LP22 : Rétroaction et oscillations

Niveau

Commentaires du jury

- 2015 : Dans le cas des oscillateurs auto-entretenus, les conditions d'apparition des oscillations et la limitation de leur amplitude doivent être discutées. Le jury souhaiterait que le terme de résonance soit dûment justifié sans oublier une discussion du facteur de qualité. Il n'est pas indispensable de se restreindre à l'électronique.
- 2009-2013 : Le jury n'attend pas une présentation générale et abstraite de la notion de système bouclé. Il estime indispensable de s'appuyer sur au moins un exemple concret et détaillé avec soin.
- 2007 : La stabilité des systèmes bouclés est mal comprise. Le bouclage ne se limite pas uniquement à une fonction d'asservissement. Le lien entre les réponses temporelle et fréquentielle est un aspect important.

Bibliographie

- Brenders PSI électronique Précis Bréal
- Lauren Rose, Léo Mangeolle

pré-requis

- Transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}[f]\,(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

Expériences

-

Table des matières

Introduction

Jusqu'à présent on a étudié que les systèmes linéaire, comme les filtres, que l'on pu modélisé par une fonction de transfert et qu'il est possible de repérsenter comme ceci : La fonction de transfert s'acrtie :

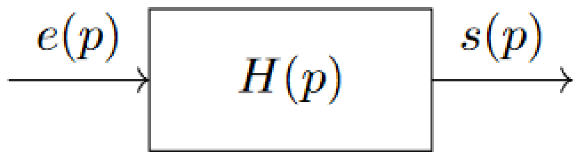


FIGURE 1 – *Schéma bloc simple*

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)}$$

On peut partir de l'exemple illustratif de la piscine : on peut enoyer une commande qui la remplit de autant que ce que l'évaporation prévoit. Mais s'il pleut, c'est naze. Du coup, il vaut mieux imaginer une autre solution : on peut imaginer un signal électrique dont l'amplitude est proportionnelle à la hauteur d'eau, que l'on compare à un niveau de référence. Lorsque le niveau est trop bas, on le repère et on commande l'ouverture du tuyau. On dit que le niveau d'eau est asservi. (Plus subtil, si la voiture n'est pas asservi, on irait pas à la même vitesse quand on est plus ou moins nombreux dans le voiture pour une même commande)

On peut représenter schématiquement cela sur un schéma bloc : un premier bloc constitue le comparateur, avec un signal de référence, et un signal donné par la hauteur de l'eau. La sortie de ce bloc est la commande : elle actionne ou non la vanne du tuyau qui alimente la piscine. Ceci a une influence directe sur le niveau d'eau et donc sur les 2 signaux que l'on compare. On peut représenter l'ensemble {Vanne + niveau d'eau} comme un seul bloc avec le signal de la hauteur d'eau en sortie.

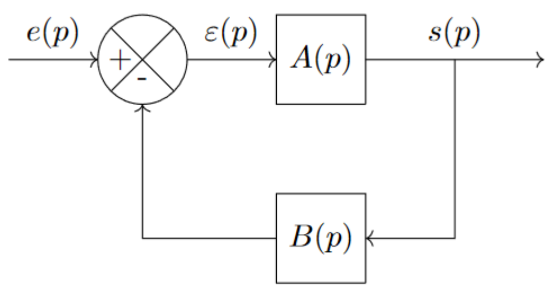


FIGURE 2 – *Schéma bloc avec retour*

1 Système bouclé linéaire

1.1 Fonction de transfert

Un système bouclé est constitué d'une chaîne directe qui donne la sortie "naive" en fonction de l'entrée. La sortie est récupéré pour être comparer à la commande de sorte d'ajuster la réponse. la différence en sortie du comparateur est appelé **erreur**. Si la sorti est trop grande alors cela va entraîner une rétroaction négative qui aura tendance à diminuer la sortie.

Attention : Ceci n'est qu'une figuration de l'esprit !! en effet nous sommes dans l'ARQS et tout ce fait instantanément.

Attention à nouveau, cela ne veux pas dire que ma réponse et parfaite et instantané, cela signifie simplement que l'on a modifié la fonction de transfert pour prendre en compte une rétroaction. La rétroaction n'agit pas "après" un premier passage mais modifie complètement tout le système.
Avant la rétroaction, la sorti de notre système était donné par : $s(p) = A(p)e(P)$. on se demande comment cela est modifié par l'application de la boucle de rétraction :

$$\begin{aligned} s(p) =& A(p)\epsilon(p) \\ =& A(p)(e(p) - B(p)s(p)) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

On appel cela la fonction de transfert en boucle fermé.
Dans la limite où la rétroaction est très petite, on a $H \simeq A$ avec une petite correction apporté par le retour $(1 - AB)^-1$.

