
ASPECTS ANALOGIQUE ET NUMÉRIQUE DU TRAITEMENT DU SIGNAL. ETUDE SPECTRALE

Niveau

Commentaires du jury

- 2017 : Ce n'est pas une leçon sur le filtrage qui est attendue ; il ne faut pas se réduire à l'étude d'un ou plusieurs filtres électroniques.
- 2016 : Cette leçon ne peut en aucun cas se réduire à la simple étude de la théorie de Fourier.
- 2015 : Cette leçon ne doit pas se réduire à un catalogue de systèmes de traitement analogique du signal. Elle peut aussi mettre en exergue des méthodes numériques enseignées notamment dans les programmes de CPGE.

Bibliographie

—

pré-requis

- Décomposition en série de Fourier

Expériences

- Approximation creneau avec des séries de Fourier : anim geogebra
- Critere de Shannon : anim geogebra

Table des matières

1 Etude spectrale d'un signal	2
1.1 Importance de la linéarité	2
1.2 La transformée de Fourier	2
1.3 Propriétés	4
2 Conversion analogique numérique	5
2.1 Echantillonnage	5
2.2 Quantification	8
2.3 Transformé de fourier numérique	8
3 Application du traitement du signal : exemple de la détection synchrone	9
3.1 Introduction au filtrage	9
3.2 Problème de la détection synchrone : modulation	9
3.3 Détection synchrone ou hétérodynage :	10

Introduction

La problématique de traitement du signal est omniprésente en physique expérimentale. Que ce soit pour transmettre et recevoir de l'information ou bien extraire une grandeur physique d'une expérience, il est nécessaire de traiter le signal brut produit par le système physique. En effet une partie de notre signal ne correspond pas forcément à ce que l'on cherche à caractériser.

Il existe deux manières d'acquérir un signal : la voie analogique, c'est par exemple un sismographe. Ou la voie numérique, c'est le cas la plupart du temps dans les systèmes que vous considérez tous les jours : vos smartphones. Aujourd'hui on va voir quelques aspects du traitement du signal et plus particulièrement avec un point de vue spectral, qui nous est permis par la linéarité des systèmes.

1 Etude spectrale d'un signal

1.1 Importance de la linéarité

On fait un circuit RC (il nous servira pour la détection synchrone)

On observe que si on lui envoie un échelon, le système répond avec un certain temps de réponse. Sa réponse n'est pas "évidente". En effet on sait que la sortie correspond à :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')e(t')dt' = (h * e)(t)$$

C'est le produit de convolution. Concrètement, c'est pas sympa à calculer et cela correspond à calculer la réponse de chaque "point" par la fonction de transfert. Cependant, si je mets un sinus, alors la sortie est exactement un sinus et de même fréquence!!

On peut modéliser notre système par une fonction de transfert linéaire, invariant dans le temps SLIT

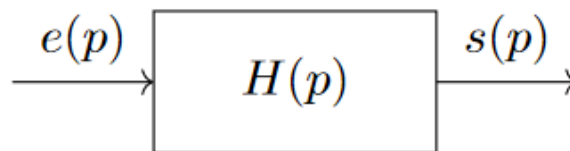


FIGURE 1 – Fonction de transfert

Un système est linéaire si pour une entrée $e_1 + \lambda e_2$ la sortie est $s_1 + \lambda s_2$.

Conséquence : Pour un système linéaire les composantes sinusoïdale du système ne se mélangent pas

1.2 La transformée de Fourier

L'idée est la suivante, On décompose notre signal sur une base de sinus, c'est à dire comme pour un vecteur on écrit : $s = a(1, 0, 0)^t + b(0, 1, 0)^t + c(0, 0, 1)^t$ mais on remplace les vecteurs de bases par des sinus. Pourquoi faire cela ? Comme le système est linéaire, on aura ça l'étudier sur les sinus et ensuite sommer chacune des composantes.

