a "application" ne pas hésiter à prendre un dommaine qui vous intéresse et traiter la non linéarité là dedans.

— Une ouverture vers le Chaos est possible (en tout cas il faut se préparer à des questions là dessus, c'est la "suite logique de ce plan").

A Application : couplage d'oscillateurs

À partir de là tout est dans le Strogatz.

On peut coupler des oscillateurs à des fréquences différentes, cela a pour effet de les synchronyser : ce n'est possible que parce qu'il n'y a plus l'isochronisme. On peut mettre une illustration expérimentale ici.

Analogie des coureur·es : Imaginez deux personnes qui vont faire un jogging : ces personnes sont amies et veulent courir ensemble, mais on des rythmes différents. Iels doivent alors faire un compromis et chacun·e doit adapter sa vitesse à l'autre. Mais si leurs vitesses sont trop différentes, iels n'y arriveront pas et ne seront jamais synchronisés.

À partir de là tout est dans le Strogatz. Je recopie pas avant d'avoir ton avis sur les choses :) Mais ya une bifurcation selle aussi, donc ça permet de développer la chose.

On considère un modèle simple d'oscillateurs :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 + K_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 + K_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \tag{21}$$

θ_1 et θ_2 désignent les phases des oscillateurs, ω_i leurs pulsations en absence de couplage. On prend un modèle assez simple pour comprendre, mais ce système modélise le couplage entre nos horloges biologiques et nos alternances sommeil-éveil. On suppose les constantes de couplages $K_i > 0$ et on pose $\phi = \theta_1 - \theta_2$. Il vient :

$$\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2 - (K_1 + K_2)\sin\phi \tag{22}$$

On restreint le domaine d'étude à $[0, 2\pi]$. On trace alors le portrait de phase correspondant sur la figure 4. On voit apparaître une disjonction de cas : On suppose que $\omega_1 > \omega_2$ sans perte de généralité : le cas contraire est symétrique.

— si $|\omega_1 - \omega_2| > K_1 + K_2$: pas de point fixe. La solution $\phi = 0$ est impossible.

— si $|\omega_1 - \omega_2| = K_1 + K_2$: apparition d'un point fixe en $\sin\phi^* = -1$ ce qui donne $\phi^* = 3\pi/2$. *Faire un dessin et voir la stabilité en live.* Le point fixe est semi-stable, et ϕ augmente périodiquement : les oscillateurs ne peuvent se coupler.

— si $|\omega_1 - \omega_2| < K_1 + K_2$: deux points fixes donnés par l'équation implicite $\sin\phi^* = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_1 + K_2}$. Un point fixe est stable, l'autre est instable. Le système finit par converger vers un point stable : la différence de phase entre les oscillateurs est constante, ils sont synchronisés.

Pulsation de fonctionnement : On réinjecte l'expression de $\sin\phi^*$ dans celles de $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$. On aboutit à :

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \frac{K_2\omega_1 + K_1\omega_2}{K_1 + K_2} \tag{23}$$

Les oscillateurs sont synchronisés à une *pulsation compromise*, comprise entre les pulsations de chaque oscillateur. On peut retrouver des résultats en faisant grandir k_2 : la pulsation devient ω_1. Physiquement, augmenter K_2 revient à

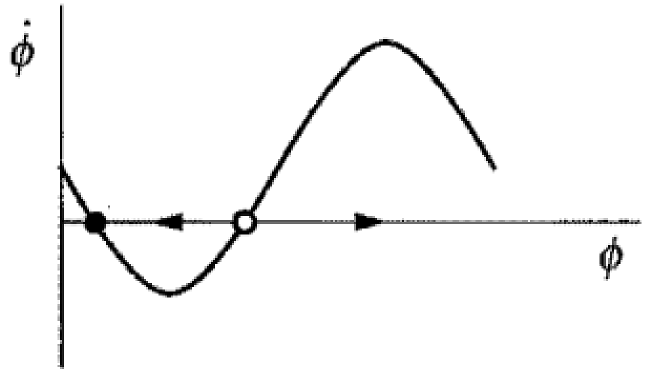

FIGURE 4 – *Portrait de phase de la différence de phase, cas* $|\omega_1 - \omega_2| < K_1 + K_2$. *Issu du Strogatz.*

augmenter l'influence de l'oscillateur 1 sur l'oscillateur 2 : on comprends que la pulsation retombe sur ω_1. Cependant, si le couplage est trop fort, les oscillations ne seront pas synchronisées.

Bifurcation col noeud : Lorsque $\omega_1 - \omega_2$ diminue, il apparaît une bifurcation col noeud en $|\omega_1 - \omega_2| = K_1 + K_2$. Deux points fixes apparaissent, l'un stable et l'autre instable. *Tracer le diagramme de bifurcation dans le plan* $(\omega_1 - \omega_2, \phi)$. La forme normale de la bifurcation est $\dot{x} = r + x^2$.

Avec cette exemple on montre que la perte d'isochronisme permet la synchronisation des oscillateurs : si les oscillateurs ne peuvent modifier leur fréquence, ils ne se synchronisent pas. Le couplage non linéaire permet de modifier continuement la pulsation de fonctionnement en faisant varier les valeurs de couplage.