Dans la limite où le gain en chaîne directe A est grand on a $H \simeq \frac{1}{B}$ En d'autre terme, le gain du système bouclé ne dépend plus que de la rétroaction. Ainsi lorsque l'on utilise un AO $A = \mu_0 = 10^5 \gg 1$, par exemple pour un amplificateur inverseur nous prendrons $B = \frac{R_1}{R_1+R_2} \ll 1$ ce qui caractérisera notre amplificateur.

1.2 Application

On le fait et on montre le gain, la bande passante si possible quitte à diminuer les résistance.

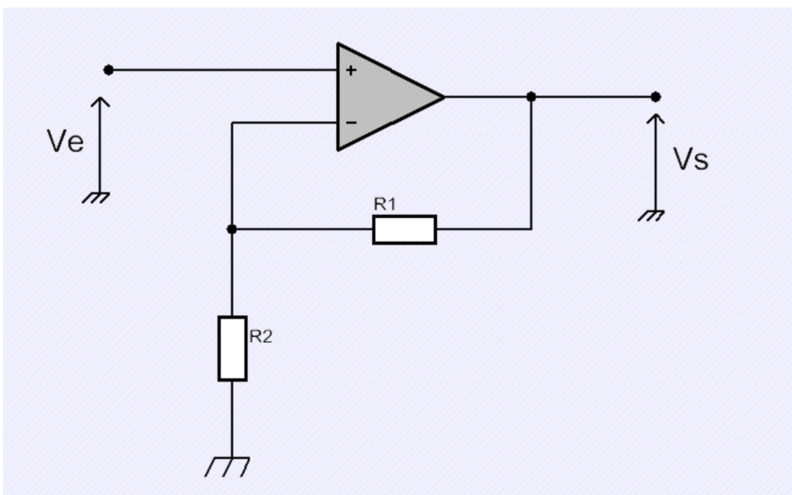


Figure 3 – *Schéma de l'amplificateur non inverseur, source* `electronique.aop.free.fr`

L'amplificateur non inverseur est un montage de base des amplificateurs opérationnels (AO). C'est un système bouclé : la grandeur de sortie est renvoyée vers l'entrée. Rappelons la fonction de transfert de l'AO :

$$s(p) = \frac{\mu_0}{1 + p/\omega_{AO}}[e_+(p) - e_-(p)]$$

L'AO se comporte comme un comparateur suivi d'un passe bas.

ODG : $\mu_0 = 2 \times 10^5$ et $\omega_{AO} = 50$rad/s soit $f_{AO} = 8$Hz On se place dans le cadre du fonctionnement idéal de l'AO : $i_+ = i_- = 0$.

La rétroaction est constituée d'une boucle avec un pont diviseur de tension : la tension de sortie s et e_- sont reliées par la relation : $e_- = \frac{R_1}{R_1+R_2}s$.

On identifie dans ce cas $A(p) = \frac{\mu_0}{1+p/\omega_{AO}}$ et $B(p) = \frac{R_1}{R_1+R_2}$, d'où :

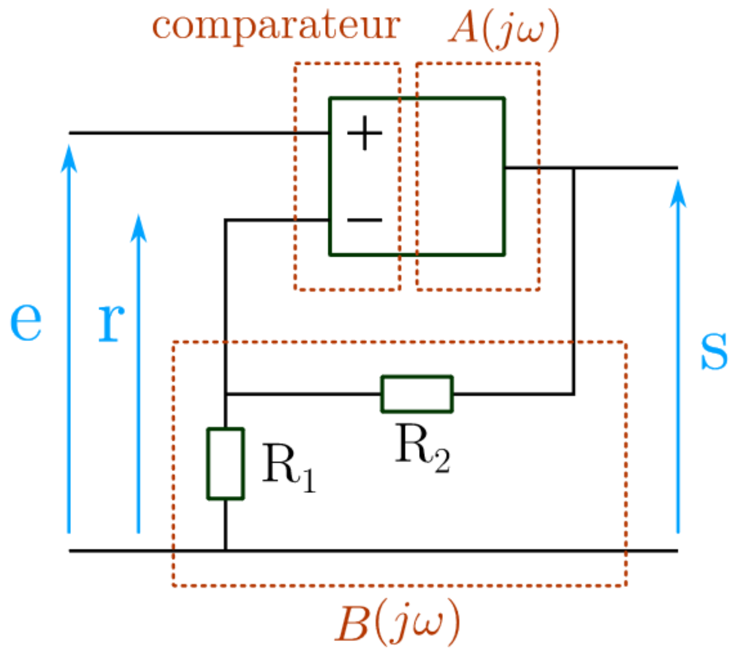


FIGURE 4 – *Schéma de l'amplificateur non inverseur, source* `electronique.aop.free.fr`