La question est : Est ce que c'est possible ? Vous connaissez déjà la réponse : la décomposition en **série de Fourier**. La décomposition en série de Fourier s'applique pour des signaux périodiques ici de fréquence $f_0 = \frac{1}{T}$

Code pour visualiser cela : code carre

Le problème c'est qu'on a pas des signaux périodiques, en générale, déjà parce qu'ils sont finis ! Il faut imaginer que les signaux périodiques sont une partie de l'espace dans lequel les fonctions vivent, c'est la même chose que si je considère un plan, un vecteur hors du plan ne peut pas être décomposé comme un vecteur du plan. Il va falloir choisir une nouvelle base, qui elle permet de décrire plus de signaux.

$$S_\tau(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n2\pi t}{\tau} + b_n \sin \frac{n2\pi t}{\tau} \right)$$

$$S_\tau = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n2\pi f_0 t + b_n \sin (n2\pi f_0 t))$$

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau S_\tau \cos \frac{n2\pi t}{\tau} dt$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau S_\tau \sin \frac{n2\pi t}{\tau} dt$$

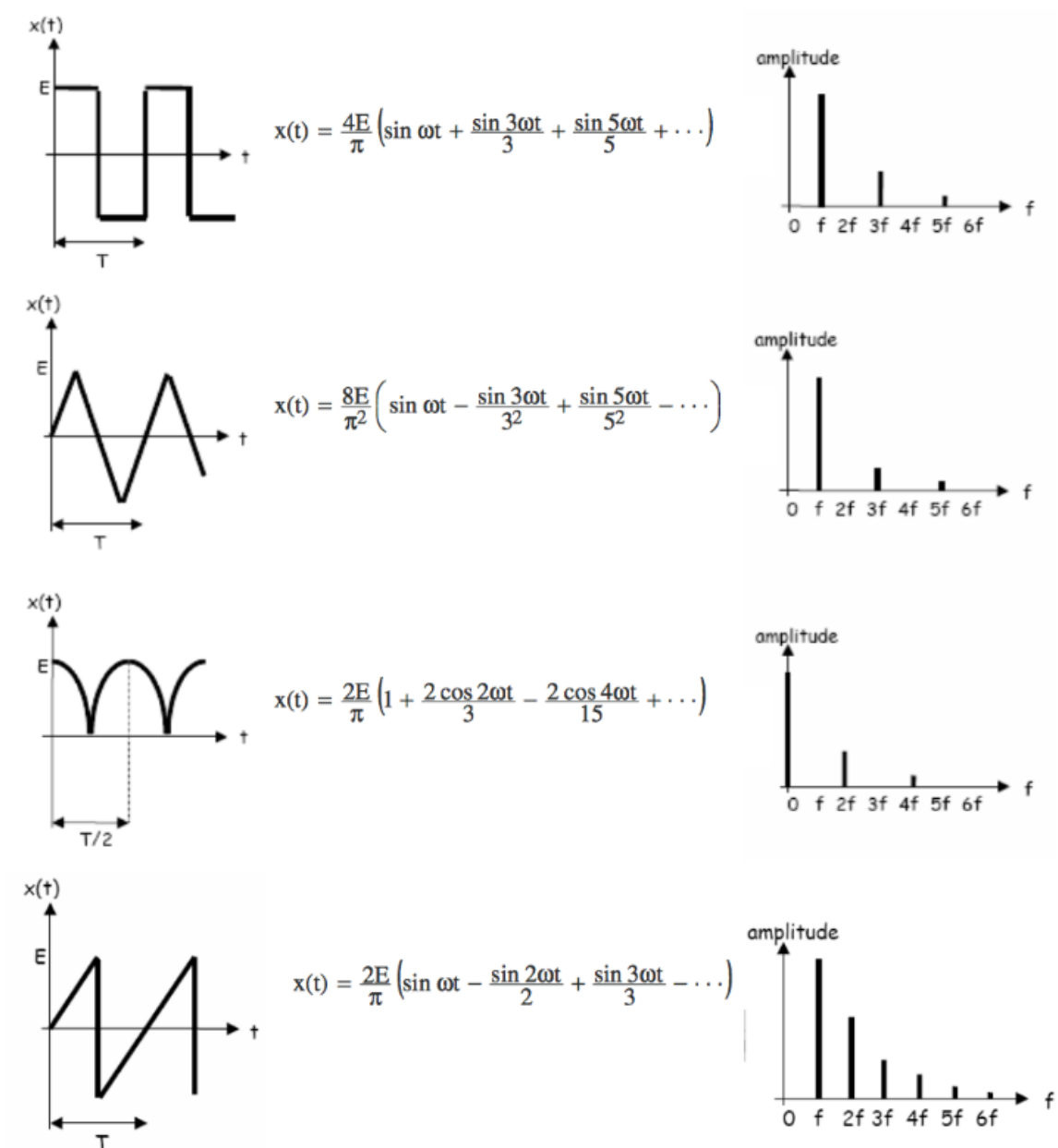


FIGURE 2 – Pour avoir d'autre signaux en réserve

On va alors utiliser la base des exponentiel complexe $e^{2i\pi ft}$. Fondamentalement on s'en fiche de la base que l'on choisit, l'important c'est que ce soit une base. Cette base elle est intéressante parce qu'elle ressemble beaucoup à la base des sinus et des cosinus que l'on a bien compris.

Physiquement, on interprète l'argument f comme une fréquence, qui est la grandeur duale du temps.

$$\hat{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-2i\pi ft} dt$$

La transformé de Fourier s'applique aux fonction de **carré intégrable**. Tout comme un sinus infini n'a pas de réalité physique car il est d'énergie infini, c'est la cas aussi pour les exponentielle de notre base. Ce sont des outils qui nous permettent de construire un signal réelle. Une image ce ceci correspond à imaginer un jeu vidéo dans le lequel il y a une plate forme complètement entourer de lave. Le programmeur il ne peut associer au personnage que des positions sur le sol, cependant, en choisissant une base cartésienne en bas à gauche dans la lave, il peut définir tout l'espace accessible par le personnage même si ces éléments de la bases ne sont pas dans l'espace accessible par le personnage. (c'est une image de moi, je sais pas ce qu'elle vaut)

Le module de $TF[s](f)$ donne donc l'amplitude du signal pour sa composante qui oscille à la fréquence f . La phase donne les déphasages mutuels entre les différentes composantes.

1.3 Propriétés

Considérons un signal périodique, par exemple issu d'un diapason : $S(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, on peut calculer la TF (pas trop en vrai mais on le fait quand même) : $\hat{S}(f) = \frac{A}{2i}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$

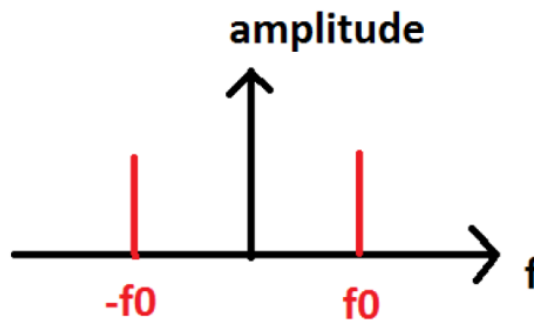


FIGURE 3 – tf diapason

On remarque qu'il y a des fréquences négatives... Ca n'a pas trop de sens pour nous. Cependant, pour un signal réelle, alors sa transformé de fourier est hermitique, donc il y a les même information fréquentielle à gauche et à droite de 0 pour les signaux physiques.