$$
\begin{aligned}
H(p) &= \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \\
&= \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1+R_2} + p/\omega_{AO}} \\
&= \frac{s(p)}{e(p)} \\
\implies s &= \frac{\mu_0 e}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1+R_2} + p/\omega_{AO}} \\
&\approx \frac{R_1+R_2}{R_1} e
\end{aligned}
$$

La dernière ligne n'est valable que dans la mesure où $1 + p/\omega_{AO}$ est négligeable devant $\frac{\mu_0 R_1}{R_1+R_2}$, ce qui est valable aux basses fréquences. On retrouve le résultat que l'on aurait obtenu pour un AO idéal avec les lois de l'électrocinétique.

> **On a modifié les caractéristiques de l'AO en réalisant le bouclage : la fonction de transfert n'est plus la même. Est-ce que c'est la seule chose qui a changé ?**

2 Conséquences de la rétroaction

2.1 Gain et bande passante

Observation : Dans le cas précédent, on peut simplifier notre étude pour avoir une estimation du gain plus simplement, en effet, comme on l'a dit dans la limite où le gain en chaîne directe A est grand on a $H \simeq \frac{1}{B}$ En d'autre terme, le gain du système bouclé ne dépend plus que de la rétroaction. On a donc finalement un gaind de

$$H_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \simeq 100$$

En choisissant $R_1 = 1\,\mathrm{k}$ et $R_2 = 100\,\mathrm{k}$. Ainsi le gain à été diminué d'un facteur 2000,par rapport au gain de l'AO initial. La rétroaction a fortement diminuer le gain. Cependant, la nouvelle fréquence de coupure est maintenant autour de $f_0 = 16\,\mathrm{kHz}$. On a donc gagné en bande passante. On dit que produit le gain bande passante est conservé. **Attention :** Ceci n'est valable que pour des systèmes d'ordre 1. C'est à dire dans notre cas ici, mais ce n'est généralisable qu'à des système d'ordre 1 avec le calcul que l'on vient de faire : Dans le cas général, la fonction de transfert que on vient de trouver s'écrit :

$$H = \frac{H_0}{1 + p/\omega_0} \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{\mu_0}{1 + B\mu_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \omega_{AO}(1 + \mu_0 B)$$

On a donc le produit gain bande passante :

$$H_0\omega_0 = \frac{\mu_0}{1 + B\mu_0}\omega_{AO}(1 + \mu_0 B) = \mu_0\omega_{AO}$$

2.2 Réponse à un échelon

On repart de l'expression de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{H_0}{1 + p/\omega_0} \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{\mu_0}{1 + B\mu_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \omega_{AO}(1 + \mu_0 B)$$

On en déduit :

$$(1 + p/\omega_0)s = H_0 e$$

ce qui donne, en passant dans le domaine temporel :

$$s + \frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = H_0 e \iff \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0 s = \omega_0 H_0 e$$

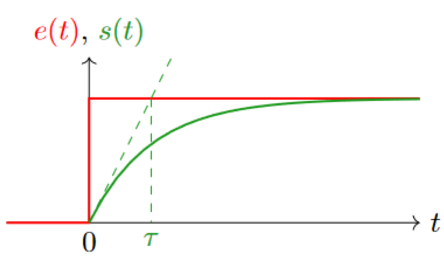
En se rappelant que multiplier par p dans le domaine de Laplace revient à dériver dans le domaine temporel. Ici on peut résoudre dans le cas homogène (sans second membre) :

$$s(t) = s_0 \exp(-\omega_0 t)$$

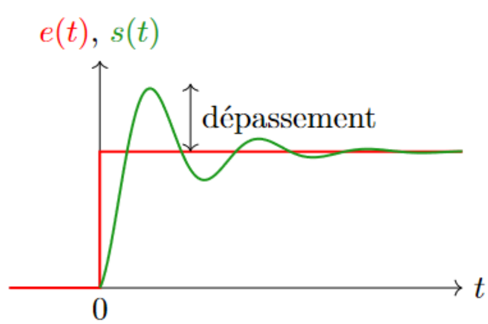
Ainsi on peut faire apparaître un temps caractéristique $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ L'expression de e dans le domaine temporel est :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e_0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On peut en déduire la réponse du système en supposant que s est continue à $t = 0$.