Propriétés :

— La TF c'est linéaire (heureusement) :

$$TF(af(t) + g(t)) = aTF(F) + TF(g)$$

— Produit de convolution. On a vue que la réponse des SLIT était des produit de convolution mais qu'il sont pas facile à calculer : La TF nous sauve!!

$$TF(h * e) = TF(h) \times TF(e)$$

— Enfin on donne une propriété qui nous sera utilise plus tard :

$$TF(\text{III}_{\tau}(t))(f) = \text{III}_{1/\tau}(f)$$

— Multiplication par un scalaire : $s(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} \hat{s}\left(\frac{f}{a}\right)$

- Dualité temps-fréquence : Qualitativement, si on regarde le signal à t , on n'a aucune info sur sa fréquence. Si on ne regarde qu'une fréquence du signal, on n'a aucune idée de quand il a lieu dans le temps. C'est lié à la relation d'incertitude temps fréquence, qui relie les écarts-types des 2 signaux en fréquence et en temporel :

$$\sigma_t \times \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi}$$

Avec : $\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt$ et égalité si les signaux sont gaussiens.

2 Conversion analogique numérique

On considère dans cette partie un signal analogique $s(t)$. On va aborder les étapes de sa conversion analogique numérique. Par exemple l'acquisition d'un signal avec un micro, le micro ressort un signal analogique qui est ensuite encodé par la carte d'acquisition

2.1 Echantillonnage

Une étape importante est l'échantillonnage :

Echantillonnage : c'est une opération consistant à relever la valeur de $s(t)$ à des instants donnés. Habituellement, il est régulier, c'est à dire que les échantillons sont prélevés à des intervalles de temps réguliers $\tau = t_{i+1} - t_i$. La fréquence d'échantillonnage est alors : $f_e = \frac{1}{\tau}$.

On comprend que pour restituer au mieux un signal, il est bon d'avoir la fréquence d'échantillonnage la plus grande possible. *Montrer l'animation geogebra*. Néanmoins, on peut vite être limité par le volume de données à acquérir, ou la rapidité de la mesure.

Version visuelle du critère de Shannon : Cette vidéo, c'est comme les jantes des roues de voiture qui vont vite.

Mathématiquement, l'échantillonnage de $s(t)$ se traduit par le produit avec la fonction peigne de Dirac de fréquence f_e :

$$\text{III}_{\tau}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - k\tau)$$

Montrer sur un dessin que le produit des 2 fait bien un échantillonnage.

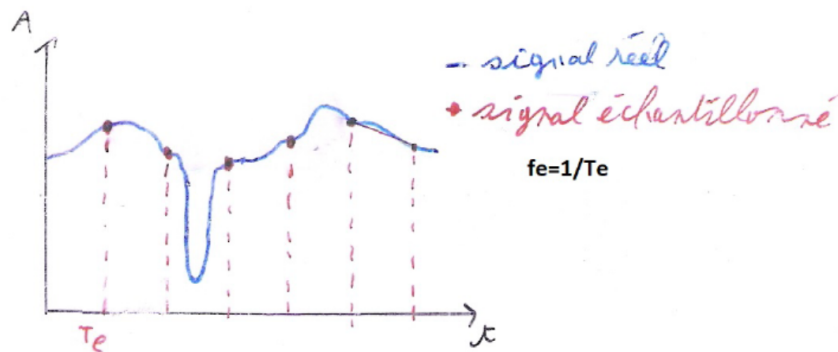


FIGURE 4 – Echantillonnage

Le signal échantillonné est alors :

$$s(t) \text{III}_{\tau}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k\tau)$$

Dans le domaine fréquentiel :

Le signal échantillonné est discret : il est donc périodique dans le domaine fréquentiel. Pour le voir, on calcule sa tf :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\underbrace{s(t) \text{ III } \tau(t)}_{x_d(t)}\right)(f) &= \hat{s}(f) \otimes \frac{1}{\tau} \text{ III }_{1/\tau}(f) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} du \hat{s}(f-u) \frac{1}{\tau} \delta\left(u - \frac{k}{\tau}\right) \\
&= \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}\left(f - \frac{k}{\tau}\right)
\end{aligned}$$

A quoi ca ressemble ? On peut faire un dessin : on dessine le terme de la somme pour $k = 0$, puis $k = 1, -1, \dots$. On obtient la TF de s reproduite une infinité de fois, espacées de f_e .

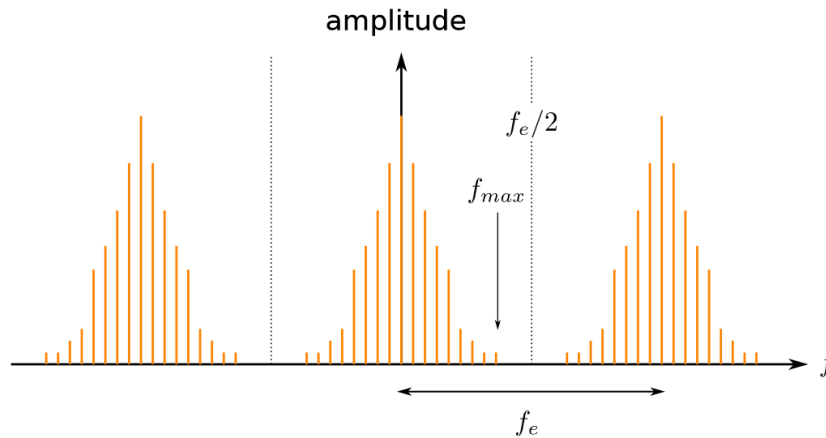


FIGURE 5 – TF Echantillonné (les éléments)

On en déduit le **théorème d'échantillonnage**, proposé par Shannon en 1949 :

Si la transformée de Fourier est à support borné dans $[-B, B]$, on peut reconstruire $s(t)$ à partir de ses échantillons pris tous les τ , sous condition que :

$$f_e = \frac{1}{\tau} \geq 2B$$

Graphiquement, c'est clair : si le signal s contient des fréquences supérieures à $f_e/2$, les TF périodiques vont se recouvrir et être illisibles : on parle de recouvrement de spectre, spectre aliasing en anglais. Pour s'en passer, on applique des filtres anti-repliement : c'est un filtre passe bas, idéalement d'ordre infini et de fréquence de coupure $f_e/2$, appliqué directement à s . Attention, c'est pas magique, on perd évidemment de l'information sur s .

Mais ca se voit aussi dans le domaine temporel, comme sur geogebra.

Remarques :

- Reconstruction du signal : calcul sur la photo. On effectue un filtrage passe-bas avec le sinc.
- L'opération de reconstruction est non causale : il faut avoir tout enregistré pour reconstruire.
- En pratique, on utilise un échantillonneur bloqueur suivi d'un lissage (filtre RC + diode).
- On a utilisé un support temporel infini...

Echantillonnage réel (fini) :

La durée d'observation D_0 est finie en pratique. Le nombre d'échantillons N est donné par : $N = \lfloor \frac{D_0}{\tau} \rfloor$. Le calcul que l'on fait en vrai est donc celui de la TF de :

$$\Pi_{D_0}(t) \times s_d(t)$$

On rajoute encore un produit dans le domaine temporel : on aura donc une convolution en fréquence. La TF d'un créneau de largeur D_0 fait un $\text{sinc}(\pi D_0 f)$, auquel est donc convolué $\hat{s}_d(f)$. La conséquence de la durée finie d'observation est donc l'élargissement spectral en $1/D_0$.

Reconstruction du signal:

$$\begin{aligned}
 & F^{-1} \left(T_c \prod_{[-F_c/2, F_c/2]} (V) x_d(V) \right) \\
 &= \text{sinc}(\pi F_c t) \otimes x_d(t) \\
 &= \int d\tau \text{sinc}(\pi F_c (t - \tau)) x_d(\tau) \\
 &= \int d\tau \text{sinc}(\pi F_c (t - \tau)) \sum_{h \in \mathbb{Z}} \delta(t - hT_c) x(t) \\
 &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} \int d\tau \text{sinc}(\pi F_c (t - \tau)) \delta(t - hT_c) x(t) \\
 &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} x(hT_c) \text{sinc}(\pi F_c (t - hT_c)) \\
 &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} x(hT_c) \text{sinc}(\pi (F_c t - h))
 \end{aligned}$$

FIGURE 6 – Cours de traitement du signal.