(a) *Réponse d'un système d'ordre 1 à un échelon en tension.*



(b) *Réponse d'un système d'ordre 2 à un échelon. Merci Léo Mangeolle pour ces 2 figures.*

Dans le cas de l'ampli non inverseur, le temps de réponse a grandement été réduit car on a augmenté la pulsation de coupure.

Mais pour un système d'ordre 2, augmenter la pulsation de coupure n'est pas forcément une bonne chose : un dépassement peut arriver, et dans ce cas des oscillations apparaissent. Ces oscillations ne sont pas souhaitables dans un régulateur de vitesse sur l'autoroute par exemple. Il y a donc un compromis à faire entre baisser le temps de réponse et les oscillations, pour les systèmes d'ordre 2 ou plus.

On a vu qu'un système bouclé pouvait s'écrire avec une fonction de transfert et si on prend le cas d'un passe bas d'ordre 2 on :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

— Régime Amorti apériodique $Q < 1/2$
— Régime critique $Q = 1/2$
— Régime pseudo périodique $Q > 1/2$

Si le temps le permet on montre le moteur asservi pour montrer les dépassements (facultatif)

2.3 Sensibilité

Si on considère le cas d'un voiture : mettons que la fonction $A(p)$ fluctue beaucoup au cours du temps (par exemple, si la route n'arrête pas de monter et de descendre alternativement : dans ce cas, à puissance du moteur constante, la vitesse des roues -grandeur de sortie- pourra prendre des valeurs très diverses et pas forcément souhaitables). D'où la question : est-ce que cela va affecter fortement la vitesse du véhicule, ou est-ce que l'asservissement est suffisamment performant pour que la vitesse ne bouge quasiment pas ?

Aussi on considère que la chaîne directe fluctue de ΔA (mais pas le retour) :

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\frac{A+\Delta A}{1+(A+\Delta A)B} - \frac{A}{1+AB}}{\frac{A}{1+AB}} = \frac{\Delta A}{A(1+(A+\Delta A)B)} \simeq \frac{\Delta A}{A(1+AB)}$$

L'asservissement réduit ainsi les perturbation. Notamment si on prend un gros gain comme on a fait tout à l'heure pour l'amplificateur non inverseur, $1 + AB = 2000$ donc même si on a une très grosse variation du gain direct : $\Delta A/A = 1$ (c'est énorme) la variation en boucle fermé sera beaucoup plus faible 0.05

On a ainsi vu les contrréaction négative qui permettent d'asservir un système, nous allons maintenant discuter

3 Oscillateurs

3.1 Stabilité

On s'est limité pour l'instant à des rétroactions négatives : on cherchait à compenser une différence pour apporter une correction, mais une fois que la valeur est corrigée, on ne fait plus rien.

Ici, on effectue une rétro-action positive :

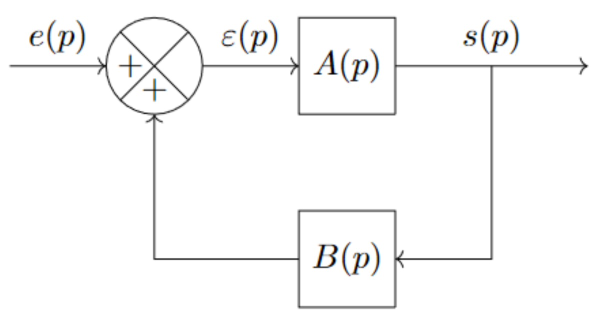


Figure 6 – *Schéma bloc d'une rétroaction positive. Merci Léo Mangeolle encore.*

La fonction de transfert du système s'écrit alors :

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)\times\epsilon(p)}{(1-A(p)B(p))\epsilon(p)} = \frac{A(p)}{1-A(p)B(p)}$$

Avec une rétroaction positive, on peut s'attendre à une divergence de la grandeur de sortie : on doit savoir si le système est stable. Pour cela, on regarde ce qu'il se passe lorsque la tension d'entrée est nulle :

$$(1 - A(p)B(p))s(p) = A(p)e(p) = 0$$

Le système est-il stable ? Est-ce que de petites perturbations vont être amplifiées et diverger ?