2.2 Quantification

L'opération d'échantillonnage correspond à discrétiser le pas de temps. On a quand même supposé que la valeur échantillonnée pouvait prendre n'importe quelle valeur : c'est pas vrai en pratique. La valeur mesurée est codée sur un certain nombre de bits : le nombre de valeurs qu'elle peut prendre est fini. Nous allons voir maintenant comment passer d'un signal s continu au signal correspondant quantifié $\underline{s}$.

Les valeurs prises par $\underline{s}$ sont quantifiées et s'écrivent sous la forme $n \times q$ où q est le pas de quantification et n un entier.

Exemple : si on code sur 12 bits, le signal quantifié peut prendre 2^{12} valeurs.

Si l'on acquiert des valeurs entre M et $-M$ (on le fait en symétrie parce que c'est souvent le cas quand même), le pas de quantification vaut :

$$q = \frac{2M}{2^{12} - 1}$$

La règle de quantification est alors :

$$\text{Si } \underline{s} \in [(n - 1/2)q, (n + 1/2)q[, \text{ alors } \underline{s} = nq$$

Faire un dessin.

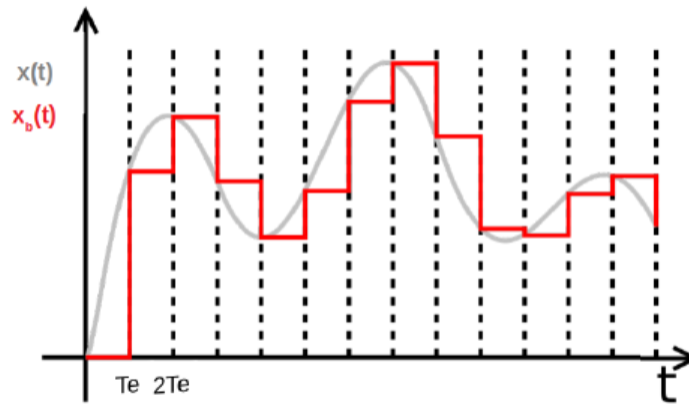


FIGURE 7 – Quantification

Perte d'information : on perd nécessairement de l'information lors d'une opération de quantification. La valeur "vraie" de s est située dans un intervalle fini. On associe à cette incertitude un "bruit d'échantillonnage" ϵ_q , qui suit une loi uniforme dans cet intervalle :

$$s = \underline{s} + \epsilon_q$$

Avec cette modélisation, on peut remonter à l'espérance et la variance de chaque signal :

$$\mathbb{E}(s) = \mathbb{E}(\underline{s}) \text{ et } \mathbb{V}(s) = \mathbb{V}(\underline{s}) + \frac{q^2}{12}$$

L'opération de quantification induit un bruit.

On peut voir son influence sur Latis-pro.

2.3 Transformé de fourier numérique

On a abordé l'échantillonnage temporel et la quantification du signal : leurs mises en places respectives nécessitent des précautions. Dans le cas de l'échantillonnage, on a vu que la durée finie d'observation provoquait l'élargissement des pics, ce qui limite la résolution en fréquence de la TF. Il devient intéressant de limiter le nombre de fréquences calculées. On parle d'**échantillonnage conjoint en temps et en fréquence**.

Temps		Fréquence
discret, pas τ	$\longrightarrow$	Périodique $f_e = 1/\tau$ $\rightarrow$ on discrétise en prenant 1 pts tout les D_0 pour éviter le recouvrement.
Périodique de période D_0 $\rightarrow$ contient $\frac{D_0}{\tau} = D_0 f_e = N$ pts	$\longleftarrow$	$\rightarrow \frac{f_e}{1/D_0}$ pts

TABLE 1 – *Principe de l'échantillonnage conjoint en temps et en fréquence. Le même critère s'applique pour le nombre de points dans chaque domaine.*

Pour réaliser cette opération, on introduit la TF discrète en temps et en fréquence :

$$S[n] = \sum_{k=0}^{N-1} s[k] e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \text{ pour } n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

telle que :

$$s[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S[n] e^{2i\pi \frac{kn}{N}}$$

Alors

$$S[n] = \hat{s}\left(\frac{n}{\tau}\right)$$

Remarques :

- L'utilisation de cette TF discrète à N points repose sur l'hypothèse que $s(t)$ est un signal périodique de période D_0 . Si ce n'est pas le cas : élargissement spectral en sinc de largeur D_0 .
- L'implémentation récursive de cette méthode porte le nom d'algorithme de Fast Fourier Transform (FFT), proposé en 1965 par Cooley et Turkey. Sa complexité en $O(N \log N)$ en font un algorithme très efficace toujours utilisé aujourd'hui.

3 Application du traitement du signal : exemple de la détection synchrone

3.1 Introduction au filtrage

Filtrage de Fourier :

On peut vouloir filtrer parce qu'il y a du bruit. Avec le filtrage de Fourier, on peut dé-tramer fourier. Attention c'est de TF spatiales.

Ici la trame correspond à du bruit qui ne nous intéresse pas par exemple. Cela permet de voir visuellement un filtrage. (ne pas trop s'y attarder sous partie tampon ?)

3.2 Problème de la détection synchrone : modulation

L'objectif de cette partie est de voir comment utiliser les outils développés pour comprendre le fonctionnement d'un radar Doppler. On se met à la place d'un opérateur qui veut mesurer la vitesse relative d'un objet. C'est le même principe utilisé par les radars, les échographies, la mesure de vitesse radiale d'astres. On fixe un émetteur ultrason sur l'objet qui émet une onde ultrasonore à la fréquence f_{40kHz} . Si cet émetteur se rapproche d'un récepteur à la vitesse v , la fréquence détectée par le récepteur vaut, par effet Doppler :

$$f_r = \frac{c}{c-v} f_e$$

Pour une vitesse v de l'émetteur de l'ordre de quelques cm/s (grandeurs du dispositif de TP), beaucoup plus faible que la vitesse du son $c \simeq 340m/s$, on peut alors développer cette expression au premier ordre et exprimer l'écart en fréquence du à l'effet Doppler :

$$\delta f \simeq \frac{v}{c} f \ll f$$

ODG : pour $v = 1m/s$, $\delta f/f = 3 \times 10^{-5}$, $\delta f = 1Hz$. Cet écart en fréquence est trop faible pour pouvoir distinguer f et $f_{mesurée}$ sur un oscilloscope, qui peut mesurer jusqu'à $\delta f/f = 10^{-3}$ (selon Jolidon). Nous allons alors réaliser une détection synchrone afin de mesurer δf

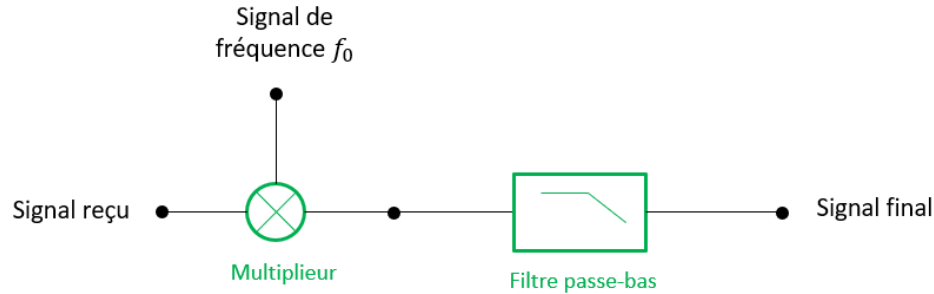


FIGURE 8 – Détection synchrone

Remarque : C'est en réalité un hétérodynage car on ne multiplie pas le signal avec un signal de même fréquence exactement.

3.3 Détection synchrone ou hétérodynage :

Pour gagner en résolution sur le spectre en fréquence du signal, tout en évitant le repliement lié à une fréquence d'échantillonnage trop faible, on translate le spectre du signal dans un domaine de plus basse fréquence. Pour cela on multiplie le signal par un cosinus. **Attention** c'est une opération non linéaire, et en effet on a au moins besoin de cela pour déplacer des fréquences !!