En repassant dans le domaine temporel, on obtient une équation différentielle dont les solutions s'écrivent :

$$s(t) = \sum_i a_i e^{p_i t}$$

où les p_i sont les racines du polynome en p : $P(p) = 1 - A(p)B(p)$.

On en déduit la condition de non divergence suivante : la partie réelle des racines P doit être négative ou nulle.

Ainsi ce qui va nous intéresse c'est $H_{FTBO} = A(p)B(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte. Pour représenter cela on utilise le critère de Nyquist. On trace dans le plan complexe $|H|\sin(\phi) = f(|H|\cos(\phi)$ en envoyant des sinus en entré. L'idée est la suivante : les points qui étaient initialement à gauche de l'axe des ordonnée reste à gauche de l'image de la droite des ordonné par la fonction H_{FTBO} (parce que la fonction est "gentille"). Or en sondant notre système avec des sinus on l'a exactement sondé sur l'axe des ordonné. Attention il est important d'orienter la courbe. Ainsi si on entoure le point (0,1) le système sera instable :

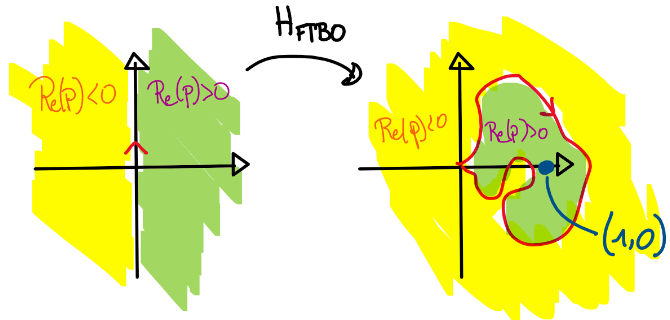


FIGURE 7 – *CExplication de Nyquist(avec ce que j'ai compris des explications de Léo). Ici c'est un cas instable. Il est à noté que pour une fonction de transfert la courbe est symétrique en générale*

3.2 Critère de Barkhausen

Le critère de Barkhausen permet de délimiter à partir de quel moment on passe d'une situation stable à instable, c'est à dire telle que les pôles passent de partie réelle positive à négative. On cherche donc les racine de partie réelle nulle de $1 - A(p)B(p)$. Cela revient à prendre les racine de type imaginaire pur. C'est un bon moment pour repasser dans les notation physiques : $p = j\omega$. **Attention :** c'est pas aussi simple que cela, on a changer de base de représentation, mais c'est plus concret maintenant, et les fonction de transfert sont identique. La condition de de Barkhausen est donc :

$$A(j\omega)B(j\omega) = 1$$

Ici il y a deux information, une sur le module et l'autre sur la phase ! les deux doivent être vérifié. **Interprétation :**

$$H = \frac{1}{1 - AB} = A\sum_k (AB)^k$$

AB est donc un terme d'amplification qui doit être en phase pour avoir des "interférences constructives" comme dans un fabry pérot.

3.3 Application oscillateur de Wien

Sur le schéma, on identifie la chaîne directe comme le filtre passe-bas d'ordre 2, le filtre de Wien. Sa fonction de transfert est :

$$A(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + (j\omega RC)^2}$$

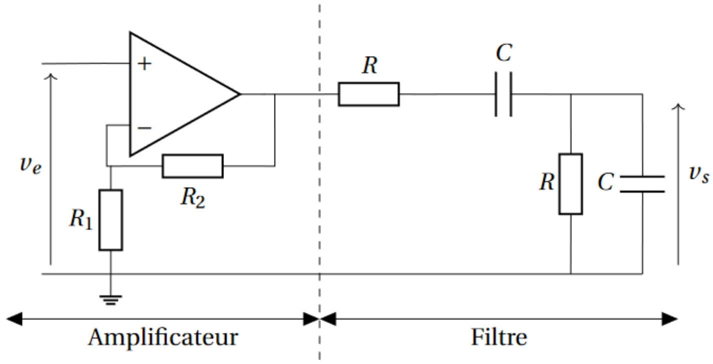


FIGURE 8 – *Schéma du montage de l'oscillateur de Wien.*

La boucle de retour est constituée d'un amplificateur non-inverseur de fonction de transfert :

$$B(j\omega) = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

En somme,

$$AB(j\omega) = \frac{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}{1 + \frac{j}{3}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

en posant $\omega_0 = 1/RC$.
L'application du critère de Barkhausen sur l'amplitude donne la condition $\omega = \omega_0$ pour voir des oscillations.

On peut tester expérimentalement le critère de Barkhausen avec une boîte à décades.

En fait, le critère de Nyquist montre que c'est le fait d'entourer le point qui est important pour osciller : on peut largement dépasser le critère de Barkhausen. A ce moment là, il y a de plus en plus de fréquences amplifiées, et les oscillations ne sont plus linéaires. **Important :** Pour de grande valeur de R_2 on observe que le signal n'est plus sinusoïdale. Mais je sais pas l'expliquer...

3.4 Ouverture sur les laser qui sont l'objet fondamental de cette lecon non ?

piou piou

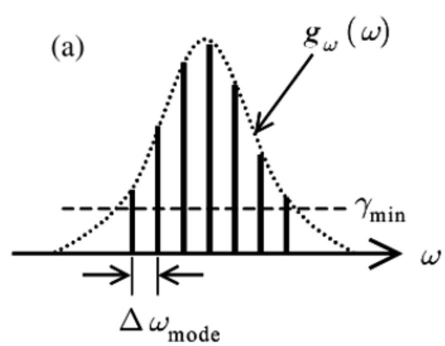


FIGURE 9 – *Tout est là : l'enveloppe correspond à l'émission stimulé avec elargissement Doppler, le peigne de Dirac correspond aux mode de résonnance de la cavité laser. Dépassé un seuil (critère de Barkhausen), on a un signal amplifié : le laser*

Le milieu amplificateur du laser est l'analogue de l'ampli non inverseur de l'oscillateur à pont de Wien. L'amplification est réalisée à l'aide d'un inversion de population : on excite les atomes vers un niveau d'énergie E_3, ils relaxent vers le niveau E_2. Dans ce niveau, soit ils relaxent bers le niveau E_1 (émission spontanée), soit ils subissent une émission stimulée, et retournent au niveau E_1. Le fait d'avoir beaucoup d'émission stimulée est analogue à avoir un fort gain. Ce processus ne sélectionne *a priori* aucune longueur d'onde ; en pratique, les niveaux d'énergie sont discrets, donc des longueurs d'ondes sont privilégiées. Si on ne prend pas en compte la sélection de longueur d'onde, on a toujours une certaine largeur spectrale due à l'effet Doppler.

L'analogue du filtre est une cavité Fabry-Pérot. Si le filtre de Wien a un facteur de qualité de 1/3, une cavité Fabry-Pérot a un facteur de qualité de plusieurs dizaines de milliers. C'est elle qui sélectionne les longueurs d'onde. Elle est très sélective : la largeur spectrale est de 0.002nm, à cause de la dilatation thermique de la cavité. Des lasers stabilisés ont une largeur spectrale de... 1×10^{-12} nm ! !

4 Conclusion

Les rétroaction permettent de dégager deux types de systèmes : les systèmes stables (ou que l'on veux stable), avec asservissement. Ceux-la sont extrêmement utiles en ingénierie, dans l'industrie, puisqu'ils permettent de commander automatiquement une grandeur. On recherche alors précision, rapidité, non dépassement,... Les autres sont les systèmes instables, qui peuvent se mettre à osciller. La non divergence des oscillations est due aux limitations des appareils que l'on utilise, que l'on ne prend pas en compte dans les modélisations. On recherche alors la stabilité de la fréquence de résonance.

5 Annexe

Bonus : différence entre TF et TL : "La TF et la TL diffèrent par leur base de projection : en TF, ce sont les exponentielles oscillantes et en TL, ce sont les exponentielles oscillantes amorties causale, nulles à $t < 0$. De plus, la TF n'est définie que pour des fonctions intégrables et la TF réciproque n'existe que pour les fonctions de carré intégrable.Dans une application d'automatique où les signaux sont plutôt des échelons ou des rampes, la transformée de Fourier diverge ou est une distribution. Mais avec l'exponentielle décroissante, la TL est définie et régulière pour un plus grande classe de fonctions ("fonction gentille multipliée par exponentielle croissante"). Avec la TL, on peut s'intéresser à la valeur initiale et au régime transitoire avec les théorèmes de valeur initiale. Mais on peut aussi s'intéresser au régime transitoire avec en TF avec les fonctions de Green."pascal