En effet, on utilise le fait que le produit de cosinus donne :

$$\cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi(f_0 + \delta f)t) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi \delta f t) + \cos(2\pi(2f_0 + \delta f)t))$$

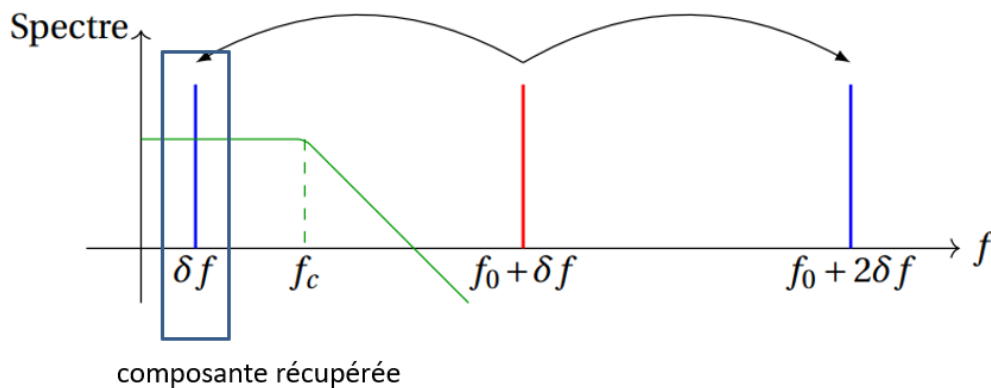


FIGURE 9 – Principe de la Détection synchrone

En appliquant le filtre on coupe les hautes fréquences. La visualisation spectrale est ici bien pratique. De plus on peut vraiment le voir avec les TF puisque la fonction de transfert s'applique sur des exponentielles complexes... La passe bas qu'on observe en faisant le diagramme de Bode correspond (pour un système linéaire invariant dans le temps) au rapport de la transformée de Fourier du signal de sortie sur celui du signal d'entrée.

En fait ce qu'on faisait en étudiant la réponse du filtre à une excitation harmonique c'était de l'analyse de Fourier cachée.

Application : filtre anti-repliement : Si le signal analogique possède des fréquences supérieures, il faut faire précéder l'échantillonneur d'un filtre analogique passe-bas anti-repliement, dont la fréquence de coupure est la fréquence de Nyquist, de manière à supprimer toute fausse fréquence. Dans la plupart des cas, ce filtrage est indispensable ; en effet le signal peut soit intégrer des hautes fréquences inutiles pour son exploitation ou être superposé à un bruit qui augmente fortement la fréquence maximale

On a ici choisi de filtrer de manière analogique (avec un RC). On aurait également pu choisir de filtrer numériquement. En effet on a dit que la réalisation technologique d'un filtre de grand ordre peut être ardue, ainsi un filtre numérique permet de s'affranchir de toutes ces considérations pratiques. Un filtre numérique est néanmoins limité par la vitesse du processeur qui l'exécute. Il s'effectue également sur un signal numérique et ainsi les problèmes d'échantillonnage évoqués précédemment rentrent alors en jeu. Les filtres numériques sont utilisés dans la plupart de l'électronique que l'on utilise quotidiennement comme une télévision où un téléphone portable.

Faire la manip Doppler

La détection synchrone peut être très utile quand il y a du bruit aussi

Conclusion

On a vu dans cette leçon que l'analyse de Fourier était un outil puissant pour l'étude des signaux. Autant d'un point de vue théorique que pratique. Nous avons pu extraire le critère de Shannon, à respecter pour l'acquisition d'un signal. C'est vraiment un résultat important car il nous sert tous les jours en TP!! On a compris comment fonctionnait un filtre et que leur utilisation permet aussi bien d'extraire une grandeur physique d'intérêt.

Remarquons que l'analyse de Fourier est d'importance capitale aussi d'un point de vue théorique, ou elle s'impose dans l'étude des équations **linéaires**.